

УДК 62-50

РЕЛЕЙНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ БЕЗЫНЕРЦИОННОГО ДВУХЗВЕННОГО МАНИПУЛЯЦИОННОГО РОБОТА

© 2024 г. Ю. Ф. Долгий^{a, b, *}, И. А. Чупин^{b, **}

^aИнститут математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

^bУральский федеральный ун-т, Екатеринбург, Россия

*e-mail: jury.dolgy@urfu.ru

**e-mail: mr.tchupin@yandex.ru

Поступила в редакцию 14.04.2024 г.

После доработки 29.07.2024 г.

Принята к публикации 16.10.2024 г.

Применяются релейные управления при решении задачи перевода безынерционного манипуляционного робота из заданного начального положения равновесия в заданное конечное положение равновесия. Предлагается метод нахождения точек переключения релейных управлений. Задача сводится к нахождению условий существования решения нелинейной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений, определяющих траекторию движения манипулятора.

Ключевые слова: оптимальное управление, релейное управление, краевая задача, манипуляционный робот

DOI: 10.31857/S0002338824060128, EDN: STXELX

RELAY CONTROLS FOR AN INERTIALESS TWO-LINK MANIPULATION ROBOT

Yu. F. Dolgii^{a, b, *}, I. A. Chupin^{b, **}

^aKrasovskii Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch
of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia

^bUral Federal University, Yekaterinburg, Russia

*e-mail: jury.dolgy@urfu.ru

**e-mail: mr.tchupin@yandex.ru

Relay controls are used to solve the problem of moving an inertialess manipulator from a given starting position to a desired final equilibrium position. A method for finding relay control switching points has been proposed. The main issue is to find the conditions for a solution to a nonlinear boundary value problem of a system of differential equations that determines the trajectory of a manipulator.

Keywords: optimal control, relay control, boundary problem, manipulation robot

Введение. Математические модели механических систем для манипуляционных роботов описываются управляемыми нелинейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Управления выбираются таким образом, чтобы перевести манипуляционного робота из заданного начального положения равновесия в заданное конечное положение равновесия. Качество управления оценивается временем и энергией управления, которые затрачиваются на этот перевод. Движения управляемой механической системы являются решениями специальных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Аналитические решения рассматриваемых задач получены, когда математические модели манипуляционных роботов описываются интегрируемыми системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Для построения интегрируемых математических моделей активно использовались методы декомпозиции [1]. Если неуправляемая механическая система с n степенями свободы описывается интегрируемой канонической системой уравнений Гамильтона, т.е. имеет n

независимых первых интегралов, находящихся в инволюции, то, вычисляя полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби и применяя теорему Якоби, можно определить независимую систему $2n$ первых интегралов канонической системы уравнений [2, 3]. С их помощью задается траектория свободного движения манипуляционного робота в фазовом пространстве, проекция которой на координатное пространство соединяет начальную и конечную точки движения манипулятора, а также вычисляется время движения манипулятора по траектории. Выход робота из начального положения равновесия на траекторию свободного движения можно обеспечить идеальным импульсным управлением. Аналогично с помощью идеального импульсного управления можно обеспечить торможение робота в конечном положении равновесия [4, 5]. При реализации идеальных импульсных управлений функцию Дирака можно моделировать прямоугольным импульсом. При оптимизации движений манипуляционного робота активно использовался принцип максимума Понтрягина [6]. Большое количество работ посвящено оптимизации движений двухзвенного манипулятора [7–11]. При нахождении оптимальных управлений применялись различные модификации численного метода для принципа максимума Понтрягина [12–14], а также краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений при построении оптимальных движений манипуляторов [1, 14, 15]. Для задачи оптимального быстрогодействия можно ограничиться программными релейными управлениями и находить только их точки переключения. При этом можно игнорировать уравнения для сопряженных переменных принципа максимума [15]. Для безынерционного двухзвенного манипуляционного робота при решении задачи оптимального быстрогодействия в работе [14] используется метод последовательных приближений для принципа максимума Понтрягина. В настоящей работе изучается задача нахождения точек переключения релейных управлений для безынерционного двухзвенного манипуляционного робота. Соответствующая механическая система имеет две степени свободы, и времена прихода манипулятора в конечное положение по различным обобщенным координатам могут отличаться [14]. В статье [16] с помощью метода декомпозиции были построены управления, которые обеспечивают равенство оценок времен движения по разным степеням свободы. При решении поставленной задачи используется специальная краевая задача для траектории движения манипулятора. В настоящей работе получены условия, для которых времена прихода манипулятора в конечное положение по различным координатам совпадают.

1. Математическая модель манипулятора и постановка задачи. Рассматривается двухзвенный манипуляционный робот (рис. 1), состоящий из двух абсолютно твердых тел и схвата с грузом, которые движутся параллельно горизонтальной плоскости. На рис. 2 приведена схема манипулятора в его проекции на горизонтальную плоскость. Первое тело цилиндрическим шарниром O связано с неподвижным основанием, а второе тело цилиндрическим шарниром O_1 связано с первым телом. На конце второго тела в точке O_2 укреплен схват, в котором находится перемещаемый объект (груз). Будем предполагать, что линейные размеры схвата и груза много меньше длины звеньев манипулятора, и при исследовании транспортных движений считать схват с грузом материальной точкой. Ограничимся рассмотрением безынерционного манипулятора, когда масса звеньев много меньше массы перемещаемого груза, считая, что вся его масса сосредоточена в точке O_2 и равна массе груза m . Предположение о малости массы звеньев по сравнению с массой груза выполняется для некоторых исследовательских роботов [14].

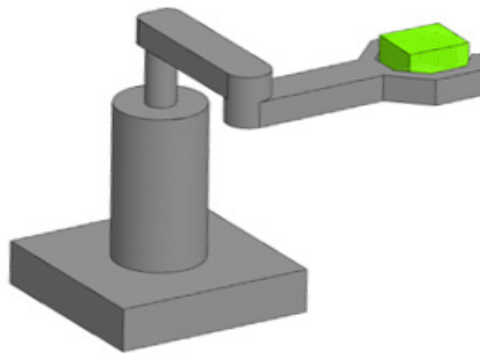


Рис. 1. Двухзвенный манипулятор.

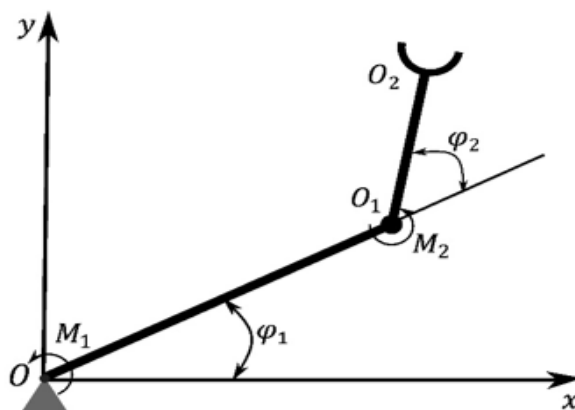


Рис. 2. Схема двухзвеного манипулятора.

Манипулятор управляется при помощи двух независимых приводов, расположенных в шарнирах O и O_1 соответственно. Главные моменты сил, создаваемых приводами, равны M_1 и M_2 . Для описания движения схвата вводится в горизонтальной плоскости движения звеньев манипулятора неподвижная декартова система координат Oxy с началом в точке O . Пусть x и y — декартовы координаты схвата (груза). Закон движения схвата определяется формулами $x(t)$, $y(t)$. Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ схват находится в начальном положении $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ и имеет нулевые проекции скорости $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$. Требуется привести его в момент времени $t = T$ в заданное конечное положение $x(T) = x_T$, $y(T) = y_T$ с нулевой скоростью $\dot{x}(T) = 0$, $\dot{y}(T) = 0$. Задача управления состоит в нахождении программных законов изменения управляющих моментов $M_1(t)$, $M_2(t)$, $0 \leq t \leq T$, обеспечивающих приведение манипулятора из заданного начального состояния равновесия в заданное конечное положение равновесия.

На рис. 2 угол φ_1 между осью Ox неподвижной системы координат и прямой OO_1 , соединяющей цилиндрические шарниры, определяет положение первого звена манипулятора, а угол φ_2 между прямой OO_1 и O_1O_2 , соединяющей второй шарнир со схватом, находит относительное положение второго звена манипулятора относительно первого. Декартовы координаты схвата запишем как

$$x = L_1 \cos \varphi_1 + L_2 \cos (\varphi_1 + \varphi_2), \quad y = L_1 \sin \varphi_1 + L_2 \sin (\varphi_1 + \varphi_2),$$

где $L_1 = |OO_1|$ — длина первого звена, $L_2 = |O_1O_2|$ — длина второго звена. Будем полагать, что $L_2 \leq L_1$. Следовательно, рабочая зона манипулятора определяется неравенствами:

$$L_1 - L_2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq L_1 + L_2.$$

Рассматривается ситуация, когда значение угла φ_2 положительно во время движения манипулятора и схват не достигает границ рабочей зоны.

Для описания движения манипулятора будем использовать уравнения Лагранжа 2-го рода. Их вид зависит от выбора обобщенных координат. Следуя [14], в качестве обобщенных координат возьмем полярные координаты точки O_2 . Имеем:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Зависимость углов φ_1 , φ_2 от полярных координат определяется формулами:

$$\varphi_1 = \varphi - \arccos \frac{r^2 + L_1^2 - L_2^2}{2L_1r},$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi + \arccos \frac{r^2 + L_2^2 - L_1^2}{2L_2r}.$$

Находим вариации углов:

$$\delta \varphi_1 = \delta \varphi + \frac{(r^2 + L_2^2 - L_1^2) \delta r}{r \sqrt{(r^2 - (L_1 - L_2)^2)((L_1 + L_2)^2 - r^2)}},$$

$$\delta\varphi_1 + \delta\varphi_2 = \delta\varphi - \frac{(r^2 + L_1^2 - L_2^2)\delta r}{r\sqrt{(r^2 - (L_1 - L_2)^2)((L_1 + L_2)^2 - r^2)}}.$$

Кинетическая энергия манипулятора определяется как

$$K = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2),$$

а элементарная работа сил на виртуальных перемещениях —

$$\delta A = M_1\delta\varphi_1 + M_2\delta\varphi_2 = M_\varphi\delta\varphi + M_r\delta r$$

с обобщенными силами:

$$M_\varphi = M_1, \quad M_r = \frac{r^2(M_1 - 2M_2) - (L_1^2 - L_2^2)M_1}{r\sqrt{(r^2 - (L_1 - L_2)^2)((L_1 + L_2)^2 - r^2)}}.$$

Дифференциальные уравнения Лагранжа 2-го рода имеют вид:

$$\frac{d(r^2\dot{\varphi})}{dt} = \frac{M_1(t)}{m}, \quad (1.1)$$

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{M_1(t)}{m}F_1(r) - \frac{M_2(t)}{m}F_2(r), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2)$$

где функции $F_1(\cdot)$, $F_2(\cdot)$ определяются следующим образом:

$$F_1(r) = \frac{r^2 - L_1^2 + L_2^2}{r\sqrt{(r^2 - (L_1 - L_2)^2)((L_1 + L_2)^2 - r^2)}},$$

$$F_2(r) = \frac{2r}{\sqrt{(r^2 - (L_1 - L_2)^2)((L_1 + L_2)^2 - r^2)}}, \quad L_1 - L_2 < r < L_1 + L_2.$$

Требуется найти управления $M_1(t)$, $M_2(t)$, $t \in [0, T]$, переводящие систему (1.1), (1.2) из заданного начального положения равновесия:

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \quad r(0) = r_0, \quad \dot{r}(0) = 0,$$

в заданное конечное положение равновесия:

$$\varphi(T) = \varphi_T, \quad \dot{\varphi}(T) = 0, \quad r(T) = r_T, \quad \dot{r}(T) = 0,$$

и время T , необходимое для этой операции. Здесь $L_1 - L_2 < r_0$, $r_T < L_1 + L_2$, $\varphi_T \neq \varphi_0$, $r_T \neq r_0$. Без ограничения общности, используя специальный выбор направления оси x , можно положить $\varphi_0 = 0$.

При реализации рассматриваемой операции будем применять специальные релейные управления:

$$M_1(t) = \begin{cases} M_1^0, & 0 \leq t < t_\varphi, \\ -M_1^0, & t_\varphi \leq t \leq T, \end{cases}$$

$$M_2(t) = \begin{cases} M_2^0, & 0 \leq t < t_r, \\ -M_2^0, & t_r \leq t \leq T, \end{cases}$$

с заданными модулями величин M_1^0 и M_2^0 . Знаки этих величин задают направления управляющих моментов сил и определяются специальным образом. В результате требуется найти

условия, когда решение поставленной выше задачи существует в классе выбранных релейных управлений, а также моменты t_φ , t_r переключения релейных управлений и время T перехода манипулятора из начального положения равновесия в конечное.

2. Краевая задача для траектории манипулятора. Сформулированная задача имеет решение, если существуют такие значения параметров t_φ , t_r , T , M_1^0 , M_2^0 , для которых система дифференциальных уравнений

$$\frac{d(r^2\dot{\varphi})}{dt} = \frac{M_1^0}{m} \operatorname{sgn}(t_\varphi - t), \quad (2.1)$$

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{M_1^0 \operatorname{sgn}(t_\varphi - t)}{m} F_1(r) - \frac{M_2^0 \operatorname{sgn}(t_r - t)}{m} F_2(r) \quad (2.2)$$

с краевыми условиями

$$\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0, \varphi(T) = \varphi_T, \dot{\varphi}(T) = 0, \quad (2.3)$$

$$r(0) = r_0, \dot{r}(0) = 0, r(T) = r_T, \dot{r}(T) = 0 \quad (2.4)$$

имеет решение. Ограничимся изучением случая, когда $\varphi_T > 0$, $r_T \neq r_0$.

Преобразуем указанную краевую задачу. Пусть требуемые значения параметров M_1^0 , M_2^0 , t_φ , t_r и T существуют и им отвечает решение $\varphi(t)$, $r(t)$, $t \in [0, T]$, краевой задачи (2.1)–(2.4). Тогда из (2.1), (2.3) находим:

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{M_1^0 \alpha(t)}{mr^2(t)}, \quad \varphi(t) = \frac{M_1^0}{m} \int_0^t \frac{\alpha(s)}{r^2(s)} ds, \quad (2.5)$$

где функция $\alpha(\cdot)$ определяется формулами:

$$\alpha(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < t_\varphi, \\ 2t_\varphi - t, & t \leq t_\varphi < T, \end{cases} \quad t \in [0, T].$$

С учетом условия $\dot{\varphi}(T) = 0$ имеем $\alpha(T) = 0$. Следовательно, должно выполняться равенство $T = 2t_\varphi$.

Из (2.5) следует, что на отрезке $[0, T]$ функция $\varphi(\cdot)$ возрастает и $M_1^0 > 0$. Тогда существует обратная функция $t(\varphi)$, $\varphi \in [0, \varphi_T]$, $t(0) = 0$, $t(\varphi_T) = T$ и углы φ_φ , φ_r такие, что $t(\varphi_\varphi) = t_\varphi$, $t(\varphi_r) = t_r$. Эта функция неявно определяется уравнением:

$$\varphi = \frac{M_1^0}{m} \int_0^{t(\varphi)} \frac{\alpha(s)}{r^2(s)} ds, \quad \varphi \in [0, \varphi_T],$$

дифференцируя которое, имеем:

$$\frac{M_1^0}{m} \frac{\alpha(t(\varphi))}{\tilde{r}^2(\varphi)} t'(\varphi) = 1, \quad \varphi \in [0, \varphi_T]. \quad (2.6)$$

Здесь $\tilde{r}(\varphi) = r(t(\varphi))$, $\varphi \in [0, \varphi_T]$,

$$\alpha(t(\varphi)) = \begin{cases} t(\varphi), & \varphi \in [0, \varphi_\varphi], \\ T - t(\varphi), & \varphi \in [\varphi_\varphi, \varphi_T]. \end{cases} \quad (2.7)$$

Из (2.6) и (2.7) получим:

$$t(\varphi) t'(\varphi) = \frac{m}{M_1^0} \tilde{r}^2(\varphi), \quad \varphi \in [0, \varphi_\varphi],$$

$$(T - t(\varphi)) t'(\varphi) = \frac{m}{M_1^0} \tilde{r}^2(\varphi), \quad \varphi \in [\varphi_\varphi, \varphi_T].$$

Отсюда находим:

$$\begin{aligned} t^2(\varphi) &= \frac{2m}{M_1^0} \int_0^\varphi \tilde{r}^2(s) ds, \quad \varphi \in [0, \varphi_\varphi], \\ (T - t(\varphi))^2 &= \frac{2m}{M_1^0} \int_\varphi^{\varphi_T} \tilde{r}^2(s) ds, \quad \varphi \in [\varphi_\varphi, \varphi_T]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

В уравнении (2.2) независимую переменную t заменим на φ . Имеем:

$$\begin{aligned} \ddot{r}(t) \Big|_{t=t(\varphi)} &= \frac{M_1^{0^2} \alpha^2(t(\varphi))}{m^2 \tilde{r}^3(\varphi)} + \\ &+ \frac{M_1^0 \operatorname{sgn}(\varphi_\varphi - \varphi)}{m} F_1(\tilde{r}(\varphi)) - \frac{M_2^0 \operatorname{sgn}(\varphi_r - \varphi)}{m} F_2(\tilde{r}(\varphi)). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Учитывая определение функции $\tilde{r}(\cdot)$ и формулы (2.5), получим:

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) \Big|_{t=t(\varphi)} &= \frac{d\tilde{r}(\varphi(t))}{dt} \Big|_{t=t(\varphi)} = \tilde{r}'(\varphi) \dot{\varphi}(t) \Big|_{t=t(\varphi)} = \tilde{r}'(\varphi) \frac{M_1^0 \alpha(t(\varphi))}{m \tilde{r}^2(\varphi)}, \\ \ddot{r}(t) \Big|_{t=t(\varphi)} &= \frac{d^2 \tilde{r}(\varphi(t))}{dt^2} \Big|_{t=t(\varphi)} = \frac{M_1^0}{m} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\tilde{r}'(\varphi) \alpha(t(\varphi))}{\tilde{r}^2(\varphi)} \right) \dot{\varphi}(t) \Big|_{t=t(\varphi)} = \\ &= \frac{M_1^{0^2}}{m^2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\tilde{r}'(\varphi) \alpha(t(\varphi))}{\tilde{r}^2(\varphi)} \right) \frac{\alpha(t(\varphi))}{\tilde{r}^2(\varphi)} = \\ &= \frac{M_1^{0^2}}{m^2} \left(\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\tilde{r}'(\varphi)}{\tilde{r}^2(\varphi)} \right) \frac{\alpha^2(t(\varphi))}{\tilde{r}^2(\varphi)} + \frac{\tilde{r}'(\varphi)}{2\tilde{r}^4(\varphi)} \frac{d\alpha^2(t(\varphi))}{d\varphi} \right). \end{aligned}$$

Используя (2.7) и (2.8), находим:

$$\ddot{r}(t) \Big|_{t=t(\varphi)} = \frac{M_1^{0^2}}{m^2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\tilde{r}'(\varphi)}{\tilde{r}^2(\varphi)} \right) \frac{\alpha^2(t(\varphi))}{\tilde{r}^2(\varphi)} + \frac{M_1^0}{m} \operatorname{sgn}(\varphi_\varphi - \varphi) \frac{\tilde{r}'(\varphi)}{\tilde{r}^2(\varphi)}, \quad \varphi \in [0, \varphi_T].$$

В результате уравнение (2.9) примет вид:

$$2R(\varphi) \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\tilde{r}'(\varphi)}{\tilde{r}^2(\varphi)} \right) = \frac{2R(\varphi)}{\tilde{r}(\varphi)} + \operatorname{sgn}(\varphi_\varphi - \varphi) \left(F_1(\tilde{r}(\varphi)) - \frac{\tilde{r}'(\varphi)}{\tilde{r}^2(\varphi)} \right) - \operatorname{sgn}(\varphi_r - \varphi) k F_2(\tilde{r}(\varphi)),$$

где k , $R(\varphi)$ определяются формулами:

$$k = \frac{M_2^0}{M_1^0}, \quad R(\varphi) = \frac{M_1^0}{2m} \frac{\alpha^2(t(\varphi))}{\tilde{r}^2(\varphi)}, \quad \varphi \in [0, \varphi_T].$$

Используя формулы (2.7) и (2.8), имеем:

$$R(\varphi) = \frac{1}{\tilde{r}^2(\varphi)} \begin{cases} \int_0^\varphi \tilde{r}^2(s) ds, & \varphi \in [0, \varphi_\varphi], \\ \int_\varphi^{\varphi_T} \tilde{r}^2(s) ds, & \varphi \in [\varphi_\varphi, \varphi_T]. \end{cases}$$

Введем новую функцию:

$$\rho(\varphi) = \frac{\dot{\tilde{r}}(\varphi)}{\tilde{r}^2(\varphi)}, \quad \varphi \in [0, \varphi_T].$$

Из определения функций $\tilde{r}(\cdot)$, $R(\cdot)$, $\rho(\cdot)$ следует, что они удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\dot{\tilde{r}} = \tilde{r}^2 \rho, \quad (2.11)$$

$$R' = -2\tilde{r}R\rho + \operatorname{sgn}(\varphi_\varphi - \varphi), \quad (2.12)$$

$$\rho' = \frac{1}{\tilde{r}} + \frac{1}{2R} \left(\operatorname{sgn}(\varphi_\varphi - \varphi) (F_1(\tilde{r}) - \rho) - \operatorname{sgn}(\varphi_r - \varphi) k F_2(\tilde{r}) \right). \quad (2.13)$$

Из условий (2.4) следует, что $\tilde{r}(0) = r_0$, $\tilde{r}(\varphi_T) = r_T$. Из формулы (2.10) имеем $R(0) = R(\varphi_T) = 0$. Из определения функции $\rho(\cdot)$ находим:

$$\rho(0) = \lim_{\varphi \rightarrow +0} \frac{\dot{\tilde{r}}(\varphi)}{\tilde{r}^2(\varphi)} = \frac{m}{M_1^0} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\dot{r}(t)}{\alpha(t)} = \frac{m}{M_1^0} \ddot{r}(+0) = F_1(r_0) - kF_2(r_0),$$

$$\rho(\varphi_T) = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_T - 0} \frac{\dot{\tilde{r}}(\varphi)}{\tilde{r}^2(\varphi)} = \frac{m}{M_1^0} \lim_{t \rightarrow T - 0} \frac{\dot{r}(t)}{\alpha(t)} = -\frac{m}{M_1^0} \ddot{r}(T - 0) = F_1(r_T) - kF_2(r_T).$$

В результате манипулятор можно перевести из заданного начального положения равновесия в заданное конечное положение равновесия, если существуют такие значения φ_φ , φ_r , k , в которых для системы дифференциальных уравнений (2.12), (2.13) с краевыми условиями:

$$\tilde{r}(0) = r_0, \quad R(0) = 0, \quad \rho(0) = F_1(r_0) - kF_2(r_0), \quad (2.14)$$

$$\tilde{r}(\varphi_T) = r_T, \quad R(\varphi_T) = 0, \quad \rho(\varphi_T) = F_1(r_T) - kF_2(r_T), \quad (2.15)$$

соответствующая краевая задача имеет решение.

Для реализации операции одновременного по каждой координате прихода манипулятора в конечное положение равновесия требуется, чтобы отношение параметров управления соответствовало значению параметра k . Следовательно, значения релейных управлений не могут быть выбраны произвольными.

Если найдены параметры φ_φ , φ_r , k , то для определения времени перехода манипулятора из начального положения в конечное, используя равенство $T = 2t_\varphi$ и формулы (2.8), имеем:

$$\frac{1}{4}T^2 = t_\varphi^2 = \frac{2m}{M_1^0} \int_0^{\varphi_\varphi} \tilde{r}^2(s) ds = \frac{2m}{M_1^0} \int_{\varphi_\varphi}^{\varphi_T} \tilde{r}^2(s) ds.$$

Откуда получаем формулу:

$$T^2 = \frac{4m}{M_1^0} \int_0^{\varphi_T} \tilde{r}^2(s) ds.$$

3. Численное моделирование движений манипулятора. При численном решении краевой задачи (2.11)–(2.15) используем модифицированный метод стрельбы. Пусть $\tilde{r}^+(\varphi, \varphi_\varphi, \varphi_r, k)$, $R^+(\varphi, \varphi_\varphi, \varphi_r, k)$, $\rho^+(\varphi, \varphi_\varphi, \varphi_r, k)$, $\varphi \in [0, \varphi_T]$, – компоненты решения системы (2.11)–(2.13) с начальными условиями $\tilde{r}^+(0, \varphi_\varphi, \varphi_r, k) = r_0$, $R^+(0, \varphi_\varphi, \varphi_r, k) = 0$, $\rho^+(0, \varphi_\varphi, \varphi_r, k) = F_1(r_0) - kF_2(r_0)$, а $\tilde{r}^-(\varphi, \varphi_\varphi, \varphi_r, k)$, $R^-(\varphi, \varphi_\varphi, \varphi_r, k)$, $\rho^-(\varphi, \varphi_\varphi, \varphi_r, k)$, $\varphi \in [0, \varphi_T]$, – компоненты решения системы (2.11)–(2.13) с начальными условиями $\tilde{r}^-(\varphi_T, \varphi_\varphi, \varphi_r, k) = r_T$, $R^-(\varphi_T, \varphi_\varphi, \varphi_r, k) = 0$, $\rho^-(\varphi_T, \varphi_\varphi, \varphi_r, k) = F_1(r_T) - kF_2(r_T)$. Если существует решение краевой задачи (2.11)–(2.15), то определенные выше решения начальных задач Коши совпадают. При фиксированном значении параметра φ_T находим значения параметров φ_φ , φ_r , k из условий существования решения краевой задачи (2.11)–(2.15).

Рассмотрим следующие параметры манипуляционного робота: $L_1 = 5$, $L_2 = 3$, $m = 1$, $r_0 = 6.5$, $r_T = 3$. При реализации условий $0 < \varphi_r < \varphi_\varphi < \varphi_T$ система уравнений для нахождения параметров φ_φ , φ_r , k имеет вид:

$$\tilde{r}^{++}(\varphi_\varphi - 0, k) = \tilde{r}^{--}(\varphi_\varphi + 0, k),$$

$$R^{++}(\varphi_\varphi - 0, k) = R^{--}(\varphi_\varphi + 0, k),$$

$$\rho^{++}(\varphi_\varphi - 0, k) = \rho^{--}(\varphi_\varphi + 0, k).$$

Здесь $\tilde{r}^{++}(\varphi, k) = \tilde{r}^+(\varphi, \varphi_\varphi, \varphi_r, k)$, $R^{++}(\varphi, k) = R^+(\varphi, \varphi_\varphi, \varphi_r, k)$, $\rho^{++}(\varphi, k) = \rho^+(\varphi, \varphi_\varphi, \varphi_r, k)$, если $\varphi \in [0, \varphi_\varphi]$, $\tilde{r}^{--}(\varphi, k) = \tilde{r}^-(\varphi, \varphi_\varphi, \varphi_r, k)$, $R^{--}(\varphi, k) = R^-(\varphi, \varphi_\varphi, \varphi_r, k)$, $\rho^{--}(\varphi, k) = \rho^-(\varphi, \varphi_\varphi, \varphi_r, k)$, если $\varphi \in [\varphi_\varphi, \varphi_T]$.

Методом стрельбы для заданного значения φ_T находятся значения параметров φ_r, k , для которых существует такое значение φ_φ , что выполняется следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{r}^{++}(\varphi_\varphi - 0, k) - \tilde{r}^{--}(\varphi_\varphi + 0, k) \right)^2 + \left(R^{++}(\varphi_\varphi - 0, k) - R^{--}(\varphi_\varphi + 0, k) \right)^2 + \\ & + \left(\rho^{++}(\varphi_\varphi - 0, k) - \rho^{--}(\varphi_\varphi + 0, k) \right)^2 \leq \xi, \end{aligned}$$

где ξ – заданная погрешность.

При реализации условий $0 < \varphi_\varphi < \varphi_r < \varphi_T$ система уравнений для нахождения параметров $\varphi_\varphi, \varphi_r, k$ имеет вид:

$$\tilde{r}^{++}(\varphi_r - 0, k) = \tilde{r}^{--}(\varphi_r + 0, k),$$

$$R^{++}(\varphi_r - 0, k) = R^{--}(\varphi_r + 0, k),$$

$$\rho^{++}(\varphi_r - 0, k) = \rho^{--}(\varphi_r + 0, k).$$

Здесь $\tilde{r}^{++}(\varphi, k) = \tilde{r}^+(\varphi, \varphi_\varphi, \varphi_r, k)$, $R^{++}(\varphi, k) = R^+(\varphi, \varphi_\varphi, \varphi_r, k)$, $\rho^{++}(\varphi, k) = \rho^+(\varphi, \varphi_\varphi, \varphi_r, k)$, если $\varphi \in [0, \varphi_\varphi]$, $\tilde{r}^{--}(\varphi, k) = \tilde{r}^-(\varphi, \varphi_\varphi, \varphi_r, k)$, $R^{--}(\varphi, k) = R^-(\varphi, \varphi_\varphi, \varphi_r, k)$, $\rho^{--}(\varphi, k) = \rho^-(\varphi, \varphi_\varphi, \varphi_r, k)$, если $\varphi \in [\varphi_\varphi, \varphi_T]$.

Методом стрельбы для заданного значения φ_T находятся значения параметров φ_φ, k , для которых существует такое значение φ_r , что выполняется следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{r}^{++}(\varphi_r - 0, k) - \tilde{r}^{--}(\varphi_r + 0, k) \right)^2 + \left(R^{++}(\varphi_r - 0, k) - R^{--}(\varphi_r + 0, k) \right)^2 + \\ & + \left(\rho^{++}(\varphi_r - 0, k) - \rho^{--}(\varphi_r + 0, k) \right)^2 \leq \xi, \end{aligned}$$

где ξ – заданная погрешность.

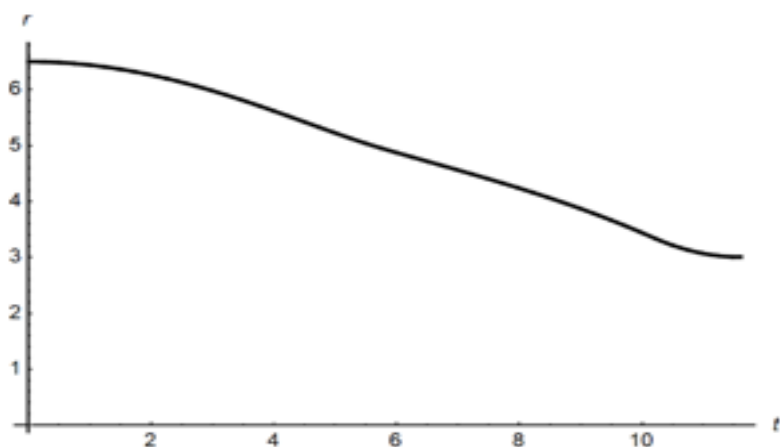
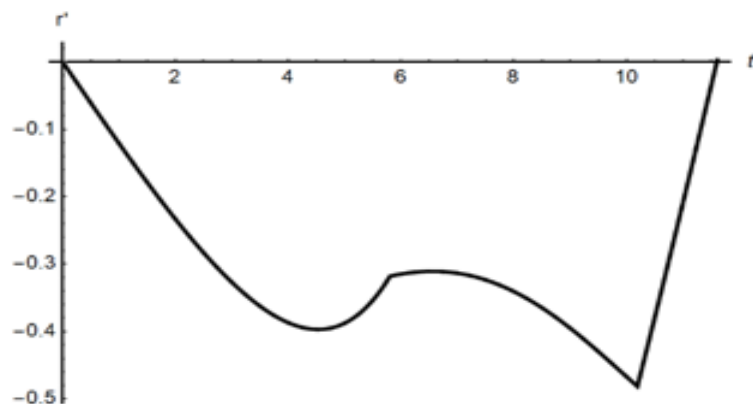
Таблица 1. Значения параметров $\varphi_\varphi, \varphi_r, k, t_r, t_\varphi, T$ при различных значениях φ_T

φ_T	k	φ_r	φ_φ	t_r	t_φ	T
0.05	9.575	0.014	0.016	0.919	0.974	1.953
0.08	5.941	0.023	0.026	1.193	1.240	2.480
0.1	4.732	0.030	0.032	1.350	1.390	2.780
0.13	3.616	0.040	0.041	1.574	1.591	3.182
0.15	3.121	0.046	0.046	1.695	1.695	3.426
0.16	2.920	0.051	0.052	1.786	1.770	3.544
0.2	2.318	0.064	0.070	2.061	1.992	3.983

Окончание таблицы 1

φ_T	k	φ_r	φ_φ	t_r	t_φ	T
0.3	1.524	0.096	0.123	2.733	2.473	4.948
0.5	0.919	0.164	0.272	4.138	3.290	6.579
0.8	0.640	0.274	0.575	6.310	4.313	8.627
1	0.579	0.352	0.804	7.661	4.883	9.764
1.2	0.559	0.431	1.041	8.854	5.351	10.698
1.3	0.561	0.470	1.158	9.355	5.541	11.084
1.5	0.582	0.543	1.400	10.200	5.806	11.613
1.7	0.637	0.600	1.647	10.682	5.847	11.694
1.9	0.744	0.618	1.885	10.635	5.580	11.159
1.95	0.754	0.641	1.949	11.104	5.619	11.245

Основные результаты численного моделирования представлены в таблице. Она показывает, что, начиная с некоторого значения φ_T , неравенство $\varphi_\varphi > \varphi_r$ сменяется на $\varphi_\varphi < \varphi_r$. С ростом параметра φ_T до значения 1.2 параметр k убывает, после чего начинает возрастать.

Рис. 3. График функции $r(t)$, $0 \leq t \leq T$.Рис. 4. График функции $r'(t)$, $0 \leq t \leq T$.

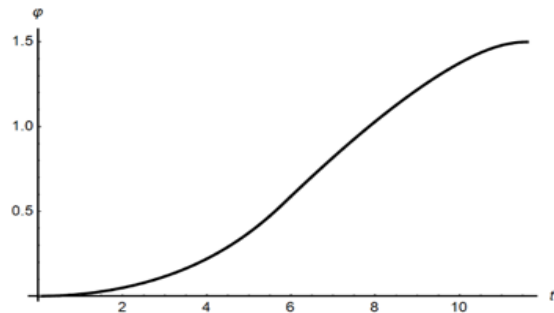
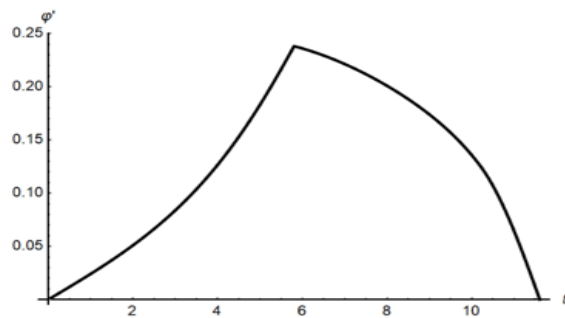
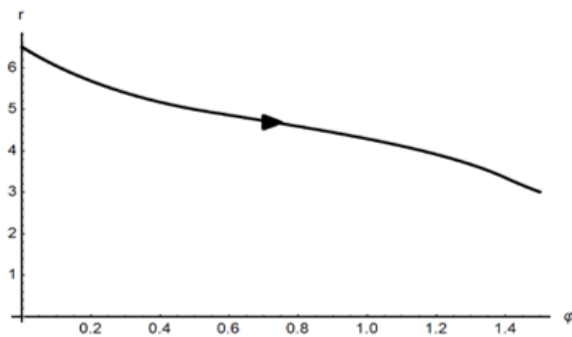
Рис. 5. График функции $\varphi(t)$, $0 \leq t \leq T$.Рис. 6. График функции $\varphi'(t)$, $0 \leq t \leq T$.

Рис. 7. Траектория схвата в полярной системе координат.

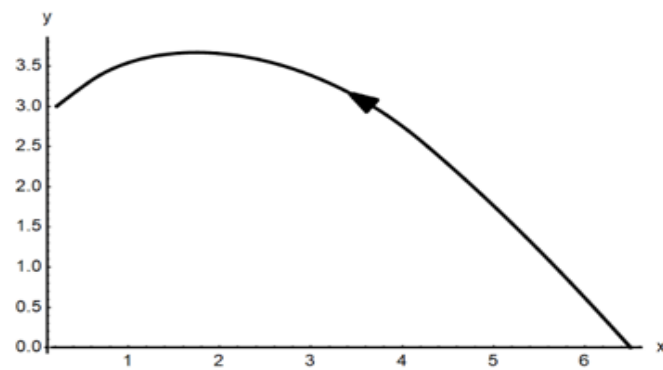


Рис. 8. Траектория схвата в декартовой системе координат.

Ниже на рис. 3–8 приведены графики компонент движения манипуляционного робота для значений параметров $\varphi_T = 1.5$, $\varphi_\varphi = 0.582$, $\varphi_r = 0.1400$, $k = 0.582$.

Заключение. Получено условие для релейных управлений, которое обеспечивает приход схвата в конечную заданную точку одновременно по обеим координатам. Предложен метод нахождения точек переключения релейных управлений для указанного случая движения манипуляционного робота. Метод может быть использован также, когда времена прихода схвата в заданную конечную точку по разным координатам не совпадают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.
2. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 416 с.
3. Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
4. Долгий Ю.Ф., Чупин И.А. Импульсные управления двухзвенным манипуляционным роботом // Изв. Института математики и информатики Удмуртского государственного ун-та. 2021. № 57. С. 77–90.
5. Чупин И.А. Нахождение импульсных управлений для многозвенных манипуляционных роботов // Вестн. Бурятского государственного ун-та. Математика. Информатика. 2023. № 4. С. 53–65.
6. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
7. Куценок Л.Б., Лутманов С.В. Решение задачи предельного быстрогодействия управления движением плоского двухзвенного манипулятора // Вестн. Пермского ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2014. № 3 (26). С. 28–33.
8. Болотник Н.Н., Каплунов А.А. Оптимизация управления и конфигураций двухзвенного манипулятора // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 4. С. 144–150.
9. Meier E.B., Bryson A.E. Efficient Algorithm for Time-optimal of a Two-link Manipulator // J. Guidance, Control and Dynamics. 1990. V. 13. Iss. 5. P. 859–866.
10. Аветисян В.В. Оптимальное по быстродействию управление перемещением схвата двухзвенного манипулятора с учетом типа конечной конфигурации // Аи Т. 2021. № 2. С. 3–15.
11. Загороднев М.Ю., Афанасьев А.Ю. Оптимальное управление движением двухзвенного манипулятора с моментными двигателями // Вестн. Казанского государственного ун-та им. А. М. Туполева. 2014. № 1. С. 104–108.
12. Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления // ЖВМ и МФ. 1962. Т. 2. № 6. С. 1132–1139.
13. Любушин А.А. О применении метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления // ЖВМ и МФ. 1982. Т. 22. № 1. С. 30–35.
14. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы. Динамика, управление, оптимизация. М.: Наука, 1989. 368 с.
15. Dolgii Yu.F., Chupin I.A. Optimal Control of Manipulator // The Bulletin of Irkutsk University. Series Mathematics. 2023. V. 43. P. 3–18.
16. Решмин С.А. Синтез управления двухзвенным манипулятором // Изв. РАН. ТиСУ. 1997. № 2. С. 146–150.