

УДК 519.977

ИСКЛЮЧЕНИЕ АКТИВНЫХ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© 2024 г. А.С. Бортакровский^{a, b, *}

^aМосковский авиационный институт (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

^bМИСИС (национальный исследовательский технологический ун-т), Москва, Россия

*e-mail: asbortakov@mail.ru

Поступила в редакцию 27.05.2024 г.

После доработки 17.06.2024 г.

Принята к публикации 16.10.2024 г.

Рассматриваются задачи оптимального управления непрерывными системами с фазовыми ограничениями. Предполагается, что траекторию системы можно разбить на участки, на каждом из которых набор активных фазовых ограничений фиксирован. Такие траектории характерны для гибридных систем, в которых переход от одного участка к другому считается переключением. Применяя необходимые условия оптимальности гибридных систем с промежуточными ограничениями, получаем решение первоначальной задачи с фазовыми ограничениями.

Ключевые слова: гибридная система, фазовое ограничение, оптимальное управление, необходимые условия оптимальности

DOI: 10.31857/S0002338824050053, EDN: TEJUJZ

ELIMINATION OF ACTIVE PHASE CONSTRAINTS IN OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

A.S. Bortakovskii^{a, b, *}

^aMoscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

^bNational University of Science and Technological University (MISiS), Moscow, Russia

*e-mail: asbortakov@mail.ru

The problems of optimal control of continuous systems with phase constraints are considered. It is assumed that the trajectory of the system can be divided into sections, on each of which a set of active phase constraints is fixed. Such trajectories are typical for hybrid systems in which the transition from one site to another is considered a switch. Applying the necessary optimality conditions for hybrid systems with intermediate constraints, we obtain a solution to the initial problem with phase constraints.

Keywords: hybrid system, phase limitation, optimal control, necessary optimality conditions

Введение. Задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями имеют многочисленные приложения. Однако их решение с использованием необходимых условий оптимальности [1, 2] довольно трудное. В первую очередь это связано с применением в этих условиях в качестве множителей Лагранжа неотрицательных мер, при помощи которых учитываются активные и пассивные фазовые ограничения. На практике специалистам, как правило, известна схема “обхода” ограничений, т.е. последовательность участков траектории, на каждом из которых набор активных ограничений не меняется. Поэтому задача сводится к оптимизации управления на каждом участке, а также оптимизации позиций переключений, в которых меняются участки движения.

Процессы управления с переключениями характерны для гибридных систем (ГС), непрерывное движение которых описывается дифференциальными уравнениями, а мгновенные изменения состояния (переключения) — рекуррентными уравнениями или включениями. Наиболее общей моделью ГС является так называемая гибридная система переменной размерности (ГСПР), в моменты переключений которой меняется пространство состояний, в частности его размерность (краткий обзор работ по ГСПР см. в [3]).

Необходимые условия оптимальности гибридных систем с промежуточными ограничениями, обобщающие принцип максимума [4], получены в работах [5, 6]. В этих публикациях количество переключений задано, а сами переключения неуправляемы. Для решения задач оптимального управления с фазовыми ограничениями применяются ГСПР. При этом допускаются процессы с мгновенными многократными переключениями [3, 7]. Такие процессы, как правило, исключаются в задачах оптимизации ГС, несмотря на то, что именно они оказываются оптимальными не только в академических примерах, но и в приложениях, например в задачах группового управления.

В статье приводятся необходимые условия оптимальности ГСПР с промежуточными и терминальными ограничениями. Затем рассматривается задача оптимального управления непрерывной системой с фазовыми ограничениями, для решения которой предлагается метод исключения активных фазовых ограничений. Этот метод применяется, если известен план “активизации” фазовых ограничений, т.е. задана конечная последовательность изменения состава активных ограничений. В результате исключения получается задача оптимального управления ГСПР с промежуточными ограничениями, для решения которой используются приведенные ранее необходимые условия оптимальности. Эффективность предлагаемого подхода демонстрируется на примерах.

1. Оптимизация ГСПР с промежуточными ограничениями. 1.1. **П о с т а н о в к а з а д а ч и.** Пусть на промежутке времени $T = [t_0, t_F]$ динамическая система совершает N переключений в моменты времени $t_1, \dots, t_N$, образующие вместе с моментом t_F окончания движения неубывающую конечную последовательность $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_N, t_F\}$:

$$t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_{N+1} \triangleq t_F. \quad (1.1)$$

Между неравными последовательными моментами переключений состояние системы изменяется непрерывно, согласно дифференциальному уравнению:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_i(t), u_i(t)), \quad t \in T_i, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (1.2)$$

а в моменты переключений — дискретно в соответствии с рекуррентным уравнением:

$$x_i(t_i) = g_i(t_i, x_{i-1}(t_i)), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.3)$$

В соотношениях (1.2) $\mathbb{N} \triangleq \{i = 0, 1, \dots, N \mid t_i < t_{i+1}\}$ — множество номеров ненулевых (по длине) частичных промежутков $T_i = [t_i, t_{i+1}]$ непрерывного изменения системы; $x_i(t)$ — состояние системы в момент времени $t \in T_i$, $x_i(t) \in X_i = \mathbb{R}^{n_i}$; $u_i(t)$ — управление непрерывным движением системы в момент времени $t \in T_i$, $u_i(t) \in U_i \subset \mathbb{R}^{p_i}$, U_i — заданное множество допустимых значений управления, $i \in \mathbb{N}$. При $t_i = t_{i+1}$ дифференциальное уравнение (1.2) опускается ($i \notin \mathbb{N}$), функция $x_i(\cdot)$ определена в одной точке $x_i(t_i) = x_i$, а значение $u_i(t_i)$ управления в этой точке несущественно.

Функции $f_i : T \times X_i \times U_i \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 0, 1, \dots, N$, и $g_i : T \times X_{i-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, \dots, N$, непрерывны на всей области определения вместе с первыми частными производными по t и по компонентам вектора x_i . Возможное равенство последовательных моментов в (1.1) означает, что система совершает мгновенные многократные переключения [3, 7].

Начальное состояние системы задано начальным условием

$$x_0(t_0) = 0. \quad (1.4)$$

Конечная позиция системы определяется первым достижением терминальной поверхности:

$$G_F(t_F, x_N(t_F)) = 0. \quad (1.5)$$

Переключения происходят на поверхностях, которые задаются уравнениями

$$G_i(t_i, x_{i-1}(t_i)) = 0. \quad (1.6)$$

Функции $G_F : [t_0, +\infty) \times X_N \rightarrow \mathbb{R}^N$, $G_i : [t_0, +\infty) \times X_{i-1} \rightarrow \mathbb{R}^{l_{i-1}}$, $i = 1, \dots, N$, определяющие терминальные (1.5) и промежуточные (1.6) ограничения, непрерывно дифференцируемые. Терминальные условия, аналогичные (1.5), могут накладываться на левый конец траектории [8, 9] либо на оба конца траектории одновременно (например, условие периодичности).

Множество допустимых процессов $\mathcal{D}_0(t_0, x_0)$ составляют тройки $d = (T, x(\cdot), u(\cdot))$, включающие неубывающую последовательность T моментов переключений (1.1); последовательность $x(\cdot) = \{x_i(\cdot)\}_{i=0}^N$ абсолютно непрерывных функций $x_i : T_i \rightarrow X_i$, $i \in N$; последовательность $u(\cdot) = \{u_i(\cdot)\}_{i=0}^N$ ограниченных измеримых функций $u_i : T_i \rightarrow U_i$. Причем пары $(x_i(\cdot), u_i(\cdot))$, $i \in N$, удовлетворяют дифференциальному уравнению (1.2) почти всюду на промежутке T_i , а последовательность $x_i(t_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$, — рекуррентному уравнению (1.3). В начальный момент времени выполняется условие (1.4), в конечный — терминальное условие (1.5), в моменты переключений — промежуточные ограничения (1.6). Подчеркнем, что количество N переключений и моменты T не фиксированы и у разных допустимых процессов могут не совпадать. При этом не исключается случай отсутствия переключений, когда $N = 0$ и $T = \{t_F\}$.

На множестве $\mathcal{D}_0(t_0, x_0)$ допустимых процессов задан функционал качества:

$$I_0(t_0, x_0, d) = \sum_{i=0}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_i^0(t, x_i(t), u_i(t)) dt + \sum_{i=1}^N g_i^0(t_i, x_{i-1}(t_i)) + F_N(t_F, x_N(t_F)), \quad (1.7)$$

где скалярные функции $f_i^0 : T_i \times X_i \times U_i \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i^0 : T \times X_{i-1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ и $F_N : [t_0, +\infty) \times X_N \rightarrow \mathbb{R}$ ограничены снизу и непрерывны вместе с первыми частными производными по t и по компонентам вектора x_i . Функции g_i^0 неотрицательные. Последнее условие позволяет рассматривать каждое слагаемое $g_i^0(t_i, x_{i-1}(t_i))$ в (1.7) как затраты (или штраф) при переключении $x_{i-1}(t_i) \rightarrow x_i(t_i) = g_i(t_i, x_{i-1}(t_i))$ из состояния $x_{i-1}(t_i)$ в состояние $x_i(t_i)$. В функционале (1.7) момент окончания t_F обозначен также через t_{N+1} , как и ранее в (1.1).

Требуется найти минимальное значение функционала (1.7) и оптимальный процесс $d^* = (T^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot), \{v^*\}) \in \mathcal{D}_0(t_0, x_0)$, на котором это значение достигается:

$$I_0(t_0, x_0, d^*) = \min_{d \in \mathcal{D}_0(t_0, x_0)} I_0(t_0, x_0, d). \quad (1.8)$$

Если наименьшее значение (1.8) не существует, то может быть поставлена задача нахождения минимизирующей последовательности допустимых процессов [8]. Количество переключений у процессов минимизирующей последовательности может оставаться конечным или неограниченно возрастать. Бесконечное количество переключений у оптимального процесса становится невозможным, если усилить условие ограниченности функции g_i^0 в (1.7), полагая $g_i^0(t, x_{i-1}) \geq \text{const} > 0$. Применение таких штрафов в функционале качества исключает фиктивные переключения, когда состояние не меняется: $x_{i-1}(t_i) = x_i(t_i)$, а также последовательности процессов с неограниченным ростом числа переключений как неминимизирующие.

Поставленная задача отличается от рассмотренной в [7] отсутствием дискретного управления переключениями, что несколько упрощает задачу. Отметим, что управляющие параметры в задаче (1.8) образуют *управляющий комплекс*, который включает: количество переключений N , моменты переключений $t_1, \dots, t_N$, управление непрерывным движением $u(\cdot)$ и момент t_F окончания процесса управления. Как правило, решение поставленной задачи $I \rightarrow \min$ сводится к решению ряда задач $I_N \rightarrow \min$ с фиксированным числом переключений N , которое последовательно увеличивается: $N = 0, 1, \dots$. Отметим, что в прикладных задачах количество переключений всегда ограничено техническими требованиями.

1.2. Необходимые условия оптимальности. Введем функции Понтрягина для непрерывного движения и переключений соответственно [7]:

$$\begin{aligned} H_i(\psi_i, t, x_i, u_i) &= \psi_i f_i(t, x_i, u_i) - \lambda_0 f_i^0(t, x_i, u_i), \quad i = 0, 1, \dots, N, \\ \hat{H}_i(\psi_i, t, x_{i-1}) &= \psi_i g_i(t, x_{i-1}) - \lambda_0 g_i^0(t, x_{i-1}), \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь λ_0 — неотрицательный множитель, $\psi_i = (\psi_i^1, \dots, \psi_i^{n_i})$ — вспомогательные вектор-функции, $i = 1, \dots, N$. Предполагаем, что между моментами переключений функции $\psi_i : T_i \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$, $i \in N$, абсолютно непрерывны. Функции Понтрягина (1.9) используются в формулировке следующих условий оптимальности.

Т е о р е м а (необходимые условия оптимальности ГСПР). Пусть оптимальный процесс $(T, x(\cdot), u(\cdot))$ имеет N переключений в моменты $t_1, \dots, t_N$: $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_F$. Тогда существу-

ют функции $\psi_i(\cdot)$, $i = 0, 1, \dots, N$, и такие числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N+1}$, неравные нулю одновременно, что выполняются:

1) дифференциальные уравнения:

$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial H_i}{\partial x_i}[t], \quad t \in T_i, \quad i \in N;$$

2) промежуточные условия:

$$\left\{ H_i[t_i] - H_{i-1}[t_i] - \frac{\partial \hat{H}_i}{\partial t}[t_i] + \lambda_{i+1} - \lambda_i \right\} \delta t_i + \left\{ \psi_{i-1}(t_i) - \frac{\partial \hat{H}_i}{\partial x_{i-1}}[t_i] \right\} \delta x_{i-} = 0$$

при всех вариациях, связанных равенствами

$$\frac{\partial G_i}{\partial t}[t_i] \delta t_i + \frac{\partial G_i}{\partial x_{i-1}}[t_i] \delta x_{i-} = 0, \quad i = 1, \dots, N;$$

3) условие трансверсальности:

$$\left\{ \lambda_0 \frac{\partial F_N}{\partial t}[t_F] - H_N[t_F] - \lambda_{N+1} \right\} \delta t_F + \left\{ \frac{\partial F_N}{\partial x_N}[t_F] + \psi_N(t_F) \right\} \delta x_N = 0$$

для любых вариаций, связанных равенством

$$\frac{\partial G_F}{\partial t}[t_F] \delta t_F + \frac{\partial G_F}{\partial x_N}[t_F] \delta x_N = 0;$$

4) условие максимума функции Понтрягина по управлению непрерывным движением:

$$H_i[t] = \max_{u_i \in U_i} H_i(\psi_i(t), t, x_i(t), u_i)$$

почти всюду на T_i , $i \in N$;

5) условия дополняющей нежесткости:

$$\lambda_{i+1}(t_i - t_{i+1}) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N;$$

6) условия неотрицательности:

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, N + 1.$$

Доказательство теоремы следует из необходимых условий, приведенных в [7] для задачи с дискретным управлением переключениями. В формулировке теоремы и далее принято следующее соглашение [10]: аргумент t , заключенный в квадратные скобки, означает, что функция вычислена на оптимальном процессе в указанный момент времени. Например, $H_i[t] = H_i(\psi_i(t), t, x_i(t), u_i(t))$,

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_i}[t] = \frac{\partial H_i}{\partial x_i}(\psi_i(t), t, x_i(t), u_i(t)), \quad \frac{\partial \hat{H}_i}{\partial x_{i-1}}[t_i] = \frac{\partial \hat{H}_i}{\partial x_{i-1}}(\psi_i(t_i), t_i, x_{i-1}(t_i)).$$

Заметим, что если из условия 4) теоремы удастся выразить оптимальное управление $u_i = u_i(\psi_i, t, x_i)$ как функцию времени, состояния и вспомогательных переменных, то, подставляя это управление в уравнения движения (1.2) и уравнения п. 1) теоремы, получаем краевую задачу с промежуточными условиями (1.3). Ее решение зависит от $2(n_0 + n_1 + \dots + n_N)$ произвольных постоянных, моментов переключений $t_1, \dots, t_N$ и множителей Лагранжа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N+1}$. Всего есть $2(n_0 + n_1 + \dots + n_N + N) + 3$ параметров. Для нахождения этих параметров имеются следующие уравнения: начальные условия (1.4) определяются n_0 равенствами, промежуточные ограничения (1.6) и условия 2) теоремы задают $n_0 + n_1 + \dots + n_N + N$ уравнений, терминальные условия (1.5) и условия трансверсальности 3) дают $n_N + 1$ равенств, рекуррентные уравнения (1.3) представляют собой $n_0 + n_1 + \dots + n_N$ равенств, а условия дополняющей нежесткости 5) записаны как система $N + 1$ равенств. Всего имеется $2(n_0 + n_1 + \dots + n_N + N) + 2$ уравнений, связывающих параметры. Этих условий хватает, так как коэффициенты $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N+1}$ определяются с точностью до положительного множителя. Как правило, систему дополняют либо равенством $\lambda_0 = 0$ (вырожденный [11], нерегулярный [9] случаи), либо ра-

венством $\lambda_0 = 1$ (невыврожденный, регулярный случай). Таким образом, теорема, как и принцип максимума [4], дает “полную” систему условий, для нахождения процесса, который может быть оптимальным.

2. Задача оптимального управления с фазовыми ограничениями. 2.1. П о с т а н о в к а задачи с ф а з о в ы м и о г р а н и ч е н и я м и. Пусть на промежутке времени $T = [t_0, t_F]$ движение динамической системы описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (2.1)$$

где $x(t)$ — состояние системы в момент времени $t \in T$, $x(t) \in X = \mathbb{R}^n$; $u(t)$ — значение управления в момент времени $t \in T$, $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^p$. Функция $f : T \times X \times U \rightarrow X$ непрерывна на всей области определения вместе с первыми частными производными по t и по компонентам вектора x .

Начальное состояние системы задано начальным условием

$$x(t_0) = x_0. \quad (2.2)$$

Конечная позиция системы определяется первым достижением терминальной поверхности:

$$G_F(t_F, x(t_F)) = 0. \quad (2.3)$$

Функция $G_F : [t_0, +\infty) \times X \rightarrow \mathbb{R}^l$ — непрерывно дифференцируемая. Терминальные условия, аналогичные (2.3), могут накладываться на левый конец траектории [8, 9] либо на оба конца траектории одновременно (например, условие периодичности).

В каждый момент времени $t \in T$ состояние системы и управление удовлетворяют следующим ограничениям:

$$Q(t, x(t)) \leq 0, \quad (2.4)$$

$$q(t, x(t), u(t)) \leq 0, \quad (2.5)$$

$$u(t) \in U. \quad (2.6)$$

Фазовые ограничения представлены неравенством (2.4), смещанные — неравенством (2.5), геометрические — включением (2.6). Функции $Q : T \times X \rightarrow \mathbb{R}^M$ и $q : T \times X \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$ — непрерывно дифференцируемые, $Q = (Q^1, \dots, Q^M)^T$; $q = (q^1, \dots, q^m)^T$; множество U допустимых значений управления — замкнутое подмножество $\mathbb{R}^p$. Другие формы записи ограничений применяются в [2, 8, 11].

Множество допустимых процессов $\mathcal{D}(t_0, x_0)$ составляют тройки $d = (t_F, x(\cdot), u(\cdot))$, включающие момент t_F окончания движения; абсолютно непрерывную функцию $x : T \rightarrow X$; ограниченную измеримую функцию $u : T \rightarrow U$. Причем пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ удовлетворяют дифференциальному уравнению (2.1) почти всюду на промежутке T . В начальный момент времени выполняется условие (2.2), в конечный — терминальное условие (2.3), в любой момент $t \in T$ — ограничения (2.4) — (2.6).

На множестве $\mathcal{D}(t_0, x_0)$ допустимых процессов задан функционал качества

$$I(t_0, x_0, d) = \int_{t_0}^{t_F} f^0(t, x(t), u(t)) dt + F(t_F, x(t_F)), \quad (2.7)$$

где скалярные функции $f^0 : T \times X \times U \rightarrow \mathbb{R}$ и $F : [t_0, +\infty) \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ограничены снизу и непрерывны вместе с первыми частными производными по t и по компонентам вектора x .

Требуется найти минимальное значение функционала (2.7) и оптимальный процесс $d^* = (T^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \mathcal{D}(t_0, x_0)$, на котором это значение достигается:

$$I_0(t_0, x_0, d^*) = \min_{d \in \mathcal{D}(t_0, x_0)} I_0(t_0, x_0, d).$$

Если наименьшее значение функционала (2.7) не существует, то может быть поставлена задача нахождения минимизирующей последовательности допустимых процессов [8].

2.2. Задача со сменной активной фазовой ограничением. Рассмотрим задачу минимизации функционала (2.7), в которой задана конечная последовательность

изменения активных фазовых ограничений. Напомним, что ограничение типа нестрогого неравенства называется *активным*, если оно выполняется как равенство, и *пассивным*, если оно выполняется как строгое неравенство.

Пусть на промежутке T функционирования динамической системы (2.1) существуют N моментов переключений $t_1, \dots, t_N$, образующих вместе с моментом t_F окончания движения неубывающую конечную последовательность $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_N, t_F\}$, удовлетворяющую условиям (1.1). Предполагаем, что между неравными последовательными моментами переключений состав (набор) активных фазовых ограничений в системе (2.4) постоянный, а в моменты переключений набор активных ограничений меняется. Иначе говоря, известен план “активизации” фазовых ограничений, т.е. последовательность (порядок чередования) смены активных фазовых ограничений. Моменты переключений (1.1) не фиксированы и служат ресурсом управления. Нестрогие неравенства в (1.1) допускают совпадение некоторых последовательных моментов переключений. Если в результате оптимизации управления два последовательных момента переключений оказались равными, то это значит, что либо траектория управляемого процесса «касается» активного ограничения, либо предполагаемый на этом промежутке набор активных ограничений не отвечает оптимальному процессу и его (набор) надо заменить или исключить из рассмотрения. Кроме того, нестрогие неравенства задают замкнутое множество допустимых моментов переключений, что важно для существования решения задачи оптимизации.

Обозначим, как и ранее, через $N \triangleq \{i = 0, 1, \dots, N | t_i < t_{i+1}\}$ — множество номеров ненулевых (по длине) частичных промежутков $T_i = [t_i, t_{i+1}]$. Рассмотрим подробнее движение на одном ненулевом по продолжительности промежутке T_i , $i \in N$. Предполагаем, что на этом промежутке k неравенств из (2.4) с разными номерами $i_1, \dots, i_k$ выполняются как равенства

$$Q^{i_1}(t, x(t)) = 0, \dots, Q^{i_k}(t, x(t)) = 0, \quad t \in T_i. \quad (2.8)$$

Составим из этих активных на промежутке T_i фазовых ограничений систему уравнений:

$$Q_i(t, x) = 0, \quad (2.9)$$

где $Q_i(t, x) = (Q^{i_1}(t, x), \dots, Q^{i_k}(t, x))^T$ — столбец из левых частей равенств (2.8). Так как равенства (2.9) верны на всем промежутке T_i , то, дифференцируя их в силу уравнений движения (2.1), получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial Q_i}{\partial x}(t, x)f(t, x, u) = 0. \quad (2.10)$$

Отметим, что (2.10) представляют собой дополнительное смешанное ограничение типа равенства.

Выполняя такую процедуру для каждого ненулевого (по длине) промежутка T_i , получаем задачу оптимального управления, в которой пассивные фазовые ограничения исключены:

$$t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_{N+1} \triangleq t_F,$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (2.11)$$

$$Q_i(t_i, x(t_i)) = 0, \quad \frac{\partial Q_i}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial Q_i}{\partial x}f(t, x(t), u(t)) = 0, \quad (2.12)$$

$$q(t, x(t), u(t)) \leq 0, \quad u(t) \in U, \quad t \in T_i, \quad i \in N, \quad (2.13)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad G_F(t_F, x(t_F)) = 0,$$

$$I_0(t_0, x_0, d) = \sum_{i=0}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} f^0(t, x(t), u(t)) dt + F(t_F, x(t_F)) \rightarrow \min. \quad (2.14)$$

Заметим, что основное предположение об известном плане “активизации” фазовых ограничений в прикладных задачах, как правило, оправдывается. Специалисты, разрабатывающие системы управления, знают режимы эксплуатации, ограничения, а также порядок их “преодоления” в процессе управления. Поэтому последовательность, в которой нужно учитывать те или иные ограничения, известна. Заранее неизвестны моменты времени, в которые эти

ограничения будут “возникать” в процессе управления. Эти моменты “переключений” состава активных ограничений являются ресурсом управления и находятся при оптимизации.

Если последовательность изменения состава активных фазовых ограничений точно не известна, то можно решить задачи с разными планами “активизации”, а затем выбрать наилучшее решение. Как правило, фазовых ограничений в задачах оптимального управления не очень много. Поэтому количество рациональных планов изменения состава активных ограничений не слишком большое.

2.3. И с к л ю ч е н и е а к т и в н ы х ф а з о в ы х о г р а н и ч е н и й. В задаче (2.14) между неравными моментами переключений набор активных ограничений фиксирован. Рассмотрим процедуру исключения этих ограничений на одном ненулевом по продолжительности промежутке T_i .

Активные на промежутке T_i ограничения представляют собой систему алгебраических уравнений (2.9), которая определяет некоторое многообразие в пространстве $T \times X$ позиций системы (2.11). Предполагаем, что многообразие (2.9) можно задать параметрическими уравнениями, т.е. существует такая функция $x = \alpha_i(t, x_i)$ с вектором параметров $x_i \in X_i = \mathbb{R}^{n_i}$, что

$$Q_i(t, \alpha_i(t, x_i)) \equiv 0. \quad (2.15)$$

Смешанное ограничение (2.10) рассматриваем как систему алгебраических уравнений относительно неизвестной u . Считаем, что ее решение можно записать в параметрической форме, используя новые управляющие параметры. Пусть существуют такие функция $u = \beta_i(t, x_i, u_i)$ и множество $U_i \subset \mathbb{R}^{p_i}$, что

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t}(t, \alpha_i(t, x_i)) + \frac{\partial Q_i}{\partial x} f(t, \alpha_i(t, x_i), \beta_i(t, x_i, u_i)) \equiv 0, \quad (2.16)$$

причем

$$q(t, \alpha_i(t, x_i), \beta_i(t, x_i, u_i)) \leq 0, \beta_i(t, x_i, u_i) \in U \quad (2.17)$$

при всех $u_i \in U_i$.

При подстановке функций $x = \alpha_i(t, x_i)$ и $u = \beta_i(t, x_i, u_i)$ в фазовые и в смешанные ограничения (2.12), (2.13) они выполняются “автоматически” (их можно удалить), а геометрическое ограничение заменяется новым геометрическим ограничением $u_i \in U_i$. Параметры x_i и u_i будем рассматривать как состояние и управление новой динамической системы. Составляем уравнения движения этой системы. Предполагая дифференцируемость функции $x = \alpha_i(t, x_i)$, находим ее производную в силу уравнений движения (2.11):

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t}(t, x_i) + \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i}(t, x_i) \dot{x}_i = f(t, \alpha_i(t, x_i), \beta_i(t, x_i, u_i)).$$

Выражая скорость изменения параметров, получаем

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_i(t), u_i(t)). \quad (2.18)$$

Таким образом, исключая активные фазовые ограничения на промежутке T_i , приходим к системе управления, движение которой происходит без фазовых и смешанных ограничений.

Заметим, что ограничения (2.8) становятся активными в момент t_i , когда заканчивается движение системы на предыдущем участке $T_{i-1} = [t_{i-1}, t_i]$. Пусть на промежутке T_{i-1} выполнена процедура исключения активных ограничений $Q_{i-1}(t, x) = 0$, т.е. найдена соответствующая функция $x = \alpha_{i-1}(t, x_{i-1})$. Тогда в момент времени t_i выполняется условие $Q_{i-1}(t_i, \alpha_{i-1}(t_i, x_{i-1}(t_i))) = 0$, которое можно записать в виде

$$G_i(t_i, x_{i-1}(t_i)) = 0, \quad (2.19)$$

где $G_i(t_i, x_{i-1}) = Q_{i-1}(t_i, \alpha_{i-1}(t_i, x_{i-1}))$. Кроме того, в момент переключения t_i траектория исходной систем остается непрерывной. Поэтому должно выполняться равенство

$$\alpha_{i-1}(t_i, x_{i-1}(t_i)) = \alpha_i(t_i, x_i(t_i)).$$

Предполагаем, что его можно решить относительно x_i , получая при этом

$$x_i(t_i) = g_i(t_i, x_{i-1}(t_i)). \quad (2.20)$$

Таким образом, порядок исключения активных на промежутке T_i фазовых ограничений (2.9) следующий:

- 1) получить параметрические уравнения $x = \alpha_i(t, x_i)$, удовлетворяющие (2.15);
- 2) получить параметрические уравнения $u = \beta_i(t, x_i, u_i)$, удовлетворяющие (2.16), (2.17);
- 3) составить дифференциальные уравнения (2.18), используя уравнения движения исходной системы;
- 4) записать ограничение (2.19) в момент переключения;
- 5) составить рекуррентное уравнение (2.20), используя условие непрерывности траектории исходной системы.

Описанная процедура кажется сложной из-за неоднозначности указанных действий. На самом деле, она аналогична методу исключения неизвестных в системах алгебраических уравнений. В общем случае этот метод трудно формализовать. Однако его применение вполне очевидное. Заметим, что фазовые ограничения являются, как правило, простыми алгебраическими неравенствами, часто линейными. В этих случаях выполнить исключение неизвестных несложно.

2.4. Гибридная модель задачи со сменой активных фазовых ограничений. Задачу (2.14) со сменой активных ограничений можно представить как задачу (1.8) управления ГСПР с промежуточными условиями. Для этого надо исключить активные фазовые ограничения, используя процедуру, описанную в разд. 2.3. В результате исключения на каждом участке T_i непрерывного движения системы (2.11) образуются новые векторы состояния x_i и управления u_i , а сама система (2.11) заменяется новой динамической системой меньшей размерности. Характер функционирования системы становится гибридным. Непрерывное движение чередуется с переключениями, при которых меняется размерность пространства состояний и множества значений управления. Иначе говоря, непрерывная система (2.11) становится гибридной, а задача (2.14) со сменой активных фазовых ограничений заменяется задачей управления ГСПР:

$$\begin{aligned}
 t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_{N+1} &\triangleq t_F, \\
 \dot{x}_i(t) &= f_i(t, x_i(t), u_i(t)), \\
 u_i(t) &\in U_i, \quad t \in T_i, \quad i \in \mathbb{N}, \\
 x_i(t_i) &= g_i(t_i, x_{i-1}(t_i)), \\
 G_i(t_i, x_{i-1}(t_i)) &= 0, \quad i = 1, \dots, N, \\
 x_0(t_0) = x_0, \quad G_F(t_F, \alpha_N(t_F, x_N(t_F))) &= 0, \\
 I_0(t_0, x_0, d) &= \sum_{i=0}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_i^0(t, x_i(t), u_i(t)) dt + F_N(t_F, x_N(t_F)) \rightarrow \min.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Все функции в (2.21) получаются при исключении ограничений (см. разд. 2.3), в частности, $f_i^0(t, x_i, u_i) = f^0(t, \alpha_i(t, x_i), \beta_i(t, x_i, u_i))$, $F_N(t, x_N) = F(t, \alpha_N(t, x_N))$. Постановка задачи (2.21) почти совпадает с рассмотренной в разд. 1.1 задачей управления ГС с промежуточными ограничениями. Отличие состоит в отсутствии в функционале качества суммы затрат на переключения. Поэтому для ее решения можно использовать необходимые условия, приведенные в разд. 1.2, при $g_i^0 = 0$, $i = 1, \dots, N$.

Заметим, что количество N переключений в задаче (2.21) считается известным, так как задан план “активизации” ограничений. Поэтому управляющий комплекс составляют моменты переключений $t_1, \dots, t_N$, момент t_F окончания процесса управления и управление $u(\cdot) = \{u_i(\cdot)\}_{i=0}^N$ непрерывным движением.

2.5. Исключение линейных фазовых ограничений в задаче управления линейной системой. Рассмотрим задачу управления линейной стационарной системой с линейными фазовыми ограничениями:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{2.22}$$

$$Qx(t) \leq q, \tag{2.23}$$

$$u(t) \in U, \quad t \in [t_0, t_F]. \tag{2.24}$$

Матрицы A , B , Q , q имеют размеры $n \times n$, $n \times p$, $m \times n$, $m \times 1$ соответственно. Начальные и конечные условия, а также минимизируемый функционал не указываются, так как речь пойдет только об исключении фазового ограничения (2.23).

Предполагаем, что план “активизации” ограничений известен, т.е. промежуток функционирования системы (2.22) разбивается моментами переключений $t_1, \dots, t_N$, удовлетворяющими (1.1), на промежутки $T_i = [t_i, t_{i+1}]$, на каждом из которых часть неравенств (2.23) выполняются как равенства

$$Q_i x = q_i. \quad (2.25)$$

Решение линейной системы (2.25) алгебраических уравнений можно представить в виде

$$x = \phi^i + \Phi_i x_i, \quad (2.26)$$

где ϕ^i — частное решение системы (2.25), Φ_i — фундаментальная матрица соответствующей однородной системы, а x_i — столбец произвольных постоянных.

Дифференцируя (2.25) в силу уравнений движения (2.22) и подставляя (2.26), получаем

$$Q_i(Ax + Bu) = 0 \Leftrightarrow Q_i Bu = -Q_i Ax \Leftrightarrow Q_i Bu = -Q_i A(\phi^i + \Phi_i x_i). \quad (2.27)$$

Решение линейной системы (2.27) алгебраических уравнений можно представить в виде

$$u = \psi^i + \Psi_i u_i, \quad (2.28)$$

где ψ^i — частное решение системы (2.27), Ψ_i — фундаментальная матрица соответствующей однородной системы, а u_i — столбец произвольных постоянных. Геометрические ограничения (2.24) на значения управления $u = \psi^i + \Psi_i u_i \in U$ нужно обеспечить выбором ограничений $u_i \in U_i$. Поскольку матрица Ψ_i невырожденная, то $U_i = \Psi_i^{-1}(U - \psi^i)$.

Как видим, столбцы произвольных постоянных x_i и u_i становятся векторами состояния и управления новой динамической системы. Осталось получить дифференциальные уравнения непрерывного движения этой системы и рекуррентные уравнения переключений. Подставляя (2.25) и (2.28) в (2.22), находим

$$\Phi_i \dot{x}_i = A(\phi^i + \Phi_i x_i) + B(\psi^i + \Psi_i u_i) \Leftrightarrow \dot{x}_i = \Phi_i^{-1}[A(\phi^i + \Phi_i x_i) + B(\psi^i + \Psi_i u_i)].$$

Записываем, фазовые ограничения в момент t_i их активизации и условия непрерывности:

$$Q_{i-1}[\phi^{i-1} + \Phi_{i-1} x_{i-1}(t_i)] = 0, \quad (2.29)$$

$$\phi^{i-1} + \Phi_{i-1} x_{i-1}(t_i) = \phi^i + \Phi_i x_i(t_i) \Leftrightarrow x_i(t_i) = \Phi_i^{-1}[\phi^{i-1} - \phi^i + \Phi_{i-1} x_{i-1}(t_i)]. \quad (2.30)$$

Процедура исключения активных на промежутке T_i фазовых ограничений (2.25) закончена. Движение системы (2.22) на этом промежутке заменяется непрерывным движением новой системы:

$$\dot{x}_i = \Phi_i^{-1}[A(\phi^i + \Phi_i x_i) + B(\psi^i + \Psi_i u_i)], \quad u_i(t) \in U_i, \quad t \in T_i, \quad (2.31)$$

с переключением (2.30) и промежуточным условием (2.29) в момент t_i :

$$x_i(t_i) = \Phi_i^{-1}[\phi^{i-1} - \phi^i + \Phi_{i-1} x_{i-1}(t_i)], \quad Q_{i-1}[\phi^{i-1} + \Phi_{i-1} x_{i-1}(t_i)] = 0.$$

Векторы состояния x и управления u системы (2.22) выражаются через состояние x_i и управление u_i новой системы (2.31) по формулам (2.26) и (2.28). Заметим, что решения систем (2.25), (2.27) линейных алгебраических уравнений можно было записать, выражая базисные переменные через свободные. В этом случае новыми векторами состояния x_i и управления u_i стали бы соответствующие свободные переменные.

3. Примеры. Рассмотрим два примера применения необходимых условий ГСПР для решения задач с фазовыми ограничениями. В первом примере модель движения простая. В зависимости от начальных условий оптимальные процессы реализуют разные планы “активизации” фазовых ограничений. Аналитическое решение подтверждается геометрическими соображениями. Второй пример — это классическая задача Фельдбаума А. А. [12] с двумя дополнитель-

ными фазовыми ограничениями. План “активизации” ограничений строится на основе известного “свободного” движения (без фазовых ограничений).

П р и м е р 1. Найти оптимальное управление в задаче быстрогодействия

$$\dot{x}(t) = u(t),$$

$$u(t) \in U(x(t)),$$

$$x(t) \geq 0, \quad t \in [0, T],$$

$$x(0) = A, \quad x(T) = O,$$

$$T \rightarrow \min. \quad (3.1)$$

Здесь $x = (x^1, x^2, x^3)^T$, $u = (u^1, u^2, u^3)^T$ – векторы состояния и управления, $x \in \mathbb{R}^3$, $u \in \mathbb{R}^3$; фазовое ограничение $x \geq 0$ определяет неотрицательный октант $x^1 \geq 0$, $x^2 \geq 0$, $x^3 \geq 0$, допустимые значения управления ограничены по модулю:

$$U(x) = \begin{cases} |u| \leq 1, & x^1 > 0, x^2 > 0, x^3 > 0, \\ |u| \leq \sqrt{2}, & x^1 > 0, x^2 > 0, x^3 = 0, \\ |u| \leq 2, & x^1 x^2 = 0, x^3 = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

В поставленной задаче имеются три фазовых ограничения и смешанное ограничение (3.2). Движение системы внутри положительного октанта $x > 0$ происходит со скоростью, ограниченной неравенством $|u| = \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2} \leq 1$. При движении по координатной плоскости $x^3 = 0$ внутри первой четверти ($x^1 > 0$ и $x^2 > 0$) допускается большая скорость, удовлетворяющая неравенству $|u| = \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2} \leq \sqrt{2}$, при этом, разумеется, $u^3 = 0$. Наконец, скорость движения по оси абсцисс или оси ординат, когда $x^3 = 0$, $u^3 = 0$, а также $x^1 = 0$ и $u^1 = 0$ или $x^2 = 0$ и $u^2 = 0$, может быть самой большой, так как она ограничена неравенством $|u| \leq 2$. Требуется найти наименьшее время (3.1) перемещения системы из заданного начального состояния $A(x_A^1, x_A^2, x_A^3)$ в начало координат $O(0; 0; 0)$.

Предполагаем, что начальное состояние $x(0) = A$ находится внутри положительного октанта, т.е. $x_A^1 > 0$, $x_A^2 > 0$, $x_A^3 > 0$, причем $x_A^1 \geq x_A^2$. “Симметричный” случай $x^1 \leq x^2$ рассматривается аналогично. В других случаях, когда начальное состояние принадлежит координатной оси или координатной плоскости, решение упрощается.

Составим план “активизации” фазовых ограничений. Возможны четыре варианта:

- 0) “свободное” движение (без активных фазовых ограничений);
- 1) движение с одним активным фазовым ограничением $x^3 = 0$;
- 2) движение с одновременной активизацией двух фазовых ограничений $x^3 = 0$ и $x^2 = 0$;
- 3) движение с последовательной активизацией двух ограничений, сначала $x^3 = 0$, а потом дополнительно $x^2 = 0$.

Случай 0). Оптимальное “свободное” движение определяем при помощи принципа максимума. Составляем функцию Понтрягина $H = \psi u - \lambda_0$, где $\psi = (\psi^1, \psi^2, \psi^3)$ – вспомогательная вектор-функция, которая удовлетворяет уравнению $\dot{\psi} = 0$. Находим точку максимума функции Понтрягина по управлению $u = \psi^T / |\psi|$. Из условия трансверсальности получаем $H[T] = \lambda_0$. Поскольку $\lambda_0 > 0$, полагаем, что $\lambda_0 = 1$. Тогда $|\psi(T)| = 1$ и управление $u = \psi^T$. Так как вспомогательная переменная постоянна, то управление тоже постоянно. Из начальных и конечных условий заключаем, что $u = -\overline{OA} / |\overline{OA}|$, а оптимальная траектория – отрезок OA . На рис. 1 отрезок OA изображен полужирной линией. Стрелкой обозначено направление движения. Точки A_0 и A_1 – проекции точки A на координатную плоскость Ox^1x^2 и координатную ось Ox^1 соответственно. Наименьшее время движения, численно равное длине отрезка OA , обозначим как

$$T_0 = \sqrt{(x_A^1)^2 + (x_A^2)^2 + (x_A^3)^2}.$$

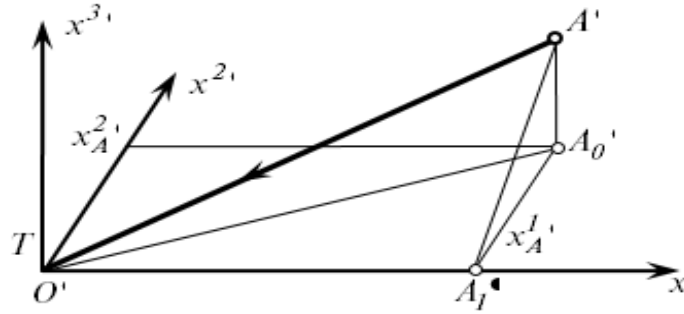


Рис. 1. Траектория “свободного” движения (без активных фазовых ограничений).

Полученный результат очевиден с геометрической точки зрения, так как кратчайшее расстояние между двумя точками евклидова пространства равно длине отрезка, соединяющего эти точки.

Случай 1). Предполагаем, что сначала система движется “свободно” (без активных фазовых ограничений), затем в некоторый момент t_1 она попадает на координатную плоскость $x^3 = 0$ и движется по ней до начала координат. Записываем соответствующую задачу оптимального управления ГСПР:

$$0 < t_1 < T,$$

$$\dot{x}_0^1(t) = u_0^1(t), \quad \dot{x}_0^2(t) = u_0^2(t), \quad \dot{x}_0^3(t) = u_0^3(t), \quad |u_0(t)| \leq 1, \quad t \in [0; t_1],$$

$$x_0(0) = A, \quad x_0^3(t_1) = 0,$$

$$\dot{x}_1^1(t) = u_1^1(t), \quad \dot{x}_1^2(t) = u_1^2(t), \quad |u_1(t)| \leq \sqrt{2}, \quad t \in [t_1; T],$$

$$x_1^1(t_1) = x_0^1(t_1), \quad x_1^2(t_1) = x_0^2(t_1), \quad x_1^1(T) = 0, \quad x_1^2(T) = 0, \quad (3.3)$$

$$T \rightarrow \min. \quad (3.4)$$

Активное на втором участке движения ограничение $x^3 = 0$ исключено. Координата x^3 и управление u^3 удалены из векторов состояния $x_1 = (x_1^1, x_1^2)^T$ и управления $u_1 = (u_1^1, u_1^2)^T$. Ограничение $x^3 = 0$ в момент t_1 записано как терминальное ограничение $x_0^3(t_1) = 0$ для первого участка. Условия непрерывности траектории в момент t_1 представлены уравнениями переключений (3.3) в момент t_1 .

Применяем для решения задачи (3.4) необходимые условия оптимальности ГСПР. Поскольку переключение происходит в момент t_1 , отличный от начального и конечного моментов времени, то из условий дополняющей нежесткости следует равенство нулю множителей Лагранжа $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Тогда $\lambda_0 \neq 0$, поэтому можно взять $\lambda_0 = 1$. Для каждого промежутка непрерывного движения записываем функцию Понтрягина, дифференциальные уравнения для вспомогательных переменных, выражение для оптимального управления:

$$H_0 = \psi_0^1 u_0^1 + \psi_0^2 u_0^2 + \psi_0^3 u_0^3 - 1, \quad \dot{\psi}_0 = 0, \quad u_0 = \frac{\psi_0}{|\psi_0|}, \quad t \in [0; t_1]; \quad (3.5)$$

$$H_1 = \psi_1^1 u_1^1 + \psi_1^2 u_1^2 - 1, \quad \dot{\psi}_1 = 0, \quad u_1 = \frac{\psi_1}{|\psi_1|} \sqrt{2}, \quad t \in [t_1; T]. \quad (3.6)$$

Для момента переключения составляем функцию Понтрягина и записываем промежуточное условие:

$$\hat{H}_1 = \psi_1^1 x_0^1 + \psi_1^2 x_0^2,$$

$$\{|\psi_1| \sqrt{2} - |\psi_0|\} \delta t_1 + \{\psi_0^1 - \psi_1^1\} \delta x_0^1 + \{\psi_0^2 - \psi_1^2\} \delta x_0^2 = 0.$$

Поскольку вариации δt_1 , δx_0^1 , δx_0^2 произвольные, получаем в момент t_1

$$|\psi_1| \sqrt{2} - |\psi_0| = 0, \quad \psi_0^1 = \psi_1^1, \quad \psi_0^2 = \psi_1^2. \quad (3.7)$$

В конечный момент времени T условие transversальности имеет вид

$$\{|\psi_1| \sqrt{2} - 1\} \delta T + \psi_1^1 \delta x_1^1 + \psi_1^2 \delta x_1^2 = 0.$$

Отсюда, учитывая равенства $\delta x_1^1 = \delta x_1^2 = 0$ для фиксированного конечного состояния и произвольность вариации δT , получаем

$$|\psi_1(T)| \sqrt{2} = 1. \quad (3.8)$$

На каждом промежутке непрерывного движения вспомогательные переменные постоянны. Поэтому управление тоже постоянное. Обозначим через $B(x_B^1, x_B^2, 0)$ состояние системы в момент t_1 . Из уравнений движения на последнем участке следует, что

$$0 = x_B^1 + (T - t_1)u_1^1, \quad 0 = x_B^2 + (T - t_1)u_1^2.$$

Отсюда $|\overline{OB}|^2 = (T - t_1)^2 |u_1|^2$. Так как $|u_1| = \sqrt{2}$, значит, $T - t_1 = |\overline{OB}| / \sqrt{2}$. Тогда

$$u_1^1 = -x_B^1 \sqrt{2} / |\overline{OB}|, \quad u_1^2 = -x_B^2 \sqrt{2} / |\overline{OB}|. \quad (3.9)$$

Итак, оптимальное управление (3.9) выражено через координаты точки B . Отметим еще, что, учитывая (3.8) и (3.6), имеем $|\psi_1| = 1 / \sqrt{2}$, следовательно, $u_1 = 2\psi_1$.

Переходим к первому участку, который заканчивается точкой B . Записываем условия (3.7):

$$|\psi_0| = |\psi_1| \sqrt{2} = 1, \quad \psi_0^1 = \psi_1^1 = 0.5u_1^1, \quad \psi_0^2 = \psi_1^2 = 0.5u_1^2.$$

Тогда из (3.5) следует, что $u_0 = \psi_0$. Поэтому $u_0^1 = 0.5u_1^1$, $u_0^2 = 0.5u_1^2$. Интегрируя уравнения движения, имеем

$$x_B^1 = x_A^1 + u_0^1 t_1, \quad x_B^2 = x_A^2 + u_0^2 t_1, \quad 0 = x_A^3 + u_0^3 t_1.$$

Координаты u_0^1 и u_0^2 пропорциональны координатам u_1^1 и u_1^2 соответственно. Поэтому векторы $\overline{OB}$ и $\overline{OA_0}$ коллинеарны. Напомним, что A_0 — проекция точки A на координатную плоскость Ox^1x^2 .

Выражаем квадрат модуля управления u_0 :

$$1 = (u_0^1)^2 + (u_0^2)^2 + (u_0^3)^2 = \frac{(x_B^1)^2}{2|\overline{OB}|^2} + \frac{(x_B^2)^2}{2|\overline{OB}|^2} + \frac{(x_A^3)^2}{t_1^2} = \frac{1}{2} \frac{(x_A^3)^2}{t_1^2}.$$

Значит, $t_1 = x_A^3 \sqrt{2}$. Поскольку скорость движения на первом участке единичная, то $t_1 = AB$. Поэтому $AB = x_A^3 \sqrt{2}$, т.е. угол $ABA_0 = \pi / 4$. Тогда точка B имеет координаты

$$x_B^1 = kx_A^1, \quad x_B^2 = kx_A^2, \quad t_N,$$

где $k = 1 - x_A^3 / |\overline{OA_0}|$. Следовательно, оптимальное управление на первом участке

$$u_0 = -\frac{\overline{BA}}{|\overline{BA}|} \Leftrightarrow u_0^1 = -\frac{x_A^1}{\sqrt{2}|\overline{OA_0}|}, \quad u_0^2 = -\frac{x_A^2}{\sqrt{2}|\overline{OA_0}|}, \quad u_0^3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, в случае 1) оптимальная траектория является ломаной ABO , представленной на рис. 2 полужирными отрезками. Стрелками указано направление движения. Время T_1 движения по оптимальной траектории вычисляется по формуле

$$T_1 = AB + \frac{OB}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(OA_0 + x_A^3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_A^3 + \sqrt{(x_A^1)^2 + (x_A^2)^2}).$$

Заметим, что такая траектория существует, если $OA_0 > x_A^3$.

Случай 2). Предполагаем, что сначала система движется “свободно” (без активных фазовых ограничений), затем в некоторый момент t_1 она попадает на ось абсцисс и движется по ней до

Отсюда, учитывая равенство $\delta x_1^1 = 0$ для фиксированного конечного состояния и произвольность вариации δT , получаем

$$2 |\psi_1(T)| = 1. \quad (3.15)$$

На каждом промежутке непрерывного движения вспомогательные переменные постоянны. Поэтому управление тоже постоянное. Обозначим через $C(x_C^1, 0, 0)$ состояние системы в момент t_1 . Из уравнений движения на последнем участке следует, что $x_C^1 = -(T - t_1)u_1$. Так как $|u_1| = 2$ и $x_C^1 > 0$, значит, $u_1 = -2$ и $T - t_1 = x_C^1 / 2$. Отметим, что из условия (3.13) и (3.15) следует, что $\psi_1 = -0.5$. Управление на втором участке найдено.

Переходим к первому участку, который заканчивается точкой C . Записываем условия (3.14):

$$|\psi_0| = 2 |\psi_1| = 1, \quad \psi_0^1 = \psi_1 = -0.5.$$

Тогда из (3.12) вытекает, что $u_0^1 = \psi_0^1 = -0.5$. Интегрируя уравнения движения, получаем

$$x_C^1 = x_A^1 - 0.5t_1, \quad 0 = x_A^2 + u_0^2 t_1, \quad 0 = x_A^3 + u_0^3 t_1.$$

Выражаем координаты u_0^2 и u_0^3 управления и подставляем их в равенство $|u_0|^2 = 1$:

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{t_1^2} [(x_A^2)^2 + (x_A^3)^2] = \frac{1}{4} + \frac{1}{t_1^2} (AA_1)^2 \Leftrightarrow t_1 = \frac{2AA_1}{\sqrt{3}}.$$

Напомним, что A_1 — проекция точки A на ось абсцисс (см. рис. 1). Учитывая численное равенство $t_1 = AC$, заключаем, что $AC\sqrt{3} = 2AA_1$, т.е. угол $ACA_1 = \pi / 3$. Следовательно, абсцисса точки C равна $x_C^1 = x_A^1 - AA_1 / \sqrt{3}$. Значит, оптимальное управление на первом участке

$$u_0^1 = -0.5, \quad u_0^2 = -\frac{\sqrt{3} x_A^2}{2AA_1}, \quad u_0^3 = -\frac{\sqrt{3} x_A^3}{2AA_1}.$$

Таким образом, в случае 2) оптимальная траектория представляет собой ломаную ACO , представленную на рис. 3 полужирными отрезками. Стрелками указано направление движения. Время T_2 движения по оптимальной траектории вычисляется по формуле

$$T_2 = AC + \frac{OC}{2} = \frac{x_A^1}{2} + \frac{AA_1\sqrt{3}}{2} = \frac{x_A^1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(x_A^2)^2 + (x_A^3)^2}.$$

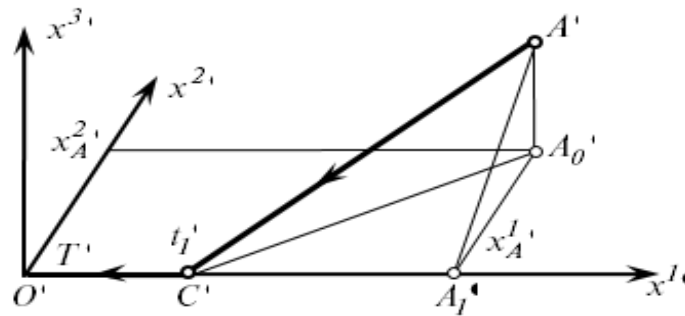


Рис. 3. Траектория с одновременной активизацией двух ограничений.

Заметим, что такая траектория существует, если $x_A^1 > AA_1 / \sqrt{3}$.

Случай 3). Предполагаем, что сначала система движется “свободно” (без активных фазовых ограничений), затем в некоторый момент t_1 она попадает на координатную плоскость Ox^1x^2 . Движение в первой четверти этой координатной плоскости продолжается до момента времени t_2 , когда система оказывается на оси абсцисс, по которой она перемещается в начало координат. Иначе говоря, в момент t_1 активным становится фазовое ограничение $x^3 = 0$, а в момент t_2 дополнительно “активизируется” ограничение $x^2 = 0$. Записываем соответствующую задачу оптимального управления ГСПР:

$$0 < t_1 < t_2 < T,$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_0^1(t) &= u_0^1(t), \quad \dot{x}_0^2(t) = u_0^2(t), \quad \dot{x}_0^3(t) = u_0^3(t), \quad |u_0(t)| \leq 1, \quad t \in [0; t_1], \\ x_0(0) &= A, \quad x_0^3(t_1) = 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^1(t) &= u_1^1(t), \quad \dot{x}_1^2(t) = u_1^2(t), \quad |u_1(t)| \leq \sqrt{2}, \quad t \in [t_1; t_2]; \\ x_1^1(t_1) &= x_0^1(t_1), \quad x_1^2(t_1) = x_0^2(t_1), \quad x_1^2(t_2) = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2^1(t) &= u_2^1(t), \quad |u_2(t)| \leq 2, \quad t \in [t_2; T]; \\ x_2^1(t_2) &= x_1^1(t_2), \quad x_2^1(T) = 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$T \rightarrow \min. \quad (3.19)$$

Активное на втором участке движения фазовое ограничение $x^3 = 0$ исключено. Координаты x^3 и u^3 удалены из векторов состояния и управления. Равенство $x^3 = 0$ в момент t_1 записано как терминальное ограничение (3.16) для первого участка. Условия непрерывности траектории в момент t_1 представлены уравнением переключения (3.17) в момент t_1 . На третьем участке дополнительно исключается активное ограничение $x^2 = 0$. Координаты x^2 и u^2 удаляются из векторов состояния и управления, в момент t_2 добавляется терминальное для второго участка ограничение (3.17), а условия непрерывности траектории в момент t_2 записывается как переключение (3.18).

Применяем для решения задачи (3.19) необходимые условия оптимальности ГСПР. Поскольку переключения происходят в разные моменты, отличные от начального и конечного момента времени, то из условий дополняющей нежесткости следует равенство нулю множителей Лагранжа $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Тогда $\lambda_0 \neq 0$, поэтому можно взять $\lambda_0 = 1$. Для каждого промежутка непрерывного движения записываем функцию Понтрягина, дифференциальные уравнения для вспомогательных переменных, выражение для оптимального управления:

$$\begin{aligned} H_0 &= \psi_0^1 u_0^1 + \psi_0^2 u_0^2 + \psi_0^3 u_0^3 - 1, \quad \dot{\psi}_0 = 0, \quad u_0 = \frac{\psi_0}{|\psi_0|}, \quad t \in [0; t_1], \\ H_1 &= \psi_1^1 u_1^1 + \psi_1^2 u_1^2 - 1, \quad \dot{\psi}_1 = 0, \quad u_1 = \frac{\psi_1}{|\psi_1|} \sqrt{2}, \quad t \in [t_1; t_2], \\ H_2 &= \psi_2 u_2 - 1, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad u_2 = 2 \operatorname{sign} \psi_2, \quad t \in [t_2; T]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Для моментов переключения составляем функции Понтрягина (1.9), записываем промежуточные условия, из которых получаем соотношения для вспомогательных переменных. В момент времени t_1 :

$$\hat{H}_1 = \psi_1^1 x_0^1 + \psi_1^2 x_0^2,$$

$$\{|\psi_1| \sqrt{2} - |\psi_0|\} \delta t_1 + \{\psi_0^1 - \psi_1^1\} \delta x_0^1 + \{\psi_0^2 - \psi_1^2\} \delta x_0^2 = 0.$$

Поскольку вариации δt_1 , δx_0^1 , δx_0^2 произвольные, получаем

$$|\psi_1| \sqrt{2} - |\psi_0| = 0, \quad \psi_0^1 = \psi_1^1, \quad \psi_0^2 = \psi_1^2. \quad (3.21)$$

В момент времени t_2 :

$$\hat{H}_2 = \psi_2 x_1^1, \quad \{2|\psi_2| - \sqrt{2}|\psi_1|\} \delta t_2 + \{\psi_1^1 - \psi_2\} \delta x_1^1 = 0.$$

Отсюда при произвольных вариациях δt_2 , δx_1^1 находим

$$2|\psi_2| - \sqrt{2}|\psi_1| = 0, \quad \psi_1^1 = \psi_2. \quad (3.22)$$

В конечный момент времени T условие трансверсальности имеет вид

$$\{2|\psi_2|-1\}\delta T + \psi_2\delta x_2^1 = 0.$$

Учитывая равенство $\delta x_2^1 = 0$ для фиксированного конечного состояния и произвольность вариации δT , получаем

$$2|\psi_2| = 1. \quad (3.23)$$

На каждом промежутке непрерывного движения вспомогательные переменные постоянны. Поэтому управление тоже постоянное. Обозначим через $C(x_C^1, 0, 0)$ состояние системы в момент t_2 . Из уравнений движения на последнем участке следует, что $x_C^1 = -(T - t_2)u_2$. Так как $|u_1| = 2$ и $x_C^1 > 0$, значит, $u_2 = -2$ и $T - t_2 = x_C^1 / 2$. Отметим, что из условий (3.21) и (3.23) следует, что $\psi_2 = -0.5$. Управление на третьем участке найдено.

Переходим ко второму участку, который заканчивается точкой C . Записываем условия (3.22) с учетом равенства $\psi_2 = -0.5$:

$$|\psi_1| = \sqrt{2}|\psi_2| = 1/\sqrt{2}, \quad \psi_1^1 = \psi_2 = -0.5.$$

Тогда из (3.20) вытекает, что $u_1 = 2\psi_1$, $u_1^1 = -1$. Так как $|u_1| = \sqrt{2}$, то $u_1^2 = -1$. Положительное значение $u_1^2 = 1$ не подходит, так как координата x_2^2 уменьшается на втором участке. Следовательно, $\psi_1^1 = -0.5$, $\psi_1^2 = -0.5$. Обозначим через $B(x_B^1, x_B^2, 0)$ состояние системы в момент времени t_1 . Тогда равенство $t_2 - t_1 = BC / \sqrt{2}$ определяет продолжительность второго участка.

Переходим к первому участку, который заканчивается в точке B . Записываем условия (3.21) с учетом равенств $|\psi_1| = 1/\sqrt{2}$, $\psi_1^1 = -0.5$, $\psi_1^2 = -0.5$:

$$|\psi_0| = |\psi_1|/\sqrt{2} = 1, \quad \psi_0^1 = \psi_1^1 = -0.5, \quad \psi_0^2 = \psi_1^2 = -0.5.$$

Поскольку $u_0 = \psi_0$, то $u_0^1 = -0.5$, $u_0^2 = -0.5$. Из условия $|u_0| = 1$ определяем $u_0^3 = -1/\sqrt{2}$. Положительное значение $u_0^3 = 1/\sqrt{2}$ не подходит, так как координата x_0^3 уменьшается на первом участке. Оптимальное управление на первом участке найдено. Определим продолжительность этого участка. Интегрируя уравнение движения, получаем

$$x_B^1 = x_A^1 - 0.5t_1, \quad x_B^2 = x_A^2 - 0.5t_1, \quad 0 = x_A^3 - t_1/\sqrt{2}.$$

Следовательно, $t_1 = \sqrt{2}x_A^3$. Определяем координаты точки $B(x_A^1 - x_A^3/\sqrt{2}; x_A^2 - x_A^3/\sqrt{2}; 0)$. Заметим, что $BA_0 = x_A^3$. Поэтому угол ABA_0 равен $\pi/4$.

Теперь определим абсциссу точки C . Интегрируя уравнения движения на втором участке, получаем при управлении $u_1^1 = u_1^2 = -1$:

$$x_C^1 = x_B^1 - (t_2 - t_1), \quad 0 = x_B^2 - (t_2 - t_1).$$

Следовательно, $t_2 - t_1 = x_B^2$, $x_C^1 = x_B^1 - x_B^2 = x_A^1 - x_A^2$. Заметим, что угол BCA_1 равен $\pi/4$.

Таким образом, в случае 3) оптимальная траектория представляет собой ломаную $ABCO$, представленную на рис. 4 полужирными отрезками. Стрелками указано направление движения. Время T_3 движения по оптимальной траектории вычисляется по формуле

$$T_3 = AB + \frac{BC}{\sqrt{2}} + \frac{OC}{2} = \frac{x_A^1 + x_A^2}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x_A^3.$$

Отметим, что такая траектория существует, если $x_A^2 > x_A^3$.

В зависимости от начального состояния каждая из четырех найденных траекторий AO , ABO , ACO , $ABCO$ может быть оптимальной. Поэтому нужно определить значение времени движения для каждой допустимой траектории и выбрать наименьшее:

$$T = \min\{T_0, T_1, T_2, T_3\}. \quad (3.24)$$

В формуле (3.24) считаем, что время движения по недопустимой траектории равно $+\infty$.

Например, для начального состояния $A(5; 3; 2)$ получаем (приблизленно)

$$T_0 = 6.16, \quad T_1 = 5.54, \quad T_2 = 5.62, \quad T_3 = 5.41.$$

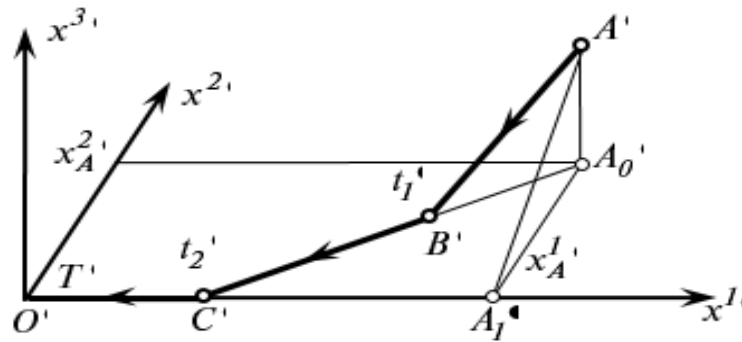


Рис. 4. Траектория с последовательной активизацией двух ограничений.

Значит, наименьшее время $T = 5.41$ достигается на траектории $ABCO$ с двумя переключениями в точках $B(3.59; 1.59; 0)$ и $C(2; 0; 0)$. Для начального состояния $A(4; 3; 5)$ находим

$$T_0 = 7.07, T_1 = +\infty, T_2 = 7.05, T_3 = +\infty,$$

т.е. траектории ABO и $ABCO$ не существуют, а наименьшее время $T = 7.05$ достигается на траектории ACO с одним переключением в точке $C(0.63; 0; 0)$.

Решение примера может быть получено, используя соображения геометрической оптики. Действительно, минимальную длину пути (соответственно наименьшее значение времени) дает луч света, исходящий из начального состояния и попадающий в начало координат после преломления на координатной плоскости Ox^1x^2 или на оси абсцисс. Отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно отношению скоростей света в соответствующих средах.

Для траектории ABO преломление происходит в точке B на координатной плоскости. Отношение скоростей движения до и после преломления составляет $1 : \sqrt{2}$. Угол падения равен $\pi / 2 - \angle ABA_0$, а угол преломления — $\pi / 2$. Поэтому $\angle ABA_0 = \pi / 4$. Эта величина была получена в случае 1).

Для траектории ACO преломление происходит в точке C на оси абсцисс. Отношение скоростей движения до и после преломления составляет $1 : 2$. Угол падения равен $\pi / 2 - \angle ACA_1$, а угол преломления — $\pi / 2$. Поэтому $\angle ACA_1 = \pi / 3$. Эта величина была получена в случае 2).

Для траектории $ABCO$ преломление происходит в точках B и C . Отношения скоростей движения до и после преломления равны $1 : \sqrt{2}$ в точке B и $\sqrt{2} : 2$ в точке C . Отсюда находим, что $\angle ABA_0 = \pi / 4$ и $\angle BCA_1 = \pi / 4$. Эти углы были получены в случае 3).

Пример 2. Найти оптимальное управление в задаче быстрогодействия Фельдбаума А. А. [12] с дополнительными фазовыми ограничениями

$$\begin{aligned} \dot{x}^1(t) &= x^2(t), \quad \dot{x}^2(t) = u(t), \\ |u(t)| &\leq 1, \\ x^2(t) &\geq x^1(t) - 5, \quad x^2(t) \geq -2, \quad 0 \leq t \leq T, \\ x^1(0) &= 4.5, \quad x^2(0) = 0.5, \quad x^2(T) = 0, \\ T &\rightarrow \min. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Решение этой задачи без фазовых ограничений известно [4, 12]. Оптимальным для заданных начальных условий является релейное управление с одним переключением:

$$u(t) = -1, \quad 0 \leq t \leq \tau; \quad u(t) = 1, \quad \tau \leq t \leq T,$$

где $\tau = 0.5 + \sqrt{4.625}$, $T = 0.5 + 2\sqrt{4.625}$. Оптимальная фазовая траектория изображена на рис. 5 полужирной кривой $ABCDEO$, а ограничения — прямыми. Допустимое множество состояний системы представляет собой тупой плоский угол BFE , ограниченный прямыми $x^2 = x^1 - 5$ и $x^2 = -2$, пересекающимися в точке $F(3; -2)$. Как видим, оптимальный процесс нарушает ограничения — участки BC и DE фазовой траектории находятся вне угла BFE .

Полное исследование задачи Фельдбаума А. А. с одним линейным фазовым ограничением проведено в [13] на основе классических условий Дубовицкого – Милютина. Получим решение задачи (3.25) с двумя ограничениями путем исключения активных фазовых ограничений.

Учитывая решение задачи (3.25) без фазовых ограничений (см. рис. 5), составим план “активизации” ограничений. На рис. 6 допустимое множество состояний (плоский угол BFE) не заштриховано. Начальное $A(4.5; 0.5)$ и конечное $O(0; 0)$ состояния лежат внутри угла BFE . Поэтому в начале и в конце процесса управления движение системы “свободное”, при этом оба фазовых ограничения – пассивные. Предполагаем, что в некоторый момент t_1 становится активным первое ограничение $x^2 \geq x^1 - 5$, т.е. состояние системы оказывается на прямой BF . Затем система “движется” по этой прямой некоторой точки C , которую достигает в момент времени t_2 . В этот момент времени система “сходит” с прямой BF и продолжает “свободное” движение (без активных фазовых ограничений). “Свободное” движение заканчивается в момент t_3 (в точке D), когда система “попадает” на прямую FE , т.е. активным становится ограничение $x^2 \geq -2$. Далее, система передвигается “по ограничению” до точки E , которую достигает в момент t_4 . В этот момент система “покидает” ограничение и, оказавшись внутри допустимого множества, перемещается “свободно” до момента T окончания движения в точке O .

Таким образом, предполагаем, что движение системы на промежутке $[0, T]$ происходит по следующему плану: при $t \in [0, t_1]$ система движется “свободно” (без активных фазовых ограничений); при $t \in [t_1, t_2]$ система перемещается по прямой $x^2 = x^1 - 5$, при $t \in [t_2, t_3]$ происходит “свободное” движение; при $t \in [t_3, t_4]$ – передвижение по прямой $x^2 = -2$; при $t \in [t_4, T]$ движение системы опять “свободное”. Моменты переключений t_1, t_2, t_3, t_4 удовлетворяют неравенствам

$$0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < T. \quad (3.26)$$

Первое и последнее неравенства строгие, поскольку промежутки “свободного” движения в начале и конце процесса управления ненулевые (по продолжительности). В случае $t_1 = t_2$

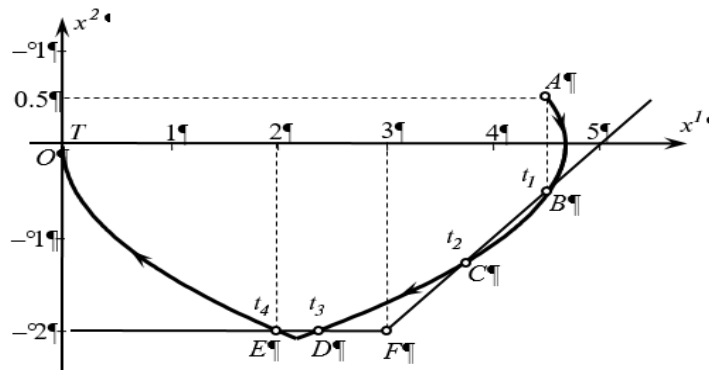


Рис. 5. Оптимальная траектория без фазовых ограничений.

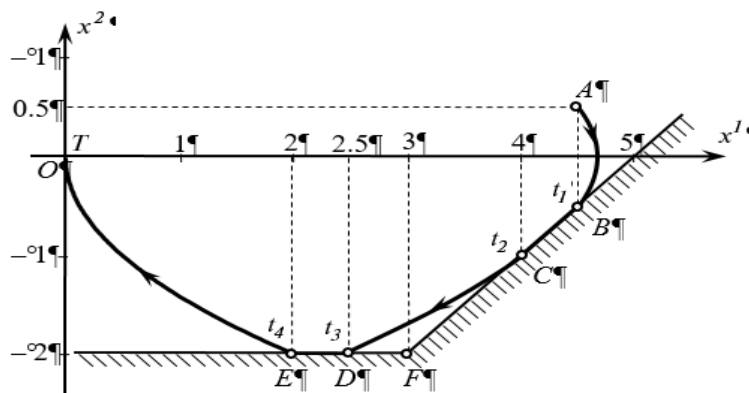


Рис. 6. Оптимальная траектория с фазовыми ограничениями.

ограничение $x^2 \geq x^1 - 5$ не становится активным и его можно удалить из плана “активизации”. Однако это неверно, так как оптимальная траектория без этого ограничения (дуга ABC на рис. 5) пересекает прямую $x^2 = x^1 - 5$. Аналогично убеждаемся, что равенство $t_3 = t_4$ невозможно, поскольку ограничение $x^2 \geq -2$ обязательно будет активным (дуга DEO на рис. 5) и его нельзя удалить. Случай равенства $t_2 = t_3$, когда одно активное ограничение меняется на другое, рассмотрим позже.

Исключая активные фазовые ограничения, составляем задачу управления ГСПР. Напомним, что нижний индекс у вектора состояния ГС указывает номер текущего промежутка времени или, что то же самое, количество уже совершившихся переключений.

На промежутке $[t_1, t_2]$ выполняется тождество

$$x^2(t) = x^1(t) - 5. \quad (3.27)$$

Записываем уравнения движения системы (3.25) с учетом (3.27) и равенство $\dot{x}^2(t) = \dot{x}^1(t)$, которое получается при дифференцировании (3.27). Получаем

$$\dot{x}^1(t) = x^2(t) \Rightarrow \dot{x}^1(t) = x^1(t) - 5; \quad \dot{x}^2(t) = u(t) \Rightarrow u(t) = \dot{x}^1(t) \Rightarrow u(t) = x^1(t) - 5.$$

Следовательно, движение системы (3.25) на промежутке $[t_1, t_2]$ описывается уравнениями

$$\dot{x}_1^1(t) = x_1^1(t) - 5; \quad u_1(t) = x_1^1(t) - 5. \quad (3.28)$$

Заметим, что система (3.28) одномерная. Переменная x^2 исключена из уравнений. Тождество (3.27) будет выполняться, если оно верно в момент времени t_1 . Чтобы обеспечить равенство $x^2(t_1) = x^1(t_1) - 5$, записываем его как терминальное условие на предыдущем промежутке $[0, t_1]$:

$$x_0^2(t_1) = x_0^1(t_1) - 5, \quad (3.29)$$

которое дополняем условием непрерывности траектории

$$x_1^2(t_1) = x_0^1(t_1). \quad (3.30)$$

Условие (3.29) является промежуточным ограничением для ГС, а равенство (3.30) определяет переключение ГСПР в момент t_1 .

На промежутке $[t_3, t_4]$ выполняется тождество

$$x^2(t) = -2. \quad (3.31)$$

Записываем уравнения движения системы (3.25) с учетом (3.31) и равенство $\dot{x}^2(t) = 0$, которое получается при дифференцировании (3.31). Тогда

$$\dot{x}^1(t) = x^2(t) \Rightarrow \dot{x}^1(t) = -2; \quad \dot{x}^2(t) = u(t) \Rightarrow u(t) = 0.$$

Следовательно, движение системы (3.25) на промежутке $[t_3, t_4]$ описывается уравнениями

$$\dot{x}_3^1(t) = -2, \quad u_3(t) = 0.$$

Равенство (3.31) в момент времени t_3 обеспечиваем промежуточным ограничением $x_2^1(t_3) = -2$ и условием непрерывности $x_3^1(t_3) = x_2^1(t_3)$.

На промежутках $[0, t_1]$, $[t_2, t_3]$, $[t_4, T]$ уравнения движения систем (3.25) не меняются, а переключения в моменты t_2 , t_4 происходят согласно уравнениям

$$x_2^1(t_2) = x_1^1(t_2), \quad x_2^2(t_2) = x_1^1(t_2) - 5; \quad x_4^1(t_4) = x_3^1(t_4), \quad x_4^2(t_4) = -2,$$

которые следуют из условия непрерывности траектории системы (3.25).

Таким образом, задаче (3.25) с фазовыми ограничениями соответствует задача оптимального управления ГСПР:

$$\begin{aligned}
0 < t_1 \leq t_2 \leq t_3 < T, \\
\dot{x}_0^1(t) = x_0^2(t), \quad \dot{x}_0^2(t) = u_0(t), \quad |u_0(t)| \leq 1, \quad t \in [0, t_1], \\
x_0^2(t_1) = x_0^1(t_1) - 5, \quad x_1^2(t_1) = x_0^1(t_1), \\
\dot{x}_1^1(t) = x_1^1(t) - 5, \quad u_1 = x_1^1(t) - 2, \quad t \in [t_1, t_2], \\
x_2^1(t_2) = x_1^1(t_2), \quad x_2^2(t_2) = x_1^1(t_2) - 5, \\
\dot{x}_2^1(t) = x_2^2(t), \quad \dot{x}_2^2(t) = u_2(t), \quad |u_2(t)| \leq 1, \quad t \in [t_2, t_3], \\
x_2^1(t_3) = -2, \quad x_3^1(t_3) = x_2^1(t_3), \\
\dot{x}_3^1(t) = -1, \quad u_3(t) = 0, \quad t \in [t_3, t_4], \\
x_4^1(t_4) = x_3^1(t_4), \quad x_4^2(t_4) = -2, \\
\dot{x}_4^1(t) = x_4^2(t), \quad \dot{x}_4^2(t) = u_4(t), \quad |u_4(t)| \leq 1, \quad t \in [t_4, T], \\
x^1(0) = 4.5, \quad x^2(0) = 0.5, \quad x^1(T) = 0, \quad x^2(T) = 0, \\
T \rightarrow \min.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Применяем для решения задачи (3.32) необходимые условия ГСПР (см. разд. 1.2). Для каждого промежутка непрерывного движения составляем функцию Понтрягина (1.9), записываем дифференциальные уравнения для вспомогательных функций и выражение для оптимального управления:

$$H_0 = \psi_0^1 x_0^2 + \psi_0^2 u_0 - \lambda_0, \quad \dot{\psi}_0^1 = 0, \quad \dot{\psi}_0^2 = -\psi_0^2, \quad u_0 = \text{sign } \psi_0^2, \quad t \in [0, t_1],$$

$$H_1 = \psi_1^1 \cdot (x_1^1 - 5) - \lambda_0, \quad \dot{\psi}_0^1 = -\psi_1^1, \quad u_1 = x_1^1 - 5, \quad |x_1^1 - 5| \leq 1, \quad t \in [t_1, t_2],$$

$$H_2 = \psi_2^1 x_2^2 + \psi_2^2 u_2 - \lambda_0, \quad \dot{\psi}_2^1 = 0, \quad \dot{\psi}_2^2 = -\psi_2^2, \quad u_2 = \text{sign } \psi_2^2, \quad t \in [t_2, t_3],$$

$$H_3 = \psi_3^1 \cdot (-2) - \lambda_0, \quad \dot{\psi}_3^1 = 0, \quad u_3 = 0, \quad t \in [t_3, t_4],$$

$$H_4 = \psi_4^1 x_4^2 + \psi_4^2 u_4 - \lambda_0, \quad \dot{\psi}_4^1 = 0, \quad \dot{\psi}_4^2 = -\psi_4^2, \quad u_4 = \text{sign } \psi_4^2, \quad t \in [t_4, T].$$

Составляем функции Понтрягина (1.9) для переключений и записываем условия трансверсальности для моментов переключений:

$$\hat{H}_1 = \psi_1^1 x_0^1, \quad \{\psi_1^2 \cdot (x_1^2 - 5) - \lambda_0 - (\psi_0^1 x_0^1 + |\psi_0^2| - \lambda_0) + \lambda_2 - \lambda_1\} \delta t_1 + (\psi_0^1 - \psi_1^1) \delta x_1^1 + \psi_0^2 \delta x_0^2 = 0$$

в момент $t = t_1$, где $\delta x_0^1 = \delta x_0^2$, а вариация δt_1 — любая;

$$\hat{H}_2 = \psi_2^1 x_1^1 + \psi_2^2 \cdot (x_1^1 - 5),$$

$$\{\psi_2^2 x_2^2 + |\psi_2^2| - \lambda_0 - [\psi_1^1 \cdot (x_1^1 - 5) - \lambda_0] + \lambda_3 - \lambda_2\} \delta t_2 + (\psi_1^1 - \psi_2^1 - \psi_2^2) \delta x_1^1 = 0$$

в момент $t = t_2$, где вариации δt_2 , δx_1^1 — любые;

$$\hat{H}_3 = \psi_3^1 x_3^1, \quad \{\psi_3^1 \cdot (-2) - \lambda_0 - (\psi_2^1 x_2^2 + |\psi_2^2| - \lambda_0) + \lambda_4 - \lambda_3\} \delta t_3 + (\psi_2^1 - \psi_3^1) \delta x_2^1 + \psi_2^2 \delta x_2^2 = 0$$

в момент $t = t_3$, где $\delta x_2^2 = 0$, а вариация δt_3 — любая;

$$\hat{H}_4 = \psi_4^1 x_3^1 + \psi_4^2 \cdot (-2),$$

$$\{\psi_4^1 x_4^2 + |\psi_4^2| - \lambda_0 - [\psi_3^1 \cdot (-2) - \lambda_0] + \lambda_5 - \lambda_4\} \delta t_4 + (\psi_3^1 - \psi_4^1) \delta x_3^1 + \psi_3^2 \delta x_3^2 = 0$$

в момент $t = t_4$, где $\delta x_3^2 = 0$, а вариации δt_4 , δx_3^1 — любые;

$$\hat{H}_4 = \psi_4^1 x_3^1 + \psi_4^2 \cdot (-2),$$

$$\{\psi_4^1 x_4^2 + |\psi_4^2| - \lambda_0 - [\psi_3^1 \cdot (-2) - \lambda_0] + \lambda_5 - \lambda_4\} \delta t_4 + (\psi_3^1 - \psi_4^1) \delta x_3^1 + \psi_3^1 \delta x_3^2 = 0$$

в момент $t = t_4$, где $\delta x_3^2 = 0$, а вариации δt_4 , δx_3^1 — любые. Упрощаем полученные условия, учитывая уравнения переключений и промежуточные ограничения:

$$\begin{aligned} \psi_0^2 \cdot x_0^2 - |\psi_0^2| + \lambda_2 - \lambda_1 &= 0, \quad \psi_1^1 - \psi_0^1 = \psi_0^2, \quad t = t_1, \\ -\psi_2^2 x_2^2 + |\psi_2^2| + \lambda_3 - \lambda_2 &= 0, \quad \psi_1^1 - \psi_2^1 = \psi_2^2, \quad t = t_2, \\ |\psi_2^2| + \lambda_4 - \lambda_3 &= 0, \quad \psi_2^1 - \psi_3^1 = 0, \quad t = t_3, \\ |\psi_4^2| + \lambda_5 - \lambda_4 &= 0, \quad \psi_3^1 - \psi_4^1 = 0, \quad t = t_4. \end{aligned} \quad (3.33)$$

В конечный момент времени T из условия трансверсальности получаем

$$-\psi_4^1 x_4^2 + |\psi_4^2| - \lambda_0 = 0 \Rightarrow |\psi_4^2| = \lambda_0. \quad (3.34)$$

Осталось записать условия дополняющей нежесткости:

$$\lambda_1(-t_1) = 0, \quad \lambda_2(t_1 - t_2) = 0, \quad \lambda_3(t_2 - t_3) = 0, \quad \lambda_4(t_3 - t_4) = 0, \quad \lambda_5(t_4 - T) = 0, \quad (3.35)$$

а также условие неотрицательности $\lambda_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, 5$.

Будем решать систему уравнений (3.33) – (3.35). В случае (3.26), когда моменты переключений не совпадают, из условий (3.35) следует, что все множители Лагранжа, за исключением λ_0 , равны нулю. Поэтому можно взять $\lambda_0 = 1$. При этом уравнения (3.33), (3.34) принимают вид

$$\begin{aligned} \psi_0^2 \cdot x_0^2 - |\psi_0^2| &= 0, \quad \psi_1^1 - \psi_0^1 = \psi_0^2, \quad t = t_1, \\ -\psi_2^2 x_2^2 + |\psi_2^2| &= 0, \quad \psi_1^1 - \psi_2^1 = \psi_2^2, \quad t = t_2, \\ |\psi_2^2| &= 0, \quad \psi_2^1 - \psi_3^1 = 0, \quad t = t_3, \\ |\psi_4^2| &= 0, \quad \psi_3^1 - \psi_4^1 = 0, \quad t = t_4, \\ |\psi_4^2| &= 1. \end{aligned}$$

На последнем промежутке времени $[t_4, T]$ из условия $|\psi_4^2(t_4)| = 0$ следует, что $\psi_4^2(t_4) = 0$. Поэтому функция $\psi_4^2(t)$ имеет постоянный знак при $t \in (t_4, T)$. Она либо убывает, либо возрастает, согласно уравнению $\dot{\psi}_4^2 = -\psi_4^1 = \text{const}$. Значит, управление u_4 постоянно. Однако если $u_4 = -1$, то будет нарушено ограничение $x^2 \geq -2$. Потому $u_4(t) = 1$ при $t \in [t_4, T]$. Тогда фазовая траектория OE имеет вид $x_4^1 = 0.5(x_4^2)^2$, начинается в точке $E(2; -2)$ и заканчивается в начале координат $O(0; 0)$. Время движения на этом участке $T - t_4 = 2$.

На промежутке времени $[t_2, 3]$ из условия $|\psi_2^2(t_3)| = 0$ следует, что $\psi_2^2(t_3) = 0$. Поэтому функция $\psi_2^2(t)$ имеет постоянный знак при $t \in (t_2, t_3)$. Она либо убывает, либо возрастает, согласно уравнению $\dot{\psi}_2^2 = -\psi_2^1 = \text{const}$. Значит, управление u_2 постоянно. Причем $u_2 = -1$ при $t \in (t_2, t_3)$, поскольку скорость движения на этом промежутке убывает, так как $x_2^2(t_2) > x_2^2(t_3) = -2$. Заметим, что $u_2(t_2) = -1$, поэтому $\psi_2^2(t_2) < 0$, тогда

$$-\psi_2^2(t_2)x_2^2(t_2) + |\psi_2^2(t_2)| = 0 \Rightarrow -\psi_2^2(t_2)[x_2^2(t_2) + 1] = 0 \Rightarrow x_2^2(t_2) = -1.$$

Значит, $x_2^1(t_2) = 4$, поскольку состояние системы в момент t_2 находится на прямой $x^2 = x^1 - 5$. Фазовая траектория CD , соответствующая управлению $u_2 = -1$ и проходящая через точку $C(4; -1)$, имеет вид $x_2^1 = 4.5 - 0.5(x_2^2)^2$. Она начинается в точке C и заканчивается на прямой $x^2 = -2$ в точке $D(2.5; -2)$. Время движения по этому участку $t_3 - t_2 = 1$.

На отрезке DE уравнение движения $\dot{x}_3^1 = -2$. Поэтому $x_3^1(t) = 2.5 - 2(t - t_3)$, $t \in [t_3; t_4]$. Время движения по этому участку $t_4 - t_3 = 0.25$. На участке BC движение описывается уравнением $\dot{x}_1^1 = x_1^1 - 5$, причем в момент t_2 система находится в точке C , т.е. абсцисса $x_1^1(t_2) = 4$. Следовательно, $x_1^1(t) = 5 - e^{t-t_2}$, $u_1(t) = -e^{t-t_2}$, $t \in [t_1, t_2]$. Заметим, что $x_1^1(t_1) < 5$, значит, $x_0^1(t_1) < 5$ и $x_0^2(t_1) < 0$.

Определим знак ψ_0^2 в момент переключения t_1 . Если $\psi_0^2(t_1) > 0$, то из условия трансверсальности имеем $\psi_0^2(t_1)[x_0^2(t_1) - 1] = 0$. Значит, $x_0^2(t_1) = 1$, что противоречит полученному выше условию отрицательности: $x_0^2(t_1) < 0$. Если $\psi_0^2(t_1) < 0$, то $\psi_0^2(t_1)[x_0^2(t_1) + 1] = 0$. Следовательно, $x_0^2(t_1) = -1$, тогда $x_0^1(t_1) = 4$. В этом случае $t_1 = t_2$, что противоречит предположению $t_1 < t_2$. Таким образом, $\psi_0^2(t_2) = 0$. Учитывая, уравнение $\dot{\psi}_0^2 = -\psi_0^1 = \text{const}$, делаем вывод, что функция ψ_0^1 имеет постоянный знак на промежутке $(0; t_1)$. Значит, управление постоянно: либо $u_0 = -1$, либо $u_0 = 1$. В последнем случае скорость $x_0^2(t)$ возрастает, поэтому $x_0^2(t_1) > 0$, что противоречит условию отрицательности: $x_0^2(t_1) < 0$. Фазовая траектория AB , соответствующая управлению $u_0 = -1$ и проходящая через точку $A(4.5; 0.5)$, имеет вид $x_0^1 = 4.625 - 0.5(x_0^2)^2$. Она начинается в точке A и заканчивается на прямой $x^2 = x^1 - 5$ в точке $B(4.5; -0.5)$. Время движения по этому участку $t_1 = 1$.

Вычисляем время движения по траектории $ABCDEO$. Время перемещения по отрезку BC определяется из условия $x_1^1(t_1) = 4.5$, т.е. $x_1^1(t_1) = 5 - e^{t_1 - t_2} = 4.5$. Следовательно, $t_2 - t_1 = \ln 2$. Суммируя время движения по всем участкам, получаем $T = 4.25 + \ln 2$.

Решение задачи получено при условиях (3.26). Ранее было показано, что все неравенства в (3.26) обязательно строгие, за исключением, быть может, случая $t_2 = t_3$. Следовательно, траектория проходит через точку $F(3; -2)$ пересечения прямых $x^2 = x^1 - 5$ и $x^2 = -2$. Тогда в точке F управление $u_2 = 3 - 5 = -2$, что противоречит ограничению $|u| \leq 1$. Значит, $t_2 \neq t_3$, т.е. $t_2 < t_3$.

Таким образом, траектория с четырьмя моментами переключений является оптимальной. Наименьшее время достижения начала координат $T = 4.25 + \ln 2$.

Заключение. Предлагаемый подход для решения задач оптимального управления непрерывными системами с фазовыми ограничениями вполне эффективен, хотя и громоздкий. Методика применения необходимых условий оптимальности гибридных систем аналогична использованию принципа максимума для непрерывных систем. Трудно формализуемым местом предлагаемого подхода является процедура планирования порядка активизации фазовых ограничений. Решающую роль при этом играют практические представления о характере оптимального процесса. Если таких представлений нет, то приходится рассматривать разные планы «активизации» фазовых ограничений, что, разумеется, усложняет решение задачи.

Разработанный метод исключения активных фазовых ограничений можно применять не только для непрерывных систем. Он распространяется на задачи оптимального управления непрерывно-дискретными и гибридными системами с фазовыми ограничениями. При этом методика замены фазовых ограничений на промежуточные ограничения для гибридной системы переменной размерности остается неизменной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВ-МиМФ. 1965. Т. 5. № 3. С. 395–453.
2. Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2004.
3. Бортакровский А.С. Необходимые условия оптимальности гибридных систем переменной размерности // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 1. С. 28–40.
4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
5. Sussmann H.J. A Maximum Principle for Hybrid Optimal Control Problems // Proc. 38th IEEE Conf. on Decision and Control. Phoenix, 1999.
6. Дмитрук А.В., Каганович А.М. Принцип максимума для задач оптимального управления с промежуточными ограничениями. // Нелинейная динамика и управление. Вып. 6. М.: Физматлит, 2008. С. 101–136.
7. Bortakovskii A.S. Necessary Optimality Conditions for Hybrid System of Variable Dimension with Intermediate Constraints // J. Math. Sci. 2023. V. 270. No. 5. P. 640–653.
8. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
9. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
10. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
11. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
12. Фельдбаум А.А. О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства // Аи Т. 1955. Т. 16. № 2. С. 129–149.13.
13. Dmitruk A., Samylovskiy I. Optimal Synthesis in a Time-Optimal Problem for the Double Integrator System with a Linear State Constraint // J. Dynamical and Control Systems. 2023. V. 29. P. 21–42.