
УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

УДК 517.977

МЕТОД КРОТОВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ГЛОБАЛЬНЫХ УЛУЧШЕНИЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧЕ МАКСИМИЗАЦИИ ВЕРОЯТНОСТИ ПОПАДАНИЯ В ЗАДАННУЮ ОБЛАСТЬ¹

© 2024 г. **М. М. Хрусталева^a**, **К. А. Царьков^{a, *}**

^aИПУ им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

*e-mail: k6472@mail.ru

Поступила в редакцию 27.09.2023 г.

После доработки 12.12.2023 г.

Принята к публикации 29.01.2024 г.

Подробно изложен итерационный метод глобального улучшения произвольно заданной программы управления нелинейной динамической системой, предложенный В. Ф. Кротовым. Обсуждаются различные варианты приложения метода Кротова к одной задаче стохастической вероятностной оптимизации.

Ключевые слова: метод Кротова, глобальное улучшение, вероятностный критерий

DOI: 10.31857/S0002338824050038, EDN: TEKZSK

KROTOV GLOBAL SEQUENTIAL IMPROVEMENT METHOD AS APPLIED TO THE PROBLEM OF MAXIMIZING THE PROBABILITY OF GETTING INTO A GIVEN AREA

М. М. Khrustaleva^a, **К. А. Tsarkov^{a, *}**

^aMoscow, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences RAS

*e-mail: k6472@mail.ru

In this paper we describe in detail the iterative method of global improvement of an arbitrary given control in a nonlinear dynamical system, proposed by V. F. Krotov. Then we discuss various options for applying the Krotov method to a problem of stochastic probabilistic optimization.

Keywords: Krotov method, global improvement, probabilistic criteria

Введение. Постановка задачи улучшения программы управления детерминированной нелинейной динамической системой относительно заданного функционала качества и метод ее решения были предложены в конце прошлого века в работах В. Ф. Кротова (см. [1]).

Проблема построения улучшений естественным образом возникает всякий раз при исследовании задачи оптимального управления, в которой решение (оптимальную программу управления) не удастся определить, исходя из необходимых условий оптимальности, например, в силу чрезмерной трудоемкости или неразрешимости соответствующей системы соотношений. В этом случае естественно перейти от задачи оптимизации к задаче построения последовательных улучшений некоторой заданной программы управления. С практической точки зрения такой переход означает потенциальный отказ от неизвестной оптимальной программы управления в пользу известной программы, возможно далекой от оптимальной, но более качественной, чем исходно заданная. Если улучшение качества управления оказывается

¹ Разделы 4–6 написаны К. А. Царьковым за счет средств Российского научного фонда (проект № 22-11-00042) в ИПУ РАН. <https://rscf.ru/project/22-11-00042>.

достаточно существенным, то этот переход можно считать целесообразным. С точки зрения теории экстремальных задач необходимые условия оптимальности заменяются на итерационную процедуру построения оптимизирующих последовательностей. С вычислительной точки зрения такой подход оказывается, как правило, значительно выгоднее в сравнении с численными процедурами разрешения соотношений, составляющих необходимые условия оптимальности, хотя и не гарантирует отыскание оптимального решения.

К хорошо известным методам построения (локально) оптимизирующих последовательностей относятся методы типа градиентного спуска. Отличительной особенностью процедуры, предложенной В. Ф. Кротовым, является нелокальность получаемых улучшений, т.е. построенное на каждом шаге новое, улучшенное, управление не обязано быть близко к управлению, построенному на предыдущем шаге, ни в смысле какой-либо нормы в пространстве допустимых управлений, ни в смысле значений оптимизируемого функционала качества. Отсюда вытекают основное достоинство и основной недостаток метода Кротова: зачастую он позволяет существенно улучшить качество управления за малое число повторных итераций, однако проанализировать при этом наличие сходимости и оценить ее скорость оказывается затруднительно.

В работах [2, 3] метод Кротова эффективно применялся при решении линейных задач оптимизации управления. Было показано, что для линейных задач характерно построение наиболее качественного улучшения уже за одну первую итерацию применения метода. Дальнейшие итерации вносят определенные корректировки в структуру улучшаемой программы управления, но на значениях функционала качества сказываются незначительно. При этом отмечалось, что ключевую роль играет линейность задачи по переменной состояния, в то время как переменная управления может входить в динамическую систему и в функционал качества нелинейным образом [3]. В недавней работе авторов [4] было показано, что то же самое имеет место и в случае приложения метода Кротова к решению стохастических задач оптимизации.

Основные идеи метода Кротова были существенно развиты в [5, 6] в направлении получения новых необходимых условий оптимальности в линейных и нелинейных задачах оптимального управления. Простейшие необходимые условия оптимальности вытекают непосредственно из концепции улучшения: если программа управления оптимальна, то ее строгое улучшение (в частности, методом Кротова) невозможно. В указанных публикациях также были тщательно исследованы взаимосвязи между такими свойствами процессов управления, как неулучшаемость относительно метода Кротова и экстремальность в смысле принципа максимума Понтрягина.

В статье авторы предполагают развить методологию построения глобальных улучшений Кротова в приложении к стохастическим задачам вероятностной оптимизации. С этой целью в разд. 2 и 3 формулируется сам метод Кротова и приводится его обоснование. Затем в разд. 4 и 5 выделяется класс задач, более широкий, чем полностью линейные по состоянию задачи, к которым метод Кротова может быть эффективно применен. В разд. 6 метод глобальных улучшений Кротова применяется к исследованию стохастических задач оптимизации с вероятностным критерием. Формулируется два различных подхода к решению. Эффективность и особенности применения этих подходов демонстрируются несколькими примерами в разд. 7.

Настоящая работа является продолжением исследований, проведенных в статье [4], где метод Кротова в его линейной реализации применялся для построения улучшений в задаче вероятностной оптимизации стохастической системы диффузионно-скачкообразного типа. При этом исходный вероятностный критерий качества заменялся его оценкой чебышевского типа. Как следствие, при построении улучшения относительно оценки отсутствовала возможность гарантировать такое же улучшение относительно исходного функционала вероятности. Здесь предлагается применять нелинейный метод Кротова непосредственно к оптимизируемому функционалу вероятности. С этой целью изучаемый класс задач сужен до стохастических систем диффузионного типа. Сравнение результатов, полученных двумя указанными способами, позволяет, по крайней мере в ряде частных ситуаций, ответить на поставленный в [4] вопрос об эффективности использования оценок чебышевского типа при решении задач вероятностной оптимизации и улучшения.

1. Постановка задачи улучшения. На интервале времени $[0; T]$ рассмотрим управляемую динамическую систему

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

где $u \in \mathcal{U} := \{u \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T]) : u(t) \in U \forall t \in [0; T]\}$, U — компакт в $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{L}_\infty^m([0; T])$ — пространство измеримых по Лебегу и существенно ограниченных m -мерных вектор-функций на отрезке $[0; T]$. Здесь и ниже символ $\forall$ означает выполнение условия для почти всех значений аргумента относительно меры Лебега. Будем предполагать, что отображение $f : [0; T] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо по x , а абсолютно непрерывное решение задачи Коши (1.1) однозначно определено на отрезке $[0; T]$ при любом $u \in \mathcal{U}$.

Пусть O_X — некоторое открытое множество в $\mathbb{R}^n$, на котором задана непрерывно дифференцируемая функция J , $C_X^t \subset O_X$ — множество достижимости системы (1.1) в момент времени $t \in [0; T]$ и $C_X := \bigcup_{t \in [0; T]} C_X^t$. Предположим, что исследуется оптимизационная проблема

$$J(x(T)) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}}. \quad (1.2)$$

Сформулируем задачу улучшения, согласованную с (1.2). А именно будем считать, что некоторое (не оптимальное) управление $\hat{u} \in \mathcal{U}$ уже задано, этому управлению соответствует траектория $\hat{x}(t)$ как решение задачи Коши (1) при $u = \hat{u}$, и качество данного управления численно характеризуется значением $J(\hat{x}(T))$. Требуется при этих предположениях построить новое управление $\tilde{u} \in \mathcal{U}$, которому соответствовала бы новая траектория $\tilde{x}(t)$ и для которого качество управления $J(\tilde{x}(T))$ удовлетворяло бы неравенству

$$J(\tilde{x}(T)) < J(\hat{x}(T)). \quad (1.3)$$

Смысл перехода от задачи оптимизации (1.1) — (1.2) к задаче улучшения (1.1) — (1.3) состоит в следующем. Как только в задаче улучшения будет описана процедура построения нового управления $\tilde{u}$ по произвольно заданному $\hat{u} \in \mathcal{U}$, ее многократное итерационное применение позволит находить минимизирующие последовательности в задаче (1.2). Естественно при этом пытаться строить процедуру улучшения так, чтобы разница между числовыми значениями в правой и левой частях (1.3) была по возможности больше.

Сформулируем один из допустимых подходов к решению задачи улучшения (1.1) — (1.3).

2. Метод Кротова. Обозначим через $\mathcal{AC}^n([0; T])$ пространство абсолютно непрерывных n -мерных вектор-функций на отрезке $[0; T]$. Пусть $\hat{u} \in \mathcal{U}$ — некоторая произвольная программа управления, а $\hat{x} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$ — соответствующее ей (единственное) решение задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \hat{u}(t)), \quad x(0) = x_0. \quad (2.1)$$

Пусть далее $\psi \in \mathcal{AC}^n([0; T])$ — решение линейной задачи Коши для сопряженной системы уравнений

$$\dot{\psi}(t) = -f_x(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))^T \psi(t), \quad \psi(T) = -J'(\hat{x}(T)), \quad (2.2)$$

где $J'(\hat{x}(T))$ — вектор-градиент функции J в точке $\hat{x}(T)$, а $f_x(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))$ — матрица частных производных (матрица Якоби) функции f по переменной x в точке $(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))$. И пусть, кроме того, $\alpha, \beta \geq 0$ — некоторые числа. Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \phi(t, x) &:= \phi(t, x; \alpha, \beta) = \\ &= \langle \hat{\psi}(t), x \rangle - \frac{\alpha}{2} e^{\beta(T-t)} \|x - \hat{x}(t)\|^2. \end{aligned}$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, $\|x\|^2 := \langle x, x \rangle$.

Введем следующие обозначения:

$$R(t, x, u) = \phi_t(t, x) + \langle \phi_x(t, x), f(t, x, u) \rangle,$$

$$G(x) = \phi(T, x) - \phi(0, x_0) + J(x).$$

Относительно исходных данных в задаче (1.1) — (1.3) будем считать, что выполняется следующее *основное предположение*.

Пусть $\hat{u} \in \mathcal{U}$, $\hat{x} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$ — решение (2.1), $\hat{\psi} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$ — решение (2.2). Тогда найдутся такие неотрицательные числа α и β , что

$$R(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} R(t, x, \hat{u}(t)) \quad \forall t \in [0; T], \quad (2.3)$$

$$G(\hat{x}(T)) = \max_{x \in C_X} G(x). \quad (2.4)$$

В разд. 4 и 5 будут описаны достаточно широкие и регулярно встречающиеся в приложениях классы задач, для которых условия (2.3), (2.4) заведомо выполняются.

Следующий результат был впервые сформулирован В. Ф. Кротовым (см. [1, теорема 1]).

Т е о р е м а 1. Пусть $\hat{u} \in \mathcal{U}$, $\hat{x} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$ – решение (2.1), $\hat{\psi} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$ – решение (2.2), а числа $\alpha, \beta \geq 0$ таковы, что выполняются (2.3) и (2.4). Допустим, что отображение $\pi: [0; T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условиям:

1) $R(t, x, \pi(t, x)) = \max_{v \in U} R(t, x, v) \quad \forall t \in [0; T] \quad \forall x \in C_X$;

2) существует решение $\tilde{x} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$ задачи Коши

$$\dot{\tilde{x}}(t) = f(t, \tilde{x}(t), \pi(t, \tilde{x}(t))), \quad \tilde{x}(0) = x_0;$$

3) существует $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ такое, что $\tilde{u}(t) = \pi(t, \tilde{x}(t)) \quad \forall t \in [0; T]$.

Тогда $J(\tilde{x}(T)) \leq J(\hat{x}(T))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнены все перечисленные условия. Исходя из введенных обозначений и формулы Ньютона-Лейбница, имеем

$$\begin{aligned} J(\tilde{x}(T)) &= G(\tilde{x}(T)) - \phi(T, \tilde{x}(T)) + \phi(0, x_0) = \\ &= G(\tilde{x}(T)) - \int_0^T R(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) dt = G(\tilde{x}(T)) - \\ &\quad - \int_0^T R(t, \tilde{x}(t), \pi(t, \tilde{x}(t))) dt \leq \\ &\leq G(\tilde{x}(T)) - \int_0^T R(t, \tilde{x}(t), \hat{u}(t)) dt \leq G(\hat{x}(T)) - \\ &\quad - \int_0^T R(t, \tilde{x}(t), \hat{u}(t)) dt \leq \\ &\leq G(\hat{x}(T)) - \int_0^T R(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt = J(\hat{x}(T)). \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

В качестве двух элементарных следствий отметим, каким образом результат теоремы 1 связан с решением и стационарными точками в экстремальной задаче (1.1) – (1.2).

С л е д с т в и е 1 (необходимые условия оптимальности). Пусть $\hat{u} \in \mathcal{U}$ – оптимальное управление в задаче (1.1) – (1.2), $\hat{x} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$ – решение (2.1), $\hat{\psi} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$ – решение (2.2) и существуют неотрицательные числа α, β , такие, что выполняется (2.3) – (2.4). Тогда для любого отображения π , удовлетворяющего условиям 1) – 3) теоремы 1, и для соответствующего ему в смысле этих условий $\tilde{x} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$ верно равенство $J(\tilde{x}(T)) = J(\hat{x}(T))$.

С л е д с т в и е 2 (связь с принципом максимума). Пусть $\hat{u}, \hat{x}, \hat{\psi}, \alpha, \beta$ взяты из теоремы 1. Если существует отображение π , для которого выполняются условия 1) – 3) и при почти всех t верно равенство $\tilde{u}(t) = \pi(t, \tilde{x}(t))$, то $\tilde{u}$ является экстремалью Понтрягина в задаче (1.1) – (1.2). Иными словами, пара $(\tilde{x}, \tilde{u})$ удовлетворяет соотношениям принципа максимума, т.е., с учетом введенных обозначений, имеет место

$$R(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \max_{v \in U} R(t, \hat{x}(t), v) \quad \forall t \in [0; T].$$

В отсутствие дополнительных предположений нельзя гарантировать наличие строгого неравенства (1.3) для управления $\tilde{u}$, построенного по теореме 1. Более того, в общем случае неумлучшаемость $\hat{u} \in \mathcal{U}$ за счет произвольного $\tilde{u} \in \mathcal{U}$, удовлетворяющего условиям теоремы 1, даже не означает, что для пары $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ выполнены соотношения принципа максимума [5]. В то же время экстремаль Понтрягина может оказаться улучшаемой [6]. Одно из возможных достаточных условий наличия строгого улучшения (1.3) сформулировано в конце разд. 5.

3. Численный метод последовательного улучшения. Наиболее важным следствием теоремы 1 является следующий алгоритм последовательного глобального улучшения произвольно заданной программы управления $\hat{u} \in \mathcal{U}$.

Шаг 1. Задать $\alpha, \beta \geq 0$, $M_\alpha > 0$, положить $u^{(0)} = \hat{u}$, $k = 0$.

Шаг 2. Найти решение $x^{(k)}(t)$ задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u^{(k)}(t)), \quad x(0) = x_0.$$

Шаг 3. Определить решение $\psi^{(k)}(t)$ задачи Коши:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= -f_x(t, x^{(k)}(t), u^{(k)}(t))^T \psi(t), \\ \psi(T) &= -J'(x^{(k)}(T)). \end{aligned}$$

Шаг 4. Получить функцию позиционного управления $\pi^{(k)}(t, x)$, удовлетворяющую при всех $x \in C_X$ и почти всех $t \in [0; T]$ условию

$$\langle \phi_x^{(k)}(t, x), f(t, x, \pi^{(k)}(t, x)) \rangle = \max_{v \in U} \langle \phi_x^{(k)}(t, x), f(t, x, v) \rangle,$$

где

$$\phi_x^{(k)}(t, x) = \psi^{(k)}(t) - \alpha e^{\beta(T-t)} (x - x^{(k)}(t)).$$

Шаг 5. Найти решение $x^{(k+1)}(t)$ задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \pi^{(k)}(t, x(t))), \quad x(0) = x_0.$$

Шаг 6. Проверить условие улучшения

$$J(x^{(k+1)}(T)) < J(x^{(k)}(T)),$$

при отсутствии улучшения проверить условие остановки

$$\alpha > M_\alpha,$$

в случае выполнения положить $\tilde{u} = u^{(k)}$ и закончить расчеты, иначе увеличить число α и перейти к шагу 4.

Шаг 7. Найти $u^{(k+1)} \in \mathcal{U}$, такое, что

$$u^{(k+1)}(t) = \pi^{(k)}(t, x^{(k+1)}(t))$$

при почти всех t .

Шаг 8. Увеличить k на единицу и перейти к шагу 3.

Шаги 4, 5 и 7 алгоритма неконструктивны и их, как правило, сложно осуществлять аналитически. Однако их возможно совместить и осуществить численно. В этом случае задача максимизации на шаге 4 становится конечномерной, и из ее решения непосредственно определяются значения вектора $u^{(k+1)}(t)$.

Поясним сказанное более подробно. Пусть, для определенности, систему дифференциальных уравнений на шаге 5 предполагается интегрировать простейшим методом Эйлера с шагом h . Тогда на k -й итерации в момент $t = 0$ имеем

$$x^{(k+1)}(h) = x_0 + hf(0, x_0, \pi^{(k)}(0, x_0)),$$

где неопределенным является только значение $\pi^{(k)}(0, x_0)$. Но это значение может быть найдено решением конечномерной экстремальной задачи

$$\langle \phi_x^{(k)}(0, x_0), f(0, x_0, v) \rangle \rightarrow \max_{v \in U},$$

где $\phi_x^{(k)}(0, x_0) = \psi^{(k)}(0)$. При этом $u^{(k+1)}(0) = \pi^{(k)}(0, x_0)$. Аналогично если $x^{(k+1)}(t)$ уже найдено, то

$$x^{(k+1)}(t+h) = x^{(k+1)}(t) + hf(t, x^{(k+1)}(t), u^{(k+1)}(t)),$$

где значение $u^{(k+1)}(t) = \pi^{(k)}(t, x^{(k+1)}(t))$ находится решением задачи

$$\langle \phi_x^{(k)}(t, x^{(k+1)}(t)), f(t, x^{(k+1)}(t), v) \rangle \rightarrow \max_{v \in U}.$$

Комментарии относительно выбора начального значения параметра β и условия остановки на шаге 6 будут даны в следующих разделах. Выбор начального значения и способа увеличения параметра α в процессе применения итераций остается на усмотрение исследователя. Вычислительная практика показывает, что, по возможности, следует также уменьшать α с тем, чтобы добиться более качественного улучшения за меньшее число итераций.

4. Линейные системы с гладким ограниченным функционалом качества. Далее сосредоточимся на исследовании двух конкретных классов задач (1.1) – (1.3). Будем считать, что в (1.1) правая часть имеет вид $f(t, x, u) = A(t, u)x + B(t, u)$, где $A : [0; T] \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ и $B : [0; T] \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ – известные непрерывные отображения, а в (1.2) и (1.3) функция $J : O_X \rightarrow \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема и ограничена. Не умаляя общности, будем полагать, что значения функции J ограничены отрезком $[0; 1]$.

Соответственно введенным дополнительным предположениям уравнения (2.1) и (2.2) переписываются в виде

$$\dot{x}(t) = A(t, \hat{u}(t))x(t) + B(t, \hat{u}(t)), \quad x(0) = x_0, \quad (4.1)$$

$$\dot{\psi}(t) = -A(t, \hat{u}(t))^T \psi(t), \quad \psi(T) = -J'(\hat{x}(T)). \quad (4.2)$$

Покажем, что в этом случае основное предположение (2.3) – (2.4) выполняется.

Т е о р е м а 2. Пусть $\hat{u} \in \mathcal{U}$, $\hat{x} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$ – решение (4.1), $\hat{\psi} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$ – решение (4.2), функция $J : O_X \rightarrow \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема и $J(x) \in [0; 1] \forall x \in O_X$. Тогда найдутся такие неотрицательные числа α и β , что

$$R(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} R(t, x, \hat{u}(t)) \quad \forall t \in [0; T], \quad (4.3)$$

$$G(\hat{x}(T)) = \max_{x \in O_X} G(x). \quad (4.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (4.1) и (4.2) при почти всех $t \in [0; T]$ и всех $x \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} R(t, x, \hat{u}(t)) &= \frac{\alpha\beta}{2} e^{\beta(T-t)} \|x - \hat{x}(t)\|^2 - \\ &- \alpha e^{\beta(T-t)} \left\langle x - \hat{x}(t), A(t, \hat{u}(t)) (x - \hat{x}(t)) \right\rangle + \\ &+ \left\langle \hat{\psi}(t), B(t, \hat{u}(t)) \right\rangle, \end{aligned}$$

а, кроме того, при всех $x \in O_X$ справедливо

$$G(x) = -\frac{\alpha}{2} \|x - \hat{x}(T)\|^2 + J(x) - \langle J'(\hat{x}(T)), x \rangle - \langle \hat{\psi}(0), x_0 \rangle.$$

Следовательно, достаточно показать, что найдутся $\alpha > 0$ и $\beta \geq 0$, для которых выполняются соотношения

$$\frac{\beta}{2} \|x - \hat{x}(t)\|^2 \geq \langle x - \hat{x}(t), A(t, \hat{u}(t))(x - \hat{x}(t)) \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \in [0; T], \quad (4.5)$$

$$\frac{\alpha}{2} \|x - \hat{x}(T)\|^2 \geq J(x) - J(\hat{x}(T)) - \langle J'(\hat{x}(T)), x - \hat{x}(T) \rangle \quad \forall x \in O_X. \quad (4.6)$$

Начнем с условия (4.5) на β . При $x = \hat{x}(t)$ неравенство в (4.5) верно. Далее, поскольку отображение A непрерывно, а множество $[0; T] \times U$ компактно, то для всех $x \neq \hat{x}(t)$ при почти всех $t \in [0; T]$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\langle x - \hat{x}(t), A(t, \hat{u}(t))(x - \hat{x}(t)) \rangle}{\|x - \hat{x}(t)\|^2} &\leq \\ &\leq \|A(t, \hat{u}(t))\| \leq \max_{(s, v) \in [0; T] \times U} \|A(s, v)\|. \end{aligned}$$

Поэтому условие (4.5) будет выполнено при

$$\beta = 2 \max_{(s, v) \in [0; T] \times U} \|A(s, v)\|.$$

Перейдем к условию (4.6) на α . Пусть замкнутый шар $B(\hat{x}(T), \varepsilon)$ радиуса ε с центром в $\hat{x}(T)$ целиком содержится в открытом множестве $O_X \subset \mathbb{R}^n$. Так как вторая производная функции J в силу введенных предположений непрерывна на $B(\hat{x}(T), \varepsilon)$, то по теореме о формуле Тейлора (см. [7, с. 145]) для

$$\alpha \geq \alpha_1 := \max_{\|\xi - \hat{x}(T)\| \leq \varepsilon} \|J''(\xi)\|$$

неравенство в условии (4.6) справедливо при $x \in B(\hat{x}(T), \varepsilon)$. Для всех остальных $x \in O_X \setminus B(\hat{x}(T), \varepsilon)$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{J(x) - J(\hat{x}(T)) - \langle J'(\hat{x}(T)), x - \hat{x}(T) \rangle}{\|x - \hat{x}(T)\|^2} &\leq \\ &\leq \frac{|J(x)| + |J(\hat{x}(T))|}{\|x - \hat{x}(T)\|^2} + \frac{\|J'(\hat{x}(T))\|}{\|x - \hat{x}(T)\|} < \\ &< \frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{\|J'(\hat{x}(T))\|}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

т.е. для них требуемое неравенство имеет место при

$$\alpha \geq \alpha_2 := 4\varepsilon^{-2} + 2\varepsilon^{-1} \|J'(\hat{x}(T))\|.$$

Окончательно устанавливаем, что условие (4.6) выполняется для значения $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\} > 0$. Теорема 2 доказана.

Из доказательства теоремы 2 видно, что при реализации численного алгоритма последовательного улучшения (см. разд. 3) в рассматриваемом случае можно на шаге 1 положить

$$\beta = 2 \max_{(s,v) \in [0;T] \times U} \|A(s,v)\|,$$

где через $\|\cdot\|$ обозначена стандартная норма в пространстве матриц размеров $n \times n$, согласованная с евклидовой нормой в $\mathbb{R}^n$. Доказательством теоремы 2 также объясняется последовательность действий на шаге 6.

5. Линейные системы с вогнутым функционалом качества. Пусть в (1.1) правая часть имеет вид $f(t,x,u) = A(t,u)x + B(t,u)$, где $A : [0;T] \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ и $B : [0;T] \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — известные непрерывные отображения, в (1.2) и (1.3) множество O_X выпукло, а непрерывно дифференцируемая функция $J : O_X \rightarrow \mathbb{R}$ вогнута, т.е.

$$J(\gamma x + (1-\gamma)y) \geq \gamma J(x) + (1-\gamma)J(y) \quad \forall x, y \in O_X \quad \forall \gamma \in [0;1].$$

Покажем, что в этом случае основное предположение (2.3) — (2.4) выполняется при $\alpha = 0$.

Т е о р е м а 3. Пусть $\hat{u} \in \mathcal{U}$, $\hat{x} \in \mathcal{AC}^n([0;T])$ — решение (4.1), $\hat{\psi} \in \mathcal{AC}^n([0;T])$ — решение (4.2), множество O_X выпукло и функция $J : O_X \rightarrow \mathbb{R}$ вогнута. Тогда для $\alpha = 0$ и произвольного $\beta \geq 0$ имеет место

$$R(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} R(t, x, \hat{u}(t)) \quad \forall t \in [0;T], \quad (5.1)$$

$$G(\hat{x}(T)) = \max_{x \in O_X} G(x). \quad (5.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\alpha = 0$ в силу (4.1) и (4.2) справедливо

$$R(t, x, \hat{u}(t)) = \langle \hat{\psi}(t), B(t, \hat{u}(t)) \rangle,$$

поэтому условие (5.1) выполняется. В то же время

$$G(x) = J(x) - \langle J'(\hat{x}(T)), x \rangle - \langle \hat{\psi}(0), x_0 \rangle,$$

поэтому условие (5.2) эквивалентно неравенству

$$J(x) - J(\hat{x}(T)) - \langle J'(\hat{x}(T)), x - \hat{x}(T) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in O_X,$$

которое верно, поскольку функция J вогнута на O_X (см. [7, с. 202]). Теорема 3 доказана.

Таким образом, при использовании алгоритма из разд. 3 в случае линейных по состоянию систем с вогнутым функционалом качества можно заведомо положить $\alpha = 0$.

Более того, если функция J строго вогнута на O_X , то максимум в условии (5.2) также будет строгим. Отсюда следует, что равенство $J(\tilde{x}(T)) = J(\hat{x}(T))$ в доказательстве теоремы 1 при $\tilde{x}(T) \neq \hat{x}(T)$ невозможно. Поэтому для линейной по состоянию системы со строго вогнутым функционалом качества выполнение условий 1) — 3) теоремы 1 и дополнительного требования $\tilde{x}(T) \neq \hat{x}(T)$ гарантирует строгое улучшение управления $\tilde{u}$.

6. Задача вероятностной оптимизации. Рассмотрим теперь управляемую динамическую систему, которая описывается уравнением Ито:

$$d\xi(t) = \mu(t, u(t))\xi(t)dt + \sigma(t, u(t))dw(t), \quad \xi(0) = \xi_0, \quad (6.1)$$

где $t \in [0; T]$ — время; $\xi(t)$ — n -мерный вектор, характеризующий состояние системы в момент времени t ; ξ_0 — нормально распределенный случайный вектор с нулевым средним и положительно определенной ковариационной матрицей N_0 ; $u \in \mathcal{U}$ (см. разд. 1); $w(\cdot)$ — v -мерный стандартный винеровский процесс; отображения $\mu : [0; T] \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ и $\sigma : [0; T] \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times v}$ заданы и непрерывны на $[0; T] \times U$. Предполагается, что начальная точка ξ_0 и винеровский процесс $w(\cdot)$ независимы.

Рассмотрим следующую задачу относительно классического вероятностного критерия [8]. Пусть заданы вектор $\kappa \in \mathbb{R}_+^n$ и число $\phi > 0$. Обозначим через Π_ϕ замкнутый параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ со сторонами $2\phi\kappa_i$, $i = 1, n$, и центром в нуле, т.е.

$$\Pi_\phi := \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq \phi\kappa_i, i = \overline{1, n}\}.$$

Требуется для заданного числа $\phi > 0$ подобрать программу управления $u \in \mathcal{U}$ так, чтобы максимизировать вероятность попадания случайного вектора $\xi(T)$ в множество Π_ϕ . Иными словами, решается задача вероятностной оптимизации

$$P_\phi(u) := \mathbf{P}\{\xi(T) \in \Pi_\phi\} \rightarrow \sup_{u \in \mathcal{U}}. \quad (6.2)$$

Как известно [9], при указанных выше условиях для любого $u \in \mathcal{U}$ решение ξ уравнения (6.1) существует в сильном смысле и однозначно определено на отрезке $[0; T]$. При этом для любого $t \in [0; T]$ вектор $\xi(t)$ нормально распределен, имеет нулевое среднее и положительно определенную ковариационную матрицу $N(t)$, которая находится решением задачи Коши:

$$\begin{aligned} \dot{N}(t) &= \mu(t, u(t))N(t) + N(t)\mu(t, u(t))^T + \\ &+ \sigma(t, u(t))\sigma(t, u(t))^T, N(0) = N_0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Кроме того, вероятность $\mathbf{P}\{\xi(T) \in \Pi_\phi\}$ в формуле (6.2) может быть вычислена явно, как функция матричной переменной $N(T)$:

$$\mathbf{P}\{\xi(T) \in \Pi_\phi\} = \mathcal{P}(N(T)), \quad (6.4)$$

где

$$\mathcal{P}(N) := (2\pi)^{-n/2} (\det N)^{-1/2} \int_{\Pi_\phi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle y, N^{-1}y \rangle\right\} dy.$$

Отсюда следует, что задача (6.1) — (6.2) на самом деле является детерминированной, задана относительно терминального (нелинейного, не выпуклого и не вогнутого) функционала качества управления $\mathcal{P}(N(T))$ и линейной по состоянию $N(t)$ динамической системы (6.3). Она сводится путем (симметрической) векторизации матриц N и N_0 к задаче вида (1.1) — (1.2) при $f(t, x, u) = A(t, u)x + B(t, u)$. Матрица $A(t, u)$ и вектор $B(t, u)$ при этом составляют в соответствии с уравнением (6.3).

Множество O_X здесь — это открытый выпуклый конус в $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$, который характеризуется тем, что для любого $x \in O_X$ соответствующая ему квадратная симметрическая матрица $N = N(x)$ размеров $n \times n$ положительно определена. По построению для любого $u \in \mathcal{U}$ и для любого $t \in [0; T]$ вектор $x(t)$, полученный из решения векторизованной задачи, принадлежит множеству O_X , т.е. $C_X \subset O_X$. Для всякого $x \in O_X$ положим $J(x) = 1 - \mathcal{P}(N)$. Эта функция определена и дважды непрерывно дифференцируема на множестве O_X , а ее значения ограничены отрезком $[0; 1]$.

Таким образом, с учетом теоремы 2 в рассматриваемом случае применим метод глобального улучшения Кротова и численный алгоритм из разд. 3.

При реализации алгоритма последовательных улучшений на шаге 3 необходимо вычислять значения производной $J'(x)$ в различных точках $x \in C_X$. Для этого полезен следующий технический результат.

Л е м м а. Для любого вектора $x \in O_X$, полученного симметрической векторизацией некоторой матрицы N , вектор-градиент $J'(x)$ функции J в точке x вычисляется путем симметрической векторизации симметрической матрицы-градиента $-\mathcal{P}'(N)$ функции $-\mathcal{P}$ в точке N с удвоением внедиагональных элементов, т.е. если $\mathcal{P}'(N)_{ij} = p$, то для соответствующего $k = (2n - j + 2)(j - 1) / 2 + i - j + 1$ при $i = j$ имеет место $J'(x)_k = -p$, а при $i > j$ имеет место $J'(x)_k = -2p$. При этом справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'(N) &= \frac{1}{2}(2\pi)^{-n/2}(\det N)^{-1/2} \times \\ &\times \int_{\Pi_\phi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle y, N^{-1}y \rangle\right\} \left(N^{-1}yy^T N^{-1} - N^{-1}\right) dy. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathbb{S}_+$ обозначает открытое множество положительно определенных симметрических матриц в пространстве $\mathbb{R}^{n \times n}$ всех квадратных матриц размеров $n \times n$.

Так как функция $N \mapsto (\det N)^{-1/2} : \mathbb{S}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ и отображение $N \mapsto N^{-1} : \mathbb{S}_+ \rightarrow \mathbb{S}_+$ определены и бесконечно дифференцируемы в любой точке $N \in \mathbb{S}_+$, то таковой же является и функция $N \mapsto \mathcal{P}(N) : \mathbb{S}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. При этом для всякого $N \in \mathbb{S}_+$ матрица $\mathcal{P}'(N)$ определяет линейную часть приращения

$$\mathcal{P}(N + H) - \mathcal{P}(N) = \text{tr}[\mathcal{P}'(N)^T H] + o(\|H\|), \quad H \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Докажем сперва формулу (6.5). По правилу дифференцирования произведения функций имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'(N) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\Pi_\phi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle y, N^{-1}y \rangle\right\} dy \left((\det N)^{-1/2}\right)' + \\ &+ (2\pi)^{-n/2} (\det N)^{-1/2} \left[\int_{\Pi_\phi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle y, N^{-1}y \rangle\right\} dy \right]'. \end{aligned}$$

Так как для определителя матрицы справедлива формула разложения по любой строке, а матрица N симметрична, имеет место соотношение $(\det N)' = \text{adj} N$, где $\text{adj} N$ — присоединенная к N матрица. Поэтому в первом слагаемом по правилу дифференцирования сложной функции

$$\left((\det N)^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}(\det N)^{-3/2} \text{adj} N = -\frac{1}{2}(\det N)^{-1/2} N^{-1}.$$

Во втором слагаемом по правилу Лейбница и по правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$\begin{aligned} \left[\int_{\Pi_\phi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle y, N^{-1}y \rangle\right\} dy \right]' &= \int_{\Pi_\phi} \left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\langle y, N^{-1}y \rangle\right\} \right]' dy = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Pi_\phi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle y, N^{-1}y \rangle\right\} \left(\langle y, N^{-1}y \rangle\right)' dy. \end{aligned}$$

Как известно [7, предложение 2.2.3], для линейного оператора производной отображения $N \mapsto N^{-1}$ справедливо соотношение

$$(N^{-1})'[H] = -N^{-1}HN^{-1} \quad \forall H \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

поэтому, по правилу дифференцирования суперпозиции двух отображений (см. [7, п. 2.2.2]), имеет место

$$\left(\langle y, N^{-1}y \rangle\right)'[H] = -\langle y, N^{-1}HN^{-1}y \rangle = -\text{tr}[N^{-1}yy^T N^{-1}H].$$

Отсюда, переходя обратно к матричному представлению производных, находим

$$\left(\langle y, N^{-1}y \rangle\right)' = -N^{-1}yy^T N^{-1}.$$

Объединяя полученные результаты, устанавливаем справедливость проверяемого соотношения (6.5). В частности, доказано, что матрица $\mathcal{P}'(N)$ является симметрической для любого $N \in \mathbb{S}_+$.

Вернемся к формуле для приращения значения функции $\mathcal{P}$ в точке $N \in \mathbb{S}_+$. С учетом симметричности матрицы $\mathcal{P}'(N)$ находим

$$\mathcal{P}(N + H) - \mathcal{P}(N) = \text{tr}[\mathcal{P}'(N)H] + o(\|H\|),$$

$$H \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

В свою очередь для функции $x \mapsto J(x) : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathbb{R}$ имеет место

$$J(x + h) - J(x) = \langle J'(x), h \rangle + o(\|h\|),$$

$$h \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2}.$$

Здесь векторы x и h — это результат симметрической векторизации матриц N и H соответственно, т.е. для всех $i \geq j$ и соответствующего k выполнено $x_k = N_{ij}$ и $h_k = (H_{ij} + H_{ji}) / 2$. Но так как $J(x + h) - J(x) = \mathcal{P}(N) - \mathcal{P}(N + H)$, а $o(\|H\|) = o(\|h\|)$, имеет место

$$\langle J'(x), h \rangle = -\text{tr}[\mathcal{P}'(N)H] + o(\|h\|).$$

Сравнивая коэффициенты при h_k в левой и правой частях полученного равенства, находим, что вектор $J'(x)$ представляет собой результат симметрической векторизации матрицы $-\mathcal{P}'(N)$ с удвоением внедиагональных элементов. Лемма доказана.

Обсудим альтернативный подход к исследованию задачи (6.1) — (6.2), предложенный в работе [4]. В [4] на основе известного многомерного обобщения Олкина-Пратта для чебышевской оценки вероятности было показано, что значение $P_\Phi(u)$ в формуле (6.2) удовлетворяет неравенству

$$P_\Phi(u) \geq P_\Phi^*(u) := \frac{n^2 - \phi^{-2}J^*(x(T))}{n^2}, \quad (6.6)$$

где, как и ранее, $x(T)$ — результат векторизации матрицы $N(T)$, и

$$J^*(x(T)) = \left(\sqrt{\text{tr}[QEQN(T)]} + \sqrt{\text{tr}[Q\Lambda QN(T)]} \right)^2, \quad (6.7)$$

$$Q = \text{diag}(\kappa_1^{-1}, \dots, \kappa_n^{-1}), \quad E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} (n-1)^2 & 1-n & \dots & 1-n \\ 1-n & (n-1)^2 & \ddots & 1-n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-n & 1-n & \dots & (n-1)^2 \end{pmatrix}.$$

Исходя из соотношения (6.6), сформулируем задачу

$$J^*(x(T)) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}}. \quad (6.8)$$

Эта задача эквивалентна задаче максимизации оценки $P_\phi^*(u)$. Отметим, что в записи функционала (6.7) отсутствует параметр ϕ , т.е. решение задачи (6.8), если оно существует, является приближением к решению задачи (6.2) для всех значений $\phi > 0$ одновременно.

Задача улучшения, согласованная с (6.8), как нетрудно проверить непосредственно (см. [4, лемма 1]), является задачей с вогнутым функционалом качества. Поэтому к ней применимы результаты разд. 5. В частности, метод Кротова может быть использован при $\alpha = 0$.

В следующем разделе на примерах проводится сопоставление метода Кротова с $\alpha = 0$, примененного к функционалу оценки (6.7) в задаче (6.8), и общего метода Кротова с произвольным $\alpha \geq 0$, примененного к функционалу гауссовской вероятности (6.4) в задаче (6.2).

7. Примеры решения задач. Начнем с обсуждения общего метода Кротова с произвольным $\alpha \geq 0$ применительно к задаче (6.1) – (6.2) в одномерном случае.

Пример 1. На интервале времени $[0; T]$ рассмотрим одномерную систему

$$d\xi(t) = \frac{u(t)}{2} \xi(t) dt + c dw(t), \quad \xi(0) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2), \quad \sigma_0 \neq 0.$$

Геометрические ограничения на управление заданы в виде $|u(t)| \leq u_{\max}$, целевая область – отрезком $\Pi_\phi = [-\phi; \phi]$.

Переходя к соотношениям (6.3) – (6.4), в обозначениях задачи (1.1) – (1.2) имеем

$$\dot{x}(t) = u(t)x(t) + c^2, \quad x(0) = \sigma_0^2,$$

$$J(x(T)) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\phi}{\sqrt{2x(T)}}\right), \quad \operatorname{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy.$$

Выполним один шаг итерационной процедуры улучшения некоторого заданного управления, следуя изложенному в разд. 3 алгоритму.

Пусть $\phi = 1$ и $\hat{u}(t) \equiv 0$. Имеем

$$\hat{x}(t) = c^2 t + \sigma_0^2, \quad J(\hat{x}(T)) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2(c^2 T + \sigma_0^2)}}\right).$$

Будем считать, что значения параметров $\alpha, \beta \geq 0$ заданы. В соответствии с шагами алгоритма построим последовательно элементы $\hat{\psi}$, $\hat{\pi}$, $\hat{x}$ и $\hat{u}$. Так как

$$J'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-x^{-1}/2},$$

то

$$J'(\hat{x}(T)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(c^2 T + \sigma_0^2)^3}} e^{-(c^2 T + \sigma_0^2)^{-1}/2} =: \gamma > 0.$$

Отсюда $\hat{\psi}(t) \equiv -\gamma$ и для построения $\hat{\pi}$ необходимо найти максимум по $v \in [-u_{\max}; u_{\max}]$ выражения

$$-(\gamma + \alpha e^{\beta(T-t)}(x - c^2t - \sigma_0^2))(vx + c^2), \quad x > 0.$$

Имеем

$$\hat{\pi}(t, x) = \begin{cases} -u_{\max}, & \text{если } \gamma + \alpha e^{\beta(T-t)}(x - c^2t - \sigma_0^2) > 0, \\ u_{\max}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В частности, $\hat{\pi}(0, x(0)) = -u_{\max}$, поэтому для нового решения $\tilde{x}$ верно

$$\tilde{x}(t) = \frac{c^2}{u_{\max}} + \left(\sigma_0^2 - \frac{c^2}{u_{\max}} \right) e^{-u_{\max}t}, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

где момент времени $\tau > 0$ определяется условием

$$\gamma + \alpha e^{\beta(T-\tau)} \left(\frac{c^2}{u_{\max}} + \left(\sigma_0^2 - \frac{c^2}{u_{\max}} \right) e^{-u_{\max}\tau} - c^2\tau - \sigma_0^2 \right) = 0.$$

Отметим, что для достаточно больших $\alpha, \beta > 0$ справедливо неравенство $\tau < T$, так что новая программа управления $\tilde{u}(t) = \pi(t, \tilde{x}(t))$ будет иметь переключения. При $\alpha = 0$ переключений нет и оказывается найдено $\tilde{u}(t) \equiv -u_{\max}$ — абсолютный оптимум в задаче.

П р и м е р 2. Обобщим пример 1. На интервале времени $[0; T]$ рассмотрим одномерную систему

$$d\xi(t) = \mu(t, u(t))\xi(t)dt + \sigma(t, u(t))dw(t), \\ \xi(0) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2), \quad \sigma_0 \neq 0.$$

Геометрические ограничения на управление заданы в виде $u(t) \in U$, где U — произвольное замкнутое и ограниченное множество в $\mathbb{R}^m$, целевая область $\Pi_\phi = [-\phi; \phi]$.

В обозначениях задачи (1.1) — (1.2) соответственно имеем

$$\dot{x}(t) = 2\mu(t, u(t))x(t) + \sigma(t, u(t))^2, \quad x(0) = \sigma_0^2,$$

$$J(x(T)) = 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\phi}{\sqrt{2x(T)}} \right).$$

В силу того, что функция ошибок erf строго возрастает, задача минимизации функционала J полностью эквивалентна задаче минимизации функционала

$$\mathcal{J}(x(T)) := x(T).$$

При этом

$$J'(x(T)) = \frac{\phi}{\sqrt{2\pi x(T)^3}} e^{-\phi^2 x(T)^{-1/2}} > 0.$$

Так как при заданном $\hat{u}$ функция $\hat{\psi}(t)$ находится из решения линейной задачи Коши (2.2), заведомо имеем

$$\hat{\psi}(t) = J'(\hat{x}(T))\hat{\psi}_0(t),$$

где $\hat{\psi}_0$ удовлетворяет условию

$$\hat{\psi}_0(T) = -1 = -\mathcal{J}'(x(T))$$

и тому же дифференциальному уравнению.

Отсюда следует, что результат применения процедуры улучшения не изменится, если заменить функционал J функционалом $\mathcal{J}$. В самом деле, достаточно положить $\alpha = J'(x(T))\alpha'$ и на шаге 4 алгоритма вынести за скобки общий множитель $J'(x(T))$. Но для линейного функционала $\mathcal{J}$ справедливы результаты разд. 5, в частности, метод Кротова применим уже при $\alpha = 0$; при этом, как отмечалось ранее, достигается наибольшая скорость улучшения.

Итак, при рассмотрении одномерных задач вида (6.1) – (6.2) всегда можно заранее положить $\alpha = 0$ и использовать тем самым линейную реализацию метода Кротова с наибольшей скоростью улучшения.

Отметим, что в одномерном случае эквивалентные друг другу задачи $J(x(T)) \rightarrow \inf$ и $\mathcal{J}(x(T)) \rightarrow \inf$ также эквивалентны задаче оптимизации оценки $J^*(x(T)) \rightarrow \inf$, так как в формуле (6.7) в этом случае $\Lambda = 0$ и $J^*(x(T)) = x(T)$ с точностью до положительного множителя.

П р и м е р 3. На интервале времени $[0;1]$ рассмотрим систему

$$d\xi_1(t) = -(\xi_1(t) + \xi_2(t))dt, \quad \xi_1(0) \sim \mathcal{N}(0,5),$$

$$d\xi_2(t) = (u(t)\xi_1(t) - \xi_2(t))dt, \quad \xi_2(0) \sim \mathcal{N}(0,1),$$

случайные величины $\xi_1(0)$ и $\xi_2(0)$ независимы. Геометрические ограничения на управление заданы в виде $|u(t)| \leq 2$. Целевую область Π_ϕ выберем прямоугольной, положим $\kappa = (1,2)$.

В обозначениях задачи (1.1) – (1.2) имеем: $t \in [0;1]$, $x(t) \in \mathbb{R}^3$, $u(t) \in [-2;2] \subset \mathbb{R}$,

$$A(t,u) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ u & -2 & -1 \\ 0 & 2u & -2 \end{pmatrix}, \quad B(t,u) \equiv 0, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\max_{(s,v) \in [0;1] \times [-2;2]} \|A(s,v)\| \approx 5.9$, поэтому в соответствии с результатами разд. 4 положим $\beta = 12$. Все дальнейшие расчеты будем выполнять численно.

Пусть задана программа управления $\hat{u}(t) \equiv 2$; для нее значение функционала качества $J(\hat{x}(1)) \approx 0.083$. Применим описанную в разд. 3 итерационную процедуру для ее улучшения.

Положим сперва $\alpha = 0$, $M_\alpha = 100$. На первой итерации условие улучшения окажется невыполненным: для найденного $u^{(1)}$ получаем значение $J(x^{(1)}(1)) \approx 0.45$. Таким образом, в рассматриваемом двумерном примере линейная реализация метода Кротова уже не является улучшающей.

Увеличив α до единицы и выполнив итерацию заново, получим новое $u^{(1)}$ с $J(x^{(1)}(1)) \approx 0.071$. Через примерно 60 повторных итераций оказывается найдено $\tilde{u}$ со значением $J(\tilde{x}(1)) \approx 0.02$. Если положить $\alpha = 0.1$, то количество необходимых итераций можно сократить до 20, а при $\alpha = 0.01$ – до 5. При $\alpha = 0.001$ уже вторая итерация перестает быть улучшающей и значение α необходимо увеличивать еще раз.

Применим алгоритм при $\alpha = 0$ для минимизации функционала (6.7). Вычисляя параллельно с этим значения исходного функционала J , найдем, что уже за две итерации получается тот же результат $J(\tilde{x}(1)) \approx 0.02$. При этом не потребовалось подбирать значения никаких дополнительных параметров.

Пример 3 демонстрирует преимущества использования оценки (6.6) в процессе исследования задач вида (6.1) – (6.2). Известная «грубость» оценок чебышевского типа в рассматриваемом случае оказывается полезной, так как в процессе максимизации функционала оценки «зазор» между ее значением и оцениваемой величиной меняется незначительно. Как следствие, уменьшение оцениваемой величины имеет тот же порядок, что и уменьшение оценки. При этом относительно простая структура и выпуклые свойства функционала (6.7) позволяют добиться наибольшей скорости улучшения.

П р и м е р 4. Рассмотрим задачу стабилизации двухзвенного механического манипулятора из [10] в условиях случайных возмущений за счет управления в виде линейного регулятора. Управляемая система на интервале времени $[0;5]$ имеет вид

$$d\xi(t) = (\tilde{A} + \tilde{B}P(u(t)))\xi(t)dt + \tilde{C}dw(t), \quad \xi(0) = \xi_0,$$

где

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \frac{1}{155} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 8 & -9 \\ -9 & 14 \end{pmatrix},$$

$$P(u) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \end{pmatrix}.$$

Первые две координаты вектора $\xi(t)$ характеризуют величины углов отклонения первого и второго звеньев манипулятора от требуемого положения, а последние две координаты — скорости изменения этих величин. В отличие от [10] будем считать, что управление в системе реализуется точно, а случайные воздействия оказывают влияние только на скорость движения манипулятора, и это влияние характеризуется матрицей

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.05 & 0.01 \\ 0.01 & 0.05 \end{pmatrix}.$$

Начальный вектор ξ_0 имеет нормальное распределение с нулевым средним и ковариационной матрицей $N_0 = 0.2I_4$, где I_4 — единичная 4×4 -матрица. Так же как и в [10], будем считать, что требования по стабилизации положения в 1.5 раза выше, чем требования по стабилизации скорости. Целевую область Π_ϕ зададим вектором $\kappa = (0.1, 0.1, 0.15, 0.15)$. Управление в системе имеет смысл коэффициентов усиления в линейном регуляторе обратной связи. Будем считать, что на них накладываются одинаковые технические ограничения: $|u_i(t)| \leq u_{\max}$, где $u_{\max}$ положим равным 30.

В обозначениях задачи (1.1) — (1.2) получаем следующее: $t \in [0; 5]$, $x(t) \in \mathbb{R}^{10}$, $u(t) \in [-1; 1]^8 \subset \mathbb{R}^8$. Отображение $(t, u) \mapsto A(t, u) \equiv A(u)$ можно вычислить так: запишем матрицу

$$(\tilde{A} + \tilde{B}P(u)) \otimes I_4 + I_4 \otimes (\tilde{A} + \tilde{B}P(u)) \in \mathbb{R}^{16 \times 16},$$

где $\otimes$ — произведение Кронекера, вычеркнем из нее строки с номерами 5, 9, 10, 13, 14 и 15, а столбцы с этими же номерами вычеркнем, предварительно прибавив их к столбцам с номерами 2, 3, 7, 4, 8 и 12 соответственно. Результатом станет искомая матрица $A(u) \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$. Отображение B имеет вид $B(t, u) \equiv (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.0026, 0.001, 0.0026)^T \in \mathbb{R}^{10}$. Наконец, начальное условие $x_0 = (0.2, 0, 0, 0, 0.2, 0, 0, 0.2, 0, 0.2) \in \mathbb{R}^{10}$.

Ввиду высокой размерности задачи алгоритм построения последовательных улучшений относительно функционала J приводит к трудностям уже на этапе определения подходящего значения $\beta > 0$. Поэтому перейдем сразу к функционалу (6.7). Пусть задано управление $\hat{u}(t) \equiv 0$. Для этого управления вероятность $P_1(\hat{u})$ попадания в целевую область Π_1 , найденная по формуле (6.4), составляет примерно 0.0008, т.е. менее 0.1%. Применяя метод Кротова, найдем управление $\tilde{u}$, для которого $P_1(\tilde{u}) \approx 0.87$. Продемонстрируем качество управления $\tilde{u}$, выполнив численное моделирование траекторий случайного процесса $\tilde{\xi}(t)$.

На рис. 1 и 2 представлены результаты моделирования по переменным $\xi_1, \dots, \xi_4$ для нескольких реализаций $\xi(t)$. На рис. 3 эти же результаты изображены на фазовой плоскости угловых переменных ξ_1 и ξ_2 . Сплошной линией отмечена целевая область Π_1 , точками и звездочками — соответственно начало и конец каждой траектории.

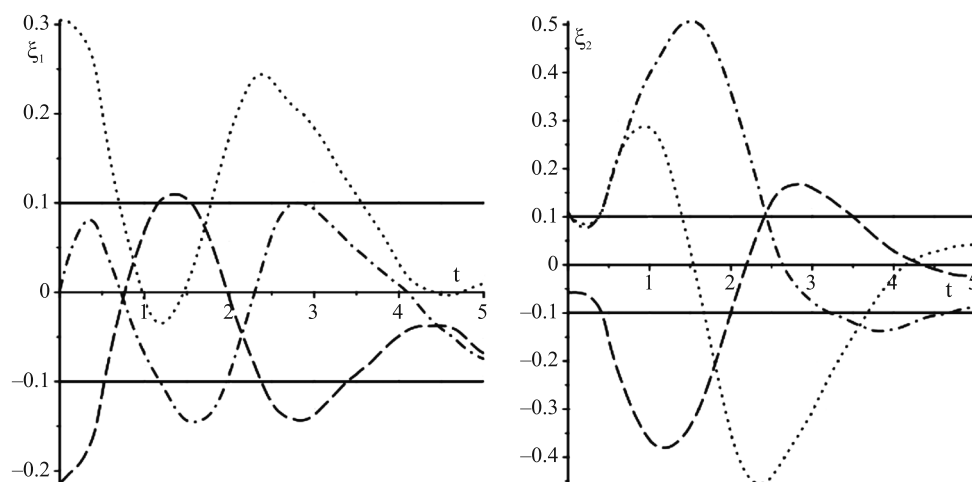


Рис. 1. Результаты моделирования по углам

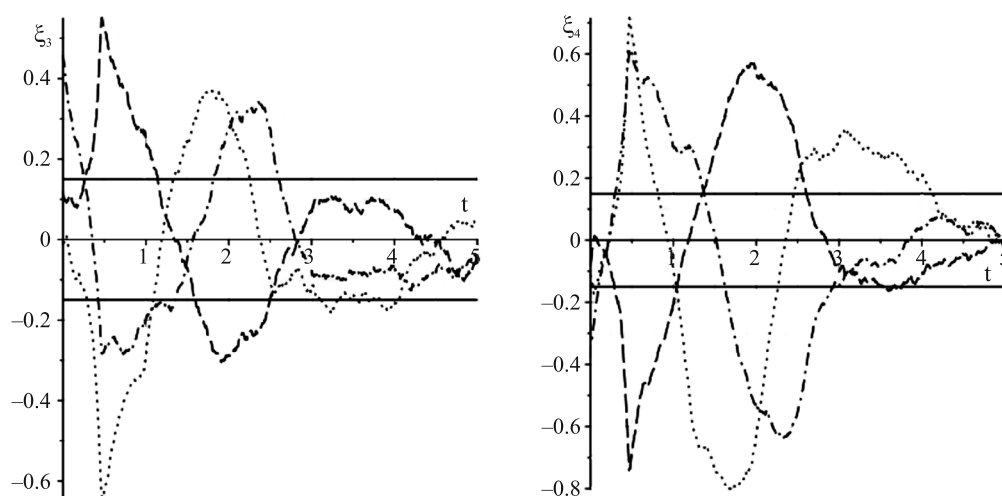


Рис. 2. Результаты моделирования по скоростям

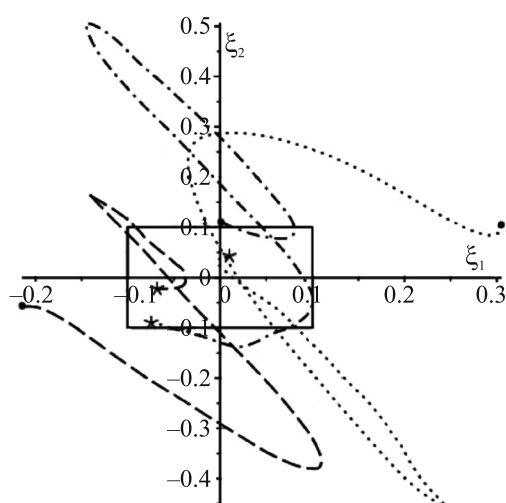


Рис. 3. Результаты моделирования на фазовой плоскости

Заключение. Эффективность метода глобальных последовательных улучшений Кротова обоснована для двух классов задач оптимального управления с линейной по состоянию системой и терминальным функционалом качества. Полученные результаты позволяют использовать метод для приближенного построения оптимальной программы управления в линейных стохастических задачах вероятностной оптимизации. Показано, что для существенного упрощения и ускорения итерационной процедуры могут быть использованы многомерные оценки функционала вероятности чебышевского типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коннов А.И., Кротов В.Ф. О глобальных методах последовательного улучшения управляемых процессов // *АиТ*. 1999. № 10. С. 77–88.
2. Кротов В.Ф., Булатов А.В., Батурина О.В. Оптимизация линейных систем с управляемыми коэффициентами // *АиТ*. 2011. № 6. С. 64–78.
3. Трушкова Е.А. Алгоритмы глобального поиска оптимального управления // *АиТ*. 2011. № 6. С. 151–159.
4. Хрусталева М.М., Царьков К.А. Метод последовательного улучшения в задачах оптимизации вероятностных критериев для линейных по состоянию диффузионно-скачкообразных систем // *АиТ*. 2023. № 6. С. 100–121.
5. Аргунинцев А.В., Дыхта В.А., Срошко В.А. Оптимальное управление: нелокальные условия, вычислительные методы и вариационный принцип максимума // *Изв. вузов. Математика*. 2009. № 1. С. 3–43.
6. Дыхта В.А. Нестандартная двойственность и нелокальные необходимые условия оптимальности в невыпуклых задачах оптимального управления // *АиТ*. 2014. № 11. С. 19–37.
7. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2005.
8. Кибзун А.И., Кан Ю.С. Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
9. Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: Физматлит, 2002.
10. Румянцев Д.С., Хрусталева М.М., Царьков К.А. Алгоритм поиска субоптимальных стратегий управления квазилинейными динамическими стохастическими системами диффузионного типа // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2014. № 1. С. 74–86.