

УДК 531.36

## СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ ВЕТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ НА БАЗЕ РОТОРА САВОНИУСА ПРИ НАЛИЧИИ СТАБИЛИЗАТОРА НАПРЯЖЕНИЯ<sup>1</sup>

© 2024 г. В. М. Буданов<sup>a</sup>, А. П. Голуб<sup>a</sup>, М. З. Досаев<sup>a</sup>,  
К. В. Климов<sup>a</sup>, Ю. Д. Селюцкий<sup>a</sup>, \*

<sup>a</sup>НИИ механики МГУ, Москва, Россия

\*e-mail: seliutski@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 02.04.2024 г.

После доработки 17.04.2024 г.

Принята к публикации 16.10.2024 г.

Исследуется малая ветроэнергетическая установка, рабочим элементом которой является ротор Савониуса. В электрическую цепь установки включен стабилизатор напряжения и нагрузочное сопротивление. На основе феноменологических соображений построена математическая модель рассматриваемой электромеханической системы. В результате аналитического исследования этой модели показано, что при определенных условиях на параметры в системе возникает явление гистерезиса. Необходимо отметить, что такой гистерезис обусловлен именно наличием стабилизатора напряжения. Проведена серия экспериментов. С использованием полученных экспериментальных данных проведена идентификация параметров предложенной модели. Результаты экспериментов достаточно хорошо согласуются с результатами аналитического исследования. Предложен алгоритм регулирования нагрузочного сопротивления, позволяющий обеспечить максимальную выходную мощность.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, ветроэнергетическая установка, стабилизатор напряжения, идентификация параметров, гистерезис, управление.

DOI: 10.31857/S0002338824060063, EDN: SUPMAV

## STEADY REGIMES OF A SAVONIUS ROTOR-BASED WIND POWER GENERATOR WITH VOLTAGE STABILIZER

V. M. Budanov<sup>a</sup>, A. P. Holub<sup>a</sup>, M. Z. Dosaev<sup>a</sup>, K. V. Klimov<sup>a</sup>,  
Y. D. Selyutskiy<sup>a</sup>, \*

<sup>a</sup>Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

\*e-mail: seliutski@imec.msu.ru

A small-scale wind power generator is studied, where the operating element is a Savonius rotor. The electric circuit of the generator comprises a voltage stabilizer and a load resistance. Based on phenomenological considerations, a mathematical model of this electro-mechanical system is constructed. In the result of analytical study of this model, it is shown that the hysteresis phenomenon occurs in this system under certain conditions imposed on parameters. It should be noted that this hysteresis is due to the presence of the voltage stabilizer. A series of experiments is performed. Based on the obtained experimental data, parameters of the proposed model are identified. Results of experiments are in good agreement with results of the analytical study. An algorithm of regulation of the load resistance is proposed aimed at reaching the maximum output power.

**Keywords:** mathematical modeling, voltage stabilizer, wind power generator, parameter identification, hysteresis, control.

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке НОШ МГУ «Фундаментальные и прикладные исследования космоса» (проект № 23-Ш01-11).

**Введение.** Одним из наиболее распространенных типов малогабаритных ветротурбин, используемых для преобразования энергии ветра в электроэнергию, является ротор Савониуса, который был разработан и запатентован С. Савониусом в 1926 г. «Классический» ротор Савониуса состоит из двух лопастей, имеющих форму полуцилиндра. Лопасти закреплены на оси, параллельной их образующей, и могут частично перекрываться. Ветротурбина устанавливается таким образом, что ее ось вращения перпендикулярна потоку среды (воздуха или воды). В результате воздействия потока на лопасти возникает аэродинамический момент, приводящий турбину во вращение. При этом ведущую роль в формировании этого момента играет сила лобового сопротивления.

Ротор Савониуса вращается заметно медленнее и вырабатывает меньшую мощность, чем ветротурбины других типов. Однако он начинает вращаться при достаточно низкой скорости потока (существенно меньшей, чем турбины типа Дарье) и не зависит от направления потока (в отличие от горизонтально-осевых турбин, которым необходима система ориентации на ветер). Способность достаточно эффективно функционировать в диапазоне малых скоростей потока обуславливает интерес к этому ротору в ситуациях, когда требуется обеспечить автономное питание малых потребителей [1]. Помимо этого ротор Савониуса создает достаточно большой момент на оси, что открывает перспективы его использования в качестве силового привода.

Одним из основных направлений исследований роторов Савониуса является изучение влияния различных геометрических характеристик ротора на его поведение (достаточно подробный обзор таких работ приведен, в частности, в [2, 3]). Зависимости мощности и момента, создаваемых ветротурбиной указанного выше типа, от числа лопастей (как правило, от двух до четырех) анализируются в целом ряде публикаций (например, [4, 5]). Отмечается, что для конфигурации с двумя лопастями максимальная мощность выше, но для нее имеются положения, из которых она не может стартовать, и угловая скорость сильнее изменяется на обороте.

В [6–8] изучается влияние перекрытия лопастей на выходную мощность и отмечается, что имеется некоторое оптимальное соотношение между размером этого перекрытия и радиусом лопасти. Ряд работ посвящен анализу аэродинамики ветротурбин, состоящих из нескольких роторов Савониуса, закрепленных друг над другом на общей оси [9–11]. Такая конфигурация обеспечивает отсутствие положений, из которых ротор не может стартовать, и уменьшает колебания угловой скорости на обороте.

Активно исследуются возможности увеличения выходной мощности путем изменения формы лопастей. В частности, в [12–16] рассматриваются турбины, лопасти которых в поперечном сечении представляют собой не полуокружности, а более сложные кривые (комбинации дуг окружности с прямолинейными отрезками, дуги эллипсов и т.д.). В [17, 18] для оптимизации формы лопастей используются генетические алгоритмы. Проведенные эксперименты и расчеты показывают, что выигрыш в мощности за счет оптимизации формы лопасти может достигать 35%.

Еще одним способом повысить эффективность роторов Савониуса с точки зрения мощности является установка различных приспособлений, специальным образом отклоняющих поток, который набегаёт на лопасти (например, [17, 19, 20]). В работе [21] построена замкнутая математическая модель ветроэнергетической установки, рабочий элемент которой представляет собой ротор Савониуса. Был предложен феноменологический подход для описания зависимости аэродинамических сил и момента, действующих на лопасти, от угловой скорости и угла поворота ротора.

Естественной задачей, которую должна решать малая ветроэнергетическая установка, является зарядка аккумулятора. Один из типичных режимов зарядки – зарядка постоянным напряжением. Поскольку напряжение, создаваемое генератором, который приводится во вращение ветротурбиной, как правило, не совпадает с оптимальным напряжением для зарядки, необходимо добавить в электрическую цепь стабилизатор напряжения. Исследованию таких стабилизаторов посвящены работы [22, 23]. Однако в них анализируется только функционирование стабилизатора в нормальном режиме. В то же время при исследовании динамики ветроэнергетической установки необходимо учитывать, что мощности, отбираемой у потока, может оказаться недостаточно для обеспечения работы стабилизатора в нормальном режиме. Таким образом, возникает задача исследования стационарных режимов ветроэнергетической установки, в цепь которой включен стабилизатор напряжения. Решению этой задачи и посвящена настоящая статья.

**1. Постановка задачи и математическая модель системы.** Рассмотрим электромеханическую систему (рис. 1), состоящую из ветротурбины 1 в форме ротора Савониуса, ось которой жестко соединена с валом электрогенератора 2 переменного тока. В цепь генератора включен вы-

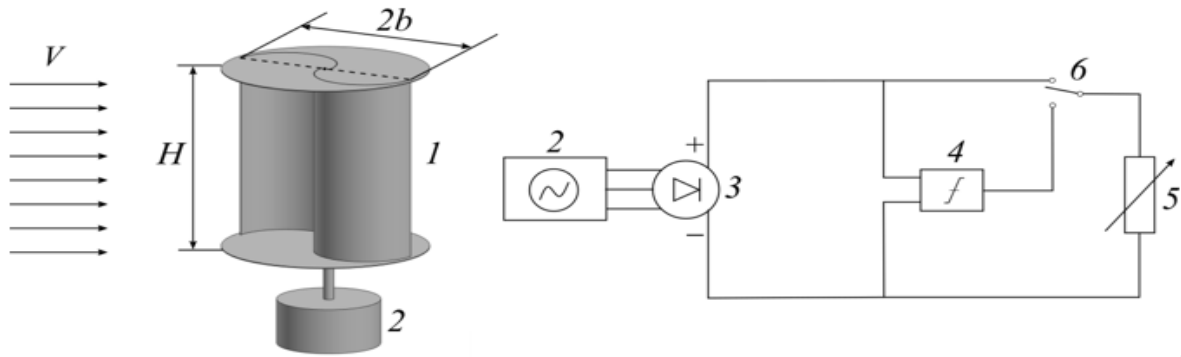


Рис. 1. Схема рассматриваемой системы

прямитель 3 и стабилизатор напряжения 4, а также нагрузочное сопротивление 5. Кроме того, в цепи имеется ключ 6, позволяющий подключать сопротивление к генератору либо через стабилизатор, либо напрямую. Ветротурбина помещена в стационарный поток среды.

Пренебрегая потерями на трение, уравнение динамики ветротурбины можно записать в следующем виде:

$$J\dot{\omega} = M_a + M_{el}. \quad (1.1)$$

Здесь  $\omega$  — угловая скорость ветротурбины,  $J$  — момент инерции ветротурбины вместе с ротором генератора,  $M_a$  — аэродинамический момент, действующий на лопасти ветротурбины,  $M_{el}$  — момент электромагнитных сил, действующих на вал ветротурбины со стороны генератора. Аэродинамический момент традиционно представляется в следующем виде:

$$M_a = \rho b^2 H V^2 C_m. \quad (1.2)$$

Здесь  $\rho$  — плотность среды,  $b$  — радиус ротора,  $H$  — высота ротора,  $V$  — скорость набегающего потока,  $C_m$  — безразмерный коэффициент аэродинамического момента. Для описания аэродинамики воспользуемся квазистатическим подходом. В его рамках коэффициент момента зависит только от безразмерной угловой скорости (так называемой быстроходности)  $\Omega$ :

$$\Omega = \frac{b\omega}{V}. \quad (1.3)$$

Рассмотрим генератор и выпрямитель как единый блок (в некотором смысле, генератор постоянного тока) и смоделируем его работу в целом. Как и в [24], будем считать, что электромеханическое взаимодействие является линейным. Тогда электродвижущая сила (ЭДС), вырабатываемая генератором, и электромагнитный момент, действующий на вал его ротора, определяются следующими формулами:

$$E = c\omega, \quad M_{el} = -cI_{in}, \quad (1.4)$$

где  $c$  — коэффициент электромагнитного взаимодействия,  $I_{in}$  — ток в цепи якоря (и ток на входе стабилизатора). Таким образом, с учетом соотношений (1.2)–(1.4) уравнение (1.1) принимает вид

$$J\dot{\omega} = \frac{\rho S}{2} V^2 b C_m(\Omega) - cI_{in}. \quad (1.5)$$

Предположим, что характерное время протекания процессов в электрической цепи существенно меньше, чем характерное время переходных процессов в механической части системы. Тогда можно считать, что ток  $I_{in}$  определяется мгновенной угловой скоростью  $\omega$  якоря. Для того чтобы найти эту зависимость, необходимо описать процессы, проходящие в стабилизаторе. Ввиду отсутствия общепринятых достаточно простых моделей стабилизатора, описывающих его функционирование на режимах, отличных от номинального, воспользуемся феноменологическим подходом. Запишем уравнение баланса мощности для стабилизатора:

$$P_{in} = P_{out} + P_s + P_l. \quad (1.6)$$

Здесь  $P_{in}$  — мощность на входе стабилизатора,  $P_{out}$  — мощность на его выходе  $P_s$  — мощность, расходуемая внутри стабилизатора (на функционирование системы управления и т.д.),  $P_l$  — мощность потерь. Будем считать, что  $P_l = \xi' P_{in} = \xi' U_{in} I_{in}$ , где  $0 < \xi' < 1$  — некоторый постоянный коэффициент, а  $U_{in}$  и  $I_{in}$  — напряжение и ток на входе стабилизатора. Предположим также, что  $P_s = U_{in} I_s$ , где  $I_s$  — некоторый постоянный коэффициент («внутренний» ток в стабилизаторе). Выходная мощность, очевидно, связана с выходным напряжением  $U_{out}$  следующей формулой:  $P_{out} = U_{out}^2 / R$ .

С учетом изложенного выше из (1.6) получаем

$$(1 - \xi') U_{in} I_{in} = \frac{U_{out}^2}{R} + U_{in} I_s. \quad (1.7)$$

Далее для сокращения записи будем обозначать  $\xi = 1 - \xi'$  (эта величина, разумеется, положительна). Отметим, что напряжение на входе стабилизатора зависит от режима работы стабилизатора и определяется следующим выражением:

$$U_{in} = c\omega - rI_{in}, \quad (1.8)$$

где  $r$  — эффективное внутреннее сопротивление генератора (вместе с выпрямителем).

Для того чтобы система уравнений (1.7), (1.8) была замкнутой, необходимо связать выходное напряжение с входным. Воспользуемся следующими соображениями. Естественно ожидать, что если входное напряжение слишком мало, то стабилизатор отключается, при этом цепь разрывается и выходное напряжение, а также входной и выходной токи становятся равными нулю. Если же входное напряжение достаточно велико, то реализуется номинальный режим, на котором выходное напряжение почти постоянно и близко к номинальному значению  $U_n$ . Вообще говоря, пороговое значение  $U_{in}^*$  отключения стабилизатора и пороговое значение  $U_{in}^{**}$  выхода на номинальный режим не совпадают. Будем считать, что на интервале  $U_{in}^* < U_{in} < U_{in}^{**}$  величина  $U_{out}$  зависит от  $U_{in}$  линейно, причем при  $U_{in} = U_{in}^*$  возможен разрыв, а при  $U_{in} = U_{in}^{**}$  зависимость является непрерывной. Таким образом, получаем следующую формулу:

$$U_{out} = \begin{cases} 0, & 0 < U_{in} < U_{in}^*, \\ kU_{in} - U_0, & U_{in}^* < U_{in} < U_{in}^{**}, \\ U_n, & U_{in}^{**} < U_{in}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Здесь величины  $U_{in}^*$ ,  $k$  и  $U_0$  — некоторые положительные параметры. Величина  $U_{in}^{**}$  определяется так, чтобы обеспечить непрерывность зависимости  $U_{in}$  от  $U_{out}$ :

$$U_{in}^{**} = \frac{U_n + U_0}{k}.$$

Зависимость (1.9) качественно изображена на рис. 2. Заметим, что она, в сущности, представляет собой характеристику стабилизатора. Ниже будет продемонстрировано, что для реального стабилизатора соответствующая характеристика выглядит так, как показано на рис. 2.

С учетом вышеизложенного, соотношения (1.5), (1.7)–(1.9) образуют замкнутую систему, описывающую динамику рассматриваемой ветроэнергетической установки. Выразим входной ток из (1.8) и подставим полученное выражение вместе с (1.9) в уравнение (1.7). Получится уравнение относительно  $U_{in}$ . Рассмотрим его решения на каждом из указанных выше интервалов.

1.1. И н т е р в а л  $0 < U_{in} < U_{in}^*$  (р е ж и м о т к л ю ч е н и я). Здесь соотношение (1.7) принимает следующий вид:

$$\xi U_{in} I_{in} = U_{in} I_s. \quad (1.10)$$

На этом интервале стабилизатор разрывает цепь, так что входной ток также равен нулю. Соответственно из (1.8) имеем  $U_{in} = c\omega$ . Для того, чтобы это выражение являлось решением уравнения (1.10), следует положить на этом интервале  $I_s = 0$ . Очевидно, значение  $U_{in}^*$  достигается при

$$\omega = \omega_s = \frac{U_{in}^*}{c}. \quad (1.11)$$

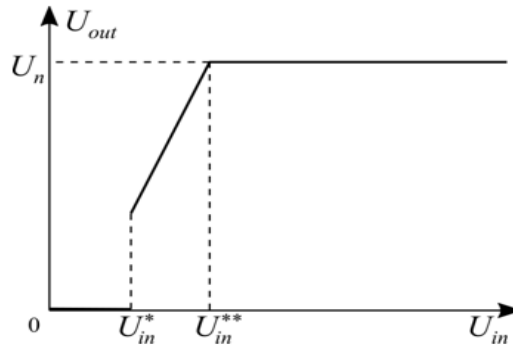


Рис. 2. Зависимость напряжения на выходе стабилизатора от напряжения на входе

Таким образом, этот режим реализуется при  $0 < \omega < \omega_s$ .

1.2. Интервал  $U_{in}^* < U_{in} < U_{in}^{**}$  (переходный режим). Здесь уравнение (1.7) принимает следующий вид:

$$\xi U_{in} \frac{c\omega - U_{in}}{r} = \frac{(kU_{in} - U_0)^2}{R} + U_{in} I_s.$$

Отсюда получаем:

$$\left( \frac{\xi}{r} + \frac{k^2}{R} \right) U_{in}^2 - \left( \frac{\xi c\omega}{r} + \frac{2kU_0}{R} - I_s \right) U_{in} + \frac{U_0^2}{R} = 0. \quad (1.12)$$

Уравнение (1.12) имеет два решения:

$$\hat{U}_{1,2} = \frac{\frac{\xi c\omega}{r} + \frac{2kU_0}{R} - I_s \pm \sqrt{\left( \frac{\xi c\omega}{r} + \frac{2kU_0}{R} - I_s \right)^2 - 4 \left( \frac{\xi}{r} + \frac{k^2}{R} \right) \frac{U_0^2}{R}}}{2 \left( \frac{\xi}{r} + \frac{k^2}{R} \right)}. \quad (1.13)$$

Величины  $\hat{U}_{1,2}$  действительны, если значение  $\omega$  достаточно велико.

Теперь необходимо выяснить, какое из решений (1.13) может быть больше  $U_{in}^*$ , и при каких значениях  $\omega$ . Как было отмечено выше, когда напряжение на входе стабилизатора проходит значение  $U_{in}^*$ , величина  $U_{out}$  скачком увеличивается от нуля до некоторого положительного значения. Поэтому

$$kU_{in}^* - U_0 > 0. \quad (1.14)$$

С учетом неравенства (1.14) нетрудно показать, что соотношение  $\hat{U}_2 = U_{in}^*$ , рассматриваемое как уравнение относительно  $\omega$ , не имеет решений. В то же время, уравнение  $\hat{U}_1 = U_{in}^*$  имеет единственное решение:

$$\omega^* = \frac{U_{in}^*}{c} + \frac{rI_s}{c\xi} + \frac{r(kU_{in}^* - U_0)^2}{Rc\xi U_{in}^*}. \quad (1.15)$$

Из (1.13) и (1.15) вытекает, что

$$\frac{d\hat{U}_1}{d\omega} > 0 \text{ при } \omega > \omega^*.$$

Следовательно, с учетом того обстоятельства, что  $\hat{U}_1 > \hat{U}_2$ , получаем, что из (1.13) следует брать ветвь  $\hat{U}_1$ .

Таким образом, изложенное выше означает, что «переходный» режим может реализоваться при

$$\omega^* \leq \omega \leq \omega^{**},$$

где  $\omega^{**}$  — значение угловой скорости, при которой  $\hat{U}_1 = U_{in}^{**}$ :

$$\omega = \omega^{**} = \frac{U_{in}^{**}}{c} + \frac{rI_s}{c\xi} + \frac{r(kU_{in}^{**} - U_0)^2}{Rc\xi U_{in}^{**}} > 0. \quad (1.16)$$

Из (1.11) и (1.15) видно, что  $\omega_s < \omega^*$ . Это значит, что на интервале  $\omega_s < \omega < \omega^*$  стационарный режим отсутствует. Можно ожидать, что при угловых скоростях из этого интервала стабилизатор будет постоянно «переключаться» между режимом отключения и переходным режимом (т.е. имеет место режим типа скользящего). Более детальное описание этой ситуации требует тщательного моделирования динамики стабилизатора, что выходит за рамки настоящей работы.

1.3. Интервал  $U_{in}^{**} < U_{in}$  (номинальный режим). Здесь уравнение (1.7) принимает следующий вид:

$$\xi U_{in} \frac{c\omega - U_{in}}{r} = \frac{U_n^2}{R} + U_{in} I_s.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{\xi}{r} U_{in}^2 - \left( \frac{\xi c\omega}{r} - I_s \right) U_{in} + \frac{U_n^2}{R} = 0. \quad (1.17)$$

Если угловая скорость ротора достаточно велика, так что  $\omega > \omega_0$ , где

$$\omega_0 = 2 \frac{U_n}{c} \sqrt{\frac{r}{\xi R}} + \frac{I_s r}{c\xi}, \quad (1.18)$$

то у уравнения (1.17) существует две ветви решений:

$$\tilde{U}_{1,2} = \frac{\xi c\omega - rI_s \pm \sqrt{(\xi c\omega - rI_s)^2 - 4\xi U_n^2 \frac{r}{R}}}{2\xi}. \quad (1.19)$$

Нетрудно видеть, что  $\lim_{r \rightarrow 0} \tilde{U}_1 = c\omega$  и  $\lim_{r \rightarrow 0} \tilde{U}_2 = 0$ . Однако из (1.8) следует, что когда внутреннее сопротивление генератора стремится к нулю, напряжение на его выходе (которое в нашем случае равно напряжению на входе стабилизатора) стремится к  $c\omega$ . Поэтому нужно выбрать в качестве решения первую ветвь (1.19). Из (1.19) вытекает, что функция  $\tilde{U}_1$  монотонно растет с ростом  $\omega$ . Обозначим ее минимальное значение через  $U_*$ . Оно, очевидно, равно  $\tilde{U}_1(\omega_0)$ . Таким образом, номинальный режим может реализоваться только при  $U_{in} > U_*$ .

Пусть

$$U_{in}^{**} = \frac{U_n + U_0}{k} > U_* = U_n \sqrt{\frac{r}{\xi R}}. \quad (1.20)$$

Нетрудно показать, что тогда кривая  $\hat{U}_1$  пересекается с кривой  $\tilde{U}_1$ . В этом случае при изменении  $\omega$  в интервале от  $\omega^*$  до бесконечности входное напряжение изменяется непрерывно. Если же выполнено неравенство, противоположное (1.20), то  $\hat{U}_1$  не пересекается с кривой  $\tilde{U}_{in1}$ . Соответственно входное напряжение при изменении  $\omega$  претерпевает разрыв: если угловая скорость растет, то  $U_{in}$  скачком возрастает при  $\omega = \omega^*$ , переходя с кривой  $\hat{U}_1$  на кривую  $\tilde{U}_1$ ; если же угловая скорость убывает, то  $U_{in}$  скачком убывает при  $\omega = \omega_0$ , переходя с кривой  $\tilde{U}_1$  на кривую  $\hat{U}_1$ . Таким образом, в интервале  $(\omega_0, \omega^{**})$  имеет место гистерезис входного напряжения (и, разумеется, входного тока).

Уравнение (1.5), описывающее динамику рассматриваемой системы, удобнее исследовать в терминах входного тока. Зависимость  $I_{in}$  от угловой скорости получается из формулы (1.8) с учетом соотношений (1.13) и (1.19). Нетрудно показать, что из (1.13) следует, что при  $\omega > \omega$  имеет место неравенство  $d^2 I_{in} / d\omega^2 > 0$ , причем

$$\left. \frac{dI_{in}}{d\omega} \right|_{\omega=\omega^*} = c \frac{(kU_{in}^*)^2 - U_0^2}{\left( (kU_{in}^*)^2 - U_0^2 \right) r + (kU_{in}^*)^2 R\xi}.$$

В силу (1.14), это выражение больше нуля. Таким образом, на интервале  $U_{in}^* < U_{in} < U_{in}^{**}$  входной ток монотонно растет с ростом угловой скорости. На номинальном режиме имеем



$$\frac{dI_{in}}{d\omega} = c \frac{-R(c\omega\xi - I_s r) + \sqrt{R^2(c\omega\xi - I_s r)^2 - 4U_n^2 r R \xi}}{2r\sqrt{R^2(c\omega\xi - I_s r)^2 - 4U_n^2 r R \xi}},$$

$$\frac{d^2 I_{in}}{d\omega^2} = \frac{2c^2 \xi^2 R U_n^2}{\sqrt{R} \left( (c\omega\xi - I_s r)^2 R - 4U_n^2 r \xi \right)^{3/2}}. \quad (1.21)$$

Поскольку при выполнении (1.18) первое из выражений (1.21) отрицательно,  $I_{in}$  монотонно убывает с ростом  $\omega$ , стремясь к величине  $I_s/\xi$ . Второе выражение (1.21) положительно, так что кривая  $I_{in}(\omega)$  имеет на рассматриваемом интервале положительную кривизну.

Рассмотренные ситуации качественно проиллюстрированы на рис. 3, а, б, на котором изображены зависимости входного напряжения и тока от угловой скорости.

Жирными черными линиями отмечены ветви, отвечающие номинальным режимам, серыми линиями – ветви, отвечающие переходным режимам, и тонкими черными линиями – ветви, отвечающие ситуациям, когда стабилизатор отключен.

Отметим, что предложенная математическая модель содержит ряд параметров –  $c$ ,  $r$ ,  $\xi$ ,  $I_s$ ,  $U_{in}^*$ ,  $k$  и  $U_0$ . Они подлежат идентификации с помощью экспериментальных данных.

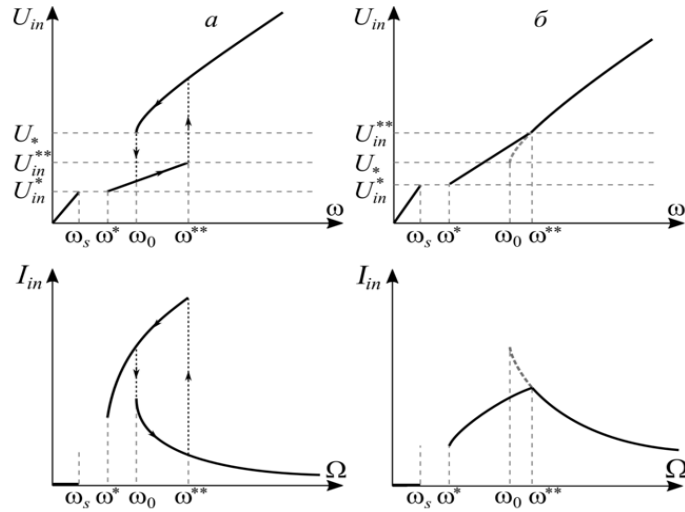


Рис. 3. Зависимости входного напряжения и тока от угловой скорости: а –  $U_{in}^{**} < U_*$ ; б –  $U_{in}^{**} > U_*$

**2. Установившиеся режимы.** Перейдем к исследованию установившихся режимов, которые могут возникать в рассматриваемой электромеханической системе. Отметим, что с точки зрения практической эксплуатации желательными являются только те из них, на которых стабилизатор находится в номинальном режиме (т.е. выдает напряжение  $U_n$ ).

Прежде всего, приведем уравнение (1.5) к безразмерному виду. Введем безразмерное время  $\tau = Vt/b$  и следующие безразмерные величины:

$$\iota_{in} = \frac{rI_{in}}{U_n}, \quad \bar{J} = \frac{2J}{\rho S b^3}, \quad \zeta = \frac{2cU_n}{\rho S b r V^2}, \quad u_{in} = \frac{U_{in}}{U_n},$$

$$u_0 = \frac{U_0}{U_n}, \quad u_* = \frac{U_*}{U_n} = 2\sqrt{\frac{r}{\xi R}}, \quad u_{in}^{**} = \frac{U_{in}^{**}}{U_n} = \frac{1 + u_0}{k}, \quad (2.1)$$

$$\bar{R} = \frac{R}{r}, \quad \iota_s = \frac{I_s r}{U_n}, \quad \kappa = \frac{cV}{bU_n}.$$

С учетом (2.1) уравнение динамики системы примет следующий вид:

$$\bar{J}\Omega' = C_m(\Omega) - \zeta i_{in}(\Omega) \quad (2.2)$$

На интервале  $u_{in}^* < u_{in} < u_{in}^{**}$  имеем:

$$i_{in} = i_1 = \frac{\bar{R}(\xi\Omega\kappa + i_s) + 2\Omega k^2\kappa - 2ku_0 - \sqrt{(\bar{R}\xi\Omega\kappa + 2ku_0 - i_s\bar{R})^2 - 4u_0^2(\bar{R}\xi + k^2)}}{2(\bar{R}\xi + k^2)}. \quad (2.3)$$

На интервале  $u_{in}^{**} < u_{in}$  (номинальный режим) имеем:

$$i_{in} = i_2 = \frac{\xi\Omega\kappa + i_s - \sqrt{(\xi\Omega\kappa - i_s)^2 - 4\xi\bar{R}^{-1}}}{2\xi}. \quad (2.4)$$

Нетрудно показать, что

$$\frac{di_1}{d\bar{R}} < 0, \quad \frac{di_2}{d\bar{R}} < 0, \quad \lim_{\bar{R} \rightarrow \infty} i_{1,2} = \frac{i_s}{\xi}.$$

Отметим, что из формул (1.15), (1.16) и (1.18) следует, что величины  $\Omega^* = b\omega^*/V$ ,  $\Omega_0 = b\omega_0/V$  и  $\Omega^{**} = b\omega^{**}/V$  монотонно убывают с ростом  $\bar{R}$ . Кроме того, при достаточно малых значениях нагрузочного сопротивления, таких, что

$$\bar{R} < \bar{R}_* = \frac{k^2}{\xi(1 + u_0)^2},$$

неравенство (1.20) не выполняется и имеет место гистерезис, описанный выше; если же  $\bar{R} > \bar{R}_*$ , то условие (1.20) удовлетворяется и гистерезис для стабилизатора отсутствует.

Многочисленные эксперименты, проведенные с роторами Савониуса, показывают, что функция момента удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} C_m(0) > 0; \quad \exists! \Omega_m > 0 : C_m(\Omega_m) &= 0, \\ \exists! \Omega_M \in (0, \Omega_m) : \frac{dC_m(\Omega)}{d\Omega} \Big|_{\Omega=\Omega_M} &= 0; \quad \forall \Omega \in (0, \Omega_m) : C_m''(\Omega) < 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Стационарные режимы системы (2.2) находятся из уравнения

$$C_m(\Omega) = \zeta i_{in}(\Omega). \quad (2.6)$$

Здесь безразмерный ток на входе стабилизатора определяется формулами (2.3)–(2.4).

Достаточное условие асимптотической устойчивости стационарных режимов, очевидно, выглядит так:

$$\frac{dC_m}{d\Omega} - \zeta \frac{di_{in}}{d\Omega} < 0. \quad (2.7)$$

Здесь производные, разумеется, вычисляются для  $\Omega$ , отвечающего стационарному режиму. Заметим, что из (1.15), (1.16) и (2.5) следует, что если

$$\frac{u_{in}^*}{\kappa} + \frac{i_s}{\kappa\xi} \geq \Omega_m, \quad (2.8)$$

то при всех  $\bar{R}$  выполняются неравенства  $\Omega^* \geq \Omega_m$ ,  $\Omega^{**} \geq \Omega_m$  и уравнение (2.6) не имеет решений, отличных от  $\Omega = \Omega_m, i_{in} = 0$ . Такая ситуация возникает при слишком низкой скорости потока. В дальнейшем будем предполагать, что неравенство (2.8) не выполняется. Тогда существует такое значение  $\bar{R}_{**}$ , что при  $\bar{R} > \bar{R}_{**}$  имеет место условие  $\Omega^{**} < \Omega_m$  (заметим, что из (1.16), (2.1) и (2.5) следует  $\lim_{V \rightarrow \infty} \bar{R}_{**} = 0$ ).

Графически стационарные режимы (2.6) представляют собой точки пересечения кривых  $C_m(\Omega)\zeta^{-1}$  и  $i_{in}(\Omega)$ . В зависимости от значений параметров могут реализовываться различные варианты взаимного расположения этих кривых. Предположим, что выполнены следующие условия:  $\bar{R}_{**} < \bar{R}_*$ ,  $\exists \bar{R}_1 \in (\bar{R}_{**}, \bar{R}_*) : \min(i_1(\Omega^*), i_2(\Omega_m)) > \zeta^{-1}C_m(\Omega_M) > i_s/\xi$ . Заметим, что обеспечить выполнение второго неравенства можно за счет надлежащего выбора параметра  $\zeta$ . Тогда при  $\bar{R}_1$  уравнение (2.6) не имеет решений. В то же время при достаточно большом нагрузочном сопротивлении решение существует. Четыре варианта взаимного расположе-



ния рассматриваемых кривых для разных значений нагрузочного сопротивления ( $\bar{R}_1$ ,  $\bar{R}_2$ ,  $\bar{R}_3$  и  $\bar{R}_4$ , причем  $\bar{R}_{**} < \bar{R}_1 < \bar{R}_2 < \bar{R}_3 < \bar{R}_* < \bar{R}_4$ ) качественно изображены для этой ситуации на рис. 4. Жирными черными линиями отмечены ветви, на которых стабилизатор находится в номинальном режиме, а серыми – ветви, на которых он находится в переходном режиме.

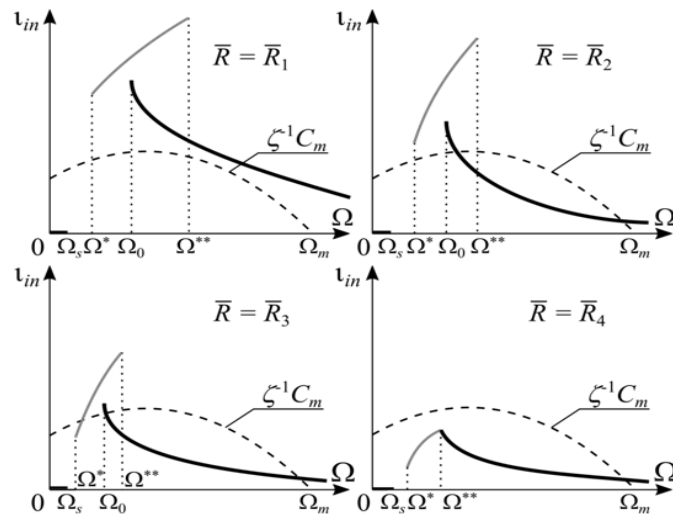


Рис. 4. Зависимости  $C_m$  и  $l_{in}$  от быстроходности при разных значениях нагрузочного сопротивления

В первом случае ( $\bar{R} = \bar{R}_1$ ) стационарных режимов нет. Если начальная быстроходность больше  $\Omega^*$ , то  $\Omega$  будет убывать, пока она не достигнет величины  $\Omega^*$ . При дальнейшем уменьшении  $\Omega$  стабилизатор перейдет в режим типа скользящего, на котором он будет отключаться и снова включаться. Если начальная быстроходность меньше  $\Omega_s$ , то  $\Omega$  будет расти, а после того, как она достигнет  $\Omega_s$ , стабилизатор также перейдет в режим типа скользящего. Можно ожидать, что в результате в системе сформируется некоторый «особый» режим, на котором быстроходность турбины остается на интервале  $\Omega \in (\Omega_s, \Omega^*)$ , а стабилизатор постоянно включается/отключается. При этом в среднем достигается баланс между мощностью, отбираемой у потока, и мощностью, расходуемой в электрической цепи.

Во втором случае ( $\bar{R} = \bar{R}_2$ ) существует два стационарных режима. Один из них реализуется при «большой» быстроходности и отвечает номинальному режиму работы стабилизатора. Как видно из (2.7), он асимптотически устойчив. Второй режим существует в зоне гистерезиса входного тока и является неустойчивым. И, как и в предыдущем случае, можно ожидать наличия «особого режима», на котором быстроходность остается в интервале  $(\Omega_s, \Omega^*)$ .

В третьем случае ( $\bar{R} = \bar{R}_3$ ) существует три стационарных режима. Один из них «высокоскоростной», как и в предыдущем случае. Второй попадает в зону «переходного» режима работы стабилизатора. Оба этих стационарных режима, очевидно, асимптотически устойчивы. Третий стационарный режим находится в зоне гистерезиса и является отталкивающим.

Наконец, в четвертом случае ( $\bar{R} = \bar{R}_4$ ) в системе имеется только один «высокоскоростной» стационарный режим, он является асимптотически устойчивым. При этом стабилизатор выдает номинальное напряжение.

Учитывая изложенное выше, бифуркационная диаграмма стационарных режимов ветроэнергетической установки качественно выглядит так, как изображено на рис. 5. Сплошной черной линией показаны устойчивые режимы, соответствующие номинальному режиму работы стабилизатора, сплошной серой линией – устойчивые режимы, на которых стабилизатор находится в переходном режиме. Жирной пунктирной линией изображены неустойчивые режимы. Область, в которой реализуются «особые» режимы, выделена серым цветом, тонкие пунктирные линии – зависимости  $\Omega_s$  и  $\Omega^*$  от сопротивления.

Таким образом, при изменении нагрузочного сопротивления в системе имеет место гистерезис установившихся режимов функционирования установки (который нужно отличать от гистерезиса стационарных режимов стабилизатора напряжения, описанного выше). Следует отметить, что, хотя динамика системы описывается дифференциальным уравнением первого

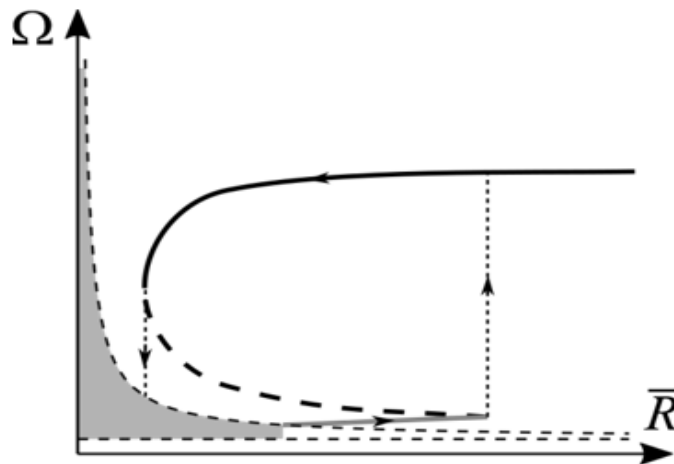


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма стационарных режимов

порядка, задать одно начальное условие на  $\Omega$  может оказаться недостаточным для определения последующего поведения системы. Необходимо определить, какой ветви входного тока отвечает состояние стабилизатора. Для решения этой задачи, по-видимому, нужно более детально описать динамику стабилизатора, увеличив порядок динамической системы. Это остается предметом последующего исследования.

Прежде чем переходить к результатам экспериментов, обсудим коротко ситуацию, когда стабилизатор выключен из цепи и ток от генератора идет напрямую на нагрузочное сопротивление. Нетрудно видеть, что при этом из закона Ома для контура получаем

$$I_{out} = \frac{\kappa \Omega}{\bar{R} + 1}. \quad (2.9)$$

С учетом (2.9) уравнение (2.6) стационарных режимов принимает такой вид:

$$C_m(\Omega) = \frac{\zeta \kappa \Omega}{\bar{R} + 1}. \quad (2.10)$$

Из соотношений (2.5) следует, что уравнение (2.10) имеет единственное решение. Это означает, в частности, что в случае, когда нагрузкой в ветроэнергетической установке с рабочим элементом в виде ротора Савониуса является просто активное сопротивление, гистерезис стационарных режимов отсутствует.

**3. Экспериментальная верификация и идентификация параметров.** С целью верификации сформированной математической модели системы и идентификации параметров было проведено экспериментальное исследование. В его рамках были изготовлены две лабораторных установки. Одна из них состоит из электродвигателя, вал которого жестко соединен с ротором генератора (генератор 1). В цепь ротора генератора включен стабилизатор напряжения на 5В постоянного тока и нагрузочное сопротивление. Вторая установка состоит из вертикально-осевой ветротурбины (ротор Савониуса), ось которой жестко соединена с ротором электрогенератора (генератор 2). В цепь ротора генератора также включен стабилизатор напряжения на 5В постоянного тока и нагрузочное сопротивление. Установка помещена в дозвуковую аэродинамическую трубу А10 НИИ механики МГУ.

В обеих установках имеются устройства для измерения тока и напряжения на входе стабилизатора, а также тока на выходе стабилизатора. В электрических цепях обеих установок предусмотрен ключ, позволяющий отключить стабилизатор (так, чтобы ток от генератора шел напрямую на нагрузочное сопротивление). Нагрузочное сопротивление задается с помощью магазина сопротивлений. Первая установка предназначена для исследования характеристик стабилизатора. Вторая — для изучения динамики ветроэнергетической установки.

**3.1. Идентификация параметров стабилизатора и генератора 1.** Вначале были проведены эксперименты, направленные на определение характеристик генератора 1. Для этого вал генератора с помощью двигателя приводился во вращение с некоторой угловой скоростью. Стабилизатор был отключен с помощью упомянутого выше ключа. При различных значениях нагрузочного сопротивления измерялись угловая скорость и ток на нагрузочном сопротивлении.

В рамках модели (1.4) уравнение Кирхгофа для электрической цепи без стабилизатора выглядит так:

$$c\omega = (R + r)I, \quad (3.1)$$

где  $I$  — ток, текущий через нагрузочное сопротивление. Отсюда имеем:

$$\frac{\omega}{I} = \frac{R}{c} + \frac{r}{c}. \quad (3.2)$$

Результаты экспериментов представлены на рис. 6 точками. Сплошной линией изображена зависимость (3.2) при значениях параметров, определенных с помощью метода наименьших квадратов:  $c = 1.3$  В·с и  $r = 65$  Ом. Видно, что расчет достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными.

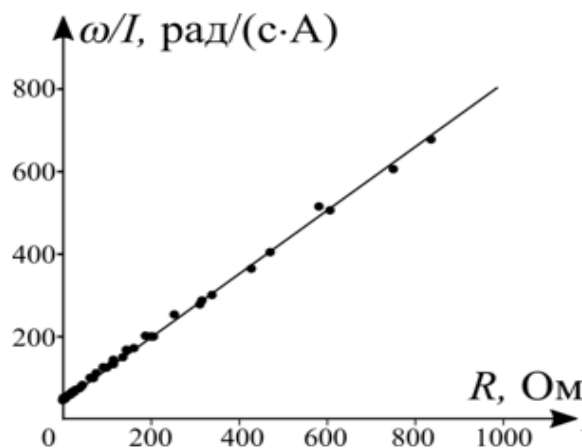


Рис. 6. Зависимость  $\omega/I$  от нагрузочного сопротивления для генератора 1: точки — экспериментальные данные, прямая — аппроксимация (3.2)

Для идентификации параметров стабилизатора была проведена серия экспериментов при включенном стабилизаторе. В их ходе при различных значениях нагрузочного сопротивления и угловой скорости ротора генератора измерялся ток и напряжение на входе стабилизатора, а также напряжение на нагрузочном сопротивлении.

На рис. 7 точками представлена экспериментальная зависимость  $U_{out}$  от  $U_{in}$ , пунктирной линией — зависимость (1.9) при  $k = 1$ ,  $U_0 = 1.8$  В и  $U_{in}^* = 4.7$  В. Видно, что предложенная аппроксимационная кривая достаточно хорошо приближает экспериментальные данные.

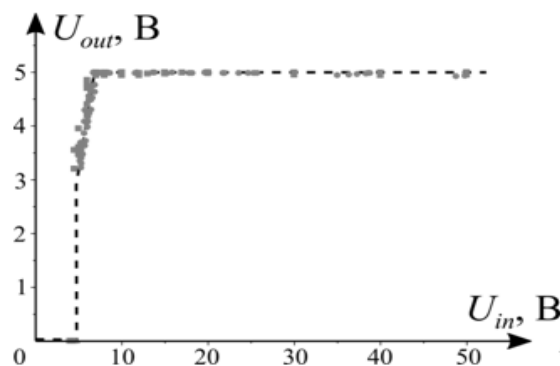


Рис. 7. Зависимости напряжения на выходе стабилизатора от напряжения на входе

Зависимость входного тока от угловой скорости вала генератора при разных значениях нагрузочного сопротивления изображена на рис. 8 точками (эксперимент) и сплошными линиями (расчет в рамках модели). Из рисунка видно, что расчет достаточно хорошо согласуется с результатами измерений. Следует отметить, что, как и предсказывает модель, при сравнительно небольших значениях  $R$  в экспериментах наблюдается гистерезис, который пропадает с ростом  $R$  (границы зон гистерезиса отмечены пунктирными линиями).

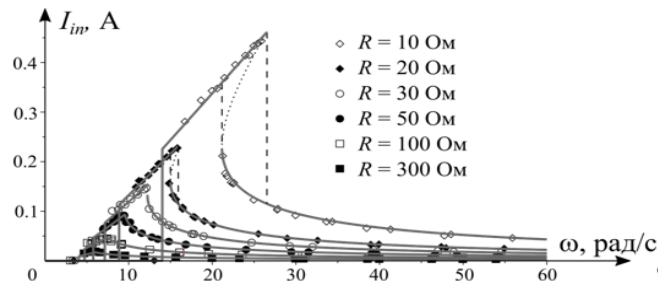


Рис. 8. Зависимости тока на входе стабилизатора от угловой скорости вала генератора при разных значениях нагрузочного сопротивления

Таким образом, предложенная модель достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными и может использоваться для исследования динамики электромеханических систем, в состав которых входит стабилизатор напряжения. Необходимо отметить, что при достаточно низких значениях угловой скорости в эксперименте наблюдались значительные колебания тока (в некоторых случаях от 0 до 70 мА) и напряжения на входе стабилизатора. Напряжение на выходе стабилизатора при этом было в среднем менее 3 В. Это соответствует «скользящему» режиму, описанному в предыдущем разделе. При дальнейшем уменьшении  $\omega$  входной ток и выходное напряжение становились равными нулю. Это, по-видимому, означает, что стабилизатор размыкал цепь.

**3.2. Эксперименты с ветротурбиной.** После того, как параметры стабилизатора были идентифицированы с помощью первой установки, стабилизатор был перенесен во вторую установку, с которой затем были проведены эксперименты в дозвуковой аэродинамической трубе А10 НИИ механики МГУ.

Эта труба может использоваться с закрытой или с открытой рабочей частью (внутри камеры Эйфеля). Сечение трубы на входе в рабочую часть имеет форму правильного восьмиугольника со стороной 33 см. Длина рабочей части — 1.35 м. Диапазон скоростей потока — от 5 до 50 м/с (с открытой рабочей частью) и до 70 м/с (с закрытой рабочей частью). В описываемых экспериментах рабочая часть была открыта.

Лопастей ветротурбины представляли собой пластиковые полуцилиндры диаметром 130 мм и высотой 250 мм, толщина лопастей — 2 мм. Сверху и снизу лопасти были прикреплены к пластиковым дискам толщиной 6 мм. Диски вместе с лопастями были закреплены на металлическом валу диаметром 14 мм. Лопасти были установлены с перекрытием, причем между краем лопасти и валом был оставлен зазор 15 мм. Таким образом, итоговый радиус ротора (т.е. расстояние от центра вала до дальнего края лопасти) составлял 108 мм. Вал был жестко соединен с валом ротора генератора 2. Турбина была закреплена в раме и установлена в рабочей части аэродинамической трубы (см. рис. 9).

Вначале для определения характеристик генератора 2 была проведена серия экспериментов с отключенным стабилизатором. В ходе испытаний при разных скоростях потока и разных значениях нагрузочного сопротивления измерялась угловая скорость ветротурбины и ток на сопротивлении. На рис. 10 представлена экспериментальная зависимость отношения  $\omega/I_{in}$  от нагрузочного сопротивления (точки) и зависимость (3.2) при  $c = 1.5$  В·с и  $r = 107$  Ом (величины параметров определены с помощью метода наименьших квадратов).

Из рисунка видно, что в рассматриваемом диапазоне угловых скоростей и величин сопротивления модель линейного электромеханического взаимодействия достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными.

На рис. 11 представлены изображена зависимость величины быстроходности на стационарных режимах от безразмерного нагрузочного сопротивления (отнесенного к идентифици-

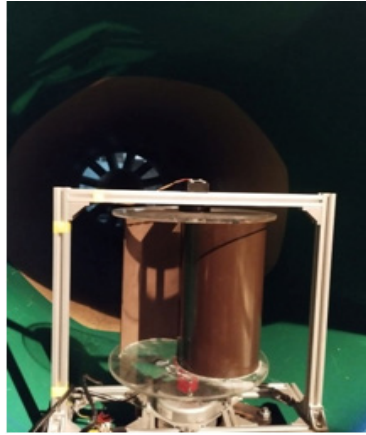


Рис. 9. Лабораторная установка с ротором Савониуса в аэродинамической трубе

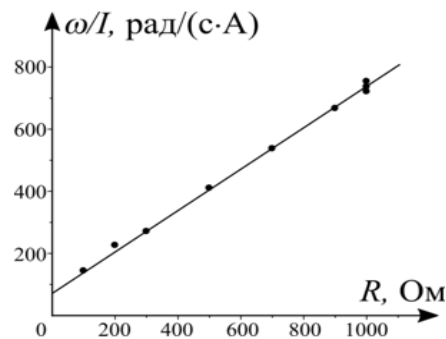


Рис. 10. Зависимость  $\omega/I$  от нагрузочного сопротивления для генератора 2: точки — экспериментальные данные, прямая — аппроксимация (3.2)

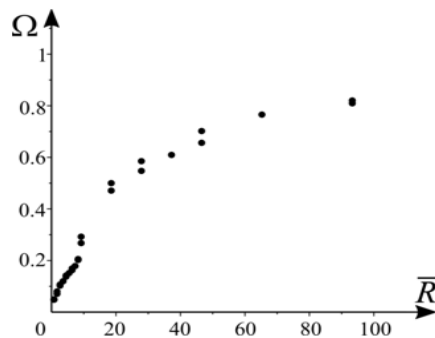


Рис. 11. Зависимость быстроходности на стационарных режимах от безразмерного нагрузочного сопротивления (стабилизатор отключен)

рованному внутреннему сопротивлению генератора 2). Отметим, что каждому значению  $R$  соответствует один стационарный режим и гистерезис отсутствует.

Затем была проведена серия экспериментов с подключенным стабилизатором. Скорость потока составляла 8 м/с. В ходе экспериментов фиксировалось нагрузочное сопротивление и измерялись ток и напряжение на входе стабилизатора, напряжение на выходе стабилизатора и угловая скорость турбины.

На рис. 12 представлены значения безразмерной угловой скорости  $\Omega$  ротора Савониуса на стационарных и «особых» режимах (естественно, в экспериментах наблюдались только притягивающие режимы) в зависимости от безразмерного нагрузочного сопротивления  $\bar{R}$ . Стационарные режимы обозначены черными точками, «особые» — серыми. Стационарные

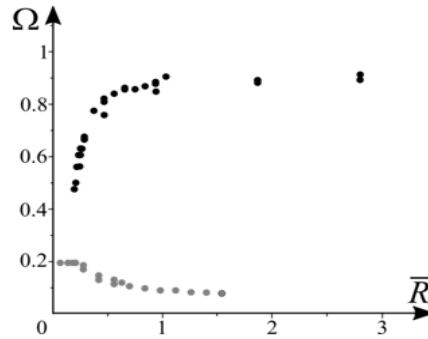


Рис. 12. Зависимость быстроходности на стационарных режимах от безразмерного нагрузочного сопротивления (стабилизатор включен)

режимы, соответствующие переходному режиму работы стабилизатора, не были обнаружены. Это, по-видимому, связано с недостаточно мелким шагом по  $\bar{R}$ .

Видно, что эта диаграмма качественно соответствует результатам, полученным в рамках предложенной модели (см. рис. 6). В частности, в эксперименте наблюдается эффект гистерезиса режимов функционирования установки, предсказанный моделью.

#### 4. О возможности регулирования работы установки с помощью нагрузочного сопротивления.

Основной характеристикой работы ветроэнергетической установки, предназначенной для выработки электроэнергии, является выходная мощность. В нормальном режиме функционирования установки, когда стабилизатор находится в номинальном режиме, она определяется следующей формулой:

$$P_{out} = \frac{U_n^2}{R}. \quad (4.1)$$

Ясно, что для максимизации этой величины необходимо уменьшать сопротивление. В то же время при маленьких сопротивлениях, как было показано выше, единственным притягивающим режимом функционирования установки является «особый» режим, на котором мощность практически равна нулю. Соответственно сопротивление не должно быть меньше некоторого критического значения. Это значение, очевидно, зависит от скорости потока. Поэтому, для того чтобы система могла перейти на номинальный режим в случае, если в результате падения скорости потока она окажется на «особом» режиме, необходимо регулировать нагрузку.

Учитывая, что при  $\Omega_M < \Omega < \Omega_m$  имеем  $C_m'' < 0$ , и  $d^2 v_{in2}/d\Omega^2 > 0$ , стационарные решения, на которых стабилизатор находится в номинальном режиме, существуют только при  $\bar{R} > \bar{R}_m$ , причем величина  $\bar{R}_m$  определяется из следующей системы алгебраических уравнений:

$$C_m(\Omega) = \zeta \frac{\xi \Omega \kappa + \iota_s - \sqrt{(\xi \Omega \kappa - \iota_s)^2 - 4\xi \bar{R}_m^{-1}}}{2\xi},$$

$$\frac{dC_m}{d\Omega} = \zeta \frac{\kappa}{2} - \zeta \frac{\kappa(\xi \Omega \kappa - \iota_s)}{2\sqrt{(\xi \Omega \kappa - \iota_s)^2 - 4\xi \bar{R}_m^{-1}}}.$$

Эту систему следует рассматривать как уравнения относительно  $\bar{R}_m$  и  $\Omega$ . Соответственно максимальная достижимая мощность равна

$$P_{out}^{max} = \frac{U_n^2}{r\bar{R}_m}. \quad (4.2)$$

Кроме того, если скорость потока не слишком мала, то существует такое сопротивление  $\bar{R}_M$ , что если  $R > \bar{R}_M$ , то существует только стационарное решение, на котором стабилизатор находится в номинальном режиме. С учетом соотношений (2.6) и того обстоятельства, что  $dv_{in1}/d\Omega > 0$ , оценить величину  $\bar{R}_M$  можно следующим образом:  $\bar{R}_M \leq \bar{R}_M^{est}$ , где  $\bar{R}_M^{est}$  определяется из следующего уравнения:



$$C = \zeta \frac{\bar{R}_M^{est} (\xi \Omega^{**} \kappa + \iota_s) + 2\Omega^{**} k^2 \kappa - 2ku_0 - \sqrt{(\bar{R}_M^{est} \xi \Omega^{**} \kappa + 2ku_0 - \iota_s \bar{R}_M)^2 - 4u_0^2 (\bar{R}_M^{est} \xi + k^2)}}{2(\bar{R}_M^{est} \xi + k^2)},$$

где

$$C = \begin{cases} C_m(\Omega^{**}), & \Omega_M = 0, \\ \min_{\Omega \in [0, \Omega_M]} C_m(\Omega), & \Omega_M > 0. \end{cases}$$

Очевидно,  $\bar{R}_M > \bar{R}_m$ .

Таким образом, если установка переходит в нежелательный режим (на котором стабилизатор не находится в номинальном режиме), то следует увеличить нагрузочное сопротивление, чтобы оно стало больше, чем  $R_M = r\bar{R}_M$ . После того, как система перейдет на стационарный режим, нужно уменьшить сопротивление до величины  $R_m = r\bar{R}_m$  (на практике целесообразно выбирать значение, несколько большее  $R_m$ ). Если требуется затормозить вращение ветротурбины (например, когда скорость ветра становится слишком большой), то следует уменьшить нагрузочное сопротивление до величины, меньшей  $R_m$ .

**Заключение.** Проведено исследование динамики ветроэнергетической установки, рабочим элементом которой является ротор Савониуса, а в цепь генератора включен стабилизатор напряжения. Предложена математическая модель, описывающая поведение стабилизатора в зависимости от входного напряжения и подключенной к нему нагрузки. Исследованы стационарные режимы, существующие в этой системе при разных значениях параметров. Установлено, что при изменении нагрузочного сопротивления в системе возникает гистерезис. Проведена серия экспериментов по идентификации параметров электрической части системы, а также испытания ветроэнергетической установки в дозвуковой аэродинамической трубе. Показано, что данные, полученные в ходе экспериментов, достаточно хорошо согласуются с результатами аналитического исследования. Предложен алгоритм регулирования нагрузочного сопротивления, позволяющий обеспечить максимальную выходную мощность.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wang H., Xiong B., Zhang Z., Zhang H., Azam A. Small Wind Turbines and Their Potential for Internet of Things Applications // iScience. 2023. V. 26. № 9. P. 107674. <https://doi.org/10.1016/j.isci.2023.107674>.
2. Al-Kayiem H.H., Bhayo B.A., Assadi M. Comparative Critique on the Design Parameters and Their Effect on the Performance of S-Rotors // Renewable Energy. 2016. V. 99. P. 1306–1317. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2016.07.015>.
3. Cuevas-Carvajal N., Cortes-Ramirez J.S., Norato J.A., Hernandez C., Montoya-Vallejo M.F. Effect of Geometrical Parameters on the Performance of Conventional Savonius VAWT: A Review // Renewable & Sustainable Energy Reviews. 2022. V. 161. № 3. P. 112314.
4. Sheldahl R.E., Blackwell B.F., Feltz L.V. Wind Tunnel Performance Data for Two- and Three-Bucket Savonius Rotors // J. Energy. 1978. V. 2. № 3. P. 160–164.
5. Saha U.K., Thotla S., Maity D. Optimum Design Configuration of Savonius Rotor Through Wind Tunnel Experiments // J. Wind Eng. Ind. Aerodyn. 2008. V. 96. P. 1359–1375. <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2008.03.005>.
6. Fujisawa N. On the Torque Mechanism of Savonius Rotors // J. Wind Eng. & Ind. Aerodyn. 1992. V. 40. P. 277–292.
7. Jian C., Kumbennuss J., Linhua Z., Lin L., Hongxing Y. Influence of Phase-Shift and Overlap Ratio on Savonius Wind Turbine's Performance // ASME. J. Sol. Energy Eng. 2012. V. 134. № 1. P. 011016. <https://doi.org/10.1115/1.4004980>.
8. Nasef M.H., El-Askary W.A., Abdel-Hamid A.A., Gad H.E. Evaluation of Savonius Rotor Performance: Static and Dynamic Studies // J. Wind Eng. & Ind. Aerodyn. 2013. V. 123. P. 1–11. <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2013.09.009>.
9. Bach G. Untersuchungen über Savonius-Rotoren und Verwandte Strömungsmaschinen // Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. 1931. Bd. 2. S. 218–231.
10. Kamoji M.A., Kedare S.B., Prabhu S.V. Experimental Investigations on single Stage, Two Stage and Three Stage Conventional Savonius Rotor // Intern. J. Energy Res. 2008. V. 32. P. 877–895. <https://doi.org/10.1002/er.1399>.
11. Frikha S., Driss Z., Ayadi E., Masmoudi Z., Abid M.S. Numerical and Experimental Characterization of Multi-Stage Savonius Rotors // Energy. 2016. V. 114. P. 382–404. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2016.08.017>.

12. *Kacprzak K., Liskiewicz G., Sobczak K.* Numerical Investigation of Conventional and Modified Savonius Wind Turbines // *Renewable Energy*. 2013. V. 60. P. 578–585.  
<https://doi.org/10.1016/j.renene.2013.06.009>.
13. *Roy S., Saha U.K.* Wind Tunnel Experiments of a Newly Developed Two Bladed Savonius-Style Wind Turbine // *Applied Energy*. 2015. V. 137. P. 117–125.  
<https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2014.10.022>.
14. *Roy S., Ducoin A.* Unsteady Analysis on the Instantaneous Forces and Moment Arms Acting on a Novel Savonius-Style Wind Turbine // *Energy Conversion & Management*. 2016. V. 121. P. 281–296.  
<https://doi.org/10.1016/j.enconman.2016.05.044>.
15. *Scheeua F.D.* Comparative Numerical Analysis on Vertical Wind Turbine Rotor Pattern of Bach and Benesh Type // *Energies*. 2020. V. 13. P. 2311.  
<https://doi.org/10.3390/en13092311>.
16. *Rizk M., Nasr K.* Computational Fluid Dynamics Investigations Over Conventional and Modified Savonius Wind Turbines // *Heliyon*. 2023. V.9. № 6. P. 16876.  
<https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e16876>.
17. *Mohamed M.H., Janiga G., Pap E., Thévenin D.* Optimal Blade Shape of a Modified Savonius Turbine Using an Obstacle Shielding the Returning Blade // *Energy Conversion Management*. 2011. V. 52. № 1. P. 236–242.  
<https://doi.org/10.1016/j.enconman.2010.06.070>.
18. *Chan C.M., Bai H.L., He D.Q.* Blade Shape Optimization of the Savonius Wind Turbine Using a Genetic Algorithm // *Applied Energy*. 2018. V. 213. P. 148–157.  
<https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2018.01.02>.
19. *Tartuferi M., D'Alessandro B., Montelpare S., Ricci R.* Enhancement of Savonius Wind Rotor Aerodynamic Performance: a Computational Study of New Blade Shapes and Curtain Systems // *Energy*. 2015. V. 79. P. 371–384.  
<https://doi.org/10.1016/j.energy.2014.11.023>.
20. *Tomar S.S., Dewan A., Singh T.P.* Effects of Axisymmetric-Omnidirectional Deflector on Aerodynamics of Modified Bach Savonius Rotor for Power Enhancement // *Energy Convers. Manag.* 2023. V. 297. P. 117720.  
<https://doi.org/10.1016/j.enconman.2023.117720>.
21. *Selyutskiy Y.D., Klimina L.A., Masterova A.A., Hwang S.S., Lin C.H.* Savonius Rotor as a Part of Complex Systems // *J. Sound & Vibr.* 2019. V. 442. P. 1–10.  
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.10.020>.
22. *Zolotov I.I., Shevtsov A.A., Mkrtichev S.V.* Simulation Model of Dynamic Voltage Stabilizer for Autonomous Power Supply Systems // *J. Physics: Conference Series*. 2019. V. 1333, N. 6. P. 062034.  
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1333/6/062034>.
23. *Кориунов А.И.* Два подхода к анализу устойчивости стабилизаторов напряжения постоянного тока с переменной структурой силовой части // *Практическая силовая электроника*. 2017. № 2(66). С. 12–19.
24. *Dosaev M.Z., Lin C.H., Lu W.L., Samsonov V.A., Selyutskii Yu.D.* A Qualitative Analysis of the Steady Modes of Operation of Small Wind Power Generators // *J. Appl. Math. Mech.* 2009. V. 73. № 3. P. 259–263.  
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2009.07.015>.