

УДК 531.552

## МАКСИМИЗАЦИЯ ДАЛЬНОСТИ ПОЛЕТА ДЛЯ УПРОЩЕННОЙ МОДЕЛИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА<sup>1</sup>

© 2024 г. Е. В. Малых<sup>a, \*</sup>, О. Ю. Черкасов<sup>a, b, \*\*</sup>

<sup>a</sup>МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>b</sup>Университет МГУ-ППИ, Шэньчжэнь, Китай

\*e-mail: [wyvling@gmail.com](mailto:wyvling@gmail.com)

\*\*e-mail: [oyuche@yandex.ru](mailto:oyuche@yandex.ru)

Поступила в редакцию 14.05.2024 г.

После доработки 15.05.2024 г.

Принята к публикации 22.07.2024 г.

Рассматривается задача максимизации дальности полета для упрощенной модели летательного аппарата с учетом влияния количества топлива на динамику центра масс. Предполагается, что движение происходит в вертикальной плоскости под действием однородных сил тяжести и сопротивления среды. Кроме того, имеются активная сила тяги и возможность изменять угол наклона траектории. Эти параметры приняты в качестве управлений. Построена область в пространстве исходных переменных, для которой решена задача оптимального синтеза. Показано, что в этой области тяга может быть максимальной, нулевой или особой. Установлено количество и порядок следования участков траектории с соответствующей тягой.

**Ключевые слова:** двумерная задача Годдарда, обобщение задачи о брахистохроне, особое управление, оптимальный синтез

DOI: 10.31857/S0002338824060037, EDN: SVSBYV

## FLIGHT RANGE MAXIMIZATION PROBLEM FOR A SIMPLIFIED AIRCRAFT MODEL

E. V. Malykh<sup>a, \*</sup>, O. Yu. Cherkasov<sup>a, b, \*\*</sup>

<sup>a</sup>Lomonosov Moscow State University

<sup>b</sup>Shenzhen MSU-BIT University

\*e-mail: [wyvling@gmail.com](mailto:wyvling@gmail.com)

\*\*e-mail: [oyuche@yandex.ru](mailto:oyuche@yandex.ru)

The flight range maximization problem for a simplified aircraft model is considered, considering the influence of the amount of fuel on the dynamics of the center of mass. It is assumed that the motion occurs in a vertical plane under the influence of homogeneous gravity forces and homogeneous resistance of the medium. In addition, there are an active thrust force and the ability to change the angle of inclination of the trajectory. These parameters are accepted as controls. An area in the space of initial variables is constructed, for which the problem of optimal synthesis is solved. It is shown that in this area the thrust can be of maximum value, zero value or singular value. The number and consequence of the trajectory arcs with the corresponding thrust have been established.

**Keywords:** Two-Dimensional Goddard Problem, Brachistochrone Problem Generalization, Singular control, Optimal Synthesis

**Введение.** Одной из первых задач оптимизации формы траектории движения точки в вертикальной плоскости под действием силы тяжести является задача о брахистохроне [1]. В 1697 г. И. Бернулли сформулировал следующую задачу: найти форму кривой, двигаясь по которой

<sup>1</sup> Работа поддержана Министерством науки и Высшего образования Российской Федерации по программе "Сверхзвук" (договор №075-15-2020-923).

в вертикальной плоскости под действием только силы тяжести материальная точка переместится из одной заданной точки в другую заданную точку за минимальное время. Обобщения задачи о брахистохроне, в которых учитывалось влияние сухого трения, представлены в работах [2–9]. Влияние вязкого трения изучено, например, в [10, 11]. Задача с ограничениями на силу реакции опоры кривой или на кривизну траектории рассматривалась в публикациях [12, 13] соответственно. В [14–16] исследовались фазовые ограничения различного вида. Обобщения задачи о брахистохроне при наличии разгоняющей силы описаны в [10, 17–19]. В [10] приведены результаты моделирования для случая разгоняющей силы, пропорциональной скорости. В [17] задача изучалась при наличии постоянной разгоняющей силы и силы линейного вязкого трения. В [18] исследован случай квазипостоянной разгоняющей силы, а в [19] установлены качественные свойства траекторий при наличии нелинейного сопротивления и постоянной разгоняющей силы. При этом масса точки предполагалась постоянной. В [20] рассматривалась задача о брахистохроне при переменной тяге, являющейся управлением, и штрафе за ее расход. Задача о брахистохроне для случая, когда масса частицы меняется по известному закону, приведена в [21] при действии сухого трения и в [22] при действии вязкого трения. В [23] исследовалась задача оптимизации формы траектории движения центра масс летательного аппарата в вертикальной плоскости в случае переменной массы, меняющейся в зависимости от заданного закона тяги двигателя. Модель летательного аппарата, в которой в качестве управления принят угол наклона траектории, в [23] называется «промежуточной», мы будем использовать для нее термин «упрощенная». В рамках этой модели предполагается, что подъемная сила, необходимая для изменения формы траектории, не влияет на силу сопротивления. Данное допущение справедливо при достаточно малых углах атаки. В такой постановке подъемная сила в задаче оптимизации формы траектории точечной модели летательного аппарата играет роль реакции опорной кривой в задаче о брахистохроне для точечной массы. Обсуждение границ применимости такой модели приводится, например, в работах [23–25].

Задача программирования тяги летательного аппарата вдоль траектории, в частности максимизации высоты полета с заданным количеством топлива, была сформулирована Р. Годдардом в 1919 г. [26]. Эта задача исследовалась методами вариационного исчисления (например, [27–29]) и стала одной из первых, решаемых методами теории оптимального управления. Два частных случая, а именно один с линейной зависимостью сопротивления от скорости, а другой с квадратичной зависимостью от скорости, были рассмотрены в [28]. Было установлено, что оптимальная программа изменения тяги состоит, как правило, из дуги максимальной тяги, затем промежуточной тяги и заканчивается нулевой тягой. Такая структура имеет место в случае достаточно большого верхнего предела тяги, когда промежуточная тяга удовлетворяет ограничениям на протяжении всего процесса и остается допустимой. Позже результаты были обобщены на случай экспоненциальной зависимости плотности воздуха от высоты и переменного ускорения силы тяжести (например, [30–32]). В [33] для задачи максимизации дальности горизонтального полета было обнаружено, что оптимальная тяга имеет ту же структуру, что и для задачи о вертикальном подъеме ракеты. Упомянутые работы инициировали развитие методов решения задач оптимального управления, содержащих особые участки. Другие обобщения задачи Годдарда при ограничениях на время полета и с учетом зависимости силы лобового сопротивления от высоты представлены, например, в статье [34]. Там также было показано, что при определенных условиях оптимальное управление может иметь более сложную структуру переключения, главным образом из-за возможности появления второй дуги полной тяги после дуги особой тяги. В [35] решена задача выбора оптимального режима расходования топлива и оптимальной программы для направления тяги при движении в вертикальной плоскости при отсутствии сопротивления воздуха. Для решения задачи сформулирован и применен метод первой вариации функционала, известный также как метод множителей Лагранжа для задач управления. В дальнейшем этот метод получил название метода Охотимского-Понтрягина [36].

В [24] была рассмотрена двумерная задача Годдарда, в которой искался оптимальный закон изменения тяги при условии, что закон изменения угла наклона траектории задан. Задача одновременного управления углом наклона траектории и расходом массы была рассмотрена в [37] для простейшего случая линейного вязкого трения.

В работе исследуется задача максимизации дальности полета с учетом влияния количества топлива на динамику точечной массы. В этом состоит главное отличие данной статьи от публикаций [17–20], где предполагалось, что сила тяги не влияет на массу точки. В отличие от работ [21, 22] скорость изменения массы точки рассматривается как управляющая переменная наряду с управлением углом наклона. По сравнению со статьями [23–25] закон изменения угла наклона траектории рассматривается как управление наряду с управлением

тягой. В [32] представлено исследование задачи Годдарда для невертикальных траекторий для достаточно общей модели аэродинамического сопротивления и центрального поля сил тяжести. Численным моделированием подтверждено существование оптимальной траектории с особой дугой. В настоящей работе результаты, полученные в [37], обобщаются на случай нелинейного закона сопротивления среды. В частности, для определенной области исходных переменных аналитически строится оптимальный синтез управления тягой.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается движение материальной точки в вертикальной плоскости в однородном поле сил тяжести под действием сил тяги и сопротивления среды. Задача состоит в определении формы траектории, обеспечивающей максимизацию горизонтальной координаты точки при движении ее из заданного начального состояния за фиксированный промежуток времени при определенном количестве топлива. Математическая модель движения центра масс твердого тела в атмосфере, включающая предположение о тяге вдоль траектории, широко применяется в различных исследованиях (например, [23]). Модель, используемая в данной работе, отличается от модели [37] нелинейной зависимостью силы сопротивления от скорости достаточно общего вида. Действующие силы представлены на рис. 1. Через  $Q(V)$  обозначена сила сопротивления, где  $V$  — модуль скорости точки. Предполагается, что  $Q(V)$  — дважды дифференцируемая выпуклая вниз функция скорости. Зависимостью силы сопротивления от высоты будем пренебрегать, полагая, что движение происходит в таком диапазоне высот, что плотность среды можно считать постоянной далее,  $M$  — масса точки,  $g$  — ускорение свободного падения,  $L$  — подъемная сила. Если вместо движения центра масс летательного аппарата исследовать движение точки вдоль заданной кривой, как в классической

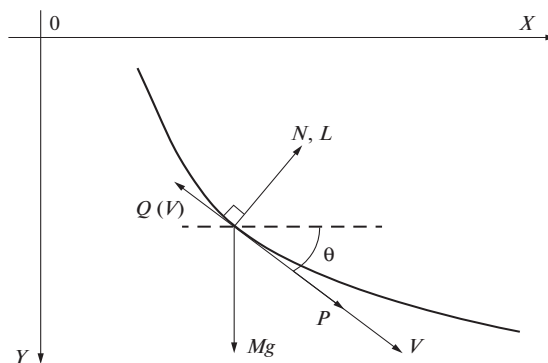


Рис. 1. Действующие силы и переменные

задаче о брахистохроне, то вместо подъемной силы следует рассматривать силу реакции опорной кривой  $N$ . Подъемная сила  $L$  или сила реакции опоры  $N$  являются управлениями. Угол наклона траектории обозначен через  $\theta$ . В рамках упрощенной модели летательного аппарата угол  $\theta$  может рассматриваться в качестве управления вместо  $N$  и  $L$ . Второе управление, сила тяги  $P$ ,  $P = cU$ , где  $U$  — скорость расхода массы, а  $c$  — скорость истечения рабочего тела.

Уравнения движения имеют следующий вид [23]:

$$\dot{X} = V \cos \theta, \dot{Y} = V \sin \theta, \dot{V} = (-Q(V) + cU) / M - g \sin \theta, \dot{M} = -U.$$

Здесь через  $X$  и  $Y$  обозначены горизонтальная и вертикальная координаты точки, Переменные  $\theta$  и  $U$  рассматриваются в качестве управлений, принадлежащих классу кусочно-непрерывных функций времени. Дифференцирование уравнений движения осуществляется относительно размерного времени  $\tau$ . На управление  $\theta$  ограничения не наложены, а управление  $U(\tau)$  удовлетворяет неравенству  $0 \leq U(\tau) \leq \bar{U}$ , где  $\bar{U} > 0$  — заданная константа.

Для дальнейшей работы перейдем к безразмерным переменным по следующим формулам:

$$X = \tilde{X}x, Y = \tilde{Y}y, U = \tilde{U}u, V = \tilde{V}v, \tau = \tilde{\tau}t, M = \tilde{M}m,$$

где  $\tilde{X} = c^2 / g$ ,  $\tilde{Y} = c^2 / g$ ,  $\tilde{U} = \bar{U} / \bar{u}$ ,  $\tilde{V} = c$ ,  $\tilde{\tau} = c / g$ ,  $\tilde{M} = \bar{U}c / (g\bar{u})$  — масштабы горизонтальной и вертикальной координат точки, скорости расхода массы, скорости точки, времени и массы

соответственно,  $x, y$  — безразмерные горизонтальная и вертикальная координаты точки соответственно,  $u$  — безразмерная скорость расхода массы,  $u > 0$  — верхнее ограничение на безразмерную скорость расхода массы,  $v$  — безразмерная скорость точки,  $t$  — безразмерное время,  $m$  — безразмерная масса точки. Далее производную по безразмерному времени  $t$  будем обозначать точкой. Уравнения движения в безразмерных переменных имеют следующий вид:

$$\dot{x} = v \cos \theta, \dot{y} = v \sin \theta, \dot{v} = (-q(v) + u) / m - \sin \theta, \dot{m} = -u, \quad (1.1)$$

$$0 \leq u \leq \bar{u} \quad (1.2)$$

где  $\bar{u} > 0$  — заданная константа.

Начальные и конечные условия для системы (1.1) запишем как

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, v(0) = v_0, m(0) = m_0, m(T) = m_T > 0, \quad (1.3)$$

$x(T), y(T), v(T)$  — свободны,  $x_0, y_0, v_0$  — заданные параметры  $T$  — заданный момент окончания процесса, определяемый относительно безразмерного времени  $t$ .

Целью управления является минимизация функционала

$$J = -x(T) \rightarrow \min_{\theta, u} \quad (1.4)$$

на траекториях динамической системы (1.1) с краевыми условиями (1.3) при помощи управлений  $\theta, u$  с учетом ограничений (1.2). Иначе говоря, нужно максимизировать горизонтальную координату точки в заданный момент  $T$  окончания процесса. Поскольку условия на конечное значение  $y(T)$  отсутствуют, решение задачи (1.1)–(1.4) дает достижимую верхнюю оценку максимально возможной дальности.

**2. Условия оптимальности.** Для исследования поставленной задачи применим принцип максимума Понтрягина [38]. Функция Гамильтона для задачи (1.1)–(1.4) имеет следующий вид:

$$H = \psi_x v \cos \theta + \psi_y v \sin \theta + \psi_v ((-q + u) / m - \sin \theta) - \psi_m u. \quad (2.1)$$

Уравнения относительно сопряженных переменных запишем как

$$\dot{\psi}_x = 0, \dot{\psi}_y = 0, \dot{\psi}_v = -\psi_x \cos \theta - \psi_y \sin \theta + \frac{dq}{dv} \cdot \psi_v / m, \dot{\psi}_m = (u - q) \psi_v / (m^2). \quad (2.2)$$

Вдоль оптимальной траектории выполняется соотношение  $H = C$ , где  $C$  — неизвестная константа,  $C \neq 0$  в задаче с фиксированным временем окончания процесса. Из условий трансверсальности получаем конечные значения для сопряженных переменных:

$$\psi_x(T) = 1, \psi_y(T) = 0, \psi_v(T) = 0, \psi_m(T) = a, \quad (2.3)$$

где  $a$  — неизвестная константа.

Из (2.2), (2.3) следует  $\psi_x(t) = 1, \psi_y(t) = 0 \forall t \in [0, T]$ .

Максимизация функции  $H$  по управлению  $\theta$  приводит к соотношениям:

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow -\psi_v \cos \theta - v \sin \theta = 0. \quad (2.4)$$

Поскольку движение с углом  $\theta = \pm \pi/2$  представляется неоптимальным в смысле достижения максимальной дальности по горизонтали, будем считать, что  $\cos \theta \neq 0$ . Тогда из уравнения (2.4) следует

$$\psi_v = -v \operatorname{tg} \theta. \quad (2.5)$$

Заметим, что в соответствии с соотношением (2.5) экстремальное управление углом  $\theta$  является функцией одного класса гладкости с сопряженной переменной  $\psi_v$ . С учетом (2.5) получаем

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} \leq 0 \Leftrightarrow \psi_v \sin \theta - v \cos \theta = -v / \cos \theta \leq 0 \Leftrightarrow \cos \theta > 0. \quad (2.6)$$

Из (2.6) следует тривиальный вывод: для максимизации дальности нужно двигаться в сторону увеличения дальности.

Представим функцию (2.1) в виде

$$H = H_0 + H_1 u,$$

где

$$H_0 = v \cos \theta + (-q / m - \sin \theta) \psi_v, \quad H_1 = \psi_v / m - \psi_m.$$

Функция  $H_1$  называется функцией переключения.

Максимизация функции  $H$  по управлению  $u$  приводит к следующему правилу выбора экстремальной тяги:

$$u = \begin{cases} \bar{u}, & H_1 > 0, \\ u_s, & H_1 \equiv 0, \\ 0, & H_1 < 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Случаи  $H_1 > 0$  и  $H_1 < 0$  отвечают регулярному управлению. Если существует отрезок времени  $\sigma \in [0, T]$ , такой, что  $t \in \sigma$  функция переключения обращается в нуль тождественно, т.е. выполнено  $H_1 = 0$ , то на отрезке времени  $\sigma$  возникает сингулярное или особое управление [39]. В формуле (2.7) через  $u_s$  обозначено искомое особое управление. На отрезке особого управления выполнены следующие соотношения:

$$H_0 \equiv C, \quad H_1 \equiv 0, \quad \frac{dH_1}{dt} \equiv 0, \quad \frac{d^2 H_1}{dt^2} \equiv 0.$$

Если эти соотношения линейно независимы, то из уравнения  $d^2 H_1 / dt^2 \equiv 0$  может быть найдено особое управление. В таком случае оно называется особым управлением первого порядка.

Дифференцируя соотношение  $H_1 = \psi_v / m - \psi_m$  по времени в силу систем (1.1) и (2.2) и учитывая выражение (2.4), получим

$$\dot{H}_1 = \left( (q_v' + q)(-v \operatorname{tg} \theta) - m \cos \theta \right) / m^2 = 0, \quad \forall t \in \sigma \subset [0, T]. \quad (2.8)$$

Здесь и далее через  $q_v'$ ,  $q_{vv}''$  обозначены первая и вторая производные от силы сопротивления по скорости. Для вычисления  $d^2 H_1 / dt^2$  вначале продифференцируем соотношение (2.4) с учетом уравнений (1.1) и (2.2) и находим дифференциальное уравнение для управляющей переменной  $\theta$ :

$$\dot{\theta} = \left( 1 + (v q_v' + q - u) \sin \theta / m \right) \cos \theta / v. \quad (2.9)$$

Конечное условие для уравнения (2.9) получается из (2.3), (2.4):

$$\theta(T) = -\operatorname{arctg}(\psi_v / v) |_{t=T} = 0. \quad (2.10)$$

Дифференцируя соотношение (2.8) в силу систем (1.1), (2.2) и учитывая (2.9), запишем

$$\frac{d}{dt}(\dot{H}_1) = \frac{d}{dt} \left( (q_v' + q)(-v \operatorname{tg} \theta) - m \cos \theta \right) / m^2 = 0,$$

или

$$\left( 1 - \sin^2 \theta / v + (q_{vv}'' + q_v') / (q_v' + q) \right) (u - q) + q_v' \sin^2 \theta - m \sin \theta \left( (q_{vv}'' + q_v') / (q_v' + q) - 1 / v \right) = 0,$$

откуда, подставив выражение для массы из соотношения (2.8), найдем выражение для особого управления как функции от скорости и угла наклона траектории:

$$u_s(v, \theta) = q - \operatorname{tg}^2 \theta \left( v q_{vv}'' + q_v' (v - \sin^2 \theta) - q \right) / \left( 1 - \sin^2 \theta / v + (q_{vv}'' + q_v') / (q_v' + q) \right). \quad (2.11)$$

**3. Уравнение особой поверхности.** Соотношения  $H_0 \equiv C$ ,  $H_1 \equiv 0$ ,  $dH_1 / dt \equiv 0$  представляют собой семейство особых поверхностей задачи (1.1)–(1.4). Выражая из формулы (2.8) массу, получим

$$m = -v(q_v' + q) \sin \theta / \cos^2 \theta. \quad (3.1)$$

Значение  $m$  в (3.1) положительно, если  $\theta \in (-\pi / 2, 0)$ . Значит, особый участок возможен только на нисходящей ветви траектории. Кроме того, как следует из (2.10), (3.1) и условия положительности массы, участок особой, промежуточной тяги не может примыкать к концу оптимальной траектории. Поверхность особого управления в пространстве  $(\theta, v, m)$  представлена на рис. 2.



Вычислим частные производные от  $m(v, \theta)$  по скорости и углу. Из неравенства

$$\frac{\partial m(v, \theta)}{\partial v} = -\left(vq''_{vv} + q'_v(v+1) + q\right)\sin\theta / \cos^2\theta > 0, \theta \in (-\pi/2; 0)$$

следует, что масса при движении по особой поверхности возрастает с увеличением скорости. Из неравенства

$$\frac{\partial m(v, \theta)}{\partial \theta} = -v(q'_v + q)(1 + \sin^2\theta) / \cos^3\theta < 0, \theta \in (-\pi/2; 0)$$

закключаем, что масса при движении по особой поверхности убывает с увеличением угла. Эти свойства будут использованы при построении синтеза оптимального управления тягой.

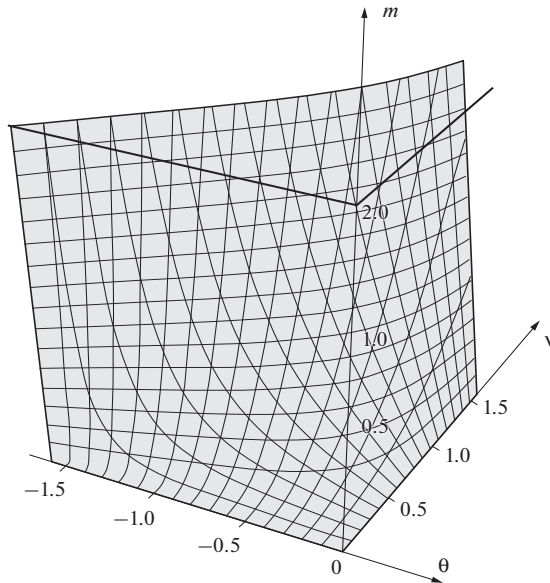


Рис. 2. Поверхность особого управления

**4. Синтез оптимального управления.** В результате применения принципа максимума задача оптимального управления (1.1)–(1.4) сведена к краевой задаче для системы уравнений (1.1)–(1.3), (2.9), (2.10), не содержащей сопряженных переменных. При решении задачи управление тягой определяется в соответствии с правилом (2.7).

Пусть выполнено неравенство

$$m > -v(q'_v + q)\sin\theta / \cos^2\theta. \quad (4.1)$$

В этом случае точка в пространстве  $(\theta, v, m)$  лежит выше особой поверхности и из выражения (2.8) следует  $\dot{H}_1 < 0$ . Следовательно, принципу максимума удовлетворяет только переключение с управления  $u = \bar{u}$  на управление  $u = 0$ . Если же точка лежит ниже особой поверхности, т.е. выполнено неравенство

$$m < -v(q'_v + q)\sin\theta / \cos^2\theta, \quad (4.2)$$

то  $\dot{H}_1 > 0$  и оптимальным может быть только переключение с управления  $u = 0$  на управление  $u = \bar{u}$ . Задача состоит в построении оптимального синтеза управления тягой, т.е. нахождение тяги как функции исходных переменных системы (1.1).

Примем следующие предположения.

**Предположение 1.** Параметры системы (1.1) и граничные условия (1.2) таковы, что при движении с управлением  $u = 0$  точка находится в области, в которой выполнены неравенства  $\dot{v} < 0, \dot{\theta} > 0$ .

**Предположение 2.** Движение происходит в области пространства  $(\theta, v, m)$ , где особое управление (2.11) является допустимым, т.е. верно условие  $u_s \in [0, \bar{u}]$ .

При предположениях 1 и 2 справедливы следующие утверждения 1–4.

**У т в е р ж д е н и е 1.** Если начальная точка в пространстве  $(\theta, v, m)$  лежит выше особой поверхности, то  $u(0) = \bar{u}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Предположим, что условие (4.1) выполнено в начальный момент времени  $t=0$  и пусть  $u(0) = 0$ . Тогда масса остается постоянной и в соответствии с условиями оптимальности переключение с управления  $u = 0$  на управление  $u(0) = \bar{u}$  не оптимально. На рис. 3 изображен фазовый портрет системы, составленной из третьего уравнения системы (1.1) и уравнения (2.9) в случае сопротивления, пропорционального второй степени скорости  $q(v) = v^2$ :

$$\dot{v} = (-v^2 + u) / m - \sin \theta, \dot{\theta} = (1 + 3v^2 \sin \theta / m) \cos \theta / v \quad (4.3)$$

и нулевой тяги ( $u=0, m=\text{const}$ ). Подробный анализ системы (4.3) приведен, например, в работе [11]. Серым цветом на рис. 3 отмечена область, для которой возможно удовлетворение конечного условия (2.10). Область, удовлетворяющая предположению 1, отмечена горизонтальной штриховкой. Эта область ограничена кривыми  $\dot{v} = 0, \theta = 0$  и осью ординат. Как видно из рис. 3, вдоль траекторий в заштрихованной области скорость монотонно уменьшается, а угол монотонно увеличивается, и движение с нулевой тягой происходит выше особой поверхности и не пересекает ее. Поэтому в момент окончания процесса конечное условие по массе не может быть выполнено. Следовательно, при указанных начальных условиях движение с тягой  $u = 0$  над особой поверхностью не оптимально. Значит,  $u(0) = \bar{u}$ . Утверждение 1 доказано.

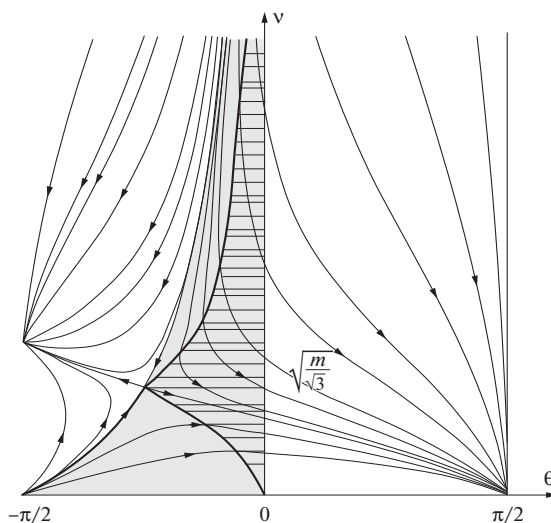


Рис. 3. Фазовый портрет системы (4.3)

**У т в е р ж д е н и е 2.** Если начальная точка в пространстве  $(\theta, v, m)$  лежит выше особой поверхности, то движение с  $u(t) = \bar{u}$  продолжается до достижения особой поверхности или до полного выгорания топлива.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Над особой поверхностью необходимым условиям оптимальности удовлетворяет переключение с управления  $u(t) = \bar{u}$  на управление  $u(t) = 0$ . Пусть конечное условие по массе (достижение плоскости  $m(t) = m_T$ ) выполняется раньше достижения особой поверхности. Тогда необходимо переключиться с максимальной тяги на нулевую тягу и двигаться с ней до выполнения условия  $\theta(T) = 0$ . Если же при достижении поверхности особого управления конечное условие по массе не верно, то аналогично доказательству утверждения 1 получаем, что переключение на нулевую тягу также не оптимально, поскольку конечное условие по массе не будет выполнено. Значит, движение с максимальной тягой должно продолжаться до достижения особой поверхности. Утверждение 2 доказано.

**У т в е р ж д е н и е 3.** Если начальная точка в пространстве  $(\theta, v, m)$  лежит выше особой поверхности, то:

а) если конечная масса достигается раньше достижения особой поверхности, то оптимальная траектория задачи (1.1)–(1.4) состоит из двух дуг: дуги с управлением  $u(t) = \bar{u}$  в начале, затем дуги с управлением  $u(t) = 0$  до окончания процесса;

б) если особая поверхность достигается раньше, чем будет достигнуто конечное условие по массе, тогда оптимальная траектория задачи (1.1)–(1.4) состоит из трех дуг: дуги с управлением  $u(t) = \bar{u}$  в начале, затем дуги с промежуточной тягой  $u(t) = u_S(t)$  и, наконец, дуги с нулевой тягой  $u(t) = 0$  до окончания процесса.

**Доказательство.** Предположим, что траектория, начинающаяся с дуги максимальной тяги  $u(t) = \bar{u}$  пересекает особую поверхность и оказывается ниже нее. Тогда дальнейшее движение должно продолжаться также с управлением  $u(t) = \bar{u}$ . В этом случае масса убывает быстрее, чем при движении по особой поверхности. Поэтому движение с управлением  $u(t) = \bar{u}$  продолжается до полного выгорания топлива. Значит, в момент достижения конечной массы происходит переключение на режим нулевой тяги  $u(t) = 0$ , что неоптимально, если точка находится ниже особой поверхности. Следовательно, траектория не может пересечь особую поверхность, и в момент прихода на нее следует переключиться на режим промежуточной тяги  $u(t) = u_S$ . При этом сходиться с особой поверхности на дугу с максимальной тягой  $u(t) = \bar{u}$  также не оптимально. Значит, движение вдоль особой поверхности продолжается до полного выгорания топлива, после чего оптимальная траектория продолжается до выполнения краевого условия по углу наклона траектории. Утверждение 3 доказано.

**Утверждение 4.** Если начальная точка лежит ниже особой поверхности, то оптимальная траектория задачи (1.1)–(1.4) состоит из трех дуг: дуги с нулевой тягой  $u(t) = 0$  в начале, затем следует особая дуга с управлением  $u(t) = u_S(t)$  и, наконец, дуга с нулевой тягой  $u(t) = 0$ . Доказательство аналогично доказательству утверждений 1–3.

**Замечание 1.** Если предположения 1 и 2 не выполнены, то оптимальная программа изменения тяги может иметь более сложную структуру. Этот случай требует дополнительного исследования.

**Замечание 2.** Строгое построение оптимального синтеза в одномерной задаче Годдарда также возможно только в определенной области значений переменных и параметров.

**5. Движение в отсутствии сопротивления.** При отсутствии сопротивления из соотношения (2.7) вытекает неравенство  $\dot{H}_1 = -\cos \theta / m < 0$ . Следовательно, особого управления тягой не возникает и только переключение с управления  $u(t) = \bar{u}$  на управление  $u(t) = 0$  удовлетворяет необходимым условиям оптимальности.

**Утверждение 5.** При отсутствии сопротивления оптимальная траектория задачи (1.1)–(1.4) состоит из двух дуг: дуги максимальной тяги  $u(t) = \bar{u}$  в начале и дуги нулевой тяги  $u(t) = 0$  в конце.

**6. Численное моделирование.** Представлены результаты численного моделирования краевой задачи (1.1)–(1.3), (2.9), (2.10) с найденным законом управления тягой (2.11). Приведенные результаты призваны проиллюстрировать аналитические выводы разд. 4. Для решения краевой задачи применялся метод стрельбы. Краевые значения для переменных были подобраны таким образом, чтобы продемонстрировать желаемые структуры управления. Функция сопротивления  $q$  принимается квадратично зависящей от скорости  $q(v) = v^2$ . Для всех рассмотренных случаев в начальный момент времени принимаются следующие начальные условия:  $x_0(0) = 0$ ,  $y_0(0) = 0$ . Численное моделирование краевой задачи для функции сопротивления  $q$ , линейно зависящей от скорости  $q(v) = v$  и случая отсутствия сопротивления среды, представлено в [37].

1. Начальная точка лежит выше особой поверхности. Набор краевых значений принимается следующий:  $v(0) = 0.4$ ,  $m(0) = 2$ ,  $m(T) = 1$ ,  $\bar{u} = 2$ ,  $T = 1.5$ .

Результаты моделирования приведены на рис. 4–6. Для этого набора условий на рис. 4 рассмотрена траектория движения в пространстве  $(\theta, v, m)$  и особая поверхность (3.1), на рис. 5 – траектория движения в плоскости  $(x, y)$ . Точками отмечены моменты переключения управления  $u$ . На рис. 6 изображена структура изменения экстремальной тяги во времени  $u(t) = \bar{u} \rightarrow u(t) = u_S(t) \rightarrow u(t) = 0$ .

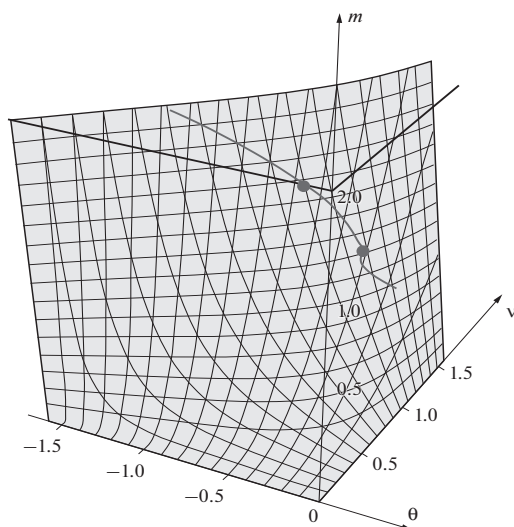
2. Начальная точка лежит ниже особой поверхности. Набор краевых значений принимается следующий:  $v(0) = 0.75$ ,  $m(0) = 2$ ,  $m(T) = 1.25$ ,  $\bar{u} = 2$ ,  $T = 1.25$ .

Для данного набора параметров на рис. 7, 8 представлены соответствующие траектории. На рис. 9 изображена структура изменения экстремальной тяги во времени  $u(t) = 0 \rightarrow u(t) = u_S(t) \rightarrow u(t) = 0$ .

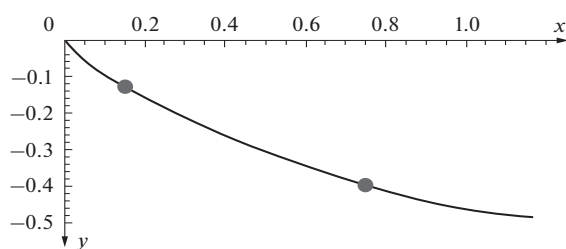
3. Начальная точка лежит на особой поверхности. Набор краевых значений принимается следующий:  $v(0) = 1$ ,  $m(0) = 2$ ,  $m(T) = 1.25$ ,  $\bar{u} = 2$ ,  $T = 1.25$ . Структура изменения тяги выглядит так:  $u(t) = u_S(t) \rightarrow u(t) = 0$  (рис. 10–12).

4. Начальная точка лежит выше особой поверхности. Набор краевых значений принимается следующий:  $v(0) = 0.2$ ,  $m(0) = 2$ ,  $m(T) = 1.5$ ,  $\bar{u} = 2$ ,  $T = 0.4$ . Структура тяги выглядит так:  $u(t) = \bar{u} \rightarrow u(t) = 0$  (особый участок отсутствует) (рис. 13–15).

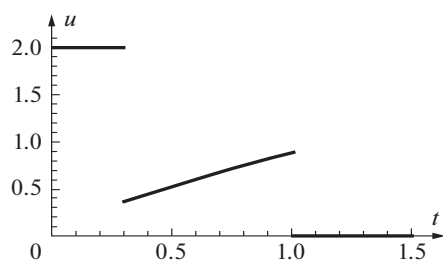




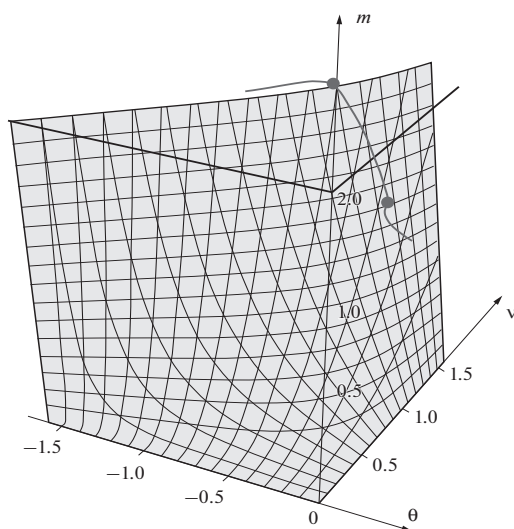
**Рис. 4.** Экстремальная траектория в пространстве  $(\theta, v, m)$  для  $v(0) = 0.4, m(0) = 2, m(T) = 1, \bar{u} = 2, T = 1.5$



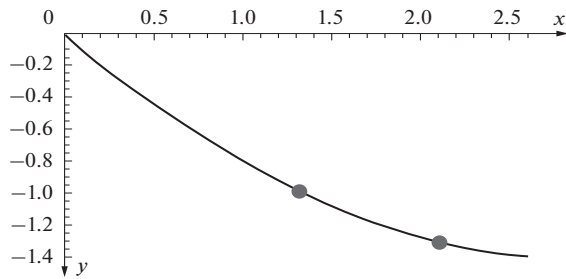
**Рис. 5.** Экстремальная траектория в плоскости  $(x, y)$  для  $v(0) = 0.4, m(0) = 2, m(T) = 1, \bar{u} = 2, T = 1.5$



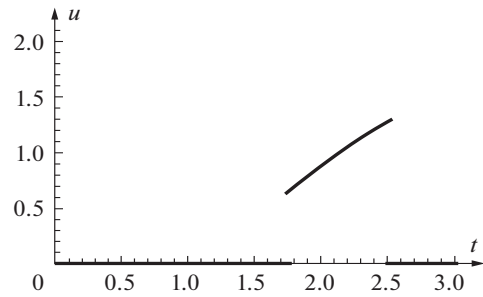
**Рис. 6.** Изменение тяги во времени  $(u, t)$  на экстремальной траектории для  $v(0) = 0.4, m(0) = 2, m(T) = 1, \bar{u} = 2, T = 1.5$



**Рис. 7.** Экстремальная траектория в пространстве  $(\theta, v, m)$  для  $v(0) = 0.75, m(0) = 2, m(T) = 1.25, \bar{u} = 2, T = 3$



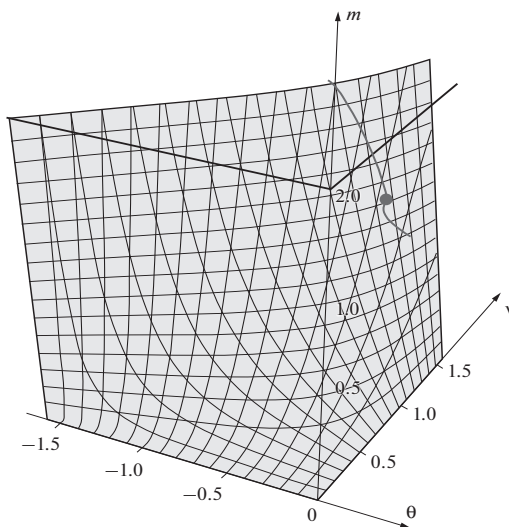
**Рис. 8.** Экстремальная траектория в плоскости  $(x, y)$  для  $v(0) = 0.75$ ,  $m(0) = 2$ ,  $m(T) = 1.25$ ,  $\bar{u} = 2$ ,  $T = 3$



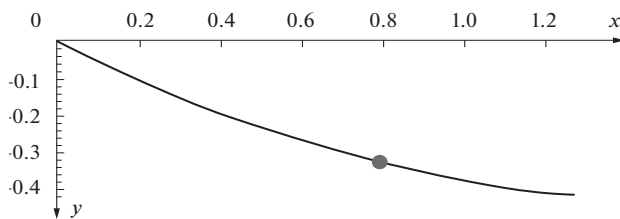
**Рис. 9.** Изменение тяги во времени  $(u, t)$  на экстремальной траектории для  $v(0) = 0.75$ ,  $m(0) = 2$ ,  $m(T) = 1.25$ ,  $\bar{u} = 2$ ,  $T = 3$

Найденные параметры из численного моделирования сведены в таблицу, где  $T_1$  и  $T_2$  — моменты времени прихода и ухода с особой поверхности.

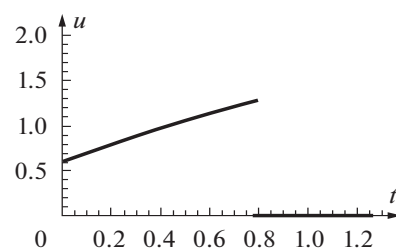
Отметим, что оптимальный закон изменения угла наклона, представленный на рис. 4, 7, 10, 13, может быть пассивно реализован с помощью стационарных идеальных голономных механических связей. Для приведенных траекторий проверено выполнение необходимого условия Келли оптимальности особых управлений [39].



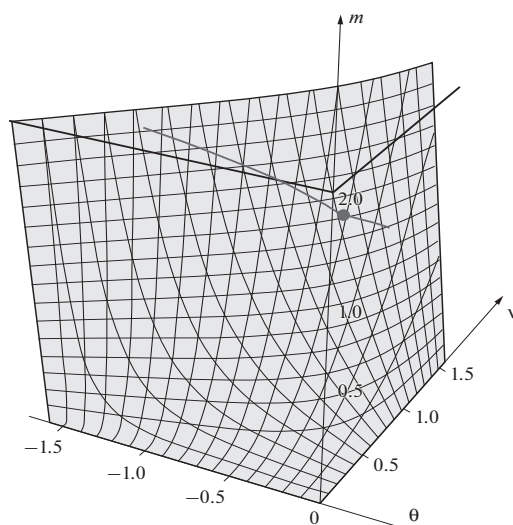
**Рис. 10.** Экстремальная траектория в пространстве  $(\theta, v, m)$  для  $v(0) = 1$ ,  $m(0) = 2$ ,  $m(T) = 1.25$ ,  $\bar{u} = 2$ ,  $T = 1.25$



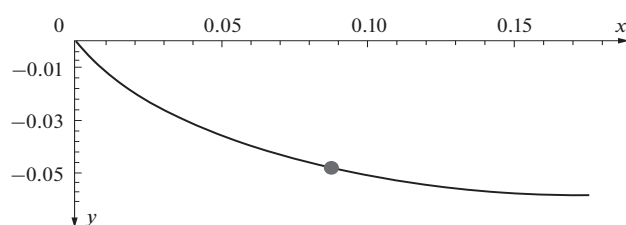
**Рис. 11.** Экстремальная траектория в плоскости  $(x, y)$  для  $v(0) = 1$ ,  $m(0) = 2$ ,  $m(T) = 1.25$ ,  $\bar{u} = 2$ ,  $T = 1.25$



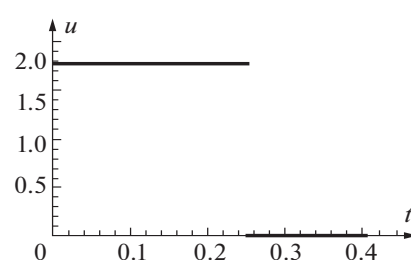
**Рис. 12.** Изменение тяги во времени  $(u, t)$  на экстремальной траектории для  $v(0) = 1$ ,  $m(0) = 2$ ,  $m(T) = 1.25$ ,  $\bar{u} = 2$ ,  $T = 1.25$



**Рис. 13.** Экстремальная траектория в пространстве  $(\theta, v, m)$  для  $v(0) = 0.2, m(0) = 2, m(T) = 1.5, \bar{u} = 2, T = 4$



**Рис. 14.** Экстремальная траектория в плоскости  $(x, y)$  для  $v(0) = 0.2, m(0) = 2, m(T) = 1.5, \bar{u} = 2, T = 4$



**Рис. 15.** Изменение тяги во времени  $(u, t)$  на экстремальной траектории для  $v(0) = 0.2, m(0) = 2, m(T) = 1.5, \bar{u} = 2, T = 4$

**Таблица 1.** Результаты численного моделирования

Набор параметров	Найденное значение $\theta(0)$	$T_1$	$T_2$	Конечное время
1	-0.991232	0.299497	1.007302	1.5
2	-0.815502	1.751761	2.515850	3
3	-0.523601	0	0.784194	1.25
4	-1.012674	—	—	0.4

**Заключение.** Определено аналитическое решение задачи модального управления по выходу для широкого класса динамических систем с суммарной размерностью входного и выходного векторов, не превышающей размерность вектора состояния. Решение применимо к системам четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами при неравных индексах управляемости и наблюдаемости. Для каждого назначаемого спектра решение единственно и представляется компактной аналитической формулой, не требующей дополнительных матричных разложений или декомпозиции. Рассмотрены случаи, в которых индекс управляемости принимает

значение как больше, так и меньше значения индекса наблюдаемости. Для каждого случая на основе двухуровневой декомпозиции с параметризацией обоих уровней доказаны соответствующие взаимно дуальные теоремы об управлении по выходу и приведены конкретные примеры аналитического расчета регуляторов. Примеры подтверждают совпадение спектров замкнутых систем управления по выходу с желаемыми спектрами.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Goldstine H.H. A History of the Calculus of Variations from the 17 Th Through the 19 Th Century, Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. V.5. New York-Heidelberg-Berlin, Springer-Verlag, 1980. P. 410.
2. Ashby N., Britten W.E., Love W.F., Wyss W. Brachistochrone with Coulomb Friction // Amer. J. Phys. 1975. V. 43. № 10. P. 902–905.
3. Гершман М.Д., Хазаев П.Ф. О фрикционной брахистохроне // МТТ 1976. № 4. С. 85–88.
4. Lipp S.C. Brachistochrone with Coulomb Friction // SIAM J. Control Optim. 1997. V. 35. № 2. P. 562–584.
5. Van der Heijden A.M.A., Diepstraten J.D. On the Brachistochrone with Dry Friction // Intern. J. Non-Linear Mech. 1975. V. 10. № 2. P. 97–112.
6. Šalinić S. Contribution to the Brachistochrone Problem with Coulomb Friction // Acta Mech. 2009. V. 208. P. 97–115.
7. Sumbatov A.S. Brachistochrone with Coulomb friction as the Solution of an Isoperimetrical Variational Problem // Intern. J. Non-Linear Mech. 2017. V. 88. P. 135–141.
8. Hayen J.C. Brachistochrone with Coulomb Friction // Int. J. Non-Linear Mech. 2005. V. 40. P. 1057–1075.
9. Голубев Ю.Ф. Брахиcтохрона с трением // Изв. РАН. ТиСУ. 2010. № 5. С. 41–52.  
<https://doi.org/10.1134/S1064230710050060>
10. Vratnagar B., Saje M. On the Analytical Solution of the Brachistochrone Problem in a Non-conservative Field // Intern. J. Non-Linear Mechanics. 1998. V. 33. № 3. P. 489–505.
11. Зароднюк А.В., Черкасов О.Ю. Качественный анализ оптимальных траекторий движения материальной точки в сопротивляющейся среде и задача о брахистохроне // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 1. С. 41–49.
12. Šalinić S., Obradović A., Mitrović Z., Rusov S. Brachistochrone with Limited Reaction of Constraint in an Arbitrary Force Field // Nonlinear Dynamics. 2012. V. 69. P. 211–222.
13. Lemak S.S., Belousova M.D. The Brachistochrone Problem with Constraints on the Curvature of the Trajectory // IFAC PapersOnLine. Moscow. V. 54. P. 437–442.
14. Брайсон А., Хо Ю Ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир. 1972. С. 544.
15. Feehery W.F. Dynamic Optimization with Path Constraints (Ph. D. Thesis) Massachusetts Institute of Technology. Cambridge, 1998.
16. Cherkasov O.Yu., Smirnova N.V. On the Brachistochrone Problem with State Constraints on the Slope Angle // Intern. J. Non-Linear Mech. 2022. V. 139.
17. Drummond J.E., Downes G.L. The Brachistochrone with Acceleration: A Running Track // J. Optimization Theory and Applications. 1971. V. 7. № 6. P. 444–449.
18. Вондрухов А.С., Голубев Ю.Ф. Брахиcтохрона с разгоняющей силой // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 6. С.42–57.
19. Зароднюк А.В., Черкасов О.Ю. О максимизации горизонтальной дальности и брахистохроне с разгоняющей силой и вязким трением // Изв. РАН. ТиСУ. 2017. № 4. С. 3–10.
20. Smirnova N.V., Cherkasov O.Yu. Range Maximization Problem with a Penalty on Fuel Consumption in the Modified Brachistochrone Problem // Applied Mathematical Modelling. 2021. V. 91. P. 581–589.  
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.10.001>
21. Руссаловская А.В., Иванов Г.И., Иванов А.И. О брахистохроне точки переменной массы с трением и экспоненциальным законом истечения массы // Докл. АН УССР. Сер. А. 1973. С. 1024–1026.
22. Jeremić O., Šalinić S., Obradović A., Mitrović Z. On the Brachistochrone of a Variable Mass Particle in General Force Fields // Mathematical and Computer Modelling. 2011. V. 54. P. 2900–2912.
23. Menon P.K.A., Kelley H.J., Cliff E.M. Optimal Symmetric Flight with an Intermediate Vehicle Model // J. GUIDANCE. 1984. V. 8. № 3. P. 312–319.
24. Indig N., Ben-Asher J.Z., Sigal E. Singular Control for Two-Dimensional Goddard Problems Under Various Trajectory Bending Laws // J. Guidance, Control and Dynamics 2018. V. 42. № 3. P. 1–15.  
<https://doi.org/10.2514/1.G003670>
25. Indig N., Ben-Asher J.Z., Sigal E. Optimal Guidance with Additional Thrust Control for Various Flight Tasks // AIAA Guidance, Navigation and Control. Conf. Texas AIAA, 2017. P. 1737.  
<https://doi.org/10.2514/6.2017-1737>
26. Goddard R.H. A Method of Reaching Extreme Altitudes. Washington, Smithsonian Institute Miscellaneous Collections, 1919. V. 7. P. 71. (Reprinted by American Rocket Society. 1946.)
27. Охоцимский Д.Е. К теории движения ракет // ПММ. 1946, Т. 10. № 2. С. 251–272.
28. Tsien H.S., Evans R.C. Optimum Thrust Programming for a Sounding Rocket // J. American Rocket Society. 1951. V. 21. № 5. P. 99–107.
29. Leitmann G.A. Calculus of Variations Solution of Goddard’s Problem // Astronautica Acta. 1956. V.2. № 2. P. 55–62.
30. Seywald H., Cliff E.M. Goddard Problem in Presence of a Dynamic Pressure Limit // J. Guid. Control Dyn. 1993. V. 6. № 4. P. 776–781.

- <https://doi.org/10.2514/3.21080>
31. *Graichen K., Kugi A., Petit N., Chaplais F.* Handling Constraints in Optimal Control with Saturation Functions and System Extension // *Systems & Control Letters*. 2010. V. 59. № 11. P. 671–679.  
<https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2010.08.003>
  32. *Bonnans F., Martinon P., Trélat E.* Singular Arcs in the Generalized Goddard's Problem // *J. Optim Theory Appl.* 2008. V. 139. P. 439–461.  
<https://doi.org/10.1007/s10957-008-9387-1>
  33. *Miele A.* Extremization of Linear Integrals by Green's Theorem // *Mathematics in Science and Engineering*. 1962. V. 5. P. 69–98  
[https://doi.org/10.1016/S0076-5392\(08\)62091-3](https://doi.org/10.1016/S0076-5392(08)62091-3)
  34. *Tsiotras P., Kelley H.J.* Goddard Problem with Constrained Time of Flight // *J. Guidance, Control and Dynamics*. 1992. V. 15. № 2. P. 289–296.  
<https://doi.org/10.23919/ACC.1988.4789942>
  35. *Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М.* Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли // *УФН*. 1957. № 1а. С. 5–32.
  36. *Голубев Ю.Ф.* Метод Охоцимского-Понтрягина в теории управления и аналитической механике. Ч. 1. Метод Охоцимского-Понтрягина в теории управления // *Вестн. МГУ. Сер.1. Математика, механика*. 2008. № 6. С. 49–55.
  37. *Cherkasov O.Y., Malykh E.V., Smirnova N.V.* Brachistochrone Problem and Two-dimensional Goddard Problem // *Nonlinear Dyn.* 2023. V.111. P. 243–254.  
<https://doi.org/10.1007/s11071-022-07857-x>
  38. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 393с.
  39. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973. 256с.