ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 6, с. 3–19

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 517.938

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К АНАЛИТИЧЕСКОМУ СИНТЕЗУ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО ВЫХОДУ ЛИНЕЙНЫМИ СТАЦИОНАРНЫМИ СИСТЕМАМИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ВХОДАМИ И ДВУМЯ ВЫХОДАМИ

© 2024 г. Н. Е. Зубов[a], *, А. В. Лапин[a]
[a] *МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия*
**e-mail: nik.zubov@gmail.com*
Поступила в редакцию 24.02.2024 г.
После доработки 02.04.2024 г.
Принята к публикации 19.07.2024 г.

Рассматривается задача модального управления по выходу линейной стационарной системой четвертого порядка с двумя управляющими входами и двумя наблюдаемыми выходами при условии, что индекс управляемости не равен индексу наблюдаемости. Показано, что эта задача разрешима, несмотря на то, что суммарная размерность входного и выходного векторов не превышает размерность вектора состояния. Предложены компактные аналитические решения данной задачи с использованием матричных аннуляторов и условий разрешимости односторонних линейных матричных уравнений. Доказаны теоремы, реализующие прямой (по управлению) и дуальный (по наблюдению) подходы к решению задачи для случаев, когда индекс управляемости соответственно больше и меньше индекса наблюдаемости. Приведены примеры, показывающие корректность работы каждого из подходов.

Ключевые слова: модальное управление по выходу, система управления четвертого порядка, индекс управляемости, индекс наблюдаемости, матричный аннулятор, одностороннее матричное уравнение.

DOI: 10.31857/S0002338824060012, **EDN:** SVUZCA

ON ONE APPROACH TO ANALYTIC SYNTHESIS OF MODAL CONTROL BY OUTPUT FOR FOURTH-ORDER DYNAMIC SYSTEMS WITH TWO INPUTS AND TWO OUTPUTS

N. E. Zubov[a], *, A. V. Lapin[a]
[a] *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation*
**e-mail: nik.zubov@gmail.com*

The problem of modal control by output for a fourth-order dynamic system with two control inputs and two measured outputs is considered, provided that the controllability index is not equal to the observability index. It is shown that this problem is solvable, despite the fact that the total dimension of the input and output vectors does not exceed the dimension of the state vector. Compact analytic solutions to this problem using matrix zero-divisors and solvability conditions of one-sided linear matrix equations are proposed. Theorems are proved that implement direct (control) and dual (observation) approaches to solving the problem for cases when the controllability index is correspondingly greater and less than the observability index. Examples are given confirming the efficiency of each approach.

Keywords: modal control by output, fourth-order control system, controllability index, observability index, matrix zero-divisor, one-sided matrix equation.

Введение. В практике синтеза законов управления стабилизацией динамические системы четвертого порядка являются достаточно распространенными. Здесь можно привести примеры из авиации, когда продольное и боковое движение летательного аппарата рассматриваются раздельно и соответственно каждое из них описывается системой четвертого порядка [1–3].

Аналогичная ситуация характерна и для орбитальной стабилизации космического аппарата [4], где движение во взаимосвязанных каналах управления крен-рысканье также представляется системой четвертого порядка.

При построении аналитических законов управления по выходу в настоящее время в основном используется декомпозиционный метод, базирующийся на подходах Ван дер Воуда [5] и описанный авторами в работах [1, 6–8]. Однако этот метод содержит требование о том, что суммарная размерность входного и выходного векторов должна строго превышать размерность вектора состояния, поэтому его нельзя применить напрямую к системам четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами.

Несмотря на то, что задача управления по выходу системой четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами является классической в теории автоматического управления, ее исчерпывающего решения на данный момент не существует. Были предприняты попытки решения этой задачи для некоторых частных случаев [9, 10]. Так, в [9] описано приведение рассматриваемой задачи к управлению по состоянию системой с одним входом, весьма ограниченное условиями приводимости. А в [10] разобран конкретный практический пример управления боковым движением воздушного судна при отсутствии измерений углов скольжения и крена без изложения общего подхода к аналитическому синтезу.

В настоящей работе получены и строго доказаны новые аналитические формулы решения задачи модального управления по выходу, основанные на использовании матричных аннуляторов и условий разрешимости односторонних линейных матричных уравнений [11]. Формулы могут применяться не только в задачах, приводимым к управлению со скалярным входом, но и в любых других задачах, если в системе четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами индекс управляемости не равен индексу наблюдаемости. Таким образом, предлагаемое решение существенно расширяет класс охватываемых систем управления.

1. Постановка задачи. Рассматривается полностью управляемая и полностью наблюдаемая четырехмерная линейная стационарная система управления с двумя входами и двумя выходами:

$$\begin{cases} \sigma\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

где σ – оператор, соответствующий дифференцированию по времени t в непрерывном случае $t \in \mathbb{R}$ или сдвигу на шаг вперед $t+1$ в дискретном случае $t \in \mathbb{Z}$; $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^2$ и $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^2$ – вектора состояния, управления (входов) и наблюдения (выходов), $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times4}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{4\times2}$ и $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2\times4}$ – соответствующие им постоянные матрицы; запись вида $\mathbb{R}^{p\times q}$ обозначает множество вещественных матриц, имеющих размерность $p \times q$. Далее очевидная зависимость векторов от времени опускается.

Предполагается, что матрицы **B** и **C** имеют полный ранг:

$$\operatorname{rank}\mathbf{B} = \operatorname{rank}\mathbf{C} = 2.$$

Управление строится в соответствии с законом:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}\mathbf{y}(t), \tag{1.2}$$

где **F** – постоянная матрица регулятора по выходу.

Требуется определить матрицу **F**, обеспечивающую матрице $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \mathbf{BFC}$ замкнутой системы (1.1), (1.2) заданный спектр $\Lambda^* = \{\phi_{B1},\ \phi_{B2},\ \phi_{C1},\ \phi_{C2}\}$:

$$\operatorname{eig}\mathbf{A}^* = \Lambda^*.$$

Введем следующие обозначения для матриц, использующих желаемые полюса:

$$\mathbf{D}_B = (\mathbf{A} - \phi_{B1}\mathbf{I}_4)(\mathbf{A} - \phi_{B2}\mathbf{I}_4),\quad \mathbf{D}_C = (\mathbf{A} - \phi_{C1}\mathbf{I}_4)(\mathbf{A} - \phi_{C2}\mathbf{I}_4).$$

Здесь и далее I_n – единичная матрица размерности $n \times n$.

Поскольку в рассматриваемой задаче размерности управления и наблюдения в сумме не превосходят размерность состояния, задача не может быть решена с помощью известного декомпозиционного метода модального управления *по выходу* [1, 6–8].

2. Достаточное условие модальной управляемости по выходу. Примем за основу декомпозиционный метод решения соответствующих задач с обратной связью по состоянию [12, 13]: прямой задачи (модального управления):

$$\mathbf{A}_{B1} = \mathbf{B}^L\mathbf{A}\mathbf{B}^{L+},\ \ \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}^L\mathbf{A}\mathbf{B},$$
$$\mathbf{B}^- = \mathbf{B}^+ + \mathbf{K}_1\mathbf{B}^L,\ \ \mathbf{K} = \mathbf{B}^-\mathbf{A} - \Phi_{B0}\mathbf{B}^-,$$
$$\operatorname{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) = \operatorname{eig}(\mathbf{A}_{B1} - \mathbf{B}_1\mathbf{K}_1) \cup \operatorname{eig}\Phi_{B0} = \Lambda^*,$$

дуальной задачи (модального наблюдения):

$$\mathbf{A}_{C1} = \mathbf{C}^{R+}\mathbf{A}\mathbf{C}^R,\ \ \mathbf{C}_1 = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^R,$$
$$\mathbf{C}^- = \mathbf{C}^+ + \mathbf{C}^R\mathbf{L}_1,\ \ \mathbf{L} = \mathbf{A}\mathbf{C}^- - \mathbf{C}^-\Phi_{C0},$$
$$\operatorname{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}) = \operatorname{eig}(\mathbf{A}_{C1} - \mathbf{L}_1\mathbf{C}_1) \cup \operatorname{eig}\Phi_{C0} = \Lambda^*.$$

Здесь и далее верхними индексами “R”, “L” и “+” обозначаются соответственно правые и левые матричные аннуляторы максимального ранга и псевдообратные матрицы [11]. Кроме того, для матриц полного ранга будем использовать известные соотношения [11]:

$$\left[\mathbf{B} \;\vdots\; \mathbf{B}^{L+}\right] = \begin{bmatrix}\mathbf{B}^+ \\ \mathbf{B}^L\end{bmatrix}^{-1},\ \ \begin{bmatrix}\mathbf{C} \\ \mathbf{C}^{R+}\end{bmatrix} = \left[\mathbf{C}^+ \;\vdots\; \mathbf{C}^R\right]^{-1},$$
$$\mathbf{B}^+ = \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{C}^+ = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}.$$

Запишем *прямое* условие существования матрицы $\mathbf{F}$ (разрешимости уравнения $\mathbf{FC} = \mathbf{K}$ [11]):

$$\underbrace{\left(\mathbf{B}^-\mathbf{A} - \Phi_{B0}\mathbf{B}^-\right)}_{\mathbf{K}}\mathbf{C}^R = \mathbf{0}_{2\times 2}. \tag{2.1}$$

Предположим, что матрица $\mathbf{G}_B = \mathbf{B}^-\mathbf{C}^R$ неособенная, т.е.

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{B}^- \\ \mathbf{C}\end{bmatrix} = 4. \tag{2.2}$$

Тогда условие (2.1) принимает вид

$$\mathbf{B}^-\left(\mathbf{A}\mathbf{C}^R - \mathbf{C}^R\tilde{\Phi}_{B0}\right) = \mathbf{0}_{2\times 2}, \tag{2.3}$$

где $\tilde{\Phi}_{B0} = \mathbf{G}_B^{-1}\Phi_{B0}\mathbf{G}_B$. Второй множитель в выражении (2.3) можно представить иначе:

$$\mathbf{A}\mathbf{C}^R - \mathbf{C}^R\tilde{\Phi}_{B0} = \left(\mathbf{C}^+\mathbf{C} + \mathbf{C}^R\mathbf{C}^{R+}\right)\left(\mathbf{A}\mathbf{C}^R - \mathbf{C}^R\tilde{\Phi}_{B0}\right) = \mathbf{C}^+\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}^R\left(\mathbf{A}_{C1} - \tilde{\Phi}_{B0}\right).$$

Если положить $\tilde{\Phi}_{B0} = \mathbf{A}_{C1} - \mathbf{L}_1\mathbf{C}_1$, то условие упростится следующим образом:

$$\mathbf{B}^-\mathbf{C}^-\mathbf{C}_1 = \mathbf{0}_{2\times 2}. \tag{2.4}$$

Запишем *дуальное* условие существования матрицы $\mathbf{F}$ (разрешимости уравнения $\mathbf{BF} = \mathbf{L}$ [11]):

$$\mathbf{B}^L\underbrace{\left(\mathbf{A}\mathbf{C}^- - \mathbf{C}^-\Phi_{C0}\right)}_{\mathbf{L}} = \mathbf{0}_{2\times 2}. \tag{2.5}$$

Предположим, что матрица $\mathbf{G}_C = \mathbf{B}^L\mathbf{C}^-$ неособенная, т.е.

$$\operatorname{rank}\left[\mathbf{C}^- \;\vdots\; \mathbf{B}\right] = 4. \tag{2.6}$$

Тогда условие (2.5) принимает вид

$$\left(\mathbf{B}^L\mathbf{A} - \tilde{\Phi}_{C0}\mathbf{B}^L\right)\mathbf{C}^- = \mathbf{0}_{2\times 2}, \tag{2.7}$$

где $\tilde{\Phi}_{C0} = \mathbf{G}_C\,\Phi_{C0}\mathbf{G}_C^{-1}$. Первый множитель в выражении (2.7) можно представить иначе:

$$\mathbf{B}^L\mathbf{A} - \tilde{\Phi}_{C0}\mathbf{B}^L = \left(\mathbf{B}^L\mathbf{A} - \tilde{\Phi}_{C0}\mathbf{B}^L\right)\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^+ + \mathbf{B}^{L+}\mathbf{B}^L\right) = \mathbf{B}_1\mathbf{B}^+ + \left(\mathbf{A}_{B1} - \tilde{\Phi}_{C0}\right)\mathbf{B}^L.$$

Если положить $\tilde{\Phi}_{C0} = \mathbf{A}_{B1} - \mathbf{B}_1\mathbf{K}_1$, то условие (2.7) упростится следующим образом:

$$\mathbf{B}_1\mathbf{B}^-\mathbf{C}^- = \mathbf{0}_{2\times2}. \tag{2.8}$$

При выполнении условий (2.1) и (2.5) матрица регулятора по выходу рассчитывается из соотношений:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{C}^+ = \mathbf{B}^+\mathbf{L}.$$

Подставив сюда значения

$$\mathbf{C}^+ = \mathbf{C}^- - \mathbf{C}^R\mathbf{L}_1,\ \ \mathbf{K}\mathbf{C}^R = \mathbf{0}_{2\times2},\ \ \mathbf{B}^+ = \mathbf{B}^- - \mathbf{K}_1\mathbf{B}^L,\ \ \mathbf{B}^L\mathbf{L} = \mathbf{0}_{2\times2},$$

получим

$$\mathbf{F} = \underbrace{\left(\mathbf{B}^-\mathbf{A} - \Phi_{B0}\mathbf{B}^-\right)}_{\mathbf{K}}\mathbf{C}^- = \mathbf{B}^-\underbrace{\left(\mathbf{A}\mathbf{C}^- - \mathbf{C}^-\Phi_{C0}\right)}_{\mathbf{L}}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}^-\mathbf{A}\mathbf{C}^- - \Delta, \tag{2.9}$$

где $\Delta = \Phi_{B0}\mathbf{B}^-\mathbf{C}^- = \mathbf{B}^-\mathbf{C}^-\Phi_{C0}$.

Из прямого условия (2.4) и дуального условия (2.8) видно, что для существования матрицы регулятора по выходу $\mathbf{F}$ достаточно выполнения обобщенного условия

$$\mathbf{B}^-\mathbf{C}^- = \mathbf{0}_{2\times2}, \tag{2.10}$$

которое обеспечивается путем выбора матриц регулятора $\mathbf{K}_1$ и наблюдателя $\mathbf{L}_1$ на первом уровне декомпозиции с сохранением заданного спектра:

$$\operatorname{eig}\left(\mathbf{A}_{B1} - \mathbf{B}_1\mathbf{K}_1\right) \cup \operatorname{eig}\left(\mathbf{A}_{C1} - \mathbf{L}_1\mathbf{C}_1\right) = \Lambda^*. \tag{2.11}$$

При этом формула для расчета матрицы $\mathbf{F}$ (2.9) упрощается и принимает вид

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}^-\mathbf{A}\mathbf{C}^-. \tag{2.12}$$

Основной сложностью применения расчетной формулы (2.12) является получение общего *аналитического* решения системы условий (2.10), (2.11) относительно матриц $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{L}_1$. В данной работе найдены аналитические решения для случаев, когда система (1.1) имеет неравные индексы управляемости и наблюдаемости [14].

Индексы управляемости и наблюдаемости системы могут принимать только два возможных значения: 2 или 3. Введем в рассмотрение матрицы, содержащие соответственно первые два блока матриц управляемости и наблюдаемости:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \left[\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B}\right],\ \ \tilde{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{C}\mathbf{A}\end{bmatrix}.$$

Тогда индекс 2 будет характеризоваться полным рангом 4 соответствующей матрицы $\tilde{\mathbf{U}}$ или $\tilde{\mathbf{N}}$, а индекс 3 – неполным рангом 3. При ранге 2 теряется соответствующее свойство полной управляемости или полной наблюдаемости.

3. Случай большего индекса управляемости. Рассмотрим случай, когда индекс управляемости равен 3, а индекса наблюдаемости – 2:

$$\operatorname{rank}\tilde{\mathbf{U}} = 3,\ \ \operatorname{rank}\tilde{\mathbf{N}} = 4. \tag{3.1}$$

Л е м м а 1. Любой левый аннулятор матрицы $\mathbf{B}$ является левым аннулятором для левого множителя ее скелетного разложения $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{S}_B$, т.е. для матрицы $\hat{\mathbf{B}}$.

Доказательство. Согласно определению левого аннулятора, $\mathbf{B}^L\hat{\mathbf{B}}\mathbf{S}_B = \mathbf{0}$. Предположим, что при этом $\mathbf{B}^L\hat{\mathbf{B}} \neq \mathbf{0}$. Но тогда матрица $\mathbf{B}^L\hat{\mathbf{B}}$ является левым аннулятором для матрицы $\mathbf{S}_B$, что невозможно, так как последняя в силу определения скелетного разложения имеет полный ранг, равный числу строк. Лемма доказана.

Лемма 2. Общее решение задачи модального управления для пары матриц ($\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$) и спектра Λ^* при вырождении ранга $\operatorname{rank}\mathbf{B} \neq m$ (скелетное разложение $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{S}_B$) имеет вид:

$$\mathbf{K} = \left[\mathbf{S}_B^+ \mid \mathbf{S}_B^R\right]\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{K}}\\ \Omega_B\end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

где $\hat{\mathbf{K}}$ – общее решение соответствующей задачи для пары матриц ($\mathbf{A}$, $\hat{\mathbf{B}}$), а $\mathbf{\Omega}_B$ – произвольная матрица подходящей размерности.

Доказательство. Введем в рассмотрение матрицу Φ_B с желаемым спектром $\operatorname{eig}\Phi_B = \Lambda^*$ и составим уравнение

$$\mathbf{A} - \mathbf{BK} = \Phi_B \Leftrightarrow \mathbf{BK} = \mathbf{A} - \Phi_B \tag{3.3}$$

Это уравнение разрешимо относительно матрицы $\mathbf{K}$ при условии $\hat{\mathbf{B}}^L\Phi_B = \hat{\mathbf{B}}^L\mathbf{A}$ (с учетом леммы 1). Значит,

$$\Phi_B = \hat{\mathbf{B}}^{L+}\hat{\mathbf{B}}^L\mathbf{A} - \hat{\mathbf{B}}\Omega_{\Phi_B} = \mathbf{A} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}}, \tag{3.4}$$

где $\mathbf{\Omega}_{\Phi_B}$ – произвольная матрица, а за счет выбора множителя $\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{B}}^+\mathbf{A} + \mathbf{\Omega}_{\Phi_B}$ матрице Φ_B обеспечивается заданный спектр. Если $\hat{\mathbf{B}}$ – квадратная матрица (левого аннулятора $\hat{\mathbf{B}}^L$ не существует), то условие $\Phi_B = \mathbf{A} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}}$ не накладывает ограничений на матрицу Φ_B.

Общее решение уравнения (3.3) с подстановкой значения (3.4) принимает вид:

$$\mathbf{K} = \underbrace{\mathbf{S}_B^+\hat{\mathbf{B}}^+}_{\mathbf{B}^+}\left(\mathbf{A} - \Phi_B\right) + \mathbf{S}_B^R\Omega_B = \mathbf{S}_B^+\hat{\mathbf{B}}^+\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}} + \mathbf{S}_B^R\Omega_B = \left[\mathbf{S}_B^+ \mid \mathbf{S}_B^R\right]\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{K}}\\ \Omega_B\end{bmatrix},$$

что и требовалось показать. Лемма доказана.

Теорема 1. Для системы с индексом управляемости 3 и индексом наблюдаемости 2 при условии $\det\left(\tilde{\mathbf{B}}^-\mathbf{B}\right) \neq 0$ регулятор по выходу описывается матрицей

$$\mathbf{F} = \left(\tilde{\mathbf{B}}^-\mathbf{B}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{B}}^-\tilde{\mathbf{L}}, \tag{3.5}$$

где

$$\tilde{\mathbf{B}}^- = \begin{bmatrix}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{C}\right)\end{bmatrix},\ \mathbf{b}^{\mathrm{T}} = \tilde{\mathbf{U}}^L\mathbf{D}_B,\ \tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{D}_\mathbf{C}\mathbf{C}^R,\ \mathbf{C}^R = \tilde{\mathbf{N}}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{2\times 2}\\ \mathbf{I}_2\end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}\right],\ \tilde{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CA}\end{bmatrix},$$

независимо от конкретного значения левого аннулятора $\tilde{\mathbf{U}}^L$.

Доказательство. Теорема доказывается в четыре шага.

Шаг 1. Расчет регулятора на 1-м уровне ($\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{B}^-$), $\operatorname{eig}\left(\mathbf{A}_{B1} - \mathbf{B}_1\mathbf{K}_1\right) = \left\{\phi_{B1},\ \phi_{B2}\right\}$.

В силу условия (3.1) $\det\tilde{\mathbf{U}} = 0$, а также равенства

$$\det\left(\begin{bmatrix}\mathbf{B}^+\\ \mathbf{B}^L\end{bmatrix}\tilde{\mathbf{U}}\right) = \det\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{I}_2 & \mathbf{B}^+\mathbf{AB}\\ \mathbf{0}_{2\times 2} & \mathbf{B}_1\end{array}\right] = \det\mathbf{B}_1$$

выполним скелетное разложение вырожденной матрицы $\mathbf{B}_1 = \hat{\mathbf{B}}_1\mathbf{S}_{B1}$ и воспользуемся леммой 2:

$$\mathbf{K}_1 = \left[\mathbf{S}_{B1}^+ \mid \mathbf{S}_{B1}^R\right]\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{K}}_1\\ -\Omega_{B1}\end{bmatrix},$$

где $\hat{\mathbf{K}}_1$ – матрица регулятора для пары матриц $\mathbf{A}_{B1}$ и $\hat{\mathbf{B}}_1$, $\mathbf{\Omega}_{B1}$ – произвольная матрица. Таким образом,

$$\mathbf{B}^- = \mathbf{B}^+ + \mathbf{K}_1\mathbf{B}^L = \left[\mathbf{S}_{B1}^+ \;\vdots\; \mathbf{S}_{B1}^R\right]\left(\begin{bmatrix}\mathbf{S}_{B1}\\ \mathbf{S}_{B1}^{R+}\end{bmatrix}\mathbf{B}^+ + \begin{bmatrix}\hat{\mathbf{K}}_1\\ -\Omega_{B1}\end{bmatrix}\mathbf{B}^L\right) = \left[\mathbf{S}_{B1}^+ \;\vdots\; \mathbf{S}_{B1}^R\right]\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{b}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

где $\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}} = \mathbf{S}_{B1}\mathbf{B}^+ + \hat{\mathbf{K}}_1\mathbf{B}^L$, $\mathbf{b}_2^{\mathrm{T}} = \mathbf{S}_{B1}^{R+}\mathbf{B}^+ - \Omega_{B1}\mathbf{B}^L$.

По формуле Аккермана [15] получаем

$$\hat{\mathbf{K}}_1 = \mathbf{B}_1^L\left(\mathbf{A}_{B1}^2 - (\phi_{B1} + \phi_{B2})\mathbf{A}_{B1} + \phi_{B1}\phi_{B2}\mathbf{I}_2\right) = \mathbf{B}_1^L\mathbf{B}^L\mathbf{D}_B\mathbf{B}^{L+}, \tag{3.7}$$

где

$$\mathbf{B}_1^L = [0 \;\vdots\; 1]\left[\hat{\mathbf{B}}_1 \;\vdots\; \mathbf{A}_{B1}\hat{\mathbf{B}}_1\right]^{-1},$$

$$\mathbf{A}_{B1}^2 = \mathbf{B}^L\mathbf{A}\mathbf{B}^{L+}\mathbf{B}^L\mathbf{A}\mathbf{B}^{L+} = \mathbf{B}^L\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_4 - \mathbf{B}\mathbf{B}^+\right)\mathbf{A}\mathbf{B}^{L+} = \mathbf{B}^L\mathbf{A}^2\mathbf{B}^{L+} - \mathbf{B}_1\mathbf{B}^+\mathbf{A}\mathbf{B}^{L+}.$$

Рассчитаем вектор $\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}$, используемый в формуле (3.6), с учетом значения (3.7):

$$\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}} = \mathbf{S}_{B1}\mathbf{B}^+ + \mathbf{B}_1^L\mathbf{B}^L\mathbf{D}_B\left(\mathbf{I}_4 - \mathbf{B}\mathbf{B}^+\right) = \mathbf{B}_1^L\mathbf{B}^L\mathbf{D}_B, \tag{3.8}$$

так как

$$\mathbf{B}_1^L\mathbf{B}^L\mathbf{D}_B\mathbf{B} = \mathbf{B}_1^L\mathbf{B}^L\underbrace{\mathbf{A}\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^+ + \mathbf{B}^{L+}\mathbf{B}^L\right)\mathbf{A}}_{\mathbf{A}^2}\mathbf{B} = [0 \;\vdots\; 1]\left[\hat{\mathbf{B}}_1 \;\vdots\; \mathbf{A}_{B1}\hat{\mathbf{B}}_1\right]^{-1}\mathbf{A}_{B1}\hat{\mathbf{B}}_1\mathbf{S}_{B1} = \mathbf{S}_{B1}.$$

Ш а г 2. Расчет наблюдателя на 1-м уровне ($\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{C}^-$), $\mathrm{eig}\left(\mathbf{A}_{C1} - \mathbf{L}_1\mathbf{C}_1\right) = \{\phi_{C1},\ \phi_{C2}\}$.

В силу условия (3.1) $\det\tilde{\mathbf{N}} \neq 0$, правый аннулятор $\mathbf{C}^R$ и матрицы $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{L}_1$ могут быть записаны в виде

$$\mathbf{C}^R = \tilde{\mathbf{N}}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{2\times2}\\ \mathbf{I}_2\end{bmatrix},\ \ \mathbf{C}_1 = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^R = \mathbf{I}_2,\ \ \mathbf{L}_1 = \mathbf{A}_{C1} - \Phi_{C1},$$

где $\mathrm{eig}\,\Phi_{C1} = \{\phi_{C1},\ \phi_{C2}\}$. Таким образом,

$$\mathbf{C}^- = \mathbf{C}^+ + \mathbf{C}^R\mathbf{L}_1 = \mathbf{C}^+ + \mathbf{C}^R\left(\mathbf{A}_{C1} - \Phi_{C1}\right) = \mathbf{A}\mathbf{C}^R - \mathbf{C}^R\Phi_{C1}. \tag{3.9}$$

Ш а г 3. Обеспечение условия существования (равенство $\mathbf{B}^-\mathbf{C}^- = \mathbf{0}_{2\times2}$) (2.10).

Обнулим произведение матриц (3.6) и (3.9) в первой строке за счет матрицы Φ_{C1} с желаемым спектром $\{\phi_{C1},\ \phi_{C2}\}$, а во второй строке – за счет матрицы параметров Ω_{B1}:

$$\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^- = \mathbf{0}_{1\times2} \ \Leftrightarrow\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^R\Phi_{C1} = \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{C}^R, \tag{3.10}$$

$$\mathbf{b}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^- = \mathbf{0}_{1\times2} \ \Leftrightarrow\ \Omega_{B1} = \mathbf{S}_{B1}^{R+}\mathbf{B}^+\mathbf{C}^-\mathbf{G}_C^{-1}.$$

Уравнение (3.10) разрешимо относительно матрицы Φ_{C1} с любым заданным спектром при условии

$$\mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\end{bmatrix}\mathbf{C}^R\right) = 2 \ \Leftrightarrow\ \mathrm{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\end{bmatrix} = 4. \tag{3.11}$$

С учетом равенств $\mathbf{C}\mathbf{C}^- = \mathbf{C}\left(\mathbf{C}^+ + \mathbf{C}^R\mathbf{L}_1\right) = \mathbf{I}_2$ и (3.10) можно записать соотношение

$$\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\end{bmatrix}\mathbf{C}^- = \begin{bmatrix}\mathbf{I}_2\\ \mathbf{0}_{1\times2}\\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{C}^-\end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

Рассчитаем произведение $\mathbf{A}\mathbf{C}^-$, используя значение (3.9), а также тождество $\Phi_{C1}^2 + s_C\Phi_{C1} + m_C\mathbf{I}_2 = \mathbf{0}_{2\times2}$ (теорема Кэли – Гамильтона [11]):

$$\mathbf{AC}^- = \mathbf{A}\left(\mathbf{AC}^R - \mathbf{C}^R\Phi_{C1}\right) = \mathbf{A}^2\mathbf{C}^R - \left(\mathbf{C}^- + \mathbf{C}^R\Phi_{C1}\right)\Phi_{C1} = \mathbf{A}^2\mathbf{C}^R - \mathbf{C}^R\Phi_{C1}^2 - \mathbf{C}^-\Phi_{C1} =$$
$$= \mathbf{A}^2\mathbf{C}^R + \mathbf{C}^R\left(s_C\Phi_{C1} + m_C\mathbf{I}_2\right) - \mathbf{C}^-\Phi_{C1} = \mathbf{A}^2\mathbf{C}^R + s_C\left(\mathbf{AC}^R - \mathbf{C}^-\right) + m_C\mathbf{C}^R - \mathbf{C}^-\Phi_{C1} =$$
$$= \left(\mathbf{A}^2 + s_C\mathbf{A} + m_C\mathbf{I}_4\right)\mathbf{C}^R - \mathbf{C}^-\left(\Phi_{C1} + s_C\mathbf{I}_2\right) = \mathbf{D}_C\mathbf{C}^R - \mathbf{C}^-\left(\Phi_{C1} + s_C\mathbf{I}_2\right).$$

Таким образом,

$$\mathbf{AC}^- = \mathbf{D}_C\mathbf{C}^R - \mathbf{C}^-\left(\Phi_{C1} + s_C\mathbf{I}_2\right). \tag{3.13}$$

Так как в силу равенств (3.10) и (3.13) $\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{AC}^- = \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_C\mathbf{C}^R$, из соотношения (3.12) при условии (3.11) получим

$$\mathbf{C}^- = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0}_{1\times 2} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_C\mathbf{C}^R \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

Из условия (2.10) и равенства $\mathbf{B}^-\mathbf{B} = \left(\mathbf{B}^+ + \mathbf{K}_1\mathbf{B}^L\right)\mathbf{B} = \mathbf{I}_2$ следует

$$\mathbf{B}^-\left[\mathbf{C}^- \;\vdots\; \mathbf{B}\right] = \left[\mathbf{0}_{2\times 2} \;\vdots\; \mathbf{I}_2\right].$$

Поэтому с учетом условия (2.6) и значения (3.14) запишем

$$\mathbf{B}^- = \left[\mathbf{0}_{2\times 2} \;\vdots\; \mathbf{I}_2\right]\left[\mathbf{C}^- \;\vdots\; \mathbf{B}\right]^{-1} = \left[\mathbf{0}_{2\times 2} \;\vdots\; \mathbf{I}_2\right] \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{I}_2 & \mathbf{CB} \\ \mathbf{0}_{1\times 2} & \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_C\mathbf{C}^R & \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{AB} \end{array}\right]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

Ш а г 4. Расчет регулятора по выходу (матрица $\mathbf{F}$).

Определим искомую матрицу регулятора по выходу, используя равенства (2.10), (3.13) и (3.15):

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}^-\mathbf{AC}^- = \mathbf{B}^-\mathbf{D}_C\mathbf{C}^R = \left[\mathbf{0}_{2\times 2} \;\vdots\; \mathbf{I}_2\right] \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{I}_2 & \mathbf{CB} \\ \mathbf{0}_{1\times 2} & \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_C\mathbf{C}^R & \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{AB} \end{array}\right]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \end{bmatrix}\mathbf{D}_C\mathbf{C}^R.$$

Принимая во внимание тот факт, что

$$\left[\mathbf{0}_{2\times 2} \;\vdots\; \mathbf{I}_2\right] \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{I}_2 & \mathbf{CB} \\ \mathbf{0}_{1\times 2} & \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_C\mathbf{C}^R & \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{AB} \end{array}\right]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0}_{1\times 2} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_C\mathbf{C}^R \end{bmatrix} = \left[\mathbf{0}_{2\times 2} \;\vdots\; \mathbf{I}_2\right]\begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0}_{2\times 2} \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{2\times 2},$$

перепишем полученное выражение в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}^-\mathbf{AC}^- = \mathbf{B}^-\mathbf{D}_C\mathbf{C}^R = \left[\mathbf{0}_{2\times 2} \;\vdots\; \mathbf{I}_2\right] \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{I}_2 & \mathbf{CB} \\ \mathbf{0}_{1\times 2} & \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_C\mathbf{C}^R & \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{AB} \end{array}\right]^{-1} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \end{bmatrix}\mathbf{D}_C\mathbf{C}^R - \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0}_{1\times 2} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_C\mathbf{C}^R \end{bmatrix}\mathbf{CD}_C\mathbf{C}^R \right) =$$
$$= \left[\mathbf{0}_{2\times 2} \;\vdots\; \mathbf{I}_2\right] \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{I}_2 & \mathbf{CB} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1\times 2} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_C\mathbf{C}^R \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{AB} \end{bmatrix} \end{array}\right]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A} - \mathbf{D}_C\mathbf{C}^R\mathbf{C}\right) \end{bmatrix}\mathbf{D}_C\mathbf{C}^R.$$

Таким образом, после инвертирования указанной блочной матрицы используется только правый нижний блок. Рассчитаем его с помощью дополнения Шура [11]:

$$\left[\mathbf{0}_{2\times2} \;\vdots\; \mathbf{I}_2\right]\left[\begin{array}{c:c} \mathbf{I}_2 & \mathbf{CB} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1\times2} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_C\mathbf{C}^R \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{AB} \end{bmatrix} \end{array}\right]^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times2} \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{AB} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1\times2} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_C\mathbf{C}^R \end{bmatrix}(\mathbf{I}_2)^{-1}\mathbf{CB}\right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A} - \mathbf{D}_C\mathbf{C}^R\mathbf{C}\right) \end{bmatrix}\mathbf{B}\right)^{-1}.$$

Подставив это значение в расчетную формулу, получим

$$\mathbf{F} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A} - \mathbf{D}_C\mathbf{C}^R\mathbf{C}\right) \end{bmatrix}\mathbf{B}\right)^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A} - \mathbf{D}_C\mathbf{C}^R\mathbf{C}\right) \end{bmatrix}\mathbf{D}_C\mathbf{C}^R.$$

Здесь $\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{1\times4}$ – вектор-строка, принимающий значение (3.8). Заметим, что в найденной формуле он использован в двух множителях, один из которых инвертируется. Поэтому вместо вектора $\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}$ может быть записан вектор $\mathbf{b}^{\mathrm{T}} = \kappa_b\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}$ с произвольным коэффициентом $\kappa_b \neq 0$. Это позволяет применять в записи

$$\mathbf{b}^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}_1^L\mathbf{B}^L\mathbf{D}_B = \tilde{\mathbf{U}}^L\mathbf{D}_B$$

любые левые аннуляторы $\mathbf{B}_1^L \in \mathbb{R}^{1\times2}$ и $\tilde{\mathbf{U}}^L \in \mathbb{R}^{1\times4}$ в силу равенства

$$\underbrace{\mathbf{B}_1^L\mathbf{B}^L}_{\tilde{\mathbf{U}}^L}\underbrace{\left[\mathbf{B} \;\vdots\; \mathbf{AB}\right]}_{\tilde{\mathbf{U}}} = \left[0 \;\vdots\; \mathbf{B}_1^L\mathbf{B}_1\right] = \left[0 \;\vdots\; 0\right].$$

Таким образом, окончательная формула для расчета матрицы регулятора по выходу принимает вид

$$\mathbf{F} = \left(\tilde{\mathbf{B}}^-\mathbf{B}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{B}}^-\tilde{\mathbf{L}},$$

где

$$\tilde{\mathbf{B}}^- = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{C}\right) \end{bmatrix},\;\; \mathbf{b}^T = \tilde{\mathbf{U}}^L\mathbf{D}_B,\;\; \tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{D}_C\mathbf{C}^R,\;\; \mathbf{C}^R = \tilde{\mathbf{N}}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times2} \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix},$$

что совпадает с результатом (3.5), представленным в теореме.

Условие применимости формулы (3.5) $\det\left(\tilde{\mathbf{B}}^-\mathbf{B}\right) \neq 0$ вытекает из условий (2.6) и (3.11) в силу формулы Шура для блочных определителей [11]:

$$\det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \end{bmatrix}\left[\mathbf{C}^- \;\vdots\; \mathbf{B}\right]\right) = \det\left[\begin{array}{c:c} \mathbf{I}_2 & \mathbf{CB} \\ \mathbf{0}_{1\times2} & \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_C\mathbf{C}^R & \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{AB} \end{array}\right] = \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A} - \mathbf{D}_C\mathbf{C}^R\mathbf{C}\right) \end{bmatrix}\mathbf{B}\right) = \det\left(\tilde{\mathbf{B}}^-\mathbf{B}\right).$$

Теорема доказана.

4. Случай большего индекса наблюдаемости. Рассмотрим случай, когда индекс управляемости равен 2, а индекс наблюдаемости – 3:

$$\operatorname{rank}\tilde{\mathbf{U}} = 4, \quad \operatorname{rank}\tilde{\mathbf{N}} = 3. \tag{4.11}$$

Л е м м а 3. Любой правый аннулятор матрицы $\mathbf{C}$ является правым аннулятором для правого множителя ее скелетного разложения $\mathbf{C} = \mathbf{S}_C\hat{\mathbf{C}}$, т.е. для матрицы $\hat{\mathbf{C}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению правого аннулятора, $\mathbf{S}_C\hat{\mathbf{C}}\mathbf{C}^R = \mathbf{0}$. Предположим, что при этом $\hat{\mathbf{C}}\mathbf{C}^R \neq \mathbf{0}$. Но тогда матрица $\hat{\mathbf{C}}\mathbf{C}^R$ является правым аннулятором для матрицы $\mathbf{S}_C$, что невозможно, так как последняя в силу определения скелетного разложения имеет полный ранг, равный числу столбцов. Лемма доказана.

Л е м м а 4. Общее решение задачи модального наблюдения для пары матриц $\left(\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{l\times n}\right)$ и спектра Λ^* при вырождении ранга $\operatorname{rank}\mathbf{C} \neq l$ (скелетное разложение $\mathbf{C} = \mathbf{S}_C\hat{\mathbf{C}}$) имеет вид

$$\mathbf{L} = \left[\hat{\mathbf{L}} \mid \Omega_C\right]\begin{bmatrix}\mathbf{S}_C^+ \\ \mathbf{S}_C^L\end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

где $\hat{\mathbf{L}}$ – общее решение соответствующей задачи для пары матриц $\left(\mathbf{A},\ \hat{\mathbf{C}}\right)$, а Ω_C – произвольная матрица подходящей размерности.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем в рассмотрение матрицу Φ_C с желаемым спектром $\operatorname{eig}\Phi_C = \Lambda^*$ и составим уравнение

$$\mathbf{A} - \mathbf{LC} = \Phi_C \;\;\Leftrightarrow\;\; \mathbf{LC} = \mathbf{A} - \Phi_C. \tag{4.3}$$

Это уравнение разрешимо относительно матрицы $\mathbf{L}$ при условии $\Phi_C\hat{\mathbf{C}}^R = \mathbf{A}\hat{\mathbf{C}}^R$ (с учетом леммы 3). Значит,

$$\Phi_C = \mathbf{A}\hat{\mathbf{C}}^R\hat{\mathbf{C}}^{R+} - \Omega_{\Phi_C}\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{A} - \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{C}}, \tag{4.4}$$

где $\boldsymbol{\Omega}_{\Phi_C}$ – произвольная матрица, а за счет выбора множителя $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{C}}^+ + \Omega_{\Phi_C}$ матрице $\boldsymbol{\Phi}_C$ обеспечивается заданный спектр. Если $\hat{\mathbf{C}}^+$ – квадратная матрица (правого аннулятора $\hat{\mathbf{C}}^R$ не существует), то условие $\boldsymbol{\Phi}_C = \mathbf{A} - \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{C}}$ не накладывает ограничений на матрицу $\boldsymbol{\Phi}_C$.

Общее решение уравнения (4.3) с подстановкой значения (4.4) принимает вид

$$\mathbf{L} = \left(\mathbf{A} - \Phi_C\right)\underbrace{\hat{\mathbf{C}}^+\mathbf{S}_C^+}_{\mathbf{C}^+} + \Omega_C\mathbf{S}_C^L = \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{C}}^+\mathbf{S}_C^+ + \Omega_C\mathbf{S}_C^L = \left[\hat{\mathbf{L}} \mid \Omega_C\right]\begin{bmatrix}\mathbf{S}_C^+ \\ \mathbf{S}_C^L\end{bmatrix},$$

что и требовалось показать. Лемма доказана.

Т е о р е м а 2. Для системы (1.1) с индексом управляемости 2 и индексом наблюдаемости 3 при условии $\det\left(\mathbf{C}\tilde{\mathbf{C}}^-\right) \neq 0$ регулятор по выходу (1.2) описывается матрицей

$$\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{C}}^-\left(\mathbf{C}\tilde{\mathbf{C}}^-\right)^{-1}, \tag{4.5}$$

где

$$\tilde{\mathbf{C}}^- = \left[\mathbf{c} \mid \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{K}}\right)\mathbf{c}\right],\;\; \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{B}^L\mathbf{D}_B,\;\; \mathbf{c} = \mathbf{D}_C\tilde{\mathbf{N}}^R,\;\; \mathbf{B}^L = \left[\mathbf{0}_{2\times 2} \mid \mathbf{I}_2\right]\tilde{\mathbf{U}}^{-1},$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}\right],\;\; \tilde{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix}\mathbf{C} \\ \mathbf{CA}\end{bmatrix},$$

независимо от конкретного значения правого аннулятора $\tilde{\mathbf{N}}^R$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Теорема доказывается в четыре шага.

Ш а г 1. Расчет регулятора на 1-м уровне ($\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{B}^-$), $\operatorname{eig}\left(\mathbf{A}_{B1} - \mathbf{B}_1\mathbf{K}_1\right) = \left\{\phi_{B1},\ \phi_{B2}\right\}$.

В силу условия (4.1) $\det\tilde{\mathbf{U}} \neq 0$, левый аннулятор $\mathbf{B}^L$ и матрицы $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{K}_1$ могут быть записаны в виде

$$\mathbf{B}^L = \left[\mathbf{0}_{2\times 2} \mid \mathbf{I}_2\right]\tilde{\mathbf{U}}^{-1},\;\; \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}^L\mathbf{AB} = \mathbf{I}_2,\;\; \mathbf{K}_1 = \mathbf{A}_{B1} - \Phi_{B1},$$

где $\operatorname{eig}\Phi_{B1} = \left\{\phi_{B1},\ \phi_{B2}\right\}$. Таким образом,

$$\mathbf{B}^- = \mathbf{B}^+ + \mathbf{K}_1\mathbf{B}^L = \mathbf{B}^+ + \left(\mathbf{A}_{B1} - \Phi_{B1}\right)\mathbf{B}^L = \mathbf{B}^L\mathbf{A} - \Phi_{B1}\mathbf{B}^L. \tag{4.6}$$

Ш а г 2. Расчет наблюдателя на 1-м уровне ($\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{C}^-$), $\operatorname{eig}\left(\mathbf{A}_{C1} - \mathbf{L}_1\mathbf{C}_1\right) = \left\{\phi_{C1},\ \phi_{C2}\right\}$.

В силу условия (4.1) $\det\tilde{\mathbf{N}} = 0$, а также равенства

$$\det\left(\tilde{\mathbf{N}}\left[\mathbf{C}^+ \mid \mathbf{C}^R\right]\right) = \det\begin{bmatrix}\mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \mathbf{CAC}^+ & \mathbf{C}_1\end{bmatrix} = \det\mathbf{C}_1,$$

выполним скелетное разложение вырожденной матрицы $\mathbf{C}_1 = \mathbf{S}_{C1}\hat{\mathbf{C}}_1$ и воспользуемся леммой 4:

$$\mathbf{L}_1 = \left[\hat{\mathbf{L}}_1 \mid -\Omega_{C1}\right]\begin{bmatrix}\mathbf{S}_{C1}^+ \\ \mathbf{S}_{C1}^L\end{bmatrix},$$

где $\hat{\mathbf{L}}_1$ – матрица наблюдателя для пары матриц $\mathbf{A}_{C1}$ и $\hat{\mathbf{C}}_1$, Ω_{C1} – произвольная матрица. Таким образом,

$$\mathbf{C}^- = \mathbf{C}^+ + \mathbf{C}^R\mathbf{L}_1 = \left(\mathbf{C}^+\left[\mathbf{S}_{C1} \mid \mathbf{S}_{C1}^{L+}\right] + \mathbf{C}^R\left[\hat{\mathbf{L}}_1 \mid -\Omega_{C1}\right]\right)\begin{bmatrix}\mathbf{S}_{C1}^+ \\ \mathbf{S}_{C1}^L\end{bmatrix} = \left[\mathbf{c}_1 \mid \mathbf{c}_2\right]\begin{bmatrix}\mathbf{S}_{C1}^+ \\ \mathbf{S}_{C1}^L\end{bmatrix}, \tag{4.7}$$

где $\mathbf{c}_1 = \mathbf{C}^+\mathbf{S}_{C1} + \mathbf{C}^R\hat{\mathbf{L}}_1$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{C}^+\mathbf{S}_{C1}^{L+} - \mathbf{C}^R\Omega_{C1}$.

По дуальной формуле Аккермана [15] получаем

$$\hat{\mathbf{L}}_1 = \left(\mathbf{A}_{C1}^2 - (\phi_{C1} + \phi_{C2})\mathbf{A}_{C1} + \phi_{C1}\phi_{C2}\mathbf{I}_2\right)\mathbf{C}_1^R = \mathbf{C}^{R+}\mathbf{D}_C\mathbf{C}^R\mathbf{C}_1^R, \tag{4.8}$$

где

$$\mathbf{A}_{C1}^2 = \mathbf{C}^{R+}\mathbf{A}\mathbf{C}^R\mathbf{C}^{R+}\mathbf{A}\mathbf{C}^R = \mathbf{C}^{R+}\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_4 - \mathbf{C}^+\mathbf{C}\right)\mathbf{A}\mathbf{C}^R = \mathbf{C}^{R+}\mathbf{A}^2\mathbf{C}^R - \mathbf{C}^{R+}\mathbf{A}\mathbf{C}^+\mathbf{C}_1,$$

$$\mathbf{C}_1^R = \begin{bmatrix}\hat{\mathbf{C}}_1 \\ \hat{\mathbf{C}}_1\mathbf{A}_{C1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}.$$

Рассчитаем вектор $\mathbf{c}_1$, используемый в формуле (4.7), с учетом значения (4.8):

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{C}^+\mathbf{S}_{C1} + \left(\mathbf{I}_4 - \mathbf{C}^+\mathbf{C}\right)\mathbf{D}_C\mathbf{C}^R\mathbf{C}_1^R = \mathbf{D}_C\mathbf{C}^R\mathbf{C}_1^R, \tag{4.9}$$

так как

$$\mathbf{C}\mathbf{D}_C\mathbf{C}^R\mathbf{C}_1^R = \mathbf{C}\underbrace{\mathbf{A}\left(\mathbf{C}^+\mathbf{C} + \mathbf{C}^R\mathbf{C}^{R+}\right)\mathbf{A}}_{\mathbf{A}^2}\mathbf{C}^R\mathbf{C}_1^R = \mathbf{S}_{C1}\hat{\mathbf{C}}_1\mathbf{A}_{C1}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{C}}_1 \\ \hat{\mathbf{C}}_1\mathbf{A}_{C1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix} = \mathbf{S}_{C1}.$$

Ш а г 3. Обеспечение условия существования (равенство $\mathbf{B}^-\mathbf{C}^- = \mathbf{0}_{2\times2}$)(2.10) .

Обнулим произведение матриц (4.6) и (4.7) в первом столбце за счет матрицы Φ_{B1} с желаемым спектром $\{\phi_{B1},\ \phi_{B2}\}$, а во втором столбце – за счет матрицы параметров Ω_{C1}:

$$\mathbf{B}^-\mathbf{c}_1 = \mathbf{0}_{2\times1} \ \Leftrightarrow\ \Phi_{B1}\mathbf{B}^L\mathbf{c}_1 = \mathbf{B}^L\mathbf{A}\mathbf{c}_1, \tag{4.10}$$

$$\mathbf{B}^-\mathbf{c}_2 = \mathbf{0}_{2\times1} \ \Leftrightarrow\ \Omega_{C1} = \mathbf{G}_B^{-1}\mathbf{B}^-\mathbf{C}^+\mathbf{S}_{C1}^{L+}.$$

Уравнение (4.10) разрешимо относительно матрицы Φ_{B1} с любым заданным спектром при условии

$$\operatorname{rank}\left(\mathbf{B}^L\left[\mathbf{c}_1 \mid \mathbf{A}\mathbf{c}_1\right]\right) = 2 \ \Leftrightarrow\ \operatorname{rank}\left[\mathbf{B} \mid \mathbf{c}_1 \mid \mathbf{A}\mathbf{c}_1\right] = 4. \tag{4.11}$$

С учетом равенств $\mathbf{B}^-\mathbf{B} = \left(\mathbf{B}^+ + \mathbf{K}_1\mathbf{B}^L\right)\mathbf{B} = \mathbf{I}_2$ и (4.10) можно записать соотношение

$$\mathbf{B}^-\left[\mathbf{B} \mid \mathbf{c}_1 \mid \mathbf{A}\mathbf{c}_1\right] = \left[\mathbf{I}_2 \mid \mathbf{0}_{2\times1} \mid \mathbf{B}^-\mathbf{A}\mathbf{c}_1\right]. \tag{4.12}$$

Рассчитаем произведение $\mathbf{B}^-\mathbf{A}$, используя значение (4.6), а также тождество $\Phi_{B1}^2 + s_B\Phi_{B1} + m_B\mathbf{I}_2 = \mathbf{0}_{2\times2}$ (теорема Кэли – Гамильтона):

$$\mathbf{B}^-\mathbf{A} = \left(\mathbf{B}^L\mathbf{A} - \Phi_{B1}\mathbf{B}^L\right)\mathbf{A} = \mathbf{B}^L\mathbf{A}^2 - \Phi_{B1}\left(\mathbf{B}^- + \Phi_{B1}\mathbf{B}^L\right) = \mathbf{B}^L\mathbf{A}^2 - \Phi_{B1}^2\mathbf{B}^L - \Phi_{B1}\mathbf{B}^- =$$

$$= \mathbf{B}^L\mathbf{A}^2 + (s_B\Phi_{B1} + m_B\mathbf{I}_2)\mathbf{B}^L - \Phi_{B1}\mathbf{B}^- = \mathbf{B}^L\mathbf{A}^2 + s_B\left(\mathbf{B}^L\mathbf{A} - \mathbf{B}^-\right) + m_B\mathbf{B}^L - \Phi_{B1}\mathbf{B}^- =$$

$$= \mathbf{B}^L\left(\mathbf{A}^2 + s_B\mathbf{A} + m_B\mathbf{I}_4\right) - (\Phi_{B1} + s_B\mathbf{I}_2)\mathbf{B}^- = \mathbf{B}^L\mathbf{D}_B - (\Phi_{B1} + s_B\mathbf{I}_2)\mathbf{B}^-.$$

Таким образом,

$$\mathbf{B}^-\mathbf{A} = \mathbf{B}^L\mathbf{D}_B - (\Phi_{B1} + s_B\mathbf{I}_2)\mathbf{B}^-. \tag{4.13}$$

Так как в силу равенств (4.10) и (4.13) $\mathbf{B}^-\mathbf{A}\mathbf{c}_1 = \mathbf{B}^L\mathbf{D}_B\mathbf{c}_1$, из соотношения (4.12) при условии (4.11) получим

$$\mathbf{B}^- = \left[\mathbf{I}_2 \mid \mathbf{0}_{2\times1} \mid \mathbf{B}^L\mathbf{D}_B\mathbf{c}_1\right]\left[\mathbf{B} \mid \mathbf{c}_1 \mid \mathbf{A}\mathbf{c}_1\right]^{-1}. \tag{4.14}$$

Из условия (2.10) и равенства $\mathbf{C}\mathbf{C}^{-} = \mathbf{C}\left(\mathbf{C}^{+} + \mathbf{C}^{R}\mathbf{L}_1\right) = \mathbf{I}_2$ следует

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}.$$

Поэтому с учетом условия (2.2) и значения (4.14) запишем

$$\mathbf{C}^{-} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \left[\mathbf{B} \mid \mathbf{c}_1 \mid \mathbf{A}\mathbf{c}_1\right] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_{2\times 1} & \mathbf{B}^{L}\mathbf{D}_B\mathbf{c}_1 \\ \mathbf{C}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{c}_1 & \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{c}_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}.$$

Ш а г 4. Расчет регулятора по выходу (матрица $\mathbf{F}$) (2.12).

Определим искомую матрицу регулятора по выходу, используя равенства (2.10), (4.13) и (4.15):

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}^{-}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-} = \mathbf{B}^{L}\mathbf{D}_B\mathbf{C}^{-} = \mathbf{B}^{L}\mathbf{D}_B\left[\mathbf{B} \mid \mathbf{c}_1 \mid \mathbf{A}\mathbf{c}_1\right] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_{2\times 1} & \mathbf{B}^{L}\mathbf{D}_B\mathbf{c}_1 \\ \mathbf{C}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{c}_1 & \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{c}_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}.$$

Принимая во внимание тот факт, что

$$\left[\mathbf{I}_2 \mid \mathbf{0}_{2\times 1} \mid \mathbf{B}^{L}\mathbf{D}_B\mathbf{c}_1\right] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_{2\times 1} & \mathbf{B}^{L}\mathbf{D}_B\mathbf{c}_1 \\ \mathbf{C}\mathbf{B} & \mathbf{S}_{\mathbf{C}1} & \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{c}_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \left[\mathbf{I}_2 \mid \mathbf{0}_{2\times 2}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{2\times 2},$$

перепишем полученное выражение в виде

$$\mathbf{F} = \left(\mathbf{B}^{L}\mathbf{D}_B\left[\mathbf{B} \mid \mathbf{c}_1 \mid \mathbf{A}\mathbf{c}_1\right] - \mathbf{B}^{L}\mathbf{D}_B\mathbf{B}\left[\mathbf{I}_2 \mid \mathbf{0}_{2\times 1} \mid \mathbf{B}^{L}\mathbf{D}_B\mathbf{c}_1\right]\right) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_{2\times 1} & \mathbf{B}^{L}\mathbf{D}_B\mathbf{c}_1 \\ \mathbf{C}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{c}_1 & \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{c}_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{B}^{L}\mathbf{D}_B\left[\mathbf{c}_1 \mid \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{B}^{L}\mathbf{D}_B\right)\mathbf{c}_1\right]\left[\mathbf{0}_{2\times 2} \mid \mathbf{I}_2\right] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \left[\mathbf{0}_{2\times 1} \mid \mathbf{B}^{L}\mathbf{D}_B\mathbf{c}_1\right] \\ \mathbf{C}\mathbf{B} & \left[\mathbf{C}\mathbf{c}_1 \mid \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{c}_1\right] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, после инвертирования указанной блочной матрицы используется только правый нижний блок. Рассчитаем его с помощью дополнения Шура [11]:

$$\left[\mathbf{0}_{2\times 2} \mid \mathbf{I}_2\right] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \left[\mathbf{0}_{2\times 1} \mid \mathbf{B}^{L}\mathbf{D}_B\mathbf{c}_1\right] \\ \mathbf{C}\mathbf{B} & \left[\mathbf{C}\mathbf{c}_1 \mid \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{c}_1\right] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\left[\mathbf{C}\mathbf{c}_1 \mid \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{c}_1\right] - \mathbf{C}\mathbf{B}\left(\mathbf{I}_2\right)^{-1}\left[\mathbf{0}_{2\times 1} \mid \mathbf{B}^{L}\mathbf{D}_B\mathbf{c}_1\right]\right)^{-1} = \left(\mathbf{C}\left[\mathbf{c}_1 \mid \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{B}^{L}\mathbf{D}_B\right)\mathbf{c}_1\right]\right)^{-1}.$$

Подставив это значение в расчетную формулу, получим

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}^{L}\mathbf{D}_B\left[\mathbf{c}_1 \mid \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{B}^{L}\mathbf{D}_B\right)\mathbf{c}_1\right]\left(\mathbf{C}\left[\mathbf{c}_1 \mid \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{B}^{L}\mathbf{D}_B\right)\mathbf{c}_1\right]\right)^{-1}.$$

Здесь $\mathbf{c}_1 \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ – вектор-столбец, принимающий значение (4.9). Заметим, что в найденной формуле он использован в двух множителях, один из которых инвертируется. Поэтому вместо вектора $\mathbf{c}_1$ может быть записан вектор $\mathbf{c} = \kappa_c\mathbf{c}_1$ с произвольным коэффициентом $\kappa_c \neq 0$. Это позволяет применять в записи

$$\mathbf{c} = \mathbf{D}_C\mathbf{C}^{R}\mathbf{C}_1^{R} = \mathbf{D}_C\tilde{\mathbf{N}}^{R}$$

любые правые аннуляторы $\mathbf{C}_1^{R} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ и $\tilde{\mathbf{N}}^{R} \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ в силу равенства

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{N}}} \underbrace{\mathbf{C}^{R}\mathbf{C}_1^{R}}_{\tilde{\mathbf{N}}^{R}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{C}_1\mathbf{C}_1^{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, окончательная формула для расчета матрицы регулятора по выходу принимает вид

$$\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{C}}^{-}\left(\mathbf{C}\tilde{\mathbf{C}}^{-}\right)^{-1}$$

где

$$\tilde{\mathbf{C}}^{-} = \left[\mathbf{c} \mid \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{K}}\right)\mathbf{c}\right], \;\; \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{B}^{L}\mathbf{D}_B, \;\; \mathbf{c} = \mathbf{D}_C\tilde{\mathbf{N}}^{R}, \;\; \mathbf{B}^{L} = \left[\mathbf{0}_{2\times 2} \mid \mathbf{I}_2\right]\tilde{\mathbf{U}}^{-1},$$

что совпадает с результатом (4.5), представленным в теореме.

Условие применимости формулы $\det\left(\mathbf{C}\tilde{\mathbf{C}}^{-}\right) \neq 0$ вытекает из условий (2.2) и (4.11) в силу формулы Шура для блочных определителей [11]:

$$\det\left(\begin{bmatrix}\mathbf{B}^{-}\\ \mathbf{C}\end{bmatrix}\left[\mathbf{B} \mid \mathbf{c}_1 \mid \mathbf{Ac}_1\right]\right) = \det\begin{bmatrix}\mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_{2\times 1} & \mathbf{B}^{L}\mathbf{D}_B\mathbf{c}_1\\ \mathbf{CB} & \mathbf{Cc}_1 & \mathbf{CAc}_1\end{bmatrix} = \det\left(\mathbf{C}\left[\mathbf{c}_1 \mid \left(\mathbf{A}-\mathbf{B}\tilde{\mathbf{K}}\right)\mathbf{c}_1\right]\right) = \det\left(\mathbf{C}\tilde{\mathbf{C}}^{-}\right).$$

Теорема доказана.

5.Примеры. Рассмотрим два примера, соответствующих разд. 3 (индекс управляемости больше индекса наблюдаемости) и 4 (индекс наблюдаемости больше индекса управляемости).

Требуется для заданных матриц состояния **A**, управления **B** и наблюдения **C** (пара матриц **A** и **B** полностью управляема, а пара матриц **A** и **C** полностью наблюдаема) синтезировать регулятор по выходу (определить матрицу **F**), обеспечивающий матрице замкнутой системы $\mathbf{A}^{*} = \mathbf{A} - \mathbf{BFC}$ желаемый спектр $\Lambda^{*} = \{\phi_{B1},\ \phi_{B2},\ \phi_{C1},\ \phi_{C2}\}$.

Сформируем из желаемых полюсов коэффициенты следующих полиномов:

$$(\lambda - \phi_{B1})(\lambda - \phi_{B2}) = \lambda^2 \underbrace{-(\phi_{B1} + \phi_{\mathbf{B}2})}_{s_B}\lambda + \underbrace{\phi_{B1}\phi_{B2}}_{m_B},$$

$$(\lambda - \phi_{C1})(\lambda - \phi_{C2}) = \lambda^2 \underbrace{-(\phi_{C1} + \phi_{C2})}_{s_C}\lambda + \underbrace{\phi_{C1}\phi_{C2}}_{m_C},$$

$$\left(\lambda^2 + s_B\lambda + m_B\right)\left(\lambda^2 + s_C\lambda + m_C\right) = \lambda^4 + p_3\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_1\lambda + p_0,$$

где

$$\begin{gathered}
p_0 = m_B m_C = \phi_{B1}\phi_{B2}\phi_{C1}\phi_{C2},\\
p_1 = s_B m_C + s_C m_B = -\phi_{B1}\phi_{B2}\phi_{C1} - \phi_{B1}\phi_{B2}\phi_{C2} - \phi_{B1}\phi_{C1}\phi_{C2} - \phi_{B2}\phi_{C1}\phi_{C2},\\
p_2 = s_B s_C + m_B + m_C = \phi_{B1}\phi_{B2} + \phi_{B1}\phi_{C1} + \phi_{B1}\phi_{C2} + \phi_{B2}\phi_{C1} + \phi_{B2}\phi_{C2} + \phi_{C1}\phi_{C2},\\
p_3 = s_B + s_C = -\phi_{B1} - \phi_{B2} - \phi_{C1} - \phi_{C2}.
\end{gathered}$$

П р и м е р 1. Заданы матрицы состояния, управления и наблюдения соответственно:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & a_{1,4}\\ 0 & 0 & a_{2,3} & 0\\ 0 & a_{3,2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ b_{2,1} & 0\\ 0 & b_{3,2}\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Рассчитаем первые два блочных столбца матрицы управляемости (матрицу $\tilde{\mathbf{U}}$) и первые две блочных строки матрицы наблюдаемости (матрицу $\tilde{\mathbf{N}}$):

$$\tilde{\mathbf{U}} = \left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ b_{2,1} & 0 & 0 & a_{2,3}b_{3,2}\\ 0 & b_{3,2} & a_{3,2}b_{2,1} & 0\\ 0 & 0 & b_{2,1} & 0\end{bmatrix},\quad \tilde{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CA}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ a_{1,1} & 0 & 0 & a_{1,4}\\ 0 & a_{3,2} & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Поскольку $\operatorname{rank}\tilde{\mathbf{U}} = 3$, а $\operatorname{rank}\tilde{\mathbf{N}} = 4$, имеет место случай, когда индекс управляемости 3 больше индекса наблюдаемости 2, т.е. можно воспользоваться теоремой 1.

Запишем левый аннулятор первых двух блочных столбцов матрицы управляемости (аннулятор матрицы $\tilde{\mathbf{U}}$) и правый аннулятор первой блочной строки матрицы наблюдаемости (аннулятор матрицы **C**):

$$\tilde{\mathbf{U}}^L = \left[1 \,\vdots\, 0 \,\vdots\, 0 \,\vdots\, 0\right], \quad \mathbf{C}^R = \tilde{\mathbf{N}}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a_{3,2}} \\ 0 & 0 \\ \dfrac{1}{a_{1,4}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Найдем выражения с матричными полиномами $\mathbf{D}_B = \mathbf{A}^2 + s_B\mathbf{A} + m_B\mathbf{I}_4$ и $\mathbf{D}_C = \mathbf{A}^2 + s_C\mathbf{A} + m_C\mathbf{I}_4$:

$$\mathbf{b}^T = \tilde{\mathbf{U}}^L\mathbf{D}_B = \left[a_{1,1}^2 + s_B a_{1,1} + m_B \,\vdots\, a_{1,4} \,\vdots\, 0 \,\vdots\, a_{1,4}\left(a_{1,1} + s_B\right)\right],$$

$$\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{D}_C\mathbf{C}^R = \begin{bmatrix} a_{1,1} + s_C & \dfrac{a_{1,4}}{a_{3,2}} \\ 0 & a_{2,3} + \dfrac{m_C}{a_{3,2}} \\ 0 & s_C \\ \dfrac{m_C}{a_{1,4}} & \dfrac{s_C}{a_{3,2}} \end{bmatrix}.$$

С помощью вспомогательной матрицы

$$\tilde{\mathbf{B}}^- = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{C}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}^2 + s_B a_{1,1} + m_B & -s_C a_{1,1}^2 - \left(p_2 - m_B\right)a_{1,1} - p_1 \\ a_{1,4} & a_{1,4}\left(a_{1,1} + s_B\right) \\ 0 & -\dfrac{a_{1,4}}{a_{3,2}}\left(a_{1,1}^2 + p_3 a_{1,1} + p_2\right) \\ a_{1,4}\left(a_{1,1} + s_B\right) & a_{1,4}\left(a_{1,1}^2 + s_B a_{1,1} + m_B\right) \end{bmatrix}^T$$

определим первый множитель в расчетной формуле (3.5):

$$\tilde{\mathbf{B}}^-\mathbf{B} = a_{1,4}\begin{bmatrix} b_{2,1} & 0 \\ \left(a_{1,1} + s_B\right)b_{2,1} & -\left(a_{1,1}^2 + p_3 a_{1,1} + p_2\right)\dfrac{b_{3,2}}{a_{3,2}} \end{bmatrix},$$

$$\left(\tilde{\mathbf{B}}^-\mathbf{B}\right)^{-1} = \frac{1}{a_{1,4}}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{b_{2,1}} & 0 \\ \dfrac{a_{3,2}}{b_{3,2}}\dfrac{a_{1,1} + s_B}{a_{1,1}^2 + p_3 a_{1,1} + p_2} & -\dfrac{a_{3,2}}{b_{3,2}}\dfrac{1}{a_{1,1}^2 + p_3 a_{1,1} + p_2} \end{bmatrix}.$$

и второй множитель в той же формуле:

$$\tilde{\mathbf{B}}^-\tilde{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} a_{1,1}^3 + p_3 a_{1,1}^2 + p_2 a_{1,1} + p_1 & a_{1,4}\left(a_{2,3} + \dfrac{a_{1,1}^2 + p_3 a_{1,1} + p_2}{a_{3,2}}\right) \\ p_0 - s_C\left(a_{1,1}^3 + p_3 a_{1,1}^2 + p_2 a_{1,1} + p_1\right) & a_{1,4}\left(\left(a_{1,1} + s_B\right)a_{2,3} - s_C\dfrac{a_{1,1}^2 + p_3 a_{1,1} + p_2}{a_{3,2}}\right) \end{bmatrix}.$$

Окончательно по формуле (3.5) рассчитаем матрицу регулятора по выходу:

$$\mathbf{F} = \left(\tilde{\mathbf{B}}^{-}\mathbf{B}\right)^{-1} \tilde{\mathbf{B}}^{-}\tilde{\mathbf{L}} =$$

$$= \left[\begin{array}{c:c} \dfrac{a_{1,1}^3 + p_3 a_{1,1}^2 + p_2 a_{1,1} + p_1}{a_{1,4} b_{2,1}} & \dfrac{1}{b_{2,1}}\left(a_{2,3} + \dfrac{a_{1,1}^2 + p_3 a_{1,1} + p_2}{a_{3,2}}\right) \\ \dfrac{a_{3,2}}{a_{1,4} b_{3,2}} \dfrac{\left(a_{1,1} + p_3\right)\left(a_{1,1}^3 + p_3 a_{1,1}^2 + p_2 a_{1,1} + p_1\right) - p_0}{a_{1,1}^2 + p_3 a_{1,1} + p_2} & \dfrac{a_{1,1} + p_3}{b_{3,2}} \end{array}\right].$$

Выполним проверку характеристического полинома замкнутой системы:

$$\mathbf{A}^{*} = \mathbf{A} - \mathbf{BFC} =$$

$$= \left[\begin{array}{c:c:c:c} a_{1,1} & 0 & 0 & a_{1,4} \\ -\dfrac{a_{1,1}^3 + p_3 a_{1,1}^2 + p_2 a_{1,1} + p_1}{a_{1,4}} & 0 & -\dfrac{a_{1,1}^2 + p_3 a_{1,1} + p_2}{a_{3,2}} & 0 \\ -\dfrac{a_{3,2}}{a_{1,4}} \dfrac{\left(a_{1,1} + p_3\right)\left(a_{1,1}^3 + p_3 a_{1,1}^2 + p_2 a_{1,1} + p_1\right) - p_0}{a_{1,1}^2 + p_3 a_{1,1} + p_2} & a_{3,2} & -a_{1,1} - p_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$\det\left(\lambda \mathbf{I}_4 - \mathbf{A}^{*}\right) = \left(\lambda - a_{1,1}\right)\lambda\left(\lambda\left(\lambda + a_{1,1} + p_3\right) + a_{1,1}^2 + p_3 a_{1,1} + p_2\right) +$$
$$+\left(a_{1,1}^3 + p_3 a_{1,1}^2 + p_2 a_{1,1} + p_1\right)\left(\lambda + a_{1,1} + p_3\right) - \left(a_{1,1} + p_3\right)\left(a_{1,1}^3 + p_3 a_{1,1}^2 + p_2 a_{1,1} + p_1\right) + p_0 =$$
$$= \lambda^4 + p_3\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_1\lambda + p_0.$$

Полученный полином совпадает с желаемым характеристическим полиномом.

П р и м е р 2. Заданы матрицы состояния, управления и наблюдения соответственно:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 & 0 & a_{1,3} & a_{1,4} \\ 0 & a_{2,2} & 0 & 0 \\ a_{3,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ b_{2,1} & 0 \\ 0 & b_{3,2} \\ 0 & 0 \end{array}\right], \quad \mathbf{C} = \left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Рассчитаем первые два блочных столбца матрицы управляемости (матрицу $\tilde{\mathbf{U}}$) и первые две блочных строки матрицы наблюдаемости (матрицу $\tilde{\mathbf{N}}$):

$$\tilde{\mathbf{U}} = \left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}\right] = \left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 & 0 & 0 & a_{1,3}b_{3,2} \\ b_{2,1} & 0 & a_{2,2}b_{2,1} & 0 \\ 0 & b_{3,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{2,1} & 0 \end{array}\right], \quad \tilde{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & 0 \\ a_{3,1} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Поскольку $\operatorname{rank}\tilde{\mathbf{U}} = 4$, а $\operatorname{rank}\tilde{\mathbf{N}} = 3$, имеет место случай, когда индекс наблюдаемости 3 больше индекса управляемости 2, т.е. можно воспользоваться теоремой 2.

Запишем левый аннулятор первого блочного столбца матрицы управляемости (аннулятор матрицы **B**) и правый аннулятор первых двух блочных строк матрицы наблюдаемости (аннулятор матрицы $\tilde{\mathbf{N}}$):

$$\mathbf{B}^{L} = \left[\mathbf{0}_{2\times 2} \mid \mathbf{I}_2\right]\tilde{\mathbf{U}}^{-1} = \left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{b_{2,1}} \\ \dfrac{1}{a_{1,3}b_{3,2}} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \tilde{\mathbf{N}}^{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Найдем выражения с матричными полиномами $\mathbf{D}_B = \mathbf{A}^2 + s_B\mathbf{A} + m_B\mathbf{I}_4$ и $\mathbf{D}_C = \mathbf{A}^2 + s_C\mathbf{A} + m_C\mathbf{I}_4$:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{B}^L\mathbf{D}_B = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{a_{2,2}+s_B}{b_{2,1}} & 0 & \dfrac{m_B}{b_{2,1}} \\ \dfrac{1}{b_{3,2}}\left(a_{3,1}+\dfrac{m_B}{a_{1,3}}\right) & \dfrac{a_{1,4}}{a_{1,3}b_{3,2}} & \dfrac{s_B}{b_{3,2}} & \dfrac{a_{1,4}s_B}{a_{1,3}b_{3,2}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{D}_C\tilde{\mathbf{N}}^R = \begin{bmatrix} a_{1,4}s_C \\ 0 \\ a_{1,4}a_{3,1} \\ m_C \end{bmatrix}.$$

С помощью вспомогательной матрицы

$$\tilde{\mathbf{C}}^- = \left[\mathbf{c} \mid \left(\mathbf{A}-\mathbf{B}\tilde{\mathbf{K}}\right)\mathbf{c}\right] = \begin{bmatrix} a_{1,4}s_C & a_{1,4}\left(a_{1,3}a_{3,1}+m_C\right) \\ 0 & -p_0 \\ a_{1,4}a_{3,1} & -a_{1,4}\left(a_{3,1}s_B+\dfrac{p_1}{a_{1,3}}\right) \\ m_C & 0 \end{bmatrix}$$

определим первый множитель в расчетной формуле (4.5):

$$\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{C}}^- = \begin{bmatrix} \dfrac{p_0}{b_{2,1}} & -\dfrac{p_0}{b_{2,1}}\left(a_{2,2}+s_B\right) \\ \dfrac{a_{1,4}}{b_{3,2}}\left(\dfrac{p_1}{a_{1,3}}+a_{3,1}p_3\right) & -\dfrac{a_{1,4}}{b_{3,2}}\left(\dfrac{p_1s_B}{a_{1,3}}-a_{3,1}\left(a_{1,3}a_{3,1}+p_2-p_3s_B\right)\right) \end{bmatrix}$$

и второй множитель в той же формуле:

$$\mathbf{C}\tilde{\mathbf{C}}^- = \begin{bmatrix} 0 & -p_0 \\ a_{1,4}a_{3,1} & -a_{1,4}\left(\dfrac{p_1}{a_{1,3}}+a_{3,1}s_B\right) \end{bmatrix},$$

$$\left(\mathbf{C}\tilde{\mathbf{C}}^-\right)^{-1} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{p_0}\left(\dfrac{p_1}{a_{1,3}a_{3,1}}+s_B\right) & \dfrac{1}{a_{1,4}a_{3,1}} \\ -\dfrac{1}{p_0} & 0 \end{bmatrix}.$$

Окончательно по формуле (4.5) рассчитаем матрицу регулятора по выходу:

$$\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{C}}^-\left(\mathbf{C}\tilde{\mathbf{C}}^-\right)^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{b_{2,1}}\left(a_{2,2}-\dfrac{p_1}{a_{1,3}a_{3,1}}\right) & \dfrac{p_0}{a_{1,4}a_{3,1}b_{2,1}} \\ -\dfrac{a_{1,4}}{b_{3,2}p_0}\left(a_{3,1}\left(a_{1,3}a_{3,1}+p_2\right)+\dfrac{p_1}{a_{1,3}}\left(\dfrac{p_1}{a_{1,3}a_{3,1}}+p_3\right)\right) & \dfrac{1}{b_{3,2}}\left(\dfrac{p_1}{a_{1,3}a_{3,1}}+p_3\right) \end{bmatrix}.$$

Выполним проверку характеристического полинома замкнутой системы:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \mathbf{BFC} =$$

$$= \left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 & 0 & a_{1,3} & a_{1,4} \\ 0 & \dfrac{p_1}{a_{1,3}a_{3,1}} & -\dfrac{p_0}{a_{1,4}a_{3,1}} & 0 \\ a_{3,1} & \dfrac{a_{1,4}}{p_0}\left(a_{3,1}\left(a_{1,3}a_{3,1} + p_2\right) + \dfrac{p_1}{a_{1,3}}\left(\dfrac{p_1}{a_{1,3}a_{3,1}} + p_3\right)\right) & -\dfrac{p_1}{a_{1,3}a_{3,1}} - p_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$\det\left(\lambda\mathbf{I}_4 - \mathbf{A}^*\right) = \lambda^2\left(\left(\lambda - \frac{p_1}{a_{1,3}a_{3,1}}\right)\left(\lambda + \frac{p_1}{a_{1,3}a_{3,1}} + p_3\right) + a_{1,3}a_{3,1} + p_2 + \frac{p_1}{a_{1,3}a_{3,1}}\left(\frac{p_1}{a_{1,3}a_{3,1}} + p_3\right)\right) +$$
$$+\lambda\left(p_1 - a_{1,3}a_{3,1}\lambda\right) + p_0 = \lambda^4 + p_3\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_1\lambda + p_0.$$

Полученный полином совпадает с желаемым характеристическим полиномом.

Заключение. Определено аналитическое решение задачи модального управления по выходу для широкого класса динамических систем с суммарной размерностью входного и выходного векторов, не превышающей размерность вектора состояния. Решение применимо к системам четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами при неравных индексах управляемости и наблюдаемости. Для каждого назначаемого спектра решение единственно и представляется компактной аналитической формулой, не требующей дополнительных матричных разложений или декомпозиции. Рассмотрены случаи, в которых индекс управляемости принимает значение как больше, так и меньше значения индекса наблюдаемости. Для каждого случая на основе двухуровневой декомпозиции с параметризацией обоих уровней доказаны соответствующие взаимно дуальные теоремы об управлении по выходу и приведены конкретные примеры аналитического расчета регуляторов. Примеры подтверждают совпадение спектров замкнутых систем управления по выходу с желаемыми спектрами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zubov N.E., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N.* Controlling a Linear MIMO-System by a Measurement Vector Using Multilevel Decomposition // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2020. V. 59. Iss. 2. P. 151–160. https://doi.org/:10.1134/S1064230720020136
2. *Zubov N.E., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N., Fomichev A.V.* Synthesis of Control Laws for Aircraft Lateral Motion at the Lack of Data on the Slip Angle: Analytical Solution // Russian Aeronautics. 2017. V. 60. Iss. 1. P. 64–73. https://doi.org/:10.3103/S106879981701010X
3. *Zubov N.E., Ryabchenko V.N., Sorokin I.V.* Output Control of the Longitudinal Motion Spectrum of a Single-Rotor Helicopter // Russian Aeronautics. 2020. V. 63. Iss. 2. P. 249–259. https://doi.org/:10.3103/S1068799820030319
4. *Zubov N.E., Mikrin E.A., Oleynik A.S., Ryabchenko V.N., Efanov D.E.* The Spacecraft Angular Velocity Estimation in the Orbital Stabilization Mode by the Results of the Local Vertical Sensor Measurements // Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering. 2014. Iss. 5. P. 3–13.
5. *Van der Woude J.W.* A Note on Pole Placement by Static Output Feedback for Single-Input Systems // Systems & Control Letters. 1988. V. 11. Iss. 4. P. 285–287. https://doi.org/:10.1016/0167-6911(88)90072-2
6. *Zubov N.E., Zybin E.Y., Mikrin E.A., Misrikhanov M.Sh., Proletarskii A.V., Ryabchenko V.N.* Output Control of a Spacecraft Motion Spectrum // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2014. V. 53. Iss. 4. P. 576–586. https://doi.org/:10.1134/S1064230714040170
7. *Lapin A.V., Zubov N.E.* Parametric Synthesis of Modal Control with Output Feedback for Descent Module Attitude Stabilization // Int. Russian Autom. Conf. 2019. P. 1–6. https://doi.org/:10.1109/RusAutoCon.2019.8867744
8. *Zubov N.E., Lapin A.V., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N.* Output Control of the Spectrum of a Linear Dynamic System in Terms of the Van der Woude Method // Doklady Mathematics. 2017. V. 96. Iss. 2. P. 457–460. https://doi.org/:10.1134/S1064562417050179
9. *Zubov N.E., Lapin A.V.* Reducing the Problem of the Modal Control by Output for Stationary Forth-Order Systems with Two Inputs and Two Outputs to the Control by State for a System with a Single Input // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2023. V. 62. Iss. 1. P. 43–60. https://doi.org/:10.1134/S1064230723010124

10. *Zubov N.E., Zybin E.Yu., Lapin A.V.* Analytical Synthesis of an Aircraft's Lateral Motion Control by Output at the Lack of Measurements of Slip and Roll Angles // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2023. V. 62. Iss. 2. P. 354–361. https://doi.org/:10.1134/S1064230723020193
11. *Gantmacher F.R.* The Theory of Matrices. Providence: AMS Chelsea Publishing, 2000.
12. *Ryabchenko V.N., Zubov N.E., Sorokin I.V., Proletarskii A.V.* Complete Pole Placement Method for Linear MIMO Systems // Mechatronics, Automation, Control. 2018. V. 19. Iss. 1. P. 11–18. https://doi.org/:10.17587/mau.19.11-18.
13. *Zubov N.E., Mikrin E.A., Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N.* Modification of the Exact Pole Placement Method and its Application for the Control of Spacecraft Motion // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2013. V. 52. Iss. 2. P. 279–292. https://doi.org/:10.1134/S1064230713020135
14. *Haidar I., Barbot J.-P., Rapaport A.* A Multi Observers Approach when Observability Index is Higher than the State Dimension – a Case Study // IEEE 58th Conf. on Decision and Control. 2019. P. 1571–1576. https://doi.org/:10.1109/CDC40024.2019.9029675
15. *Ackermann J.* Der Entwurf linearer Regelungsysteme im Zustandraum // Regeltech, Proz.-Datenverarb. 1972. V. 20. Iss. 1. P. 297–300. https://doi.org/:10.1524/auto.1972.20.112.297