

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

# ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ



НАУКА  
— 1727 —

# СОДЕРЖАНИЕ

---

Номер 5, 2024

---

## УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

Методы решения граничных задач для нелинейных управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений в классе кусочно-постоянных управлений

*А. Н. Квитко*

3

## ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

Сопоставление линейного и обобщенного фильтров Калмана целого и дробного порядков для оценки состояния и параметров дискретных дробных динамических систем

*О. С. Амосов, С. Г. Амосова*

24

## УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Метод Кротова последовательных глобальных улучшений и его приложение к задаче максимизации вероятности попадания в заданную область

*М. М. Хрусталева, К. А. Царьков*

38

Стабилизация линейного управляемого выхода автономной стохастической дифференциальной системы на бесконечном горизонте

*А. В. Босов*

55

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Исключение активных фазовых ограничений в задачах оптимального управления

*А. С. Бортакровский*

68

## СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Декомпозиционный алгоритм в нелинейной транспортной задаче со складами

*В. В. Лобанцов, А. П. Тизик, В. И. Цурков*

90

Интервальные соотношения паритета для обнаружения дефектов в дискретных стационарных динамических системах

*А. Н. Жирабок, В. В. Зувев*

114

## ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

Выбор методов кластеризации при машинном обучении для исследования экологических объектов по спутниковым данным

*В. Е. Воробьев, А. Б. Мурынин, А. А. Рихтер*

126

Позиционирование крупногабаритных объектов методами компьютерного зрения

*В. В. Лопатина*

138

## СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

Управление частотами вращения роторов турбореактивных двухконтурных двигателей двухдвигательного самолета с целью обеспечения балансировки их тяги в полете

*А. Ю. Бурова, Н. Ю. Кочетков, В. А. Нестеров, К. И. Сытало*

149

Исследования и оптимизация этапа снижения самолетов гражданской авиации в задаче вертикальной навигации

*А. А. Голубева, Н. В. Куланов*

160

# CONTENTS

---

Number 5, 2024

---

## MANAGEMENT IN DETERMINISTIC SYSTEMS

Methods for solving a boundary value problem for nonlinear controlled systems of ordinary differential equations in the class of piecewise constant controls

*A. N. Kvitko*

3

---

## INFORMATION PROCESSING AND IDENTIFICATION

Comparison of linear and extended Kalman filters of integer and fractional orders for estimation the state and parameters of discrete fractional dynamic systems

*O. S. Amosov, S. G. Amosova*

24

---

## MANAGEMENT IN STOCHASTIC SYSTEMS AND UNDER CONDITIONS OF UNCERTAINTY

Krotov global sequential improvement method as applied to the problem of maximizing the probability of getting into a given area

*M. M. Khrustalev, K. A. Tsarkov*

38

Stabilization of the Linear Controlled Output of an Autonomous Stochastic Differential System on an Infinite Horizon

*A. V. Bosov*

55

---

## OPTIMAL MANAGEMENT

Elimination of active phase constraints in optimal control problems

*A. S. Bortakovskii*

68

---

## SYSTEM ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH

Decomposition algorithm in a nonlinear transport problem with storage

*V. V. Lobantsov, A. P. Tizik, V. I. Tsurkov*

90

Interval parity relations for fault diagnosis in discrete-time stationary dynamic systems

*A. Zhiraboka, A. Zuev*

114

---

## ARTIFICIAL INTELLIGENCE

Choice of clustering methods in machine learning for the study of ecological objects based on satellite data

*V. E. Vorobyov, A. B. Murynin, A. A. Richter*

126

Positioning of large objects by computer vision methods

*V. V. Lopatinaa*

138

---

## CONTROL SYSTEMS FOR MOVING OBJECTS

Control of rotor speeds of turbojet twin-circuit engines of a twin-engine airplane in order to balance their thrust in flight

*A. Yu. Burova, N. Yu Kochetkov, V. A. Nesterov, K. I. Sypalo*

149

Research and optimization of the descent phase of civil aviation aircraft in the vertical navigation problem

*A. A. Golubeva, N. V. Kulanov*

160

УДК 531.36

## МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КЛАССЕ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ УПРАВЛЕНИЙ

© 2024 г. А. Н. Квитко<sup>a, \*</sup>

<sup>a</sup>Санкт-Петербургский государственный ун-т. Санкт-Петербург, Россия

\*e-mail: [alkvit46@mail.ru](mailto:alkvit46@mail.ru)

[a.kvitko@spbu.ru](mailto:a.kvitko@spbu.ru)

Поступила в редакцию 17.10.2022 г.

После доработки 15.07.2024 г.

Принята к публикации 16.10.2024 г.

Разработаны алгоритмы решения локальных и глобальных граничных задач для нелинейных и квазилинейных нестационарных управляемых систем в классе кусочно-постоянных управлений. Найлены конструктивные достаточные условия, гарантирующие существование решений указанных задач. Кроме того, получен критерий калмановского типа локальной и глобальной управляемости соответственно нелинейных и квазилинейных стационарных систем. Работоспособность алгоритмов иллюстрируется при численном моделировании решения задачи управления движением маятника переменной длины с движущейся точкой подвеса.

*Ключевые слова:* дискретное управление, граничные условия, стабилизация

DOI: 10.31857/S0002338824050012, EDN: TEQZLV

## METHODS FOR SOLVING A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR CONTROLLED SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE CLASS OF PIECEWISE CONSTANT CONTROLS

A. N. Kvitko<sup>a, \*</sup>

<sup>a</sup>St. Petersburg State University, St. Petersburg

\*e-mail: [alkvit46@mail.ru](mailto:alkvit46@mail.ru)

[a.kvitko@spbu.ru](mailto:a.kvitko@spbu.ru)

Algorithms for solving local and global boundary value problems for nonlinear and quasilinear nonstationary control systems in the class of piecewise constant controls are developed. Constructive sufficient conditions are found that guarantee the existence of solutions to these problems. In addition, a Kalmantype criterion for local and global controllability of nonlinear and quasilinear stationary systems, respectively, is obtained. The performance of the algorithms is illustrated by numerical simulation of the solution to the problem of controlling the motion of a robotic manipulator.

*Keywords:* discrete control, boundary conditions, stabilization

**Введение.** Среди задач математической теории управления важное теоретическое и практическое значение имеют вопросы построения кусочно-постоянных (дискретных) управляющих функций, обеспечивающих перевод систем обыкновенных дифференциальных уравнений из начального состояния в заданное конечное состояние. Такие задачи относятся к типу граничных задач для управляемых систем. Актуальность проблемы граничных задач в классе кусочно-постоянных управлений обусловлена использованием вычислительной техники при формировании



управляющего сигнала и простотой его реализации. Отдельный интерес представляют задачи стабилизации систем в классе дискретных управлений, которые можно рассматривать как граничные задачи на бесконечном промежутке времени. Исследования граничных задач в классе дискретных управлений включают в себя направления, связанные с формулировкой необходимых и достаточных условий локальной и глобальной управляемости линейных и нелинейных систем [1–16]; с оценкой и изучением области конечных состояний, для которых возможен заданный перевод [3, 4, 9, 10, 12–16], а также с разработкой точных или приближенных методов нахождения искомых управляющих функций и соответствующих им функций фазовых координат [1, 4, 6–8, 10–16]. В настоящее время граничные задачи достаточно хорошо изучены для линейных и нелинейных систем специального вида. Однако теория решения граничных задач для нелинейных систем общего вида еще недостаточно разработана и трудности по ее созданию велики. Основные усилия автора направлены на создание достаточно простых для численной реализации и устойчивых к погрешностям вычислений алгоритмов решения локальных и глобальных граничных задач для широкого класса нелинейных и квазилинейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с учетом дискретности управляющего сигнала, а также нахождение конструктивных достаточных условий и критериев, гарантирующих существование решений указанных задач. Поставленная цель достигнута сведением исходной задачи к задаче стабилизации линейной нестационарной системы специального вида и последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Результаты данной статьи являются обобщением результатов, полученных в работах [15, 16], на случай нелинейных и квазилинейных нестационарных систем с нестационарными возмущениями. При доказательстве теоремы 1 применяется подход, предложенный в [15]. Суть его в том, что применяется разложение в ряд Тейлора правой части исходной системы в окрестности точки, соответствующей нулевым значениям фазовых координат и управления, а также замена независимой переменной. После этой замены новая независимая переменная изменяется на полупрямой от нуля до бесконечности. К преобразованной системе присоединяется система дифференциальных уравнений относительно исходной управляющей функции. Ее правая часть равна вспомогательной управляющей функции. На следующем этапе осуществляется ряд преобразований сдвига фазовых координат с исчезающими на бесконечности слагаемыми сдвига. В результате получаем вспомогательную систему. После этого находится вспомогательное управление, стабилизирующее линейную часть вспомогательной системы. На заключительном этапе решается задача Коши для вспомогательной системы, замкнутой стабилизирующим управлением, и осуществляется переход к исходным зависимым и независимым переменным. При реализации этого подхода для нестационарной системы с нестационарным возмущением приходится использовать разложение правой части исходной системы в окрестности точки, соответствующей нулевым значениям фазовых координат, управления и момента времени, равного единице. Это приводит к тому, что вспомогательная система имеет более сложный вид. После анализа ее правой части были найдены условия (1.5) и (1.6), отличные от условия калмановского типа из [15], гарантирующие справедливость теоремы 1. Данные условия являются обобщением результата, найденного в [16] в случае, когда в системе, описывающей объект управления, учитываются нестационарные возмущения. Новизна результата теоремы 2 состоит в доказательстве достаточности условий, приведенных в теореме 1, для глобальной управляемости квазилинейной системы. В разд. 4 рассматривается частный случай системы из разд. 3. В доказательстве следствия 1 показано, что для глобальной разрешимости поставленных задач необходимо и достаточно выполнение условия Калмана для ее стационарной линейной части. В разд. 5 исследовались задачи, аналогичные тем, которые рассматривались в [15] в классе дискретных управляющих функций, непрерывно дифференцируемых по конечному состоянию и параметру. В следствии 2 доказано, что условие калмановского типа из [15] служит критерием локальной разрешимости поставленных задач. Эффективность алгоритма, разработанного в разд. 1, иллюстрируется на модельном примере.

**1. Постановка задач и формулировка теоремы.** В работе изучается управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x, u, t) + \mu F(t), \quad (1.1)$$

где

$$x = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad x \in R^n; \quad u = (u_1, \dots, u_r)^T, \quad u \in R^r, \quad r \leq n, \quad t \in [0, 1], \quad \mu \in R^1;$$

$$f \in C^{4n-1}(R^n \times R^r \times R^1; R^n), \quad f = (f_1, \dots, f_n)^T, \quad F \in C^{4n-1}([0, 1]; R^n), \quad F = (F_1, \dots, F_n)^T. \quad (1.2)$$

Здесь  $F(t)$  – возмущающее воздействие,  $\mu$  – параметр, который используется для ограничения возмущения  $F(t)$  и компактности формулировки теоремы, приведенной ниже. Пусть

$$f(0, 0, t) \equiv 0. \quad (1.3)$$

Рассмотрим матрицы

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 1), \quad B_0 = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0, 1), \quad S_0 = \{B_0, A_0 B_0, \dots, A_0^{n-1} B_0\}, \\ A_i &= \frac{(-1)^i}{i!} \frac{\partial^{i+1} f}{\partial x \partial t^i}(0, 0, 1), \quad B_i = \frac{(-1)^i}{i!} \frac{\partial^{i+1} f}{\partial u \partial t^i}(0, 0, 1), \quad i = \overline{1, n-1}, \\ A(t) &= \sum_{i=1}^n (1-t)^i A_{i-1}, \quad B(t) = \sum_{i=1}^n (1-t)^i B_{i-1}, \\ S(t) &= (L_1(t), L_2(t), \dots, L_n(t)), \end{aligned}$$

где  $L_1(t) = B(t)$ ,  $L_i(t) = A(t)L_{i-1}(t) - (1-t)dL_{i-1}/dt$ ,  $i = \overline{2, n}$ .

Предположим, что выполнены условия

$$\text{rank } S_0 = n, \quad (1.4)$$

$$\text{rank } S(t) = n, \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (1.5)$$

На управление  $u$  наложено ограничение

$$\|u\| < N, \quad N > 0. \quad (1.6)$$

Рассмотрим бесконечное разбиение интервала  $[0, 1]$  точками  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < 1$ , где  $t_k \rightarrow 1$  при  $k \rightarrow \infty$ .

**О п р е д е л е н и е 1.** Функцию  $u(t) = u_k$ ,  $u_k \in R^r$ ,  $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , будем называть дискретной управляющей функцией. Пусть  $\bar{x} \in R^n$ ,  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)^T$ , – фиксированное состояние.

**З а д а ч а 1.** Найти дискретное управление  $u(t)$ , заданное на бесконечном разбиении интервала  $[0, 1]$ , и абсолютно непрерывную функцию  $x(t)$ , почти всюду удовлетворяющую системе (1.1) и условиям:

$$x(0) = \bar{x}, \quad x(1) = 0, \quad \bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)^T. \quad (1.7)$$

**З а д а ч а 2.** Определить дискретное управление  $u(t)$ , полученное на некотором конечном разбиении  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < 1$  интервала  $[0, 1]$ , и абсолютно непрерывную функцию  $x(t)$ , заданную на интервале  $[0, t_m]$ , почти всюду удовлетворяющую системе (1.1) и условиям:

$$x(0) = \bar{x}, \quad \|x(t_m)\| \leq \varepsilon_1, \quad 1 - t_m < \varepsilon_2. \quad (1.8)$$

В (1.8) величина  $t_m$  – заранее неизвестный момент времени,  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$  – произвольные фиксированные числа. Пары функций  $x(t)$ ,  $u(t)$ , указанные в постановках задач 1 и 2, будем называть соответственно решениями задач 1 и 2.

**Т е о р е м а 1.** Пусть для правой части системы (1.1) выполнены условия (1.2)–(1.5). Тогда существуют  $\varepsilon > 0$ ,  $\mu_0 > 0$ , такие, что  $\forall \bar{x} \in R^n$ ,  $\forall \mu \in \mathbb{R}^1$ :  $\|\bar{x}\| < \varepsilon$ ,  $|\mu| < \mu_0$  имеются решения задач 1 и 2, которые могут быть получены после решения задачи стабилизации линейной нестационарной системы специального вида и последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

## 2. Доказательство теоремы 1 и вспомогательной леммы.

**Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.** Рассмотрим задачу: найти дискретное управление  $u(t)$  и абсолютно непрерывную функцию  $x(t)$ , почти всюду удовлетворяющую системе (1.1) и условиям:

$$x(0) = \bar{x}, \quad x(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 1. \quad (2.1)$$

Указанную пару функций будем называть решением задачи (1.1), (2.1).

**З а м е ч а н и е 1.** Переходя к пределу в решении задачи (1.1), (2.1) при  $t \rightarrow 1$ , получим функции  $x(t), u(t)$ , удовлетворяющие системе (1.1) и условиям (1.7), т. е. эта пара является решением задачи 1. Для решения задачи (1.1), (2.1) сделаем в системе (1.1) преобразование независимой переменной  $t$  на  $\tau$ :

$$t = 1 - e^{-\alpha\tau}, \tau \in [0, +\infty), \quad (2.2)$$

где  $\alpha > 0$  — некоторое фиксированное число, подлежащее определению. В новой независимой переменной  $\tau$  система (1.1) примет следующий вид:

$$\frac{dc}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} f(c, d, \tau) + \alpha e^{-\alpha\tau} \mu \bar{F}(\tau), \quad (2.3)$$

$$c(\tau) = x(t(\tau)), d(\tau) = u(t(\tau)), \tau \in [0, +\infty); c = (c_1, \dots, c_n)^T,$$

$$d = (d_1, \dots, d_r)^T, \bar{F}(\tau) = F(t(\tau)). \quad (2.4)$$

Введем в рассмотрение дискретное управление  $\bar{d}(\tau) = d(kh)$ ,  $\tau \in [kh, (k+1)h)$ ,  $k = 0, 1, \dots$

**З а д а ч а 3.** Найти абсолютно непрерывную функцию  $c(\tau)$  и дискретное управление  $\bar{d}(\tau)$  почти всюду удовлетворяющие системе (2.3) и условиям:

$$c(0) = \bar{x}, c(\tau) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

Указанную пару функций будем называть решением задачи (2.3), (2.5).

**З а м е ч а н и е 2.** Нетрудно видеть, что, имея решение задачи (2.3), (2.5), с помощью формул (2.2) и (2.4) легко получить решение задачи (1.1), (2.1). Для удобства дальнейших рассуждений введем обозначения:

$$|k| = \sum_{i=1}^n k_i, |m| = \sum_{i=1}^r m_i, k! = k_1! \dots k_n!, m! = m_1! \dots m_r!$$

Если, используя (1.2), (1.3), разложить правую часть системы (1.1) в ряд Тейлора в окрестности точки  $(0, 0, 1)$  и перейти к новой независимой переменной по формулам (2.2) и (2.4), то систему (2.3) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dc_i}{d\tau} = & \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} (0, 0, 1) c_j + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^r \frac{\partial f_i}{\partial u_j} (0, 0, 1) d_j + \\ & + \frac{1}{2} \alpha e^{-\alpha\tau} \left[ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} (0, 0, 1) c_j c_k + 2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial u_k} (0, 0, 1) c_j d_k + \right. \\ & + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial u_k} (0, 0, 1) d_j d_k - \\ & - 2e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial x_j} (0, 0, 1) c_j - 2e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^r \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial u_j} (0, 0, 1) d_j \left. \right] + \dots + \\ & + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|+l=4n-2} \frac{1}{k!m!l!} \frac{\partial^{|k|+|m|+l} f_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \partial u_2^{m_2} \dots \partial u_r^{m_r} \partial t^l} (0, 0, 1) c_1^{k_1} c_2^{k_2} \dots \\ & \cdot c_n^{k_n} d_1^{m_1} d_2^{m_2} \dots d_r^{m_r} (-1)^l e^{-l\alpha\tau} + \\ & + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|+l=4n-1} \frac{1}{k!m!l!} \frac{\partial^{|k|+|m|+l} f_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \partial u_2^{m_2} \dots \partial u_r^{m_r} \partial t^l} (\tilde{c}, \tilde{d}, \tilde{t}(\tau)) c_1^{k_1} c_2^{k_2} \dots \\ & \cdot c_n^{k_n} d_1^{m_1} d_2^{m_2} \dots d_r^{m_r} (-1)^l e^{-l\alpha\tau} + \mu \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{k=0}^{4n-2} \frac{1}{k!} \frac{d^k F_i(1)}{dt^k} (-1)^k e^{-k\alpha\tau} + \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\tilde{c} = \theta_i c, \tilde{d} = \theta_i u, \tilde{t}(\tau) = 1 - \theta_i e^{-\alpha\tau}; \theta_i \in [0, 1], i = \overline{1, n}.$$

При разложении в ряд Тейлора выбирается точка  $t = 1$ , поскольку при  $t = 1$  искомое решение должно удовлетворять условию (1.7). Ниже все рассуждения будем проводить с учетом предположения, что область изменения  $c(\tau)$  и  $\mu$  ограничена неравенствами

$$\|c(\tau)\| < C_1, \tau \in [0, \infty), |\mu| \leq \mu_1, \mu_1 < 0. \quad (2.7)$$

Выполним  $4n - 1$  преобразований сдвигов функций  $c_i(\tau)$ :  $c_i(\tau) \rightarrow c_i^{(4n-1)}(\tau)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , подобные тем, что были использованы в соответствующих формулах (15), (18), (21) из [15] с учетом правой части системы (2.6). Если сгруппировать слагаемые правой части полученной системы и присоединить систему  $dd(\tau)/d\tau = v$ , то будем иметь аналог вспомогательной системы (27) и начальных данных (23), (28), приведенных в работе [15]:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{c}^{(4n-1)}}{d\tau} &= \bar{P}\bar{c}^{(4n-1)} + \bar{Q}v + \bar{R}_1(c^{(4n-1)}, d, \mu, \tau) + \bar{R}_2(c^{(4n-1)}, d, \mu, \tau) \\ &\quad + \bar{R}_4(c^{(4n-1)}, d, \mu, \tau), \quad \bar{c}^{(4n-1)} = (c^{(4n-1)}, d)_{n+r \times 1}^T, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_1 &= (R_1^1, \dots, R_1^n, 0, \dots, 0)_{n+r \times 1}^T, \quad \bar{R}_2 = (R_2^1, \dots, R_2^n, 0, \dots, 0)_{n+r \times 1}^T, \\ \bar{R}_3 &= (R_3^1, \dots, R_3^n, 0, \dots, 0)_{n+r \times 1}^T, \quad \bar{R}_4 = (R_4^1, \dots, R_4^n, 0, \dots, 0)_{n+r \times 1}^T, \end{aligned}$$

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} P & Q \\ O_1 & O_2 \end{pmatrix}_{n+r \times n+r}, \quad \bar{Q} = \begin{pmatrix} O_3 \\ E \end{pmatrix}_{n+r \times r},$$

$$\bar{c}^{(4n-1)}(0, \bar{x}, \mu) = \bar{c}_0^{(4n-1)}, \quad \bar{c}_0^{(4n-1)} = (c^{(4n-1)}(0, \bar{x}, \mu), 0, \dots, 0)_{n+r \times 1}^T, \quad (2.9)$$

где  $O_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , – матрицы с нулевыми элементами соответствующих размерностей,  $E$  – единичная матрица,

$$P(\tau, \mu, \alpha) = \alpha(e^{-\alpha\tau} A_0 + e^{-2\alpha\tau} A_1 + \dots + e^{-n\alpha\tau} A_{n-1} + e^{-2\alpha\tau} \bar{A}_1(\mu) + \dots + e^{-n\alpha\tau} \bar{A}_{n-1}(\mu)), \quad (2.10)$$

$$Q(\tau, \mu, \alpha) = \alpha(e^{-\alpha\tau} B_0 + e^{-2\alpha\tau} B_1 + \dots + e^{-n\alpha\tau} B_{n-1} + e^{-2\alpha\tau} \bar{B}_1(\mu) + \dots + e^{-n\alpha\tau} \bar{B}_{n-1}(\mu)),$$

$$\|\bar{A}_i(\mu)\| \rightarrow 0, \|\bar{B}_j(\mu)\| \rightarrow 0 \text{ при } |\mu| \rightarrow 0, i = \overline{2, n-1}, j = \overline{1, n-1}, \quad (2.11)$$

$$c^{(4n-1)}(\tau) = c(\tau) + \mu e^{-\alpha\tau} F(1) - e^{-2\alpha\tau} \varphi^{(2)}(\mu) - \varphi^{(3)}(\mu) - \dots - e^{-(4n-1)\alpha\tau} \varphi^{(4n-1)}(\mu), \quad (2.12)$$

$$c^{(4n-1)}(0, \bar{x}, \mu) = \bar{x} + \mu F(1) - \varphi^{(2)}(\mu) - \varphi^{(3)}(\mu) - \dots - \varphi^{(4n-1)}(\mu), \quad (2.13)$$

$$\varphi^{(i)} = (\varphi_1^{(i)}, \dots, \varphi_n^{(i)})^T, i = \overline{1, 4n-1}, \varphi^{(i)}(0) = 0.$$

Рассмотрим задачу: найти пару дифференцируемых функций  $\bar{c}^{(4n-1)}(\tau)$ ,  $v(\tau)$ , удовлетворяющую системе (2.8) и условиям:

$$\bar{c}^{(4n-1)}(0) = \bar{c}_0^{(4n-1)}, \bar{c}^{(4n-1)}(\tau, \mu) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow \infty \quad (2.14)$$

Указанную пару будем называть решением задачи (2.8), (2.14).

Из (2.12) следует существование констант  $C_2 > 0 : C_2 < C_1$ ,  $\mu_2 : 0 < \mu_2 < \mu_1$ , таких, что при всех  $c^{(4n-1)}$ ,  $\mu$ , удовлетворяющих неравенствам

$$\|c^{(4n-1)}\| < C_2, |\mu| < \mu_2, \quad (2.15)$$

будут выполнены условия (2.7). Рассмотрим систему

$$\frac{d\bar{c}^{(4n-1)}}{d\tau} = \bar{P}\bar{c}^{(4n-1)} + \bar{Q}v. \quad (2.16)$$

Продолжение доказательства теоремы 1 будет опираться на утверждение леммы.

**Л е м м а.** Пусть для системы (1.1) выполнены условия (1.2)–(1.5). Тогда  $\exists \mu_3 : 0 < \mu_3 < \mu_2$ , такое, что  $\forall \mu : |\mu| < \mu_3$  существует вспомогательное управление  $v(\tau)$  вида

$$v(\tau, \alpha, \mu) = M(\tau, \alpha, \mu) \bar{c}^{(4n-1)}, \quad (2.17)$$

$$\|M(\tau, \alpha, \mu)\| = O(e^{n\alpha\tau}), \tau \rightarrow \infty,$$

обеспечивающее экспоненциальное убывание фундаментальной матрицы системы (2.16), (2.17). Далее пусть  $\Phi(\tau), \Phi(0) = E$  — фундаментальная матрица системы (2.16), замкнутой управлением (2.17). Тогда справедливы оценки:

$$\|\Phi(\tau)\| \leq Ke^{-\lambda\tau}, \lambda > 0, \|\Phi(\tau)\Phi^{-1}(t)\| \leq Ke^{-\lambda(\tau-t)}e^{(n-1)\alpha t}, \tau \in [0, \infty), K > 0.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Введем в рассмотрение матрицы  $S_1, S_2, S_3$ , где  $S_1$  состоит из столбцов матриц  $\bar{L}_1(\tau), \bar{L}_2(\tau), \dots, \bar{L}_n(\tau)$ . Здесь

$$\bar{L}_1(\tau) = Q(\tau), \bar{L}_i(\tau) = P(\tau)\bar{L}_{i-1}(\tau) - \frac{d\bar{L}_{i-1}}{d\tau}, i = \overline{2, n},$$

$S_2$  состоит из столбцов матриц  $\bar{\bar{L}}_1(\tau), \bar{\bar{L}}_2(\tau), \dots, \bar{\bar{L}}_n(\tau)$ , где

$$\bar{\bar{L}}_1(\tau) = \bar{\bar{Q}}(\tau), \bar{\bar{L}}_i(\tau) = \bar{\bar{P}}(\tau)\bar{\bar{L}}_{i-1}(\tau) - \frac{d\bar{\bar{L}}_{i-1}}{d\tau}, i = \overline{2, n},$$

$$\bar{\bar{P}} = \alpha(e^{-\alpha\tau}A_0 + e^{-2\alpha\tau}A_1 + \dots + e^{-n\alpha\tau}A_{n-1}),$$

$$\bar{\bar{Q}} = \alpha(e^{-\alpha\tau}B_0 + e^{-2\alpha\tau}B_1 + \dots + e^{-n\alpha\tau}B_{n-1}),$$

$S_3$  состоит из столбцов  $\bar{\bar{\bar{L}}}_1(\tau), \bar{\bar{\bar{L}}}_2(\tau), \dots, \bar{\bar{\bar{L}}}_n(\tau)$  матриц

$$\bar{\bar{\bar{L}}}_1(\tau) = \bar{\bar{\bar{Q}}}(\tau), \bar{\bar{\bar{L}}}_i(\tau) = \bar{\bar{\bar{P}}}(\tau)\bar{\bar{\bar{L}}}_{i-1}(\tau) - \frac{d\bar{\bar{\bar{L}}}_{i-1}}{d\tau}, i = \overline{2, n+r}.$$

Условия (1.2), (2.10) и (2.11) гарантируют, существование  $\mu_3 : |\mu_3| < |\mu_2|$ , такого, что  $\forall \mu : |\mu| < \mu_3$  верно равенство  $\text{rank } S_1(\tau) = \text{rank } S_2(\tau) \quad \forall \tau \in [0, \infty)$ . Согласно (1.5), в указанной области изменения параметра  $\mu$  имеем равенство

$$\text{rank } S_2(\tau) = n \quad \forall \tau \in [0, \infty).$$

С другой стороны, из структуры матрицы  $S_3$  и последнего равенства следует выполнение условия

$$\text{rank } S_2(\tau) = n + r \quad \forall \tau \in [0, \infty), \forall \mu : |\mu| < \mu_3.$$

Продолжение доказательства совпадает с доказательством леммы, приведенной в [16]. В данной работе содержится алгоритм построения искомой матрицы  $M(\tau)$ . Лемма доказана.

Система (2.8), замкнутая управлением (2.17), имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{c}^{(4n-1)}}{d\tau} &= C\bar{c}^{(4n-1)} + \bar{R}_1(c^{(4n-1)}, d, \mu, \tau) + \bar{R}_2(c^{(4n-1)}, d, \mu, \tau) + \\ &+ \bar{R}_3(c^{(4n-1)}, d, \mu, \tau) + \bar{R}_4(c^{(4n-1)}, d, \mu, \tau), \\ C &= \bar{P} + \bar{Q}M. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Дальнейшее доказательство теоремы 1 и его завершение совпадает с доказательством теоремы из работы [15] с учетом замены  $c^{(4n)}(\tau)$  на  $c^{(4n-1)}(\tau)$ ,  $F$  на  $\mu$  и области (29) на область (2.15). Теорема доказана.

Алгоритм решения поставленных задач сводится к следующим этапам.

1. Построение вспомогательной системы (2.8) выполняется аналитическими методами и реализуется средствами компьютерной алгебры.

2. Решение задачи стабилизации системы (2.16) посредством вспомогательного управления  $v(\tau, \mu)$ . В результате получим искомый закон вспомогательного управления в виде обратной связи  $v(\tau, \mu) = M(\tau)\bar{c}^{(4n-1)}(\tau, \mu)$ . Выполняется аналитическими методами и реализуется средствами компьютерной алгебры.

3. Решение задачи Коши для системы (2.18) с начальными данными (2.9), (2.13), замкнутой найденным в п. 2 вспомогательным синтезирующим управлением. Результатом является функция  $\bar{c}^{(4n-1)}(\tau)$ . Выполняется численными методами.

4. Нахождение функции  $v(\tau, \mu) = M(\tau)\bar{c}^{(4n-1)}(\tau)$ . Реализуется численными методами.

5. Нахождение функции  $\bar{v}(t) = v(\tau(t))$  с использованием формулы (2.2), а также определение точек разбиения  $t_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , промежутка  $[0, 1]$  по формуле  $t_k = 1 - e^{-\alpha k h}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Выполняется численными методами.

6. Решение задачи Коши для системы

$$\dot{x} = f(x, \bar{u}(t), t) + \mu F(t),$$

$$\dot{u} = \alpha^{-1}(1-t)^{-1}\bar{v}(t)$$

с начальными данными  $x(0) = \bar{x}$ ,  $u(0) = 0$ , где  $\bar{u}(t) = u(t_k) \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , на промежутке  $[0, 1]$ . В результате получаем искомые функции  $x(t), u(t)$ , которые являются решением задачи 1. Для решения задачи 2 находим сужения функций  $x(t), u(t)$  на промежутки  $[0, t_m]$ , где момент  $t_m$  находится из условий (1.8). Выполняется численными методами.

**З а м е ч а н и е 3.** Разработанный метод построения управляющей функции позволяет переводить широкий класс нелинейных систем из начального состояния в начало координат на конечном промежутке времени даже тогда, когда указанный перевод на бесконечном промежутке невозможен.

Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2 + F, \dot{x}_2 = u, F \neq 0 - \text{const.}$$

Для этой системы выполнены условия (1.4). Используя результат, полученный при доказательстве теоремы 1, найдем дискретное управление, обеспечивающее ее перевод в начало координат на конечном промежутке времени. С другой стороны, если  $x_1(t) \rightarrow 0$ ,  $x_2(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  (т. е. система переводится в начало координат на бесконечном промежутке времени), то будем иметь  $\dot{x}_1(t) \rightarrow F \neq 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . В результате получили противоречие с условием  $x_1(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

**3. Решение глобальной граничной задачи для квазилинейной нестационарной системы в классе кусочно-постоянных управлений.** Объектом исследования является управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + F(t) + \mu f(x, u, t), \quad (3.1)$$

где

$$x = (x_1, \dots, x_n)^T, x \in R^n; u = (u_1, \dots, u_r)^T, u \in R^r, r \leq n, t \in [0, 1], \mu \in R^1,$$

$$f \in C^{4n-1}(R^n \times R^r \times R^1; R^n), f = (f_1, \dots, f_n)^T, F(t) \in C^{4n-1}([0, 1]; R^n), F = (F_1, \dots, F_n)^T, \quad (3.2)$$

$$A(t) = \{a_{ij}(t)\}, i, j = \overline{1, n}, B(t) = \{b_{ij}(t)\}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, r}, \quad (3.3)$$

$$a_{ij}(t) \in C^n([0, 1], R), b_{ij}(t) \in C^n([0, 1], R), \quad (3.4)$$

$$\text{rank}(B(1), A(1)B(1), \dots, A^{n-1}(1)B(1)) = n.$$

Введем обозначения:

$$A_i = \frac{(-1)^i}{i!} \frac{d^i A}{dt^i}(1), B_i = \frac{(-1)^i}{i!} \frac{d^i B}{dt^i}(1), i = \overline{1, n-1},$$

$$\bar{A}(t) = \sum_{i=1}^n (1-t)^i A_{i-1}, \bar{B}(t) = \sum_{i=1}^n (1-t)^i B_{i-1}, A_0 = A(1), B_0 = B(1).$$

Пусть

$$\text{rank}(L_1(t), \dots, L_n(t)) = n \quad \forall t \in [0, 1], \quad (3.5)$$

где  $L_1(t) = \bar{B}(t)$ ,  $L_i = \bar{A}(t)L_{i-1}(t) - dL_{i-1}(t)/dt$ ,  $i = \overline{2, n}$ .



Рассмотрим задачи 1 и 2 для системы (3.1). Их решения будем называть решениями задач (1.5), (3.1) и (1.6), (3.1).

**Т е о р е м а 2.** Пусть для системы (3.1) выполнены условия (3.2)–(3.5). Тогда  $\forall \bar{x} \in R^n \exists \mu_0(\bar{x}) > 0$ , такое, что для всех  $\mu : |\mu| < \mu_0$  существуют решения задач (1.7), (3.1) и (1.8), (3.1). Указанные решения могут быть найдены при помощи алгоритмов, полученных в разд. 2.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В соответствии с подходом, изложенным при доказательстве теоремы 1, используя (3.2), (3.3), построим аналог системы (2.6) для задачи (1.7), (3.1). Аналог системы (2.6) вынесен в Приложение. Если выполнить  $4n - 1$  преобразований сдвига  $c_i \rightarrow c_i^{(4n-1)}$ , описанных выше в разд. 2, сгруппировать соответствующим образом слагаемые правой части полученной системы подобно тому, как при построении системы (2.8), и присоединить к системе уравнения  $dd(\tau)/d\tau = v$ , то найдем аналог системы (2.8) и начальных данных (2.9), (2.13):

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{c}^{(4n-1)}}{d\tau} &= \bar{P}\bar{c}^{(4n-1)} + \bar{Q}v + \bar{R}_1(c^{(4n-1)}, \tau) + \bar{R}_2(d, \tau) + \bar{R}_3(c^{(4n-1)}, d, \mu, \tau) + \\ &+ \bar{R}_4(c^{(4n-1)}, d, \mu, \tau) + \\ &+ \bar{R}_5(c^{(4n-1)}, d, \mu, \tau) + \bar{R}_6(c^{(4n-1)}, d, \mu, \tau) + \bar{R}_7(\tau), \\ \bar{c}^{(4n-1)} &= (c^{(4n-1)}, d)_{n+r \times 1}^T, \\ \bar{R}_1 &= (\bar{R}_1^1, \dots, \bar{R}_1^n, 0, \dots, 0)_{n+r \times 1}^T, \bar{R}_2 = (\bar{R}_2^1, \dots, \bar{R}_2^n, 0, \dots, 0)_{n+r \times 1}^T, \bar{R}_3 = (\bar{R}_3^1, \dots, \bar{R}_3^n, 0, \dots, 0)_{n+r \times 1}^T, \\ \bar{R}_4 &= (\bar{R}_4^1, \dots, \bar{R}_4^n, 0, \dots, 0)_{n+r \times 1}^T, \bar{R}_5 = (\bar{R}_5^1, \dots, \bar{R}_5^n, 0, \dots, 0)_{n+r \times 1}^T, \bar{R}_6 = (\bar{R}_6^1, \dots, \bar{R}_6^n, 0, \dots, 0)_{n+r \times 1}^T, \\ \bar{R}_7 &= (\bar{R}_7^1, \dots, \bar{R}_7^n, 0, \dots, 0)_{n+r \times 1}^T, \\ \bar{P} &= \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ O_1 & O_2 \end{pmatrix}_{n+r \times n+r}, \bar{Q} = \begin{pmatrix} O_3 \\ E \end{pmatrix}_{n+r \times r}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\bar{c}^{(4n-1)}(0, \bar{x}, \mu) = \bar{c}_0^{(4n-1)}, \quad \bar{c}_0^{(4n-1)} = (c^{(4n-1)}(0, \bar{x}, \mu), 0, \dots, 0)^T,$$

$$\begin{aligned} c^{(4n-1)}(0, \bar{x}, \mu) &= \bar{x} + \varphi(F(1), F^{(1)}(1), \dots, F^{(4n-2)}(1)) - \phi^{(1)}(\mu) - \phi^{(2)}(\mu) - \dots - \phi^{(4n-1)}(\mu), \\ \phi^{(i)} &= (\phi_1^{(i)}, \dots, \phi_n^{(i)})^T, \phi^{(i)}(0) = 0, i = \overline{1, 4n-1}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{A}(\mu) &= \alpha(e^{-\alpha\tau} A_0 + e^{-2\alpha\tau} A_1 + \dots + e^{-n\alpha\tau} A_{n-1} + e^{-2\alpha\tau} \bar{A}_1(\mu) + \dots + e^{-n\alpha\tau} \bar{A}_{n-1}(\mu)), \\ \bar{B}(\mu) &= \alpha(e^{-\alpha\tau} B_0 + e^{-2\alpha\tau} B_1 + \dots + e^{-n\alpha\tau} B_{n-1} + e^{-2\alpha\tau} \bar{B}_1(\mu) + \dots + e^{-n\alpha\tau} \bar{B}_{n-1}(\mu)). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Кроме того,

$$\bar{A}_i \rightarrow 0, \bar{B}_i \rightarrow 0 \text{ при } \mu \rightarrow 0, i = \overline{1, n-1}. \quad (3.9)$$

Выражение  $\bar{R}_1^i$  состоит из слагаемых, линейно зависящих от компонент вектора  $c^{(4n-1)}$ , не содержащих параметр  $\mu$ , и с коэффициентами  $e^{-i\alpha\tau}$ ,  $i \geq n+1$ ;  $\bar{R}_2^i$  имеет аналогичные слагаемые, линейно зависящие от компонент вектора  $d$ ; в  $\bar{R}_3^i$  входят слагаемые, линейно зависящие от компонент вектора  $c^{(4n-1)}$  с коэффициентами  $e^{-i\alpha\tau}$ ,  $i \geq n+1$ , и содержащие параметр  $\mu$ ;  $\bar{R}_4^i$  состоит из аналогичных слагаемых, линейно зависящих от компонент вектора  $d$ ;  $\bar{R}_5^i$  — из слагаемых, нелинейных по компонентам векторов  $c^{(4n-1)}$  и  $d$ ;  $\bar{R}_6^i$  — из слагаемых, не содержащих степеней компонент  $c^{(4n-1)}$ ,  $d$  и имеющих параметр  $\mu$ ;  $\bar{R}_7^i$  является суммой слагаемых, не содержащих степеней компонент векторов  $c^{(4n-1)}$ ,  $d$  и параметр  $\mu$ . Из определения функций  $\bar{R}_1$ ,  $\bar{R}_2$  и  $\bar{R}_7$  следуют оценки:

$$\|\bar{R}_1(c^{(4n-1)}, \tau)\| \leq L_1 e^{-(n+1)\alpha\tau} \|\bar{c}^{(4n-1)}\|, \tau \in [0, \infty), \forall \bar{c}^{(4n-1)} \in R^{n+r}, \tau \in [0, \infty), L_1 > 0,$$

$$\|\bar{\bar{R}}_2(d, \tau)\| \leq L_2 e^{-(n+1)\alpha\tau} \|\bar{\bar{c}}^{(4n-1)}\|, \tau \in [0, \infty), \forall \bar{\bar{c}}^{(4n-1)} \in R^{n+r}, \tau \in [0, \infty), L_2 > 0, \quad (3.10)$$

$$\|\bar{\bar{R}}_7(\tau)\| \leq L_3 e^{-4n\alpha\tau}, \tau \in [0, \infty), L_3 > 0.$$

Введем в рассмотрение систему (2.16) с учетом замены  $\bar{P}$  на  $\bar{P}$  и  $\bar{Q}$  на  $\bar{\bar{Q}}$ . Из условий (3.3)–(3.5), (3.8), (3.9) и утверждения леммы, сформулированной в разд. 2, следует существование  $\mu_4 > 0$ , такого, что для всех  $\mu$  из области  $|\mu| \leq \mu_4$  существует вспомогательное управление  $v(\tau)$  вида  $v(\tau, \mu) = \bar{M}(\tau, \mu) \bar{\bar{c}}^{(4n-1)}$ ,  $\|\bar{M}(\tau)\| = O(e^{n\alpha\tau})$  при  $\tau \rightarrow \infty$ , гарантирующее оценки (49) из [15] для соответствующей фундаментальной матрицы. Если указанную фундаментальную матрицу обозначить  $\Phi_1(\tau)$ , то эти оценки имеют вид

$$\|\Phi_1(\tau)\| \leq K e^{-\lambda\tau}, \|\Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)\| \leq K e^{-\lambda(\tau-t)} e^{(n-1)\alpha t}, \lambda > 0.$$

Рассмотрим систему (3.6), замкнутую вспомогательной управляющей функцией:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\bar{c}}^{(4n-1)}}{d\tau} &= C(\tau) \bar{\bar{c}}^{(4n-1)} + \bar{\bar{R}}_1(c^{(4n-1)}, \tau) + \bar{\bar{R}}_2(d, \tau) + \bar{\bar{R}}_3(c^{(4n-1)}, d, \mu, \tau) + \\ &+ \bar{\bar{R}}_4(c^{(4n-1)}, d, \mu, \tau) + \\ &+ \bar{\bar{R}}_5(c^{(4n-1)}, d, \mu, \tau) + \bar{\bar{R}}_6(c^{(4n-1)}, d, \mu, \tau) + \bar{\bar{R}}_7(\tau), C(\tau) = \bar{P} + \bar{\bar{Q}} \bar{M}(\tau). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Выполним в системе (3.11) замену (51) из работы [15] с учетом замены  $\bar{\bar{c}}^{(4n)}$  на  $\bar{\bar{c}}^{(4n-1)}$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= D(\tau)z + e^{n\alpha\tau} (\bar{\bar{R}}_1(e^{-n\alpha\tau} z_1, \tau) + \bar{\bar{R}}_2(e^{-n\alpha\tau} z_2, \tau) + \bar{\bar{R}}_3(z e^{-n\alpha\tau}, \mu, \tau) + \\ &+ \bar{\bar{R}}_4(z e^{-n\alpha\tau}, \mu, \tau) + \bar{\bar{R}}_5(z e^{-n\alpha\tau}, \mu, \tau) + \bar{\bar{R}}_6(z e^{-n\alpha\tau}, \mu, \tau) + \bar{\bar{R}}_7(\tau)), \\ D(\tau) &= C(\tau) + n\alpha E, c^{(4n-1)} = e^{-n\alpha\tau} z_1, d = e^{-n\alpha\tau} z_2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Наряду с (3.12) рассмотрим систему

$$\frac{dz}{d\tau} = D(\tau)z + e^{n\alpha\tau} (\bar{\bar{R}}_1(e^{-n\alpha\tau} z_1, \tau) + \bar{\bar{R}}_2(e^{-n\alpha\tau} z_2, \tau) + \bar{\bar{R}}_7(\tau)). \quad (3.13)$$

Пусть  $\Phi_2(\tau), \Phi_2(0) = E$ , — фундаментальная матрица системы  $dz/d\tau = D(\tau)z$ . Из оценок матрицы  $\Phi_1(\tau)$  и формулы (51) из [15] следует

$$\|\Phi_2(\tau)\| \leq K e^{-\beta\tau}, \beta = \lambda - n\alpha, \|\Phi_2(\tau)\Phi_2^{-1}(t)\| \leq K e^{-\beta(\tau-t)} e^{(n-1)\alpha t}, \tau \in [0, \infty), K > 0.$$

Выберем  $\alpha > 0$  так, чтобы было выполнено условие  $\beta = \lambda - n\alpha > 0$ . Решение системы (3.13) с начальными данными (3.6), (3.7) можно записать в виде

$$\begin{aligned} z(\tau, \mu) &= \Phi_2(\tau) \Phi_2^{-1}(\tau_1) z(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau} \Phi_2(\tau) \Phi_2^{-1}(t) e^{n\alpha t} (\bar{\bar{R}}_1 + \bar{\bar{R}}_2 + \bar{\bar{R}}_7) dt, \\ \tau &\in [\tau_1, \infty), \\ z(\tau, \mu) &= \Phi_2(\tau) \bar{\bar{c}}_0^{(4n-1)}(\bar{x}, \mu) + \int_0^{\tau} \Phi_2(\tau) \Phi_2^{-1}(t) e^{n\alpha t} (\bar{\bar{R}}_1 + \bar{\bar{R}}_2 + \bar{\bar{R}}_7) dt, \\ \tau &\in [0, \tau_1]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Из (3.14), оценки матрицы  $\Phi_2(\tau)$ , выбора  $\alpha > 0$  и неравенств (3.10)  $\forall z \in R^{n+r}$  имеем

$$\|z(\tau, \mu)\| \leq K_1 e^{-\beta(\tau-\tau_1)} \|z(\tau_1, \mu)\| + \int_{\tau_1}^{\tau} K e^{-\beta(\tau-t)} (L_4 e^{-\alpha t} \|z\| + L_3 e^{-2n\alpha t}) dt,$$



$$\begin{aligned}\tau &\in [\tau_1, \infty), \\ \|z(\tau, \mu)\| &\leq Ke^{-\beta\tau} \left\| \bar{c}_0^{(4n-1)}(\bar{x}, \mu) \right\| + \int_0^\tau Ke^{-\beta(\tau-t)} (L_4 e^{-\alpha\tau} \|z\| + L_3 e^{-2n\alpha\tau}) dt, \\ \tau &\in [\tau, \tau_1), L_4 = L_1 + L_2, K_1 = K \left\| \Phi_2^{-1}(\tau_1) \right\|.\end{aligned}$$

Применяя к последним двум неравенствам известную лемму [17, с. 184], получим

$$\begin{aligned}\|z(\tau, \mu)\| &\leq K_1 e^{-\bar{\mu}\tau} \|z(\tau_1, \mu)\| + \int_{\tau_1}^\tau KL_3 e^{-\bar{\mu}(\tau-t)} e^{-2n\alpha t} dt, \bar{\mu} = \beta - e^{-\alpha\tau_1} KL_4, \\ \tau &\in [\tau_1, \infty), \\ \|z(\tau, \mu)\| &\leq Ke^{-\bar{\mu}\tau} \left\| \bar{c}^{(4n-1)}(0, \bar{x}, \mu) \right\| + \int_0^\tau KL_3 e^{-\bar{\mu}(\tau-t)} e^{-2n\alpha t} dt, \bar{\mu} = \beta - KL_4 \\ \tau &\in [0, \tau_1].\end{aligned}\tag{3.15}$$

Воспользовавшись (3.15) и условием  $\beta > 0$ , зафиксируем  $\tau_1 > 0$  так, чтобы было выполнено условие  $\bar{\mu} > 0$ . После вычисления интегралов во вторых слагаемых правой части оценок (3.15) нетрудно видеть, что при фиксированных  $\alpha > 0, \tau_1 > 0$  решение системы (3.13) с начальными данными (3.6), (3.7) для всех  $\tau \geq \tau_1$  экспоненциально убывает. Пусть

$$\gamma(\bar{x}) = \max_{\tau \in [0, \tau_1], |\mu| \leq \mu_4} (Ke^{-\bar{\mu}\tau} \left\| \bar{c}_0^{(4n-1)}(0, \bar{x}, \mu) \right\| + \int_0^{\tau_1} KL_3 e^{-\bar{\mu}(\tau-t)} e^{-2n\alpha t} dt).$$

Введем в рассмотрение множество  $\Omega : \Omega = \{z, \mu, \tau \mid \|z\| \leq 3\gamma, |\mu| \leq \mu_4, \tau \in [0, \infty)\}$ . Выполним в слагаемых  $\bar{R}_3, \bar{R}_4, \bar{R}_5, \bar{R}_6$  замены  $c^{(4n-1)} = z_1 e^{-n\alpha\tau}, d = z_2 e^{-n\alpha\tau}, z_1 \in R^n, z_2 \in R^r$ . Тогда в области  $\Omega$  запишем следующие оценки:

$$\begin{aligned}e^{n\alpha\tau} \left\| \bar{R}_3(e^{-n\alpha\tau} z_1, e^{-n\alpha\tau} z_2, \mu, \tau) \right\| &\leq \mu L_5 e^{-(n+1)\alpha\tau} \|z\|, \tau \in [0, \infty), L_5 > 0, \\ e^{n\alpha\tau} \left\| \bar{R}_4(e^{-n\alpha\tau} z_1, e^{-n\alpha\tau} z_2, \mu, \tau) \right\| &\leq \mu L_6 e^{-(n+1)\alpha\tau} \|z\|, \tau \in [0, \infty), L_6 > 0,\end{aligned}\tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}e^{n\alpha\tau} \left\| \bar{R}_5(e^{-n\alpha\tau} z_1, e^{-n\alpha\tau} z_2, \mu, \tau) \right\| &\leq \mu L_7 e^{-(n+1)\alpha\tau} (\|z_1\|^2 + \|z_2\|^2) \leq \mu L_8 e^{-(n+1)\alpha\tau} \|z\|, \\ \tau &\in [0, \infty), L_9 > 0, \\ e^{n\alpha\tau} \left\| \bar{R}_6(e^{-n\alpha\tau} z_1, e^{-n\alpha\tau} z_2, \mu, \tau) \right\| &\leq \mu L_9 e^{-3n\alpha\tau}, \tau \in [0, \infty), L_9 > 0.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Вернемся к системе (3.12). Ее решение с начальными данными (3.6), (3.7) имеет вид

$$\begin{aligned}z(\tau, \mu) &= \Phi_2(\tau) \Phi_2^{-1}(\tau_1) z(\tau_1) + \\ &+ \int_{\tau_1}^\tau \Phi_2(\tau) \Phi_2^{-1}(t) e^{n\alpha\tau} (\bar{R}_1 + \bar{R}_2 + \bar{R}_3 + \bar{R}_4 + \bar{R}_5 + \bar{R}_6 + \bar{R}_7) dt, \\ \tau &\in [\tau_1, \infty), \\ z(\tau, \mu) &= \Phi_2(\tau) \bar{c}_0^{(4n-1)}(0, \bar{x}, \mu) +\end{aligned}\tag{3.18}$$

$$+ \int_0^{\tau} \Phi_2(\tau) \Phi_2^{-1}(t) e^{n\alpha\tau} (\bar{R}_1 + \bar{R}_2 + \bar{R}_3 + \bar{R}_4 + \bar{R}_5 + \bar{R}_6 + \bar{R}_7) dt,$$

$$\tau \in [0, \tau_1].$$

В (3.18) величина  $\tau_1$  определена выше. Равенства (3.18) с учетом (3.14)–(3.17) в области  $\Omega$  дают такие оценки:

$$\|z(\tau, \mu)\| \leq K_1 e^{-\beta(\tau-\tau_1)} \|z(\tau_1, \mu)\| + \int_{\tau_1}^{\tau} K e^{-\beta(\tau-t)} (L_{10} e^{-\alpha t} \|z\| + L_{11} e^{-2n\alpha t}) dt,$$

$$\tau \in [\tau_1, \infty),$$

$$\|z(\tau, \mu)\| \leq K e^{-\beta\tau} \|\bar{c}_0^{(4n-1)}(0, \bar{x}, \mu)\| + \int_0^{\tau} K e^{-\beta(\tau-t)} (L_{10} e^{-\alpha t} \|z\| + L_{11} e^{-2n\alpha t}) dt,$$

$$\tau \in [0, \tau_1], K_1 = K \|\Phi_2^{-1}(\tau_1)\|.$$
(3.19)

Здесь  $L_{10} = L_4 + \mu L_5 + \mu L_6 + \mu L_8$ ,  $L_{11} = L_3 + \mu L_9$ .

Из (3.19) по аналогии с (3.15) в области  $\Omega$  получим

$$\|z(\tau, \mu)\| \leq K_1 e^{-\tilde{\mu}\tau} \|z(\tau_1)\| + \int_{\tau_1}^{\tau} K L_{11} e^{-\tilde{\mu}(\tau-t)} e^{-2n\alpha t} dt, \tilde{\mu} = \beta - e^{-\alpha\tau_1} K L_{10},$$

$$\tau \in [\tau_1, \infty),$$

$$\|z(\tau, \mu)\| \leq K e^{-\tilde{\mu}\tau} \|\bar{c}^{(4n-1)}(0, \bar{x}, \mu)\| + \int_0^{\tau} K L_{11} e^{-\tilde{\mu}(\tau-t)} e^{-2n\alpha t} dt, \tilde{\mu} = \beta - K L_{10},$$

$$\tau \in [0, \tau_1].$$
(3.20)

После вычисления интегралов в правых частях (3.20) запишем:

$$\|z(\tau, \mu)\| \leq K_1 e^{-\tilde{\mu}(\tau-\tau_1)} \|z(\tau_1)\| + \bar{K}_2 e^{-2n\alpha\tau}, \tau \in [\tau_1, \infty),$$
(3.21)

$$\|z(\tau, \mu)\| \leq \bar{K}_3 \|\bar{c}^{(4n-1)}(0, \bar{x}, \mu)\| + \bar{K}_4, \tau \in [0, \tau_1], \bar{K}_i > 0, i = \overline{1, 4}.$$
(3.22)

В силу определения констант  $\beta, \tau_1, \bar{\mu}, \bar{\mu}, L_3, L_4, \gamma(\bar{x}), L_{10}, L_{11}, \tilde{\mu}, \tilde{\mu}$  с учетом (3.6), (3.7), (3.15)–(3.17), (3.20)–(3.22), нетрудно видеть, что можно найти  $\mu_5(\bar{x}) : 0 < \mu_5 < \mu_4$ , такое, что для всех  $\mu$  из области

$$0 < |\mu| < \mu_5(\bar{x})$$
(3.23)

константа  $\tilde{\mu}$  и функция  $z(\tau, \mu)$  удовлетворяют неравенствам:

$$\tilde{\mu} > 0, \|z(\tau, \mu)\| \leq 2\gamma, \tau \in [0, \tau_1], \|z(\tau, \mu)\| \leq \|z(\tau_1, \mu)\| \forall \tau \in [\tau_1, \infty).$$
(3.24)

Кроме того,  $z(\tau, \bar{x}, \mu)$  с момента  $\tau_1$  будет экспоненциально убывать со скоростью не ниже  $e^{-2n\alpha\tau}$ . Учитывая (3.21) и (3.22), можно подобрать константу  $\tilde{K} > 0$ , такую, что  $\|z(\tau, \mu)\| \leq \tilde{K} e^{-2n\alpha\tau} \|\bar{c}^{(4n-1)}(0, \bar{x}, \mu)\|, \tau \in [0, \infty)$ .

Возвращаясь в этом неравенстве к исходной переменной  $\bar{c}^{(4n-1)}$ , получим

$$\|\bar{c}^{(4n-1)}(\tau, \mu)\| \leq \tilde{K} e^{-3n\alpha\tau} \|\bar{c}^{(4n-1)}(0, \bar{x}, \mu)\|, \tau \in [0, \infty).$$
(3.25)

Рассмотрим систему (3.6), замкнутую вспомогательным управлением, которое фигурирует в системе (3.11) при условии, что в правую часть ее первых  $n$  уравнений подставлена функция  $\bar{d}(\tau) = d(kh), \tau \in [kh, (k+1)h]$ . Ее можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{c}^{(4n-1)}}{d\tau} = & C(\tau)\bar{c}^{(4n-1)} + \tilde{Q}(\bar{d} - d) + \bar{R}_1(c^{(4n-1)}, \tau) + \bar{R}_2(d, \tau) + (\bar{R}_2(\bar{d}, \tau) - \bar{R}_2(d, \tau)) + \\
& + \bar{R}_3(c^{(4n-1)}, \bar{d}, \mu, \tau) + \bar{R}_4(c^{(4n-1)}, d, \mu, \tau) + (\bar{R}_4(c^{(4n-1)}, \bar{d}, \mu, \tau) - \bar{R}_4(c^{(4n-1)}, d, \mu, \tau)) + \\
& + \bar{R}_5(c^{(4n-1)}, d, \mu, \tau) + (\bar{R}_5(c^{(4n-1)}, \bar{d}, \mu, \tau) - \bar{R}_5(c^{(4n-1)}, d, \mu, \tau)) + \bar{R}_6(c^{(4n-1)}, \bar{d}, \mu, \tau) + \\
& + \bar{R}_7(\tau), \tilde{Q} = (\bar{B}, E)^T.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Ниже все рассуждения будем приводить при условии, что параметр  $\mu$  принадлежит области (3.23). Используя (2.17), уравнение (25) из [15], (3.2), (3.25) и теорему о среднем, в области  $\Omega$  получим аналоги оценок (66) из [15]:

$$\begin{aligned}
\|\bar{d} - d\| &\leq K_3 h e^{-2n\alpha\tau}, \tau \in [kh, (k+1)h], K_3 > 0, k = 0, 1, \dots, \\
\|\bar{R}_2(\bar{d}, \tau) - \bar{R}_2(d, \tau)\| &\leq K_4 h e^{-2n\alpha\tau}, \tau \in [kh, (k+1)h], K_4 > 0, k = 0, 1, \dots, \\
\|\bar{R}_4(c^{(4n-1)}, \bar{d}, \mu, \tau) - \bar{R}_2(c^{(4n-1)}, d, \mu, \tau)\| &\leq \mu K_5 h e^{-2n\alpha\tau}, \\
\tau \in [kh, (k+1)h], K_4 > 0, k = 0, 1, \dots, \\
\|\bar{R}_5(c^{(4n-1)}, \bar{d}, \mu, \tau) - \bar{R}_5(c^{(4n-1)}, d, \mu, \tau)\| &\leq \mu K_6 h e^{-2n\alpha\tau}, \\
\tau \in [kh, (k+1)h], K_6 > 0, k = 0, 1, \dots
\end{aligned} \tag{3.27}$$

В (3.27) константы  $K_3, K_4, K_5, K_6$  не зависят от номера  $k$ . Выполним в системе (3.26) замену переменной, которая была выполнена при построении системы (3.12). Система (3.26) примет вид

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{d\tau} = & D(\tau)z + e^{n\alpha\tau}(\tilde{Q}(\bar{d} - d) + \bar{R}_1(z_1 e^{-n\alpha\tau}, \tau) + \bar{R}_2(z_2 e^{-n\alpha\tau}, \tau) + \\
& + (\bar{R}_2(\bar{d}, \tau) - \bar{R}_2(d, \tau)) + \bar{R}_3(z_1 e^{-n\alpha\tau}, \bar{d}, \mu, \tau) + \bar{R}_4(z_1 e^{-n\alpha\tau}, z_2 e^{-n\alpha\tau}, \mu, \tau) + \\
& + (\bar{R}_4(z_1 e^{-n\alpha\tau}, \bar{d}, \mu, \tau) - \bar{R}_4(z_1 e^{-n\alpha\tau}, z_2 e^{-n\alpha\tau}, \mu, \tau)) + \bar{R}_5(z_1 e^{-n\alpha\tau}, z_2 e^{-n\alpha\tau}, \mu, \tau) + \\
& + (\bar{R}_5(z_1 e^{-n\alpha\tau}, \bar{d}, \mu, \tau) - \bar{R}_5(z_1 e^{-n\alpha\tau}, d, \mu, \tau)) + \bar{R}_6(z_1 e^{-n\alpha\tau}, \bar{d}, \mu, \tau) + \bar{R}_7(\tau)), \\
\tilde{Q} = & (\bar{B}, E)^T.
\end{aligned}$$

Из оценки нормы матриц  $\Phi_2(\tau), \Phi_2(\tau)\Phi_2^{-1}(t)$ , условий (3.19) и (3.25)–(3.27) следует, что для ее решения с начальными данными (3.6), (3.7), принадлежащего области  $\Omega$  (с учетом замены  $\mu_4$  на  $\mu_5$ ), будем иметь

$$\begin{aligned}
\|z(\tau, \mu)\| &\leq K_1 e^{-\beta(\tau-\tau_1)} \|z(\tau_1, \mu)\| + \int_{\tau_1}^{\tau} K e^{-\beta(\tau-t)} (L_{10} e^{-\alpha t} \|z\| + L_{11} e^{-2n\alpha t} + e^{-\alpha t} K_7 h) dt, \\
\tau &\in [\tau_1, \infty), \\
\|z(\tau, \mu)\| &\leq K e^{-\beta\tau} \|\bar{c}_0^{(4n-1)}(0, \bar{x}, \mu)\| + \int_0^{\tau} K e^{-\beta(\tau-t)} (L_{10} e^{-\alpha t} \|z\| + L_{11} e^{-2n\alpha t} + e^{-\alpha t} K_7 h) dt, \\
\tau &\in [0, \tau_1], K_1 = K \|\Phi_2^{-1}(\tau_1)\|, K_7 = K_3 + K_4 + \mu K_5 + \mu K_6.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

В свою очередь если к (3.28) применить известную лемму [17.с. 184], то по аналогии с оценками (3.20) области  $\Omega$  (при замене  $\mu_4$  на  $\mu_5$ ) получим

$$\|z(\tau, \mu)\| \leq K_1 e^{-\bar{\mu}\tau} \|z(\tau_1, \mu)\| + \int_{\tau_1}^{\tau} K e^{-\bar{\mu}(\tau-t)} (e^{-2\alpha t} L_{11} + K_7 h e^{-\alpha t}) dt, \tag{3.29}$$

$$\tilde{\mu} = \beta - e^{-\alpha\tau_1} KL_{10}, \tau \in [\tau_1, \infty),$$

$$\|z(\tau, \mu)\| \leq Ke^{-\tilde{\mu}\tau} \left\| \bar{c}^{(4n-1)}(0, \bar{x}, \mu) \right\| + \int_0^\tau Ke^{-\tilde{\mu}(\tau-t)} (e^{-2\alpha t} L_{11} + K_7 h e^{-\alpha t}) dt,$$

$$\tilde{\mu} = \beta - KL_{10}, \tau \in [0, \tau_1].$$

После вычисления интегралов во вторых слагаемых правых частей последних двух неравенств с учетом (3.20)–(3.24) в указанной области будем иметь

$$\|z(\tau, \mu)\| \leq K_1 e^{-\bar{\mu}_1(\tau-\tau_1)} \|z(\tau_1)\| + \bar{K}_2 e^{-2\alpha\tau} + \bar{K}_5 h e^{-\alpha\tau}, \tau \in [\tau_1, \infty), \quad (3.30)$$

$$\|z(\tau, \mu)\| \leq \bar{K}_3 \|c^{(4n-1)}(0, \bar{x}, \mu)\| + \bar{K}_4 + \bar{K}_6 h, \tau \in [0, \tau_1], \bar{K}_i > 0, i = \overline{1, 5}. \quad (3.31)$$

Выберем  $h > 0$  так, чтобы

$$\bar{K}_6 h < \gamma(\bar{x}). \quad (3.32)$$

Из условий (3.21)–(3.24), (3.30)–(3.32) следует, что для всех  $\mu$  из области (3.23) функция  $z(\tau)$  экспоненциально убывает и принадлежит области  $\Omega$ . После подстановки функции  $z(\tau)$  в формулу (51) из [15] получим известную функцию  $\bar{c}^{(4n-1)}(\tau) = (c^{(4n-1)}(\tau), d(\tau))^T$ . Ее последние  $r$  компонент дают известную функцию  $d(\tau)$ . Далее находим функцию  $\bar{d}(\tau)$ . Если подставить  $c^{(4n-1)}(\tau)$  в аналоги формул (15), (18), (21) из [15], то получим пару функций  $c(\tau)$  и  $\bar{d}(\tau)$ , которая почти всюду удовлетворяет системе, приведенной ниже в Приложении, и условиям (2.5). Отсюда следует, что указанная пара является решением задачи 3. После замены независимой переменной  $\tau$  на  $t$  в функциях  $c(\tau)$  и  $\bar{d}(\tau)$  по формулам (2.2), (2.4) будем иметь пару функций  $x(t)$ ,  $u(t)$ , которая будет решением задачи (2.1), (3.1). Соответствующие точки разбиения  $t_k$  промежутка  $[0, 1]$  находятся по формуле  $t_k = 1 - e^{-\alpha k h}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Используя предельный переход в функциях  $x(t)$ ,  $u(t)$  при  $t \rightarrow 1$ , получим решение задачи 1 для системы (3.1). Сужение функций  $x(t)$ ,  $u(t)$  на промежуток  $[0, t_m]$ , где момент  $t_m$  находится из условий (1.8), дает решение задачи 2. В качестве величины  $\mu_0(\bar{x})$ , которая фигурирует в формулировке теоремы 2, достаточно положить  $\mu_0(\bar{x}) = \mu_5(\bar{x})$ . Теорема 2 доказана.

Алгоритмы решения задач 1 и 2 содержатся в разд. 2.

**4. Случай квазилинейной системы со стационарной линейной частью.** Объектом исследования является система

$$\dot{x} = Ax + Bu + \mu f(x, u, t), \quad (4.1)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,  $x \in R^n$ ;  $u = (u_1, \dots, u_r)^T$ ,  $u \in R^r$ ,  $r \leq n$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $\mu \in R^1$ ,  $A_{n \times n}$ ,  $B_{n \times r}$  – постоянные матрицы:

$$r \leq n, f = (f_1, \dots, f_n)^T. \quad (4.2)$$

Пусть,  $S = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ ,

$$\text{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n, \quad (4.3)$$

$$\exists L > 0 : \|f(x, u, t)\| \leq L \forall (x, u, t) \in R^n \times R^r \times [0, 1]. \quad (4.4)$$

Рассмотрим задачи 1 и 2 для системы (4.1).

**О п р е д е л е н и е 2.** Будем говорить, что задачи 1 и 2 для системы (4.1) глобально разрешимы, если  $\forall \bar{x} \in R^n \exists \mu_0(\bar{x}) > 0$ , такое, что  $\forall \mu : |\mu| < \mu_0$  существует решение задач 1 и 2.

**С л е д с т в и е 1.** Пусть для системы (4.1) выполнены условия (4.2), (4.4). Тогда для глобальной разрешимости задач 1 и 2 необходимо и достаточно, чтобы было верно условие (4.3).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Справедливость достаточности условия (4.3) и алгоритм построения искомого управления следуют из (4.2) и доказательства теоремы 2.

**Необходимость.** Пусть условие (4.3) не выполнено. Предположим противное, т. е.  $\forall \bar{x} \in R^n \exists \mu_0(\bar{x}) > 0$ , такое, что  $\forall \mu : |\mu| < \mu_0$  существует решение задачи 1. Выполним в системе (4.1) замену независимой переменной  $t$  по формуле (2.2). Тогда  $\forall \mu : |\mu| < \mu_0(\bar{x})$  существует

абсолютно непрерывная функция  $c(\tau)$  и дискретное управление  $\bar{d}(\tau)$ , почти всюду удовлетворяющие системе

$$\frac{dc}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} Ax + \alpha e^{-\alpha\tau} B\bar{d} + \alpha e^{-\alpha\tau} \mu f(c, \bar{d}, t(\tau)) \quad (4.5)$$

и условиям (2.5). Предположим, что  $\text{rank } S = k, k < n$ . Пусть  $b_j, j = \overline{1, r}$ , есть  $j$ -й столбец матрицы  $B$ . Введем в рассмотрение матрицу

$$S_1 = \{b_1, Ab_1, \dots, A^{k_1-1}b_1, \dots, b_r, \dots, A^{k_r-1}b_r, l_{k+1}, \dots, l_n\}_{n \times n}.$$

Здесь  $k_j, j = \overline{1, r}$  — максимальное количество столбцов вида  $b_j, \dots, A^{k_j-1}b_j$ , таких, что векторы  $b_1, Ab_1, \dots, A^{k_1-1}b_1, \dots, b_r, Ab_r, \dots, A^{k_r-1}b_r$  линейно независимы, а векторы  $l_j, j = \overline{k+1, n}$ , выбраны так, что  $\text{rank } S_1 = n$ . Выполним в (4.5) замену  $c = S_1 y$ . Тогда, согласно [4], в новых переменных система (4.5) и условия (2.5) примут вид

$$\frac{dy}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O_1 & A_3 \end{pmatrix} y + \alpha e^{-\alpha\tau} \begin{pmatrix} B_1 \\ O_2 \end{pmatrix} \bar{d} + \alpha e^{-\alpha\tau} \mu S_1^{-1} f(S_1 y, \bar{d}, t(\tau)), \bar{y} = S_1^{-1} \bar{x}, \quad (4.6)$$

$$y(0) = \bar{y}, \quad y(\tau) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow \infty \quad \forall \mu : |\mu| \leq \mu_0(S_1 \bar{y}). \quad (4.7)$$

В правой части (4.6)  $A_3$  — матрица с постоянными коэффициентами размерности  $n - k \times n - k$ . Блоки  $O_1, O_2$  — матрицы с нулевыми элементами соответственно размерностей  $n - k \times k, n - k \times r$ . Вектор  $y(\tau)$ , который удовлетворяет системе (4.6), условиям (4.7) и вектор начальных данных  $\bar{y}$  представим следующим образом:

$$y(\tau) = (\tilde{y}(\tau), \tilde{\tilde{y}}(\tau))^T, \tilde{y}(\tau) = (y_1(\tau), \dots, y_k(\tau))^T, \tilde{\tilde{y}}(\tau) = (y_{k+1}(\tau), \dots, y_n(\tau))^T, \bar{y} = (\bar{\tilde{y}}, \bar{\tilde{\tilde{y}}})^T, \\ \bar{\tilde{y}} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k)^T, \bar{\tilde{\tilde{y}}} = (\bar{y}_{k+1}, \dots, \bar{y}_n)^T.$$

Введем в рассмотрение систему, состоящую из последних  $n - k$  уравнений системы (4.6), предположив дополнительно, что в ее правую часть подставлены известные функции  $\tilde{y}(\tau), \bar{d}(\tau)$ , удовлетворяющие условиям (4.7). При этом  $\tilde{y}(\tau)$  соответствует начальному условию  $\tilde{y}(0) = \bar{\tilde{y}} = (0, \dots, 0)_{k \times 1}^T$ , тогда остальные  $n - k$  компонент  $\tilde{\tilde{y}}(\tau) = (\tilde{\tilde{y}}_{k+1}(\tau), \dots, \tilde{\tilde{y}}_n(\tau))_{n-k \times 1}^T$  вектора  $y(\tau)$  — решение системы

$$\frac{d\tilde{\tilde{y}}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} A_3 \tilde{\tilde{y}} + \alpha e^{-\alpha\tau} \mu \bar{S}_1^{-1} f(S_1 y, \bar{d}, t(\tau)), \quad (4.8)$$

где  $\bar{S}_1^{-1}$  — матрица, состоящая из последних  $n - k$  строк матрицы  $S_1^{-1}$ .

Согласно (4.7), для решения системы (4.8) должны иметь место условия

$$\tilde{\tilde{y}}(0) = \bar{\tilde{\tilde{y}}}, \quad \tilde{\tilde{y}}(\tau) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow \infty \quad \forall \mu : |\mu| < \mu_0(S_1 \bar{y}). \quad (4.9)$$

Покажем, что решения системы (4.8) не удовлетворяют выражению (4.9). Очевидно, что  $\Phi(\tau) = e^{-e^{-\alpha\tau} A_3} e^{A_3}$  — фундаментальная матрица системы  $d\tilde{\tilde{y}}/d\tau = \alpha e^{-\alpha\tau} A_3 \tilde{\tilde{y}}$ , нормированная в нуле. Решение системы (4.8) с начальными данными (4.9) имеет вид

$$\tilde{\tilde{y}}(\tau, \bar{\tilde{\tilde{y}}}, \mu) = e^{-e^{-\alpha\tau} A_3} e^{A_3} \bar{\tilde{\tilde{y}}} + \int_0^\tau e^{-e^{-\alpha t} A_3} e^{e^{-\alpha t} A_3} \alpha \mu e^{-\alpha t} \bar{S}_1^{-1} f(S_1 y(t, \bar{y}, \mu), \bar{d}, t) dt, \tau \in [0, \infty). \quad (4.10)$$

Из условия (4.4) следует оценка

$$\left\| e^{-\bar{A}_3} e^{e^{-\alpha t} A_3} \bar{S}_1^{-1} f(S_1 y(t, \bar{y}, \mu), \bar{d}, t) \right\| \leq L_1, L_1 > 0, t \in [0, \infty). \quad (4.11)$$

С учетом (4.10) и (4.11) получаем

$$\left\| e^{-A_3} e^{e^{-\alpha\tau} A_3} \right\| \left\| \tilde{\tilde{y}}(\tau, \bar{\tilde{\tilde{y}}}, \mu) \right\| \geq \left\| \bar{\tilde{\tilde{y}}} \right\| - \alpha \mu L_1 \int_0^\tau e^{-\alpha t} dt, \tau \in [0, \infty).$$

Выберем  $\mu_1 : |\mu_1| \leq \mu_0, |\mu_1| < \|\bar{\bar{y}}\| / 2L_1$ . Тогда из последнего неравенства следует, что для всех  $\mu$  из области  $|\mu| \leq \mu_1$

$$\|\bar{\bar{y}}(\tau, \bar{\bar{y}}, \mu)\| \geq q > 0, \tau \in [0, \infty). \quad (4.12)$$

Неравенство (4.12) показывает, что решение системы (4.8) для всех  $\mu$  из области  $|\mu| \leq \mu_1$  не удовлетворяет условию (4.9). Указанное обстоятельство доказывает необходимость условия (4.3) для разрешимости задачи 1. В свою очередь в силу произвольности выбора  $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$  и условий (1.8), (2.2) и (4.12) получаем необходимость выполнения условия (4.3) для существования решения задачи 2. Следствие 1 доказано.

**5. Случай нелинейной стационарной системы с нестационарным возмущением.** Объектом исследования является управляемая система вида

$$\dot{x} = f(x, u) + \mu F(t). \quad (5.1)$$

Пусть правая часть системы (5.1) при  $f(x, u, t) = f(x, u)$  удовлетворяет условиям (1.2)–(1.4). На управление  $u$  наложено ограничение (1.6).

**З а д а ч а 4.** Найти дискретное управление  $u(t, \bar{x}, \mu)$ , заданное на бесконечном разбиении интервала  $[0, 1]$ , указанном в формулировке задачи 1 (см. разд. 1), непрерывно дифференцируемое по  $\bar{x}$  и  $\mu$ , а также абсолютно непрерывную функцию  $x(t)$ , которые почти всюду удовлетворяют системе (5.1) и условиям

$$x(0) = \bar{x}, \quad u(0, \bar{x}, \mu) = 0, \quad x(1) = 0, \quad u(t, 0, 0) \equiv 0, \quad t \in [0, 1]. \quad (5.2).$$

**З а д а ч а 5.** Найти дискретное управление  $u(t, \bar{x}, \mu)$ , заданное на конечном разбиении интервала  $[0, 1]$  (см. разд. 1), и непрерывно дифференцируемое по  $\bar{x}$  и  $\mu$ , а также абсолютно непрерывную функцию  $x(t)$ , которые почти всюду удовлетворяют системе (5.1) и условиям:

$$x(0) = \bar{x}, \quad u(0, \bar{x}, \mu) = 0, \quad \|x(t_m)\| \leq \varepsilon_1, \quad 1 - t_m \leq \varepsilon_1, \quad u(t, 0, 0) \equiv 0. \quad (5.3).$$

В (5.3)  $t_m$  – заранее неизвестный момент времени,  $\varepsilon_1 > 0$  – произвольное число.

**О п р е д е л е н и е 3.** Будем говорить, что задачи 4 и 5 локально разрешимы, если  $\exists \varepsilon > 0$ , такое, что  $\forall \bar{x}, \mu$ , удовлетворяющих неравенствам  $\|\bar{x}\| \leq \varepsilon, |\mu| \leq \varepsilon$ , существуют решения задач 4 и 5.

**З а м е ч а н и е 4.** После несложных соображений с учетом (1.2) и (5.2) нетрудно, видеть, что для всех  $\bar{x}, \mu$  из области  $\|\bar{x}\| \leq \varepsilon, |\mu| \leq \varepsilon$  существует константа  $L > 0$ , такая, что для решения задачи 4  $x(t, \bar{x}, \mu)$  имеет место неравенство

$$\|x(t, \bar{x}, \mu)\| \leq L \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (5.4)$$

**С л е д с т в и е 2.** Пусть для системы (5.1) выполнены условия (1.2) и (1.3). Тогда для локальной разрешимости задач 4 и 5 необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие (1.4).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Достаточность. Доказательство достаточности и алгоритмы решения задач 4 и 5 содержатся в доказательстве теоремы 1. Из построения искомой управляющей функции следует, что  $u(t, \bar{x}, \mu)$  непрерывно дифференцируема по  $\bar{x}$ ,  $\mu$  и  $u(t, 0, 0) \equiv 0, t \in [0, 1]$ .

Необходимость. Предположим, что условие (1.4) не выполнено и задача 4 локально разрешима. При доказательстве необходимости условия (1.4) используем подход, примененный при доказательстве необходимости в следствии 1. Аналог системы (4.5) и условий (2.5) для задачи 4 в новой независимой переменной после замены (2.2), (2.4) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dc}{d\tau} &= \alpha e^{-\alpha\tau} A c + \alpha e^{-\alpha\tau} B \bar{d}(\tau, \bar{x}, \mu) + \\ &+ \alpha e^{-\alpha\tau} R(c, \bar{d}(\tau, \bar{x}, \mu)) + \alpha e^{-\alpha\tau} \mu F(1 - e^{-\alpha\tau}), \quad R = (R_1, \dots, R_n)^T, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0),$$

$$R_i(c, d) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} (\tilde{c}, \tilde{d}) c_j c_k + 2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial u_k} (\tilde{c}, \tilde{d}) c_j d_k + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial u_k} (\tilde{c}, \tilde{d}) d_j d_k \right], \tilde{c} = \theta_i c, \tilde{d} = \theta_i d, \theta_i \in [0, 1], i = \overline{1, n}, \quad (5.6)$$

$$c(0) = \bar{x}, \bar{d}(0, \bar{x}, \mu) = 0, c(\tau) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow \infty, \bar{d}(\tau, 0, 0) \equiv 0, \tau \in [0, \infty). \quad (5.7)$$

Из равенства (5.6) следует, что в области (1.6), (5.4) справедливы неравенства

$$\|R_i(c, d)\| \leq L_1 (\|c\|^2 + \|d\|^2), L_1 > 0, i = \overline{1, n}. \quad (5.8)$$

В (5.8) константа  $L_1 > 0$  зависит от области (1.6), (5.4).

В свою очередь в силу (1.2), (1.3), (5.7) и определения  $u(t, \bar{x}, \mu)$  получаем равенства

$$c_i(\tau, \bar{x}, \mu) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial c_i}{\partial \bar{x}_j}(\tau, \theta_i \bar{x}, \theta_i \mu) \bar{x}_j + \frac{\partial c_i}{\partial \mu}(\tau, \theta_i \bar{x}, \theta_i \mu) \mu, \theta_i \in [0, 1], i = \overline{1, n}, \\ \bar{d}_i(\tau, \bar{x}, \mu) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{d}}{\partial \bar{x}_j}(\tau, \bar{\theta}_i \bar{x}, \bar{\theta}_i \mu) \bar{x}_j + \frac{\partial \bar{d}}{\partial \mu}(\tau, \bar{\theta}_i \bar{x}, \bar{\theta}_i \mu) \mu, \bar{\theta}_i \in [0, 1], i = \overline{1, r}, \\ \forall \tau \in [0, \infty). \quad (5.9)$$

В (5.9)  $\theta_i \bar{x}, \theta_i \mu, \bar{\theta}_i \bar{x}, \bar{\theta}_i \mu$  – средние точки из области  $\|\bar{x}\| \leq \varepsilon, |\mu| \leq \varepsilon$ . Обозначим через  $\bar{S}_1$  аналог матрицы  $S_1$ , фигурирующей в доказательстве следствия 1. После замены  $c = \bar{S}_1 y$  система (5.5) и условия (5.7) примут вид

$$\frac{dy}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} \begin{pmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 \\ \bar{O}_1 & \bar{A}_3 \end{pmatrix} y + \alpha e^{-\alpha\tau} \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{O}_2 \end{pmatrix} \bar{d} + \alpha e^{-\alpha\tau} \bar{S}_1^{-1} R(\bar{S}_1 y, \bar{d}(\tau, \bar{S}_1 y, \mu)) + \\ + \alpha e^{-\alpha\tau} \mu \bar{S}_1^{-1} \bar{F}(\tau), \\ \bar{y} = \bar{S}_1^{-1} \bar{x}, \bar{F}(\tau) = F(1 - e^{-\alpha\tau}), \quad (5.10)$$

$$y(0) = \bar{y}, d(0, S_1 \bar{y}, \mu) = 0, y(\tau) \rightarrow 0, \text{ при } \tau \rightarrow \infty, \bar{d}(\tau, 0, 0) \equiv 0, \tau \in [0, \infty) \quad (5.11)$$

$$\forall \bar{y}, \mu : |\mu| \leq \varepsilon, \|\bar{S}_1^{-1} \bar{y}\| \leq \varepsilon.$$

Матрицы  $\bar{A}_i, i = \overline{1, 3}, \bar{O}_i, i = \overline{1, 2}, \bar{B}_1$ , являются аналогами соответственно матриц  $A_i, i = \overline{1, 3}, O_i, i = \overline{1, 2}, B_1$ , из разд. 4. Далее вводим в рассмотрение последние  $n - k$  уравнений системы (5.10) при условии, что в ее правую часть подставлены известные первые  $k$  компонент функции  $y(\tau)$  и функция  $\bar{d}(\tau, S_1 \bar{y}, \mu)$ , удовлетворяющие системе (5.10) и условиям (1.6), (5.11). Ее можно записать как

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} \bar{A}_3 \tilde{y} + \alpha e^{-\alpha\tau} \bar{\bar{S}}_1^{-1} R(S_1 y, \bar{d}(\tau, \bar{y}, \mu)) + \mu \alpha e^{-\alpha\tau} \bar{\bar{S}}_1^{-1} \bar{F}(\tau), \quad (5.12)$$

$$y(\tau) = (\tilde{y}(\tau), \tilde{\tilde{y}}(\tau))^T, \tilde{y}(\tau) = (y_1(\tau), \dots, y_k(\tau))^T, \tilde{\tilde{y}}(\tau) = (y_{k+1}(\tau), \dots, y_n(\tau))^T, \bar{y} = (\bar{\tilde{y}}, \bar{\tilde{\tilde{y}}})^T,$$

где  $\bar{\tilde{y}} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k)^T, \bar{\tilde{\tilde{y}}} = (\bar{y}_{k+1}, \dots, \bar{y}_n)^T$ ,  $\bar{\bar{S}}_1^{-1}$  – матрица, состоящая из последних  $n - k$  строк матрицы  $\bar{S}_1^{-1}$ . Число  $k$  равно рангу матрицы  $S = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ . Из (5.11) имеем

$$\tilde{y}(0) = \bar{\tilde{y}}, \quad \tilde{y}(\tau) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow \infty \forall \tilde{\tilde{y}}, \mu : \|\tilde{\tilde{y}}\| < \frac{\varepsilon}{\|\bar{\bar{S}}_1^{-1}\|}, |\mu| \leq \varepsilon. \quad (5.13)$$

Решение системы (5.12) с начальными данными (5.13) запишем как



$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{y}}(\tau, \bar{\mathbf{y}}, \mu) &= e^{-e^{-\alpha\tau} \bar{A}_3} e^{\bar{A}_3} \bar{\mathbf{y}} + \\
&+ \int_0^\tau e^{-e^{-\alpha t} \bar{A}_3} e^{e^{-\alpha t} \bar{A}_3} \alpha e^{-\alpha t} \bar{S}_1^{-1} [R(S_1 \mathbf{y}(t, \bar{\mathbf{y}}, \mu), \bar{d}(t, \bar{\mathbf{y}}, \mu)) + \mu \bar{F}(t)] dt, \\
\tau &\in [0, \infty), \bar{\mathbf{y}} = (0, \dots, 0)_{k \times 1}^T.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

С учетом (1.2), (1.6), (5.4), (5.8), (5.9), (5.14) и замены  $c = \bar{S}_1 \mathbf{y}$  в области  $\Omega = \{ \bar{\mathbf{y}}, \mu: |\mu| \leq \varepsilon, \|\bar{S}_1^{-1} \bar{\mathbf{y}}\| \leq \varepsilon \}$  получим оценку

$$\begin{aligned}
\|e^{-\bar{A}_3} e^{e^{-\alpha\tau} \bar{A}_3} \tilde{\mathbf{y}}(\tau, \bar{\mathbf{y}}, \mu)\| &\geq \|\bar{\mathbf{y}}\| - L_2 (\|\bar{\mathbf{y}}\|^2 + \mu^2) - 2\mu L_3, \tau \in [0, \infty), \\
L_3 &= \sup_{t \in [0, \infty)} \|e^{-\bar{A}_3} e^{-e^{-\alpha t} \bar{A}_3} \bar{S}_1^{-1} \bar{F}(t)\|.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Константа  $L_2 > 0$  зависит от области  $\Omega$ .

Пусть  $\mu = \|\bar{\mathbf{y}}\|^2$ . Тогда для всех  $\bar{\mathbf{y}}: \|\bar{\mathbf{y}}\| < 1, \|\bar{\mathbf{y}}\| < \varepsilon, \|\bar{\mathbf{y}}\| < \varepsilon / \|\bar{S}_1^{-1}\|$  оценка (5.15) примет вид

$$\|e^{e^{-\alpha\tau} \bar{A}_3} e^{-\bar{A}_3} \tilde{\mathbf{y}}(\tau, \bar{\mathbf{y}}, \mu)\| \geq \|\bar{\mathbf{y}}\| (1 - L_4 \|\bar{\mathbf{y}}\|), \tau \in [0, \infty), L_4 > 0.$$

Отсюда следует, что  $\forall \bar{\mathbf{y}}: \|\bar{\mathbf{y}}\| < 1, \|\bar{\mathbf{y}}\| < \varepsilon, \|\bar{\mathbf{y}}\| < \varepsilon / \|\bar{S}_1^{-1}\|, \|\bar{\mathbf{y}}\| < 1 / L_4$  выполняется неравенство

$$\|\tilde{\mathbf{y}}(\tau, \bar{\mathbf{y}}, \mu)\| \geq q > 0, \tau \in [0, \infty).$$

Последнее неравенство противоречит условию (5.13). Указанное противоречие доказывает необходимость условия (1.4) для существования решения задачи 4. В силу произвольности  $\varepsilon > 0$  получаем необходимость условия (1.4) для разрешимости задачи 5. Следствие 2 доказано.

**6. Алгоритм решения задачи управления движением маятника переменной длины с переменной точкой подвеса.** Система уравнений, описывающая движение маятника переменной длины с переменной точкой подвеса, движущейся вдоль горизонтальной оси, имеет вид [18]

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= -a_1(t) \sin x_1 - a_2(t) x_2 - a_3(t) u \cos x_1 + \mu F,
\end{aligned} \tag{6.1}$$

где  $x_1$  — угол отклонения маятника от вертикальной оси,  $x_2$  — скорость изменения угла отклонения,  $a_1(t) = g / l(t)$ ,  $a_2(t) = 2q / l(t)$ ,  $a_3(t) = 1 / l(t)$ ,  $g$  — ускорение свободного падения,  $l(t) = l_0 - qt$ ,  $q > 0$  — скорость изменения длины маятника,  $l_0$  — начальная длина маятника,  $u$  — управляющий параметр, который равен ускорению движения точки подвеса вдоль горизонтальной оси. Рассмотрим краевые условия маятника

$$x(0) = \bar{x}, \quad x(1) = 0, \quad x = (x_1, x_2)^T, \quad \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^T. \tag{6.2}$$

После замены (2.2) в системе (6.1) и условиях (6.2) получим

$$c_1(0) = \bar{x}_1, \quad c_2(0) = \bar{x}_2, \quad c(\tau) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow \infty, \quad c(\tau) = (c_1(\tau), c_2(\tau))^T. \tag{6.3}$$

Выполним преобразования сдвигов  $c_1(\tau)$ ,  $c_2(\tau)$ :

$$\begin{aligned}
c_2(\tau) &= c_2^{(1)}(\tau) - \mu F e^{-\alpha\tau}, \quad c_1(\tau) = c_1^{(1)}(\tau) + \frac{1}{2} e^{-2\alpha\tau} \mu F, \\
c_1^{(1)}(\tau) &= c_1^{(2)}(\tau) - \frac{1}{6} e^{-3\alpha\tau} \mu F a_1(1), \quad c_2^{(1)}(\tau) = c_2^{(2)}(\tau) - \frac{1}{2} e^{-2\alpha\tau} \mu F a_2(1), \\
c_2^{(2)}(\tau) &= c_2^{(3)}(\tau) - \frac{1}{6} e^{-3\alpha\tau} \mu F (a_2^2(1) - a_1(1)).
\end{aligned} \tag{6.4}$$

После замены (6.4) из (6.3) получаем аналог системы (2.8) и начальных условий (2.9), (2.13):

$$\begin{aligned}\frac{dc_1^{(2)}}{d\tau} &= \alpha e^{-\alpha\tau} c_2^{(2)}, \\ \frac{dc_2^{(3)}}{d\tau} &= -\alpha e^{-\alpha\tau} a_2(1 - e^{-\alpha\tau}) \sin(c_1^{(2)}) - \frac{1}{6} \mu F e^{-3\alpha\tau} a_1(1) + \frac{1}{2} \mu F e^{-2\alpha\tau} - \\ &- \alpha e^{-\alpha\tau} a_1(1 - e^{-\alpha\tau}) (c_2^{(3)} - \mu F e^{-\alpha\tau} - \frac{1}{2} a_1(1) \mu F e^{-2\alpha\tau} + \frac{1}{6} (a_2^2(1) - a_1(1)) \mu F e^{-3\alpha\tau}) - \\ &- \frac{1}{l(1 - e^{-\alpha\tau})} \alpha e^{-\alpha\tau} d \cos(c_1^2) - \frac{1}{6} e^{-3\alpha\tau} \mu F a_1(1) + \frac{1}{2} e^{-2\alpha\tau} \mu F + \mu F, \\ \frac{dd}{d\tau} &= v,\end{aligned}\tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}c_1^{(2)}(0) &= \bar{x}_1 - \frac{1}{2} \mu F + \frac{1}{6} \mu F a_1(1), c_2^{(3)}(0) = \bar{x}_2 + \mu F + \frac{1}{2} \mu F a_1(1) + \frac{1}{6} \mu F (a_1(1) + a_2^2(1)), \\ d(0) &= 0.\end{aligned}\tag{6.6}$$

Линейная часть системы (6.5) может быть записана в следующей форме:

$$\frac{d\bar{c}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} \bar{P} \bar{c} + \alpha e^{-\alpha\tau} \bar{Q} v, \quad \bar{c} = (c_1^{(2)}, c_2^{(3)}, d)^T,\tag{6.7}$$

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha e^{-\alpha\tau} & 0 \\ -\alpha e^{-\alpha\tau} a_1(1) & -\alpha e^{-\alpha\tau} a_2(1) & -\alpha e^{-\alpha\tau} a_3(1) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

После решения задачи стабилизации системы (6.7) получаем  $v(\tau, \bar{c})$ :

$$v(\tau, \bar{c}) = M(\tau) \bar{c}, \quad \bar{c} = (c_1^{(2)}, c_2^{(3)}, d)^T,\tag{6.8}$$

$$M(\tau) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\alpha^3} a_3(1) (-6e^{3\alpha\tau} + 33\alpha e^{3\alpha\tau} + 54\alpha^2 e^{3\alpha\tau} + 27\alpha^3 e^{3\alpha\tau} - 6a_2(1) \alpha^3 e^{\alpha\tau} + \\ + a_1(1) a_2(1) \alpha^3), \\ \frac{1}{\alpha^2} a_3(1) (11e^{2\alpha\tau} + 30\alpha e^{2\alpha\tau} - a_2(1) \alpha^2 + 19\alpha^2 e^{2\alpha\tau} + a_1^2(1) \alpha^2 - 6a_1(1) e^{\alpha\tau}), \\ \frac{1}{\alpha a_3(1)} (6e^{\alpha\tau} - a_1(1) \alpha + 6\alpha e^{\alpha\tau}) \end{pmatrix}^T.$$

Далее решаем задачу Коши для системы (6.5) с начальными данными (6.6), замкнутой вспомогательного управлением (6.8). В результате находим известные функции  $c_1^{(2)}(\tau), c_2^{(3)}(\tau), d(\tau)$ . Их подстановка в формулу (6.8) дает известную функцию  $v(\tau)$ . В свою очередь после замены независимой переменной  $\tau$  на  $t$  будем иметь известную функцию  $\bar{v}(t)$ . На заключительном этапе решаем задачу Коши для системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a_1(t)x_2 - a_2(t)\sin x_1 - a_3(t)\bar{v}(t)\cos x_1 + \mu F,\end{aligned}\tag{6.9}$$

$$\dot{u} = \alpha^{-1}(1-t)^{-1}\bar{v}(t),$$

$$\bar{u}(t) = u_k \forall t \in [t_k, t_{k+1}), t_k = 1 - e^{-\alpha k h}, k = 0, 1, \dots$$

на промежутке  $[0, 1]$  с начальными данными:

$$x_1(0) = \bar{x}_1, x_2(0) = \bar{x}_2, u(0) = 0. \quad (6.10)$$

**7. Численное моделирование.** В процессе численного моделирования интегрировалась вспомогательная система (6.9), замкнутая вспомогательным управлением  $\bar{v}(t)$  с начальными данными (6.10) при  $\alpha = 0.25$ ,  $\bar{x}_1 = 0.52$  рад,  $\bar{x}_2 = -0.8$  рад/с,  $q = 0.1$  м/с,  $l_0 = 1.1$  м,  $h = 0.03$ ,  $\mu = 0.2$ ,  $F = 0.5$ ,  $g = 9.8$  м/с<sup>2</sup> на промежутке  $[0, 0.99]$ . На рисунке представлены графики функции изменения фазовых координат  $x_1(t), x_2(t)$  и управления  $u(t)$  в исходной независимой переменной  $t$ .

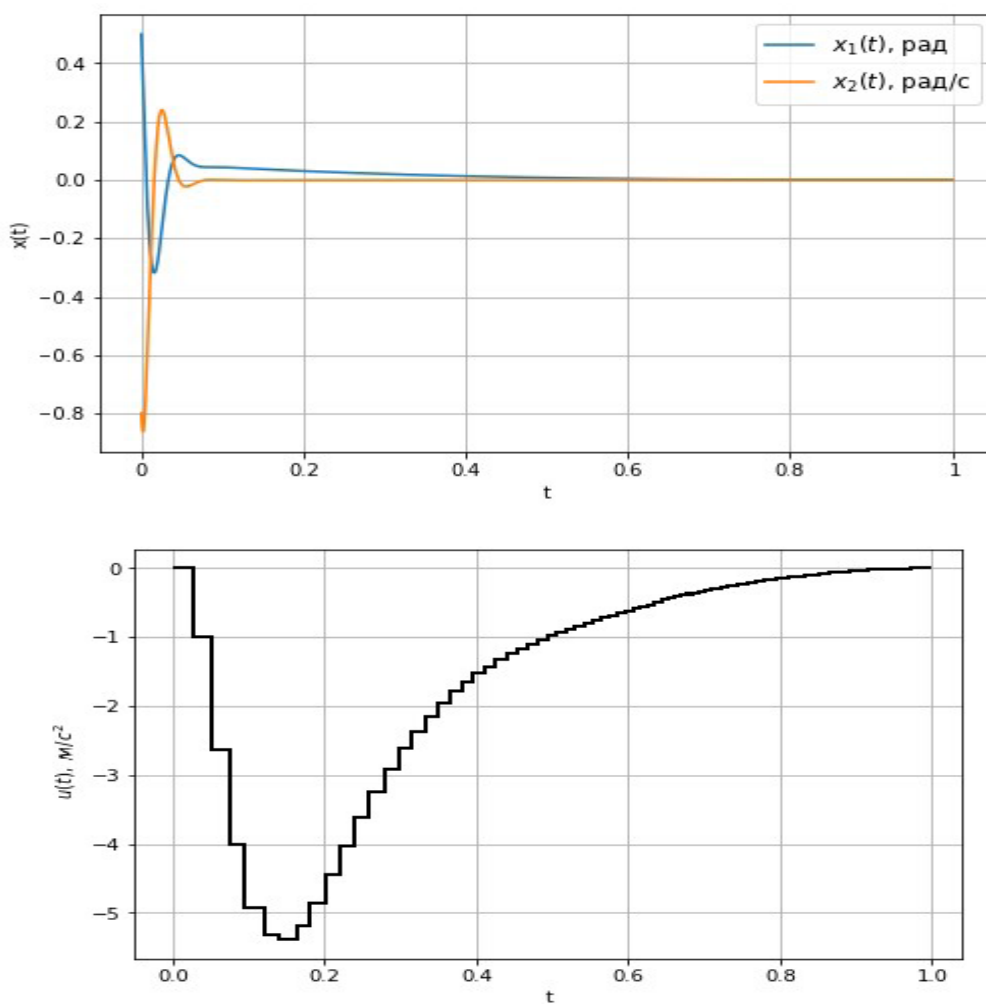


Рис. 1. Разбиение фазовой плоскости на множества  $D_1, D_2, D_3$ .

**Заключение.** Полученные в работе алгоритмы решения граничных задач могут быть использованы при решении важной практической задачи стабилизации широкого класса нелинейных нестационарных систем на конечном промежутке времени с помощью дискретных управлений. Указанное обстоятельство позволяет значительно уменьшить время переходного процесса и обеспечить движение по заданной траектории в реальном времени. Кроме того, стабилизация на конечном промежутке может быть осуществлена даже в том случае, когда стабилизация на бесконечном промежутке невозможна (см. замечание 3).

Аналог системы (2.6) для задачи (3.1), (1.7) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{dc_i}{d\tau} = & \mu\alpha e^{-\alpha\tau} f_i(0,0,1) + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^n a_{ij}(1)c_j + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^r b_{ij}(1)d_j - \mu\alpha e^{-2\alpha\tau} \frac{\partial f_i}{\partial t}(0,0,1) + \\
& + \mu\alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0,1)c_j + \alpha \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \frac{d^k a_{ij}}{dt^k}(1)(-1)^k e^{-(k+1)\alpha\tau} c_j + \\
& + \alpha \sum_{j=1}^n \frac{1}{n!} \frac{d^n a_{ij}}{dt^n}(\tilde{t}(\tau))(-1)^n e^{-(n+1)\alpha\tau} c_j + \\
& + \mu\alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(0,0,1)d_j + \alpha \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \frac{d^k b_{ij}}{dt^k}(1)(-1)^k e^{-(k+1)\alpha\tau} d_j + \\
& + \alpha \sum_{j=1}^n \frac{1}{n!} \frac{d^n b_{ij}}{dt^n}(\tilde{t}(\tau))(-1)^n e^{-(n+1)\alpha\tau} d_j + \\
& + \frac{1}{2} \mu \alpha e^{-\alpha\tau} \left[ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(0,0,1)c_j c_k + 2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_k \partial x_j}(0,0,1)d_k c_j + \right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial u_k}(0,0,1)d_j d_k - \right. \\
& - 2e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial x_j}(0,0,1)c_j - 2e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^r \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial u_j}(0,0,1)d_j + e^{-2\alpha\tau} \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2}(0,0,1) \left. \right] + \dots + \\
& + \mu\alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|+l=4n-2} \frac{1}{k!m!l!} \frac{\partial^{|k|+|m|+l} f_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \partial u_2^{m_2} \dots \partial u_r^{m_r} \partial t^l} \partial^{|k|+|m|+l}(0,0,1)c_1^{k_1} c_2^{k_2} \dots \\
& c_n^{k_n} d_1^{m_1} d_2^{m_2} \dots d_r^{m_r} (-1)^l e^{-l\alpha\tau} + \\
& + \mu\alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|+l=4n-1} \frac{1}{k!m!l!} \frac{\partial^{|k|+|m|+l} f_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \partial u_2^{m_2} \dots \partial u_r^{m_r} \partial t^l} (\tilde{c}, \tilde{d}, \tilde{t}(\tau)) c_1^{k_1} c_2^{k_2} \dots \\
& c_n^{k_n} d_1^{m_1} d_2^{m_2} \dots d_r^{m_r} (-1)^l e^{-l\alpha\tau} + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{k=0}^{4n-2} \frac{1}{k!} \frac{d^k F_i}{d^k}(1)(-1)^k e^{-k\alpha\tau} + \\
& + \alpha e^{-4n\alpha\tau} \frac{1}{(4n-1)!} \frac{d^{4n-1} F_i}{dt^{4n-1}}(\tilde{t}(\tau)), i = \overline{1, n}.
\end{aligned}$$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров Н.Н. Решение одной задачи теории управляемости // Дифференц.уравнения. 1969. Т. 5. № 5. С. 962–963.
2. Петров Н.Н. Локальная управляемость автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 1218–1232.
3. Верещагин И.Ф. Методы исследования режимов полета аппарата переменной массы. Пермь: Изд-во Пермск. гос. ун-та, 1972.
4. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.
5. Furi M., Nistri P., Pera M., Zezza P. Linear Controllability by Piece Constant Control with Assigned Switching Times // J. Optimization Theory and Application. 1985. V. 45. № 2. P. 219–229.

6. Ailon A, Segev R. Driving a Linear Constant System by a Piecewise Constant Control // Intern. J. Control. 1988. V. 47. P. 815–825.
7. Seilova R.D, Amanov T.D. Construction of Piecewise Constant Controls for Linear Impulsive Systems // Proc. Intern. Sympos. "Reliability and Quality." Penza, 2005. P. 4–5.
8. Alzabut J.O. Piecewise Constant Control of Boundary Value Problem for Linear- Impulsive Differential Systems // Mathematical Methods in Engineering. 2007. P. 123–129.
9. Baier R., Gerds M.A. Computational Method for Non-convex Reachable Sets Using Optimal Control // Proc. European Control Conf.(ECC) Budapest, 2009. P. 97–102.
10. Квитко А.Н., Якушева Д.Б. Решение граничной задачи для нелинейной стационарной управляемой системы на бесконечном промежутке времени с учетом дискретности управления // Информационно-управляющие системы. 2011. № 6. С. 25–29.
11. Maksimov V.P., Chadov A.L. On Class of Controls for a Functional-differential Continuous Discrete System // Isv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 2012. № .9. P. 72–76.
12. Квитко А.Н., Якушева Д.Б. Алгоритм построения кусочно-постоянного синтезирующего управления при решении граничной задачи для нелинейной стационарной системы // Вестн. ВГУ. Сер. Физика. Математика. 2012. № 1. С. 138–145.
13. Plotnikov A.V., Arziry A., Komleva T.A. Piece Constant Controller Linear Fuzzy Systems // Intern. J. Industrial Mathematics. 2012. V. 4. № 2. P. 77–85.
14. Ushakov V.N., Matviychuk A.R., Ushakov A.V., Kazakov A.L. On the Construction of Solutions of the Approach Problem at a Fixed Point in Time (Russian) // Izvestiya Irkutskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Matematika. 2012. V. 5. № 4. P. 95–115.
15. Kvitko A.N., Maxina A.M., Chistyakov S.V. On a Method for Solving a Local Boundary Problem for a Nonlinear Stationary System with Perturbations in the Class of Piecewise Constant Controls // Intern. J. Robust Nonlinear Control. 2019. № 13. P. 4515–4536.
16. Квитко А.Н., Литвинов Н.Н. Решение локальной граничной задачи в классе дискретных управлений для нелинейной нестационарной системы // Вестн. Санкт-Петербургского ун-та. Сер. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 20. № 1. С. 18–37.
17. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
18. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 2003.

УДК 519.2

## СОПОСТАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО И ОБОБЩЕННОГО ФИЛЬТРОВ КАЛМАНА ЦЕЛОГО И ДРОБНОГО ПОРЯДКОВ ДЛЯ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ И ПАРАМЕТРОВ ДИСКРЕТНЫХ ДРОБНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2024 г. О. С. Амосов<sup>a, \*</sup>, С. Г. Амосова<sup>a, \*\*</sup>

<sup>a</sup>ФГБУН ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

\*e-mail: osa18@yandex.ru

\*\*e-mail: amosovasg@yandex.ru

Поступила в редакцию 03.07.2023 г.

После доработки 25.07.2024 г.

Принята к публикации 16.10.2024 г.

Представлены дискретные линейный и обобщенный фильтры Калмана целого и дробного порядков для оценивания состояния и неизвестных параметров линейных и нелинейных дискретных систем дробного порядка. Дано сопоставление традиционного и дробного фильтров Калмана. Рассмотрены особенности и достоинства дробного алгоритма, которые проиллюстрированы на примерах использования дискретных линейного и обобщенного фильтров Калмана.

**Ключевые слова:** дискретные линейный и обобщенный фильтры Калмана, дробный порядок уравнения, дискретная система, оценивание состояния и параметров, точность

DOI: 10.31857/S0002338824050022, EDN: TEMFDR

## COMPARISON OF LINEAR AND EXTENDED KALMAN FILTERS OF INTEGER AND FRACTIONAL ORDERS FOR ESTIMATION THE STATE AND PARAMETERS OF DISCRETE FRACTIONAL DYNAMIC SYSTEMS

O. S. Amosov<sup>a, \*</sup>, S. G. Amosova<sup>a, \*\*</sup>

<sup>a</sup>V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia

\*e-mail: osa18@yandex.ru

\*\*e-mail: amosovasg@yandex.ru

Discrete linear and extended Kalman filters of integer and fractional orders are presented for estimating the state and unknown parameters of linear and nonlinear discrete fractional order systems. A comparison of traditional and fractional Kalman filters is given. The features and advantages of the fractional algorithm are considered, which are illustrated with examples of using discrete linear and extended Kalman filters.

**Keywords:** discrete linear and extended Kalman filters, fractional order of the equation, discrete system, state and parameter estimation, accuracy

**0. Введение.** Создание современных высокоточных систем гражданского и военного назначения требует разработки более точных моделей динамики систем и измерений, прогнозных моделей для управления. Одним из способов повышения адекватности математических моделей исследуемых объектов является применение теории дробного исчисления (fractional calculus) в отраслях человеческой деятельности, использующих математические методы и средства компьютерного моделирования. В основе дробного исчисления или исчисления нецелых порядков лежат понятия производной и интеграла нецелых порядков [1–3].

Анализ недавних публикаций показывает, что современные исследования дробного исчисления ведутся в направлениях развития математических методов; математических и физических моделей явлений реального мира; численных схем решения физических, инженерных и других задач, а также применения в многочисленных приложениях [3–44].

**0.1 Развитие математических методов.** В 1993 г. впервые была предложена концепция интеграла и дифференциала переменного порядка (variable-order (VO)), а также некоторые основные свойства [4]. Авторы [5] обобщили результаты исследования дробных операторов переменного порядка, а затем исследовали определения дробных операторов переменного порядка в различных формах. После этого были дополнительно изучены некоторые новые расширения и ценные возможности применения моделей дробных дифференциальных уравнений переменного порядка (fractional differential equations (FDE)) [6]. В [7] был предложен метод оптимизации параметров пропорционально-интегрально-дифференциального регулятора дробно-переменного порядка для линейных динамических систем при различных начальных условиях. В работах [8, 9] рассмотрены свойства нового класса фрактальных функций, не дифференцируемых в классическом смысле, но имеющих в каждой точке непрерывные производные типа Вейля переменного порядка. Такими производными обладают, например, классические фрактальные функции Вейерштрасса, Такаджи, Безиковича. Необходимость использования таких фрактальных функций возникает при построении управляющей функции в задачах управления распределенными системами. В [10] приводится задача оптимального управления для модельной системы, которая описывается одномерным неоднородным диффузионно-волновым уравнением, представляющим собой обобщение волнового уравнения на случай, когда производная по времени имеет дробный порядок и понимается в смысле Капуто. Изучены краевые задачи для одномерного интегродифференциального уравнения соболевского типа с граничными условиями первого и третьего родов с двумя операторами дробного дифференцирования  $\alpha$  и  $\beta$  разных порядков [11]. Для развития метода обобщенных степенных рядов для задач, связанных как с дробными, так и с целыми производными, авторы [12] исследуют влияние на решение трех параметров: коэффициент возмущения, коэффициент задержки и коэффициент дробного порядка. Для решения пространственно-временных дробных уравнений Шредингера в работе [13] предлагается линеаризованная быстрая схема с шагом по времени высокого порядка. Результаты доказываются с помощью дробных неравенств Соболева для ограниченных численных решений.

**0.2 Синтез новых численных методов.** В [14] продемонстрированы проблемы с переменной памятью, относящиеся к статистическим и динамическим системам, где фрактальная размерность меняется со временем и координатой. В целом, численные методы используются как эффективные развитые методы численной аппроксимации дробных дифференциальных уравнений переменного порядка (VO-FDE) [15, 16]. Например, в [17] исследована устойчивость и сходимость нового явного конечно-разностного приближения для нелинейного уравнения дробной диффузии переменного порядка. В [18] было доказано существование решения дробных дифференциальных уравнений переменного порядка. В [19] разработан экспоненциально точный метод дробной спектральной коллокации для решения линейных/нелинейных дробных дифференциальных уравнений переменного порядка. В [20] представлен новый неявный численный метод для плавного решения двумерного (2D) уравнения дробной перколяции переменного порядка. В [21] предложены формулы аппроксимации второго порядка для дробной производной по времени переменного порядка для описания аномальной диффузии и распространения волн. Впоследствии в [22] был разработан численный метод высокого порядка для дробных дифференциальных уравнений переменного порядка в свете численного приближения второго порядка.

В [23] получены и проанализированы две временные схемы второго порядка для временно-многочленного уравнения дробной диффузии-волны, основанные на методе уменьшения порядка. Средневзвешенное значение на двух временных уровнях применяется к дискретизации пространственной производной, в которой весовой коэффициент соответствует оптимальной точке для дискретизации по времени.

**0.3 Использование в разных областях науки и техники для моделирования явлений.** В последние годы применение динамических систем дробного порядка играет жизненно важную роль в реальных приложениях, включая, например, аффинное шифрование с помощью даты рождения отправителя и получателя [24], дробное интегральное управление со скользящим режимом [25], модифицированный Дуффинг дробного порядка системы [26], хаотическую систему Королевской Кобры дробного порядка [27], цифровую криптографию [28]. Следовательно, исследуются динамические системы дробного порядка, которые имеют большой потенциал применения в реальных инженерных областях.



В некоторых дробных динамических системах переменного порядка функцией определенных переменных является температура, концентрация, плотность и т.д. Например, в [29] было обнаружено, что дифференциальный порядок релаксации белков представляет собой функцию температуры. В работе [30] авторы тщательно исследовали динамическое поведение, которое выступает хаотичным свойством систем Даффинга дробного порядка. В [31] была предложена 5D-гиперхаотическая система дробного порядка, основанная на гиперхаотической системе Лоренца. В настоящее время в центре внимания научных исследований находятся нелинейные динамические системы дробного порядка и синхронизация дробно-хаотических систем переменного порядка.

В работе [32] проведен обзор литературы и выводов в области первичных определений дробных дифференциальных уравнений переменного порядка, их моделей, численных методов и приложений. Приводится краткое описание различных физических моделей и типичных применений дробных дифференциальных уравнений переменного порядка. В [33] рассматривается новый подход к устойчивости системы управления дробного порядка. В данной работе поведение динамической системы смоделировано с помощью дифференциальных уравнений, включающих дробные производные. Применяя преобразования Лапласа к таким уравнениям и предполагая нулевые начальные условия, появляются передаточные функции без целых степеней переменной преобразования Лапласа. Применение дробного исчисления в нефтяном машиностроении отражено в модели дробной диффузии по времени производной переменного порядка для гетерогенных пористых сред [34]. Использование дробного исчисления во многих других отраслях физики и техники представлено в публикациях [35–39], а также показано в медицине [40]. В работе [40] описана новая модель туберкулеза с несколькими штаммами с помощью дробной производной переменного порядка как расширение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения.

В последнее время модель дробной производной случайного порядка обычно применяется для описания явлений релаксации, затухания и диффузии системы. В реальных приложениях физические системы страдают от некоторых шумов, включая флуктуации поля внешнего давления в аномальной диффузионной системе или нестабильное температурное поле при рассеянии энергии [41]. Подобные шумы неизбежно вызывают колебания всей системы. Следовательно, модель дробной производной случайного порядка является предпочтительным выбором для изображения этого типа флуктуационного процесса. При анализе реальных инженерных задач модель дробной производной случайного порядка может использоваться количественно для оценки и описания колебаний системы. Указывается, что некоторые возможные приложения включают прогнозирование загрязнения окружающей среды, оценку инженерных рисков, анализ устойчивости системы и т.д. [42].

Авторами [43] разработан метод конечных разностей высшего порядка для решения сингулярно возмущенных задач конвекции-диффузии с переменными коэффициентами, включающий производную по времени дробного порядка с порядком  $\alpha \in (0, 1)$ . В работе [44] на основе уравнения конвекции-диффузии дробного порядка по времени создали численную модель испарения капель в различных средах. Среди протестированных – уравнение конвекции-диффузии 0.1-го порядка, оно показало наилучший корректирующий эффект на модель испарения. Это уравнение повысило точность расчета и оказало хороший корректирующий эффект как для статического испарения, так и для испарения капель, падающих на плоские и криволинейные поверхности.

Таким образом, из представленных работ видно, что в настоящее время растет число применений дробного исчисления в фундаментальных законах естествознания [3–7, 11–13, 15, 16, 18, 20, 22], автоматическом управлении [8–10, 33], обработке сигналов [41], физике [14, 17, 19, 21, 23, 35–39, 42–44], электронике [24–28], механике [30, 31, 34], биологии [29], медицине [40] и других областях.

Дробные дифференциальные уравнения переменного порядка успешно используются для исследования динамики, зависящей от времени и/или пространства. При создании современных динамических систем разработчикам приходится решать задачу оценивания состояния и идентификации их параметров. Для решения указанной задачи эффективны методы нелинейной оптимальной фильтрации, среди которых наиболее широко на практике применяются фильтры калмановского типа [45–49]. При этом для оценки состояния и параметров динамических систем дробного порядка существуют различные модификации фильтров Калмана (ФК) дробного порядка для линейных и нелинейных дробных динамических систем [49–53]. К их числу относятся дробные линейный (ДЛФК), обобщенный (ДОФК), ансамблевый и адаптивный ФК. Однако в указанных публикациях рассмотрены алгоритмы дробной филь-

трации калмановского типа, но не дается сравнительная оценка возможностей, преимуществ и недостатков дробных и целочисленных алгоритмов.

Учет фрактальных свойств процессов позволяет добиться успеха при создании более качественных математических моделей систем и датчиков, в основе которых лежат марковские процессы порядка выше первого. Выявление и исследование фрактальных свойств процессов и объектов в разных предметных областях было выполнено и в наших работах. К их числу относятся: измерительные системы и датчики, навигация и управление движением, телекоммуникационные системы и сети, дефектоскопия [54–57]. При создании более качественных математических моделей систем и датчиков предлагается учитывать фрактальные свойства и динамику процессов, основанную на исчислении дробного порядка, что усложняет алгоритмы фильтрации, которые должны функционировать в режиме реального времени. Это происходит в силу того, что алгоритмы оценивания должны использовать оценки не только предпоследнего, но и всех предыдущих шагов фильтрации, поскольку уравнения состояния дробных динамических систем определяются марковскими процессами высшего порядка [58, 59]. В случае применения математической модели системы дробного порядка, наряду с оценкой переменных состояния и неизвестных параметров, необходимо идентифицировать и сам порядок системы.

Таким образом, в разд. 0.1 представлен обзор недавних результатов исследования непрерывных систем, описываемых дифференциальными уравнениями дробного и переменного порядка, а в разд. 0.2 — численные схемы для их решения, приводящие к дискретным моделям систем.

Предлагаемая статья посвящена анализу особенностей и возможностей применения дискретных фильтров калмановского типа дробного порядка для линейных и нелинейных задач оценивания. Дается сопоставление дискретных ФК целочисленного и дробного порядков по точности оценивания состояния и параметров системы, что проиллюстрировано на примерах использования ДЛФК и ДОФК.

**1. Постановка и решение** линейной задачи оценивания. В табл. 1 приведена постановка задачи оценивания состояния дискретной линейной динамической системы размерности  $n$  с вектором состояния  $\mathbf{x}_i = (x_{1,i}, \dots, x_{n,i})^T$ , где  $i = 0, 1, 2, \dots$  — дискретное время, с применением математических моделей как целого порядка один [45–48], так и дробного порядков [49, 50, 58, 59]. Следует отметить, что в публикации [49] приведены доказательства, что ДЛФК минимизирует среднеквадратический критерий, представленный в табл. 1.

**Таблица 1.** Постановка задачи фильтрации

| Математическая модель           | Дискретная линейная стохастическая система целого порядка                                                                                                     | Дискретная линейная стохастическая система дробного порядка                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|---------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Уравнение для вектора состояния | $\Delta^1 \mathbf{x}_i = \Phi_{di} \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{w}_i, \Phi_{di} = \Phi_i - \mathbf{I},$ $\mathbf{x}_i = \Phi_i \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{w}_i$ | $\Delta^\mu \mathbf{x}_i = \Phi_{di} \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{w}_i,$ $\mathbf{x}_i = \Delta^\mu \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^i (-1)^j \Gamma_j \mathbf{x}_{i-j},$ $\Gamma_j = \text{diag} \left[ \begin{pmatrix} \mu_1 \\ j \end{pmatrix} \quad \dots \quad \begin{pmatrix} \mu_n \\ j \end{pmatrix} \right],$ $\Delta^\mu \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \Delta^{\mu_1} x_{1,i} & \dots & \Delta^{\mu_n} x_{n,i} \end{bmatrix},$ $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ |
|                                 | $x_i = \Delta^1 x_i + x_{i-1} = ax_{i-1} + w_i$                                                                                                               | $\Delta^\mu x_i = (a-1)x_{i-1} + w_i,$ $x_i = \Delta^\mu x_i - \sum_{j=1}^i (-1)^j \binom{\mu}{j} x_{i-j}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| Измерения                       | $\mathbf{y}_i = \mathbf{H}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{v}_i$                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|                                 | $y_i = x_i + v_i$                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |

Окончание таблицы 1

| Математическая модель   | Дискретная линейная стохастическая система целого порядка                                                                                                                                                              | Дискретная линейная стохастическая система дробного порядка |
|-------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| Начальные условия       | $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \mathbf{P}_0 = E[(\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)(\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)^T]$                                                                                            |                                                             |
|                         | $x_0 \in \mathbb{R}^1, P_0 = \sigma_0^2$                                                                                                                                                                               |                                                             |
| Порождающие шумы        | $\bar{\mathbf{w}}_i = 0, E\{\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j^T\} = \delta_{ij} \mathbf{Q}_i$                                                                                                                                  |                                                             |
|                         | $\bar{w}_i = 0, E\{w_i w_j\} = Q$                                                                                                                                                                                      |                                                             |
| Шумы измерения          | $\bar{\mathbf{v}}_i = 0, E\{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j^T\} = \delta_{ij} \mathbf{R}_i$                                                                                                                                  |                                                             |
|                         | $\bar{v}_i = 0, E\{v_i v_j\} = R = \sigma_v^2$                                                                                                                                                                         |                                                             |
| Взаимная корреляция     | $E\{\mathbf{x}_0 \mathbf{w}_i^T\} = 0; E\{\mathbf{w}_i \mathbf{v}_j^T\} = 0; E\{\mathbf{x}_0 \mathbf{v}_j^T\} = 0$                                                                                                     |                                                             |
|                         | $E\{x_0 w_i\} = 0; E\{w_i v_j\} = 0; E\{x_0 v_j\} = 0$                                                                                                                                                                 |                                                             |
| Матрицы                 | $\Phi_i, \Phi_{di} - n \times n, \Phi_{di} = \Phi_i - \mathbf{I}, \mathbf{Q}_i - p \times p, \mathbf{H}_i - m \times n, \mathbf{R}_i - m \times m,$<br>$\mathbf{I} - \text{единичная матрица}$                         |                                                             |
|                         | $\Phi_i = a, \Phi_{di} = a - 1, \mathbf{Q}_i = Q, \mathbf{H}_i = 1, \mathbf{R}_i = R$                                                                                                                                  |                                                             |
| Минимизируемый критерий | $J_i = E_{\mathbf{x}_i, \mathbf{Y}_i} (\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{Y}_i))^T (\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{Y}_i)), \mathbf{Y}_i = (\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, \dots, \mathbf{y}_i^T)^T$ |                                                             |
|                         | $J_i = E_{x_i, y_i} [(x_i - \hat{x}_i(y_i))^2], \mathbf{y}_i = (y_1, y_2, \dots, y_i)^T$                                                                                                                               |                                                             |

Для удобства иллюстрации материала в данной и в последующих таблицах под штриховой линией приведены примеры для скалярной системы. В этом разделе в качестве примера рассмотрена задача оценки скалярной переменной состояния  $x_i$ ,  $x_i = ax_{i-1} + w_i$  по зашумленным измерениям  $y_i$  вида  $y_i = x_i + v_i$ . Заметим, что в данном примере  $\Phi_i = a$ ,  $\Phi_{di} = a - 1$ .

Для математического описания дискретных систем дробного порядка конечная разность первого порядка  $\Delta^1 \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}$  обобщена на разность  $\Delta^\mu \mathbf{x}_i$  любого нецелого порядка  $\mu > 0$  в соответствии со следующим определением разности дробного порядка Грюнвальда-Летникова [49, 59]:

$$\Delta^\mu \mathbf{x}_i = \frac{1}{h^\mu} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\mu}{j} \mathbf{x}_{i-j} = \frac{1}{h^\mu} \left[ \mathbf{x}_i + \sum_{j=1}^i (-1)^j \binom{\mu}{j} \mathbf{x}_{i-j} \right], \mathbf{x}_i = h^\mu \Delta^\mu \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^i (-1)^j \binom{\mu}{j} \mathbf{x}_{i-j},$$

где  $\mu \in \mathbb{R}$  — порядок дробной разности,  $\mathbb{R}$  — множество действительных чисел,  $h$  — интервал дискретизации, который принимается в дальнейшем равным 1 и  $i$  — номер отсчета, для которого вычисляется разность. Дробный биномиальный коэффициент  $\binom{\mu}{j}$  может быть получен из выражения

$$\binom{\mu}{j} = \begin{cases} 1 & j = 0, \\ \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-j+1)}{j!} & j > 0. \end{cases}$$

В случае, когда рассматривается система из  $n$  уравнений различных дробных порядков  $\mu_1, \dots, \mu_n$  относительно переменных  $x_{1,i}, \dots, x_{n,i}$ , имеем

$$\Delta^\mu \mathbf{x}_i = \Phi_{di} \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{w}_i, \quad \mathbf{x}_i = \Delta^\mu \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^i (-1)^j \Gamma_j \mathbf{x}_{i-j},$$

$$\Gamma_j = \text{diag} \left[ \begin{pmatrix} \mu_1 \\ j \end{pmatrix} \quad \dots \quad \begin{pmatrix} \mu_n \\ j \end{pmatrix} \right]; \quad \Delta^\mu \mathbf{x}_i = \left[ \Delta^{\mu_1} x_{1,i} \quad \dots \quad \Delta^{\mu_n} x_{n,i} \right]^T, \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_n), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Решение задачи оценивания с использованием дискретных линейных фильтров Калмана целого [45–48] и дробного [49, 58] порядков дано в табл. 2.

**Таблица 2.** Соотношения для алгоритма дискретного ЛФК

| Математическая модель                | ЛФК                                                                                                                     | ДЛФК                                                                                                                                                                                                |
|--------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Прогноз                              | $\hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} = \Delta^1 \hat{\mathbf{x}}_i + \hat{\mathbf{x}}_{i-1} = \Phi_i \hat{\mathbf{x}}_{i-1}$       | $\Delta^\mu \hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} = \Phi_{di} \hat{\mathbf{x}}_{i-1},$<br>$\hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} = \Delta^\mu \hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} - \sum_{j=1}^i (-1)^j \Gamma_j \hat{\mathbf{x}}_{i-j}$ |
|                                      | $\hat{x}_{i/i-1} = a \hat{x}_{i-1}$                                                                                     | $\Delta^\mu \hat{x}_{i/i-1} = (a-1) \hat{x}_{i-1},$<br>$\hat{x}_{i/i-1} = \Delta^\mu \hat{x}_{i/i-1} - \sum_{j=1}^i (-1)^j \binom{\mu}{j} \hat{x}_{i-j}$                                            |
| Матрица ковариаций ошибок прогноза   | $\mathbf{P}_{i/i-1} = \Phi_i \mathbf{P}_{i-1} \Phi_i^T + \mathbf{Q}_i$                                                  | $\mathbf{P}_{i/i-1} = (\Phi_{di} + \Gamma_1) \mathbf{P}_{i-1} (\Phi_{di} + \Gamma_1)^T + \mathbf{Q}_i$<br>$+ \sum_{j=2}^i \Gamma_j \mathbf{P}_{i-j} \Gamma_j^T$                                     |
|                                      | $p_{i/i-1} = a^2 p_{i-1} + Q$                                                                                           | $p_{i/i-1} = (a-1+\mu)^2 p_{i-1} + Q + \sum_{j=2}^i \binom{\mu}{j}^2 p_{i-j}$                                                                                                                       |
| Коэффициент усиления                 | $\mathbf{K}_i = \mathbf{P}_{i/i-1} \mathbf{H}_i^T (\mathbf{H}_i \mathbf{P}_{i/i-1} \mathbf{H}_i^T + \mathbf{R}_i)^{-1}$ |                                                                                                                                                                                                     |
|                                      | $k_i = p_{i/i-1} (p_{i/i-1} + R)^{-1}$                                                                                  |                                                                                                                                                                                                     |
| Оценка                               | $\hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} + \mathbf{K}_i (\mathbf{y}_i - \mathbf{H}_i \hat{\mathbf{x}}_{i/i-1})$   |                                                                                                                                                                                                     |
|                                      | $\hat{x}_i = \hat{x}_{i/i-1} + k_i (y_i - \hat{x}_{i/i-1})$                                                             |                                                                                                                                                                                                     |
| Матрица ковариаций ошибок оценивания | $\mathbf{P}_i = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_i \mathbf{H}_i) \mathbf{P}_{i/i-1}$                                            |                                                                                                                                                                                                     |
|                                      | $p_i = (1 - k_i) p_{i/i-1}$                                                                                             |                                                                                                                                                                                                     |

**1.1. Сопоставление фильтров.** Уравнения состояния для динамической системы целого порядка описывают марковские последовательности или, более точно, марковские последовательности первого порядка. Сравнение уравнений для вектора состояния целого и дробного порядков табл. 1 показывает, что последние описывают марковские последовательности более высокого порядка, которые обладают краткосрочной и долгосрочной памятью. Как следствие использование математической модели дискретной динамической

системы дробного порядка приводит к тому, что при расчете оценки прогноза и матрицы ковариаций ошибок прогноза для дробного фильтра табл. 2 применяются значения оценки и матрицы ковариаций ошибок оценивания не только с последнего предыдущего шага, как в случае традиционного ФК целого порядка, но и со всех предыдущих шагов. Это свойство справедливо, когда  $\mu_k \neq 1, k = 1, n$ .

Сравнение формул в левой и правой частях табл. 2 для ФК показывает, что при  $\mu = \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = 1$  выражения для линейного ФК (ЛФК) и ДЛФК совпадают. Другими словами, ЛФК является частным случаем ДЛФК. Следует ожидать, что в общем случае, когда реальные процессы в исследуемой системе являются марковскими последовательностями высшего порядка, их использование для построения ФК дробного порядка позволит достичь более высокую точность оценивания состояния системы. Существенно отметить, что для оптимального ДЛФК число значений учитываемых оценок и значений матрицы ковариаций ошибок оценивания равно числу шагов дискретизации  $i$ . Для практической реализации ДЛФК естественным приемом служит ограничение числа слагаемых для вычисления оценки и матрицы ковариаций, которое будет определять субоптимальное решение. Число слагаемых на практике определяется требованиями обеспечения необходимой точности решения и быстродействия алгоритма. В практических реализациях количество элементов в суммах для уравнений прогноза оценки и матрицы ковариаций ошибок прогноза дискретной линейной стохастической системы дробного порядка должно быть ограничено заранее заданным значением  $d$  (табл. 1).

Сказанное выше подтверждается следующим иллюстрирующим примером оценивания, характерным для обработки данных.

1.2. П р и м е р. Для модели скалярной системы (формулы приведены в табл. 1 под штриховой линией) проведено оценивание для различных значений  $\mu = \mu_1 : 0.5; 1; 1.6$ .  $\sigma_0 = 10$ ,  $\sigma_w = 3$ ,  $\sigma_v = 5$ ,  $a = 1$  (см. рис. 1).

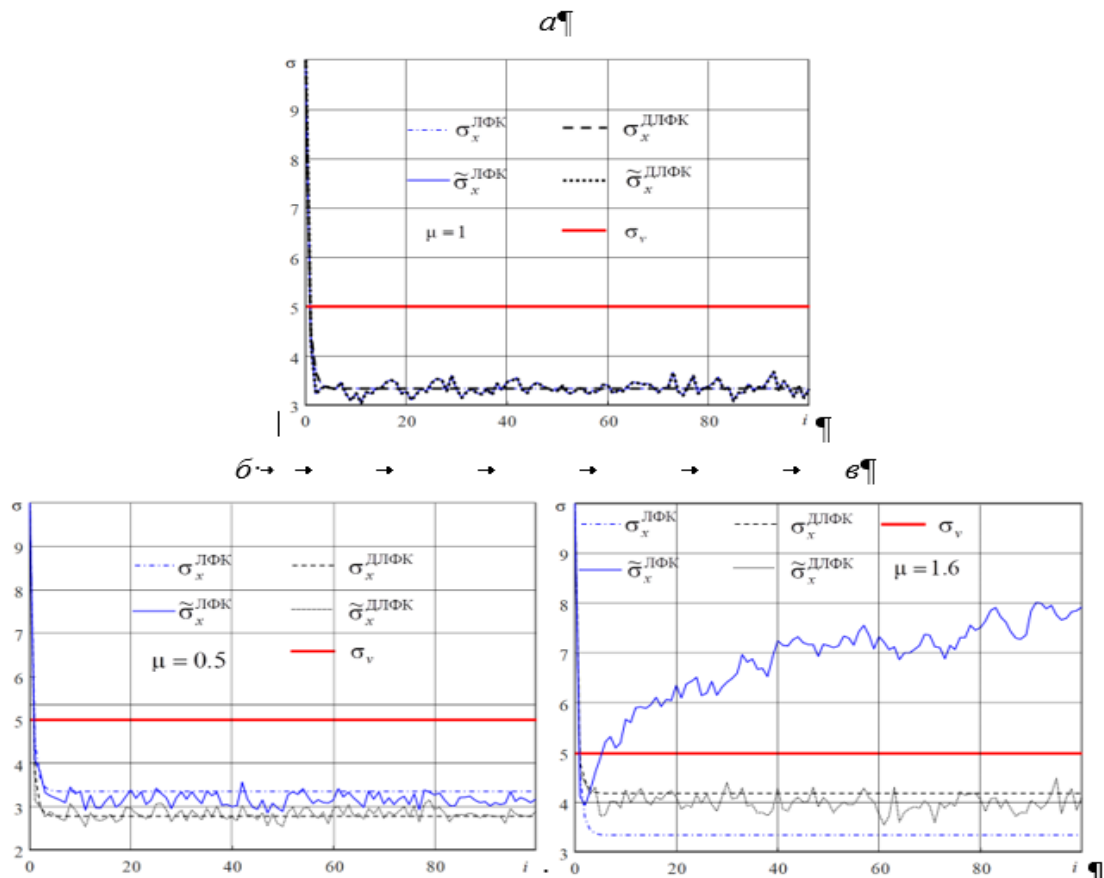


Рис. 1. Оценивание процесса  $X_i$  с различными значениями порядка  $\mu$ :  
а – при  $\mu = 1$ , б – при  $\mu = 0.5$ , в – при  $\mu = 1.6$ .

Для указанных  $\mu$  представлены 1) расчетные среднеквадратические отклонения (СКО) ошибок оценивания  $\sigma_{x_i}^{\text{ЛФК}}$  и  $\sigma_{x_i}^{\text{ДЛФК}}$ , соответствующие дисперсиям ошибок оптимального оценивания ЛФК и ДЛФК; 2) выборочные СКО ошибок оценивания, вычисляемые следующим образом:

$$\tilde{\sigma}_i^{\eta} \approx \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L (e_i^{\eta(j)})^2}, e_i^{\eta(j)} = \hat{x}_i^{\eta(j)}(y_i^{(j)}) - x_i^{(j)}, \eta = \text{ЛФК, ДЛФК}, L = 300.$$

**Параметр  $\mu = 1$ .** При  $\mu = 1$  ЛФК совпадает с ДЛФК. Традиционный ФК позволяет получить оптимальное решение только для этого значения  $\mu$  и не является оптимальным при других значениях  $\mu$ . Результаты моделирования показали совпадение всех расчетных и действительных характеристик точности представленных линейных алгоритмов дискретных ЛФК и ДЛФК при  $\mu = 1$ , что видно на рис. 1. В общем случае, когда  $\mu \neq 1$  оптимальная оценка и матрица ковариации для ошибки оценивания определяются с помощью выражений для ФК дробного порядка.

**Параметр  $\mu = 0.5$ .** При этом  $\mu$  с помощью ДЛФК может быть достигнута более высокая точность оценивания, в отличие от ЛФК.

**Параметр  $\mu = 1.6$ .** При этом  $\mu$  с течением времени для ЛФК, в отличие от ДЛФК, наблюдается заметный рост ошибки оценивания.

Для  $\mu = 0.5$  и  $1.6$  наблюдается совпадение расчетной и действительной характеристик для ДЛФК и несовпадение расчетной и действительной характеристик для ЛФК целого порядка.

При сопоставлении приведенных результатов, полученных ЛФК и ДЛФК, необходимо учитывать тот факт, что моделирование проводится в условиях согласованных настроек расчетной и действительной моделей для ДЛФК, в то время как для ЛФК это условие не выполняется.

На рис. 2 для  $\mu = 0.5$  и  $1.6$  отдельно представлены результаты работы дробных ФК с ограничением количества учитываемых оценок и значений матрицы ковариаций числом  $d$ . Если для  $\mu = 0.5$  достаточно для достижения точности, близкой к оптимальному ДЛФК, выбрать  $d \leq 5$ , то в случае  $\mu = 1.6$  необходимо выбрать  $d \geq 7$ .

**2. Постановка и решение нелинейной задачи оценивания.** В табл. 3 приведена постановка задачи оценивания состояния нелинейной динамической системы с использованием математических моделей целого [45–48] и дробного [49, 58, 59] порядков. Решение задачи оценивания с помощью обобщенных ФК (ОФК) целого [45–48] и дробного [49, 58, 59] порядков дано в табл. 4.

В качестве примера рассмотрена задача совместной оценки скалярной переменной состояния  $x_i$  и неизвестного параметра  $a$ ,  $x_i = ax_{i-1} + w_i$  по зашумленным измерениям  $y_i$  вида

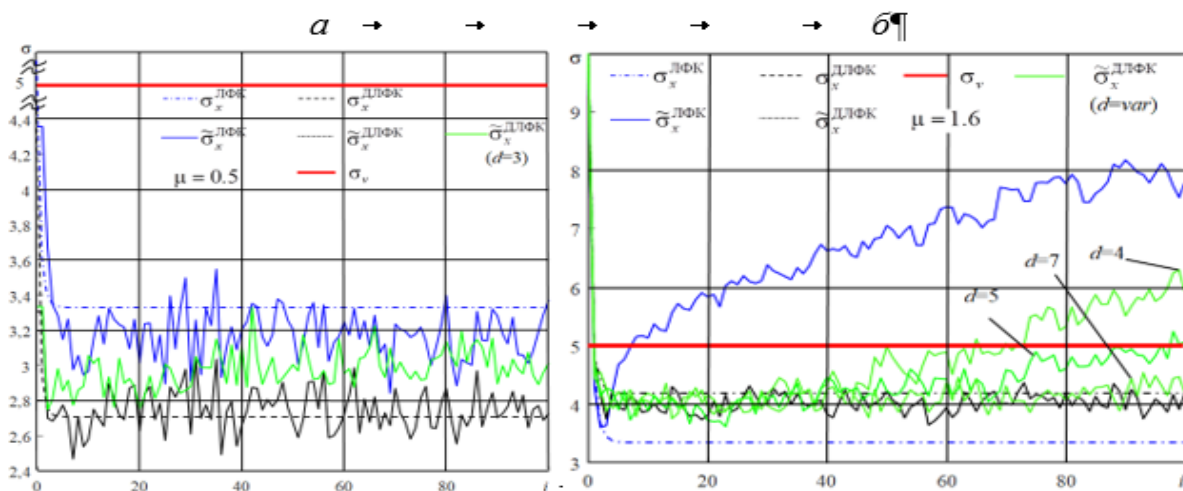


Рис. 2. Оценивание процесса  $x_i$  с различными значениями порядка  $\mu$  и параметра  $d$ :  
а – при  $\mu = 0.5$ , б – при  $\mu = 1.6$



Таблица 3. Постановка нелинейной задачи фильтрации

| Математическая модель           | Дискретная нелинейная стохастическая система целого порядка                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Дискретная нелинейная стохастическая система дробного порядка                                                                                                                                                                                   |
|---------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Уравнение для вектора состояния | $\Delta^1 \mathbf{x}_i = \Phi_{di} \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{w}_i, \Phi_{di} = \Phi_i - \mathbf{I},$ $\mathbf{x}_i = \Phi_i \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{w}_i$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | $\Delta^\mu \mathbf{x}_i = \Phi_{di}(\mathbf{x}_{i-1}) + \mathbf{w}_i,$ $\mathbf{x}_i = \Delta^\mu \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^i (-1)^j \Gamma_j \mathbf{x}_{i-j}$                                                                                |
|                                 | $\begin{bmatrix} x_i \\ a_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i-1} x_{i-1} \\ a_{i-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{x_i} \\ w_{a_i} \end{bmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | $\begin{bmatrix} x_i \\ a_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{i-1} - 1)x_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{x_i} \\ w_{a_i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^i (-1)^j \binom{\mu}{j} x_{i-j} \\ -1a_{i-1} \end{bmatrix}$ |
| Измерения                       | $\mathbf{y}_i = \mathbf{s}_i(\mathbf{x}_i) + \mathbf{v}_i$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                 |
|                                 | $y_i = x_i + v_i$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                 |
| Начальные условия               | $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \mathbf{P}_0 = E[(\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)(\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)^T]$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                 |
|                                 | $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ a_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} P_{x_0} & 0 \\ 0 & P_{a_0} \end{bmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                 |
| Порождающие шумы                | $\bar{\mathbf{w}}_i = 0, \quad E\{\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j^T\} = \delta_{ij} \mathbf{Q}_i$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                 |
|                                 | $\bar{\mathbf{w}}_i = \begin{bmatrix} \bar{w}_{x_i} \\ \bar{w}_{a_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} Q_x & 0 \\ 0 & Q_a \end{bmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                 |
| Шумы измерения                  | $\bar{\mathbf{v}}_i = 0, \quad E\{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j^T\} = \delta_{ij} \mathbf{R}_i$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                 |
|                                 | $\bar{v}_i = 0, \quad E\{v_i v_i\} = R = \sigma_v^2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                 |
| Взаимная корреляция             | $E\{\mathbf{x}_0 \mathbf{w}_i^T\} = 0; E\{\mathbf{w}_i \mathbf{v}_i^T\} = 0; E\{\mathbf{x}_0 \mathbf{v}_i^T\} = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                 |
|                                 | $E\{\mathbf{x}_0 \mathbf{w}_i^T\} = 0; E\{\mathbf{w}_i v_i\} = 0; E\{\mathbf{x}_0 v_i\} = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                 |
| Функции, матрицы                | $\Phi_i(\mathbf{x}_{i-1}), \Phi_{di}(\mathbf{x}_{i-1}), \mathbf{s}_i(\mathbf{x}_i) - n \text{ и } m \text{ - мерные нелинейные вектор- функции,}$ $\mathbf{Q}_i - p \times p, \mathbf{R}_i - m \times m,$ $\Phi_i^x \equiv \Phi_i^x(\hat{\mathbf{x}}_{i-1}) = \left[ \frac{\partial \Phi_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{i-1}}, \quad \Phi_{di}^x \equiv \Phi_{di}^x(\hat{\mathbf{x}}_{i-1}) = \left[ \frac{\partial \Phi_{di}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{i-1}} - n \times n,$ $\mathbf{H}_i^x \equiv \mathbf{H}_i^x(\hat{\mathbf{x}}_{i/i-1}) = \left[ \frac{\partial \mathbf{s}_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{i/i-1}} - m \times n$ |                                                                                                                                                                                                                                                 |
|                                 | $\Phi_i = \begin{bmatrix} a_{i-1} x_{i-1} \\ a_{i-1} \end{bmatrix}, \quad \Phi_{di} = \begin{bmatrix} (a_{i-1} - 1)x_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_i^x(\hat{\mathbf{x}}_{i-1}) = \begin{bmatrix} \hat{a}_{i-1} & \hat{x}_{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi_{di}^x(\hat{\mathbf{x}}_{i-1}) = \begin{bmatrix} (\hat{a}_{i-1} - 1) & \hat{x}_{i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$ $\mathbf{H}_i^x(\hat{\mathbf{x}}_{i/i-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                 |



Окончание таблицы 3

| Математическая модель   | Дискретная нелинейная стохастическая система целого порядка                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Дискретная нелинейная стохастическая система дробного порядка |
|-------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| Минимизируемый критерий | $J_i = E_{\mathbf{x}_i, \mathbf{Y}_i} (\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{Y}_i))^T (\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{Y}_i)), \mathbf{Y}_i = (\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, \dots, \mathbf{y}_i^T)^T$ $J_i = E_{\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i} (\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{y}_i))^T (\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{y}_i)), \mathbf{y}_i = (y_1, y_2, \dots, y_i)^T$ |                                                               |

Таблица 4. Соотношения для алгоритма ОФК

| Решение задачи фильтрации            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|--------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Математическая модель                | ОФК                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | ДОФК                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| Прогноз                              | $\hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} = \Delta^1 \hat{\mathbf{x}}_i + \hat{\mathbf{x}}_{i-1} = \Phi_i(\hat{\mathbf{x}}_{i-1})$ $\begin{bmatrix} \hat{x}_{i/i-1} \\ \hat{a}_{i/i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\hat{a}_{i-1} \hat{x}_{i-1}) \\ \hat{a}_{i-1} \end{bmatrix}$                                                        | $\Delta^\mu \hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} = \Phi_{di}(\hat{\mathbf{x}}_{i-1}), \hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} = \Delta^\mu \hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} - \sum_{j=1}^i (-1)^j \Gamma_j \hat{\mathbf{x}}_{i-j}$ $\begin{bmatrix} \hat{x}_{i/i-1} \\ \hat{a}_{i/i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\hat{a}_{i-1} - 1) \hat{x}_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^i (-1)^j \binom{\mu}{j} \hat{x}_{i-j} \\ -1 \hat{a}_{i-1} \end{bmatrix}$ |
| Матрица ковариаций ошибок прогноза   | $\mathbf{P}_{i/i-1} = \Phi_i^x \mathbf{P}_{i-1} (\Phi_i^x)^T + \mathbf{Q}_i$                                                                                                                                                                                                                                                | $\mathbf{P}_{i/i-1} = (\Phi_{di}^x + \Gamma_1) \mathbf{P}_{i-1} (\Phi_{di}^x + \Gamma_1)^T + \mathbf{Q}_i +$ $+ \sum_{j=2}^i \Gamma_j \mathbf{P}_{i-j} \Gamma_j^T$ $\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \Gamma_j = \begin{bmatrix} \gamma_j^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \gamma_j^1 = \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-j+1)}{j!}, j = \overline{2, i}$                                                                        |
| Коэффициент усиления                 | $\mathbf{K}_i = \mathbf{P}_{i/i-1} (\mathbf{H}_i^x)^T (\mathbf{H}_i^x \mathbf{P}_{i/i-1} (\mathbf{H}_i^x)^T + \mathbf{R}_i)^{-1}$                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| Оценка                               | $\hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} + \mathbf{K}_i [\mathbf{y}_i - \mathbf{s}_i(\hat{\mathbf{x}}_{i/i-1})]$ $\begin{bmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{a}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{i/i-1} \\ \hat{a}_{i/i-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{1,i} \\ k_{2,i} \end{bmatrix} (y_i - \hat{x}_{i/i-1})$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| Матрица ковариаций ошибок оценивания | $\mathbf{P}_i = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_i \mathbf{H}_i^x) \mathbf{P}_{i/i-1}$                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |

$y_i = x_i + v_i$ . Такая задача совместного оценивания состояния и идентификации является нелинейной [59], и для ее решения необходимо применение ОФК, если выбраны для решения алгоритмы калмановского типа. В данном примере

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} a_{i-1} x_{i-1} \\ a_{i-1} \end{bmatrix}, \Phi_{di} = \begin{bmatrix} (a_{i-1} - 1) x_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix},$$

а параметры ДОФК, следующие:

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0.0001 \end{bmatrix}, R = 25.$$

2.1. Сопоставление фильтров. Выводы, которые были сделаны при сопоставлении ЛФК целого и дробного порядков в разд. 1.1, справедливы и для случая ОФК целого и дробного порядков, представленного в табл. 4. ОФК является частным случаем ДОФК.

Для иллюстрирующего примера системы проведено совместное оценивание и дано сравнение результатов для ОФК целого и дробного порядков для различных значений порядка  $\mu = \mu_1 : 0.5; 1; 1.6$ . Результаты совместной оценки показаны на рис. 3, 4.

При  $\mu = 1$  ОФК совпадает с ДОФК. ОФК позволяет получить оптимальное решение только для этого значения  $\mu$  и не является оптимальным при других значениях  $\mu$ . В общем случае, когда  $\mu \neq 1$ , оптимальная оценка и матрица ковариации для ошибки оценивания определяются с помощью выражений для ОФК дробного порядка.

При  $\mu = 0.5$  точность оценки неизвестного параметра  $a_i$  с помощью ДОФК выше, чем для традиционного ОФК. Точности оценки координат для сравниваемых фильтров близки.

При  $\mu = 1.6$  точности оценки параметра  $a_i$  для обоих фильтров близки. Точность оценки координаты у ДОФК заметно выше, чем у ОФК целого порядка.

Как и для ЛФК для расширенного ФК в практических реализациях количество элементов в суммах для уравнений прогноза оценки и матрицы ковариаций ошибок прогноза дискрет-

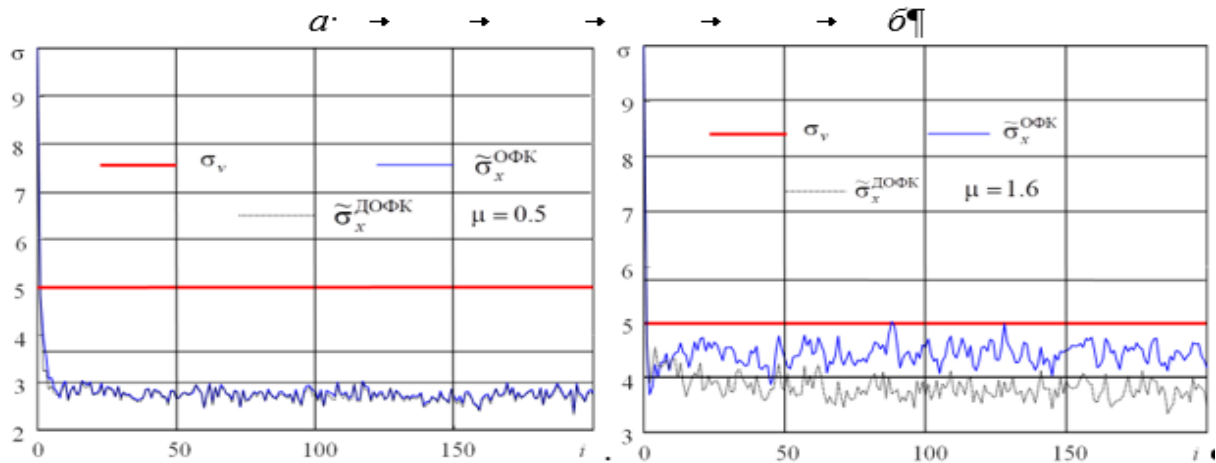


Рис. 3. Оценивание переменной состояния  $x$ : а – при  $\mu = 0.5$ , б – при  $\mu = 1.6$ .

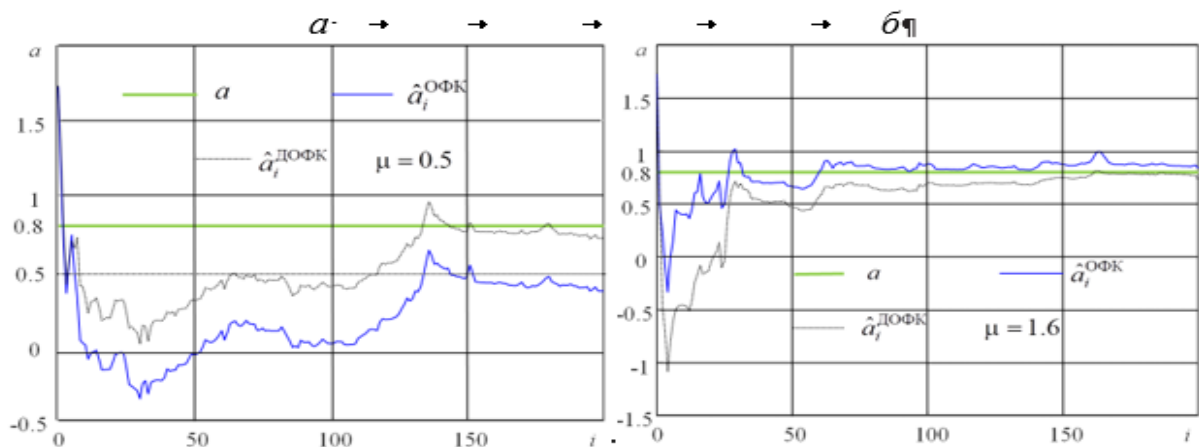


Рис. 4. Оценивание параметра  $a$ : а – при  $\mu = 0.5$ , б – при  $\mu = 1.6$ .

ной нелинейной стохастической системы дробного порядка в табл. 4 должно быть ограничено заранее заданным значением  $d$ .

**Заключение.** Рассмотрены математические модели дискретных динамических систем дробного порядка с использованием разности дробного порядка Грюнвальда-Летникова. Приведены постановка и решение задачи оценивания состояния дискретных динамических систем целого и дробного порядков с помощью ЛФК и ОФК. Представлены дискретные фильтры калмановского типа дробного порядка для оценивания состояния и параметров линейных и нелинейных дискретных систем дробного порядка. Дано сопоставление дискретных ФК целочисленного и дробного порядков. Рассмотрены особенности и достоинства дробного алгоритма, которые проиллюстрированы на примерах использования ЛФК и ОФК. Сформулирована оценка точности алгоритмов калмановского типа дробного порядка.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Летников А.В. Теория дифференцирования с произвольным указателем // Мат. сб. 1868. Т. 3. Вып.1. С. 1–68.
2. Oldham K.B., Spanier J. The Fractional Calculus. Acad. Press., 1974.
3. Васильев В.В., Симак Л.А. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. Киев: НАН Украины, 2008.
4. Samko S.G., Ross B. Integration and Differentiation to a Variable Fractional Order // Integr. Transf. Spec. Funct. 1993. V. 1. No 4. P. 277–300.
5. Lorenzo C.F., Hartley T.T. Initialization, Conceptualization, and Application in the Generalized Fractional Calculus // Crit. Rev. Biomed. Eng. 2007. V. 35. No 6. P. 477–553.
6. Coimbra C.F.M. Mechanics with Variable-order Differential Operators // Ann. Der Phys. 2003. V. 12. No (11–12). P. 692–703.
7. Dabiri A., Moghaddam B.P., Machado J.A.T. Optimal Variable-order Fractional PID Controllers for Dynamical Systems // J. Comput. Appl. Math. 2018. V. 339. P. 40–48.
8. Агаджанов А.Н. Фрактальные функции с непрерывными производными типа Вейля переменного порядка в задачах управления распределенными системами // ДАН. 2017. Т. 473. № 1. С. 7–11.
9. Agadzhanov A.N. Fractal and Infinitely Differentiable Functions in Compactly Supported Control Problems for Hyperbolic Distributed Systems // Doklady Mathematics. 2008. V. 77. No 1. P. 98–101.
10. Постнов С.С. Оптимальное управление для систем, моделируемых диффузионно-волновым уравнением // Владикавказский математический журн. 2022. Т. 24. Вып. 3. С. 108–119.
11. Бештоков М.Х. Краевые задачи для уравнения соболевского типа дробного порядка с эффектом памяти // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26. № 4. С. 607–629.
12. Irwaq I.A., Alquran M., Ali M., Jaradat I., Noorani M.S.M. Attractive New Fractional-integer Power Series Method for Solving Singularly Perturbed Differential Equations Involving Mixed Fractional and Integer Derivatives // Results in Physics. 2021. V. 20. No 103780.
13. Yuan W., Zhang Ch., Li D. Linearized Fast Time-stepping Schemes for Time-space Fractional Schrodinger Equations // Physica D. 2023. V. 454. No 133865.
14. Kobelev Y.L., Kobelev L.Y., Klimontovich Y.L. Anomalous Diffusion with Time-and Coordinate-dependent Memory // Dokl. Phys. 2003. V. 48. No 6. P. 264–268.
15. Chen Y., Wei Y., Liu D., Yu H. Numerical Solution for a Class of Nonlinear Variable Order Fractional Differential Equations with Legendre Wavelets // Appl. Math. Lett. 2015. V. 46. P. 83–88.
16. Shen S., Liu F., Chen J., Turner I., Anh V. Numerical Techniques for the Variable Order Time Fractional Diffusion Equation. Appl. Math. Comput. 2011. V. 218. No 22. P. 10861–10870.
17. Lin R., Liu F., Anh V., Turner I. Stability and Convergence of a New Explicit Finite-difference Approximation for the Variable-order Nonlinear Fractional Diffusion Equation // Appl. Math. Comput. 2009. V. 212. No 2. P. 435–445.
18. Razminia A., Dizaji A.F., Majd V.J. Solution Existence for Nonautonomous Variable-order Fractional Differential Equations // Math. Comput. Model. 2012. V. 55. No 3. P. 1106–1117.
19. Zayernouri M., Karniadakis G.E. Fractional Spectral Collocation Methods for Linear and Nonlinear Variable Order FPDEs // J. Comput. Phys. 2015. V. 293. No C. P. 312–338.
20. Chen S., Liu F., Burrage K. Numerical Simulation of a New Twodimensional Variable-order Fractional Percolation Equation in Nonhomogeneous Porous Media // Comput. Math. Appl. 2014. V. 68. No 12. P. 2133–2141.
21. Zhao X., Sun Z., Karniadakis G.E. Second-order Approximations for Variable Order Fractional Derivatives: Algorithms and Applications // J. Comput. Phys. 2015. V. 293. P. 184–200.
22. Cao J., Qiu Y. A High Order Numerical Scheme for Variable Order Fractional Ordinary Differential Equation // Appl. Math. Lett. 2016. V. 61. P. 88–94.
23. Sun H., Zhao X., Sun Zh. The Temporal Second Order Difference Schemes Based on the Interpolation Approximation for the Time Multi-term Fractional Wave Equation // J. Scientific Computing. 2019. V. 78. P. 467–498.
24. Muthukumar P., Balasubramaniam P., Ratnavelu K. Fast Projective Synchronization of Fractional Order Chaotic and Reverse Chaotic Systems with its Application to an Affine Cipher Using Date of Birth (DOB) // Nonlinear Dynam. 2015. V. 80. No 4. P. 1883–1897.

25. Balasubramaniam P., Muthukumar P., Ratnavelu K. Theoretical and Practical Applications of Fuzzy Fractional Integral Sliding Mode Control for Fractional-order Dynamical System // *Nonlinear Dynam.* 2015. V. 80. No 1–2. P. 249–267.
26. Ge Z., Ou C. Chaos Synchronization of Fractional Order Modified Duffing Systems with Parameters Excited by a Chaotic Signal // *Chaos Soliton. Fract.* 2008. V. 35. No 4. P. 705–717.
27. Muthukumar P., Balasubramaniam P., Ratnavelu K. Synchronization and an Application of a Novel Fractional Order King Cobra Chaotic System // *Chaos.* 2014. V. 24. No 3033105.
28. Muthukumar P., Balasubramaniam P., Ratnavelu K. Synchronization of a Novel Fractional Order Stretch-twist-fold (STF) Flow Chaotic System and its Application to a New Authenticated Encryption Scheme (AES) // *Nonlinear Dynam.* 2014. V. 77. No 4. P. 1547–1559.
29. Glöckle W.G., Nonnenmacher T.F. A Fractional Calculus Approach to Self-similar Protein Dynamics // *Biophys. J.* 1995. V. 68. No 1. P. 46–53.
30. He G., Luo M. Dynamic Behavior of Fractional Order Duffing Chaotic System and its Synchronization Via Singly Active Control // *Appl. Math. Mech.* 2012. V. 33. No 5. P. 567–582.
31. Wang S., Wu R. Dynamic Analysis of a 5D Fractional-order Hyperchaotic System // *Inter. J. Control Autom. Syst.* 2017. V. 15. No 3. P. 1003–1010.
32. Sun H.G., Chang A., Zhang Y., Chen W. A Review on Variable-Order Fractional Differential Equations: Mathematical Foundations, Physical Models, Numerical Methods And Applications // *Fractional Calculus & Applied Analysis.* 2019. V. 22. No. 1.
33. Kumar P., Chaudhary S.K. Analysis of Fractional Order Control System with Performance and Stability // *Intern. J. Eng. Sci. Tech.* 2017. V. 9. No 5. P. 408–416.
34. Obembe A.D., Hossain M.E., Abu-Khamsin S.A. Variable-order Derivative Time Fractional Diffusion Model for Heterogeneous Porous Media // *J. Petrol. Sci. Eng.* 2017. V. 152. P. 391–405.
35. Awotunde A.A., Ghanam R.A., Tatar N.E. Artificial Boundary Condition for a Modified Fractional Diffusion Problem. Bound // *Value Probl.* 2015. No 1. P. 20.
36. Cai W., Chen W., Fang J., Holm S. A Survey on Fractional Derivative Modeling of Power-law Frequency-dependent Viscous Dissipative and Scattering Attenuation in Acoustic Wave Propagation // *Appl. Mech. Rev.* 2018. V. 70. No 3. 030802.
37. Jiang S., Zhang J., Qian Z., Zhang Z. Fast Evaluation of the Caputo Fractional Derivative and its Applications to Fractional Diffusion Equations. *Commun. Comput // Phys.* 2017. V. 21. No 3. P. 650–678.
38. Povstenko Y., Klekot J. The Dirichlet Problem for the Time-fractional Advection-diffusion Equation in a Line Segment // *Bound. Value Probl.* 2016. No 1. P. 89.
39. Zhang L., Li S. Regularity of Weak Solutions of the Cauchy Problem to a Fractional Porous Medium Equation // *Bound. Value Probl.* 2015. No 1. P. 1–6.
40. Sweilam N.H., Al-Mekhlafi S.M. Numerical Study for Multi-strain Tuberculosis (TB) Model of Variable-order Fractional Derivatives // *J. Adv. Res.* 2016. V. 7. No 2. P. 271–283.
41. Sun H.G., Chen Y., Chen W. Random-order Fractional Differential Equation Models // *Signal Process.* 2011. V. 91. No 3. P. 525–530.
42. Sun H.G., Chen W., Sheng H., Chen Y. On Mean Square Displacement Behaviors of Anomalous Diffusions with Variable and Random Orders // *Phys. Lett.* 2010. V. 374. No 7. P. 906–910.
43. Sahoo S.K., Gupta V., Dubey Sh. A Robust Higher-order Finite Difference Technique for a Time-fractional Singularly Perturbed Problem // *Mathematics and Computers in Simulation.* 2024. V. 215. P. 43–68.
44. Xu Q., Ma X., Cheng Z., Xiao X., Ma Zh. Numerical Simulation of Conduction Problem with Evaporation Based on a SPH Model Improved by a Fractional Order Convection-diffusion Equation // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* 2023. V. 155. P. 668–681.
45. Степанов О.А. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Изд. 3-е, исправ. и доп. Ч. 1. Введение в теорию оценивания. Санкт-Петербург: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017.
46. Степанов О.А. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Изд. 3-е, исправ. и доп. Ч. 2. Введение в теорию фильтрации. Санкт-Петербург: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017.
47. Stepanov O.A., Amosov O.S., Toropov A.V. Comparison of Kalman-type Algorithms in Nonlinear Navigation Problems for Autonomous Vehicles // *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline).* 2007. V. 6. Pt 1. P. 493–498.
48. Haykin S. Kalman Filtering and Neural Networks. N. Y.: John Wiley&Sons. Inc., 2001.
49. Sierociuk D., Dzieliński A. Fractional Kalman Filter Algorithm for the States, Parameters and Order of Fractional System Estimation // *Intern. J. Applied Mathematics and Computer Science.* 2006. V. 16. Iss. 1. P. 129–149.
50. Sierociuk D., Macias M. Triple Estimation of Fractional Variable Order, Parameters, and State Variables Based on the Unscented Fractional Order Kalman Filter // *Sensors.* 2021. V. 21. P. 8159.  
<https://doi.org/10.3390/s21238159>.
51. Xue G., Xu Y., Guo J., Zhao W. The Fractional Kalman Filter-Based Asynchronous Multirate Sensor Information Fusion // *Hindawi Complexity.* Dec. 2018. V. 2018. Article ID1450353. 10 p.  
<https://doi.org/10.1155/2018/1450353>.
52. Cui Ch., Zhang L., Yan G., Sun X. Track Fusion Fractional Kalman Filter // 41st Chinese Control Conference (CCC). Hefei, China, 2022. No 22507536. P. 6.

53. *Tripathi R.P., Singh A.K., Gangwar P.* Innovation-based Fractional Order Adaptive Kalman Filter // J. Electrical Engineering. 2020. V. 71. No 1. P. 60–64.
54. *Amosov O.S., Amosova S.G.* Peculiarities and Applications of Stochastic Processes with Fractal Properties // Sensors. 2021. V. 21. Iss. 17. № 5960.  
<https://doi.org/10.3390/s21175960>.
55. *Amosov O.S.* Peculiarities of Stochastic Processes with Fractal Properties and Their Applications in Problems of Navigation Information Processing // 25th Saint Petersburg Intern. Conf. on Integrated Navigation Systems (ICINS2018). Proceedings. Saint Petersburg, 2018. P. 1–5.  
<https://doi.org/10.23919/ICINS.2018.8405867>.
56. *Amosov O.S., Baena S.G.* Wavelet Based Filtering of Mobile Object Fractional Trajectory Parameters // 13th IEEE Intern. Conf. on Control and Automation (ICCA). Ohrid, 2017. № 8003045. P. 118–123.  
<https://doi.org/10.1109/ICCA.2017.8003045>.
57. *Амосов О.С., Баена С.Г.* Выявление и оценивание динамических процессов с фрактальной структурой применительно к задачам обработки навигационной информации // XIX конф. молодых ученых с международным участием. Навигация и управление движением. Санкт-Петербург: Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017. С. 124–126.
58. *Амосов О.С., Амосова С.Г.* Оценивание состояния и параметров дробных динамических систем с использованием дробных фильтров калмановского типа // Матер. XXXIII конф. памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н. Н. Острякова. 15-я мультиконф. по проблемам управления. Санкт-Петербург: Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2022. С. 96–99.
59. *Амосов О.С., Амосова С.Г.* Дробные фильтры калмановского типа для оценивания состояния, параметров и порядка дробной динамической системы в задачах обработки навигационной информации // Юбилейная XXX Санкт-Петербургская междунар. конф. по интегрированным навигационным системам: сборник материалов. Санкт-Петербург: «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2023. С. 139–142.

---

## УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

---

УДК 517.977

### МЕТОД КРОТОВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ГЛОБАЛЬНЫХ УЛУЧШЕНИЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧЕ МАКСИМИЗАЦИИ ВЕРОЯТНОСТИ ПОПАДАНИЯ В ЗАДАННУЮ ОБЛАСТЬ<sup>1</sup>

© 2024 г. **М. М. Хрусталева<sup>a</sup>**, **К. А. Царьков<sup>a, \*</sup>**

<sup>a</sup>ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

\*e-mail: k6472@mail.ru

Поступила в редакцию 27.09.2023 г.

После доработки 12.12.2023 г.

Принята к публикации 29.01.2024 г.

Подробно изложен итерационный метод глобального улучшения произвольно заданной программы управления нелинейной динамической системой, предложенный В. Ф. Кротовым. Обсуждаются различные варианты приложения метода Кротова к одной задаче стохастической вероятностной оптимизации.

*Ключевые слова:* метод Кротова, глобальное улучшение, вероятностный критерий

DOI: 10.31857/S0002338824050038, EDN: TEKZSK

### KROTOV GLOBAL SEQUENTIAL IMPROVEMENT METHOD AS APPLIED TO THE PROBLEM OF MAXIMIZING THE PROBABILITY OF GETTING INTO A GIVEN AREA

**М. М. Khrustaleva<sup>a</sup>**, **К. А. Tsarkov<sup>a, \*</sup>**

<sup>a</sup>Moscow, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences RAS

\*e-mail: k6472@mail.ru

In this paper we describe in detail the iterative method of global improvement of an arbitrary given control in a nonlinear dynamical system, proposed by V. F. Krotov. Then we discuss various options for applying the Krotov method to a problem of stochastic probabilistic optimization.

*Keywords:* Krotov method, global improvement, probabilistic criteria

**Введение.** Постановка задачи улучшения программы управления детерминированной нелинейной динамической системой относительно заданного функционала качества и метод ее решения были предложены в конце прошлого века в работах В. Ф. Кротова (см. [1]).

Проблема построения улучшений естественным образом возникает всякий раз при исследовании задачи оптимального управления, в которой решение (оптимальную программу управления) не удастся определить, исходя из необходимых условий оптимальности, например, в силу чрезмерной трудоемкости или неразрешимости соответствующей системы соотношений. В этом случае естественно перейти от задачи оптимизации к задаче построения последовательных улучшений некоторой заданной программы управления. С практической точки зрения такой переход означает потенциальный отказ от неизвестной оптимальной программы управления в пользу известной программы, возможно далекой от оптимальной, но более качественной, чем исходно заданная. Если улучшение качества управления оказывается

<sup>1</sup> Разделы 4–6 написаны К. А. Царьковым за счет средств Российского научного фонда (проект № 22-11-00042) в ИПУ РАН. <https://rscf.ru/project/22-11-00042>.



достаточно существенным, то этот переход можно считать целесообразным. С точки зрения теории экстремальных задач необходимые условия оптимальности заменяются на итерационную процедуру построения оптимизирующих последовательностей. С вычислительной точки зрения такой подход оказывается, как правило, значительно выгоднее в сравнении с численными процедурами разрешения соотношений, составляющих необходимые условия оптимальности, хотя и не гарантирует отыскание оптимального решения.

К хорошо известным методам построения (локально) оптимизирующих последовательностей относятся методы типа градиентного спуска. Отличительной особенностью процедуры, предложенной В. Ф. Кротовым, является нелокальность получаемых улучшений, т.е. построенное на каждом шаге новое, улучшенное, управление не обязано быть близко к управлению, построенному на предыдущем шаге, ни в смысле какой-либо нормы в пространстве допустимых управлений, ни в смысле значений оптимизируемого функционала качества. Отсюда вытекают основное достоинство и основной недостаток метода Кротова: зачастую он позволяет существенно улучшить качество управления за малое число повторных итераций, однако проанализировать при этом наличие сходимости и оценить ее скорость оказывается затруднительно.

В работах [2, 3] метод Кротова эффективно применялся при решении линейных задач оптимизации управления. Было показано, что для линейных задач характерно построение наиболее качественного улучшения уже за одну первую итерацию применения метода. Дальнейшие итерации вносят определенные корректировки в структуру улучшаемой программы управления, но на значениях функционала качества сказываются незначительно. При этом отмечалось, что ключевую роль играет линейность задачи по переменной состояния, в то время как переменная управления может входить в динамическую систему и в функционал качества нелинейным образом [3]. В недавней работе авторов [4] было показано, что то же самое имеет место и в случае приложения метода Кротова к решению стохастических задач оптимизации.

Основные идеи метода Кротова были существенно развиты в [5, 6] в направлении получения новых необходимых условий оптимальности в линейных и нелинейных задачах оптимального управления. Простейшие необходимые условия оптимальности вытекают непосредственно из концепции улучшения: если программа управления оптимальна, то ее строгое улучшение (в частности, методом Кротова) невозможно. В указанных публикациях также были тщательно исследованы взаимосвязи между такими свойствами процессов управления, как неулучшаемость относительно метода Кротова и экстремальность в смысле принципа максимума Понтрягина.

В статье авторы предполагают развить методологию построения глобальных улучшений Кротова в приложении к стохастическим задачам вероятностной оптимизации. С этой целью в разд. 2 и 3 формулируется сам метод Кротова и приводится его обоснование. Затем в разд. 4 и 5 выделяется класс задач, более широкий, чем полностью линейные по состоянию задачи, к которым метод Кротова может быть эффективно применен. В разд. 6 метод глобальных улучшений Кротова применяется к исследованию стохастических задач оптимизации с вероятностным критерием. Формулируется два различных подхода к решению. Эффективность и особенности применения этих подходов демонстрируются несколькими примерами в разд. 7.

Настоящая работа является продолжением исследований, проведенных в статье [4], где метод Кротова в его линейной реализации применялся для построения улучшений в задаче вероятностной оптимизации стохастической системы диффузионно-скачкообразного типа. При этом исходный вероятностный критерий качества заменялся его оценкой чебышевского типа. Как следствие, при построении улучшения относительно оценки отсутствовала возможность гарантировать такое же улучшение относительно исходного функционала вероятности. Здесь предлагается применять нелинейный метод Кротова непосредственно к оптимизируемому функционалу вероятности. С этой целью изучаемый класс задач сужен до стохастических систем диффузионного типа. Сравнение результатов, полученных двумя указанными способами, позволяет, по крайней мере в ряде частных ситуаций, ответить на поставленный в [4] вопрос об эффективности использования оценок чебышевского типа при решении задач вероятностной оптимизации и улучшения.

**1. Постановка задачи улучшения.** На интервале времени  $[0; T]$  рассмотрим управляемую динамическую систему

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$



где  $u \in \mathcal{U} := \{u \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T]) : u(t) \in U \forall t \in [0; T]\}$ ,  $U$  — компакт в  $\mathbb{R}^m$ ,  $\mathcal{L}_\infty^m([0; T])$  — пространство измеримых по Лебегу и существенно ограниченных  $m$ -мерных вектор-функций на отрезке  $[0; T]$ . Здесь и ниже символ  $\forall$  означает выполнение условия для почти всех значений аргумента относительно меры Лебега. Будем предполагать, что отображение  $f : [0; T] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  непрерывно дифференцируемо по  $x$ , а абсолютно непрерывное решение задачи Коши (1.1) однозначно определено на отрезке  $[0; T]$  при любом  $u \in \mathcal{U}$ .

Пусть  $O_X$  — некоторое открытое множество в  $\mathbb{R}^n$ , на котором задана непрерывно дифференцируемая функция  $J$ ,  $C_X^t \subset O_X$  — множество достижимости системы (1.1) в момент времени  $t \in [0; T]$  и  $C_X := \bigcup_{t \in [0; T]} C_X^t$ . Предположим, что исследуется оптимизационная проблема

$$J(x(T)) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}}. \quad (1.2)$$

Сформулируем задачу улучшения, согласованную с (1.2). А именно будем считать, что некоторое (не оптимальное) управление  $\hat{u} \in \mathcal{U}$  уже задано, этому управлению соответствует траектория  $\hat{x}(t)$  как решение задачи Коши (1) при  $u = \hat{u}$ , и качество данного управления численно характеризуется значением  $J(\hat{x}(T))$ . Требуется при этих предположениях построить новое управление  $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ , которому соответствовала бы новая траектория  $\tilde{x}(t)$  и для которого качество управления  $J(\tilde{x}(T))$  удовлетворяло бы неравенству

$$J(\tilde{x}(T)) < J(\hat{x}(T)). \quad (1.3)$$

Смысл перехода от задачи оптимизации (1.1) — (1.2) к задаче улучшения (1.1) — (1.3) состоит в следующем. Как только в задаче улучшения будет описана процедура построения нового управления  $\tilde{u}$  по произвольно заданному  $\hat{u} \in \mathcal{U}$ , ее многократное итерационное применение позволит находить минимизирующие последовательности в задаче (1.2). Естественно при этом пытаться строить процедуру улучшения так, чтобы разница между числовыми значениями в правой и левой частях (1.3) была по возможности больше.

Сформулируем один из допустимых подходов к решению задачи улучшения (1.1) — (1.3).

**2. Метод Кротова.** Обозначим через  $\mathcal{AC}^n([0; T])$  пространство абсолютно непрерывных  $n$ -мерных вектор-функций на отрезке  $[0; T]$ . Пусть  $\hat{u} \in \mathcal{U}$  — некоторая произвольная программа управления, а  $\hat{x} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$  — соответствующее ей (единственное) решение задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \hat{u}(t)), \quad x(0) = x_0. \quad (2.1)$$

Пусть далее  $\psi \in \mathcal{AC}^n([0; T])$  — решение линейной задачи Коши для сопряженной системы уравнений

$$\dot{\psi}(t) = -f_x(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))^T \psi(t), \quad \psi(T) = -J'(\hat{x}(T)), \quad (2.2)$$

где  $J'(\hat{x}(T))$  — вектор-градиент функции  $J$  в точке  $\hat{x}(T)$ , а  $f_x(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))$  — матрица частных производных (матрица Якоби) функции  $f$  по переменной  $x$  в точке  $(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))$ . И пусть, кроме того,  $\alpha, \beta \geq 0$  — некоторые числа. Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \phi(t, x) &:= \phi(t, x; \alpha, \beta) = \\ &= \langle \hat{\psi}(t), x \rangle - \frac{\alpha}{2} e^{\beta(T-t)} \|x - \hat{x}(t)\|^2. \end{aligned}$$

Здесь  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  означает скалярное произведение в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\|x\|^2 := \langle x, x \rangle$ .

Введем следующие обозначения:

$$R(t, x, u) = \phi_t(t, x) + \langle \phi_x(t, x), f(t, x, u) \rangle,$$

$$G(x) = \phi(T, x) - \phi(0, x_0) + J(x).$$

Относительно исходных данных в задаче (1.1) — (1.3) будем считать, что выполняется следующее *основное предположение*.

Пусть  $\hat{u} \in \mathcal{U}$ ,  $\hat{x} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$  — решение (2.1),  $\hat{\psi} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$  — решение (2.2). Тогда найдутся такие неотрицательные числа  $\alpha$  и  $\beta$ , что

$$R(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} R(t, x, \hat{u}(t)) \quad \forall t \in [0; T], \quad (2.3)$$

$$G(\hat{x}(T)) = \max_{x \in C_X} G(x). \quad (2.4)$$

В разд. 4 и 5 будут описаны достаточно широкие и регулярно встречающиеся в приложениях классы задач, для которых условия (2.3), (2.4) заведомо выполняются.

Следующий результат был впервые сформулирован В. Ф. Кротовым (см. [1, теорема 1]).

**Т е о р е м а 1.** Пусть  $\hat{u} \in \mathcal{U}$ ,  $\hat{x} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$  – решение (2.1),  $\hat{\psi} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$  – решение (2.2), а числа  $\alpha, \beta \geq 0$  таковы, что выполняются (2.3) и (2.4). Допустим, что отображение  $\pi: [0; T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  удовлетворяет условиям:

1)  $R(t, x, \pi(t, x)) = \max_{v \in U} R(t, x, v) \quad \forall t \in [0; T] \quad \forall x \in C_X$ ;

2) существует решение  $\tilde{x} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$  задачи Коши

$$\dot{\tilde{x}}(t) = f(t, \tilde{x}(t), \pi(t, \tilde{x}(t))), \quad \tilde{x}(0) = x_0;$$

3) существует  $\tilde{u} \in \mathcal{U}$  такое, что  $\tilde{u}(t) = \pi(t, \tilde{x}(t)) \quad \forall t \in [0; T]$ .

Тогда  $J(\tilde{x}(T)) \leq J(\hat{x}(T))$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть выполнены все перечисленные условия. Исходя из введенных обозначений и формулы Ньютона-Лейбница, имеем

$$\begin{aligned} J(\tilde{x}(T)) &= G(\tilde{x}(T)) - \phi(T, \tilde{x}(T)) + \phi(0, x_0) = \\ &= G(\tilde{x}(T)) - \int_0^T R(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) dt = G(\tilde{x}(T)) - \\ &\quad - \int_0^T R(t, \tilde{x}(t), \pi(t, \tilde{x}(t))) dt \leq \\ &\leq G(\tilde{x}(T)) - \int_0^T R(t, \tilde{x}(t), \hat{u}(t)) dt \leq G(\hat{x}(T)) - \\ &\quad - \int_0^T R(t, \tilde{x}(t), \hat{u}(t)) dt \leq \\ &\leq G(\hat{x}(T)) - \int_0^T R(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt = J(\hat{x}(T)). \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

В качестве двух элементарных следствий отметим, каким образом результат теоремы 1 связан с решением и стационарными точками в экстремальной задаче (1.1) – (1.2).

**С л е д с т в и е 1** (необходимые условия оптимальности). Пусть  $\hat{u} \in \mathcal{U}$  – оптимальное управление в задаче (1.1) – (1.2),  $\hat{x} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$  – решение (2.1),  $\hat{\psi} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$  – решение (2.2) и существуют неотрицательные числа  $\alpha, \beta$ , такие, что выполняется (2.3) – (2.4). Тогда для любого отображения  $\pi$ , удовлетворяющего условиям 1) – 3) теоремы 1, и для соответствующего ему в смысле этих условий  $\tilde{x} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$  верно равенство  $J(\tilde{x}(T)) = J(\hat{x}(T))$ .

**С л е д с т в и е 2** (связь с принципом максимума). Пусть  $\hat{u}, \hat{x}, \hat{\psi}, \alpha, \beta$  взяты из теоремы 1. Если существует отображение  $\pi$ , для которого выполняются условия 1) – 3) и при почти всех  $t$  верно равенство  $\tilde{u}(t) = \hat{u}(t)$ , то  $\hat{u}$  является экстремалью Понтрягина в задаче (1.1) – (1.2). Иными словами, пара  $(\hat{x}, \hat{u})$  удовлетворяет соотношениям принципа максимума, т.е., с учетом введенных обозначений, имеет место

$$R(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \max_{v \in U} R(t, \hat{x}(t), v) \quad \forall t \in [0; T].$$

В отсутствие дополнительных предположений нельзя гарантировать наличие строгого неравенства (1.3) для управления  $\tilde{u}$ , построенного по теореме 1. Более того, в общем случае неумлучшаемость  $\hat{u} \in \mathcal{U}$  за счет произвольного  $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ , удовлетворяющего условиям теоремы 1, даже не означает, что для пары  $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$  выполнены соотношения принципа максимума [5]. В то же время экстремаль Понтрягина может оказаться улучшаемой [6]. Одно из возможных достаточных условий наличия строгого улучшения (1.3) сформулировано в конце разд. 5.

**3. Численный метод последовательного улучшения.** Наиболее важным следствием теоремы 1 является следующий алгоритм последовательного глобального улучшения произвольно заданной программы управления  $\hat{u} \in \mathcal{U}$ .

Шаг 1. Задать  $\alpha, \beta \geq 0$ ,  $M_\alpha > 0$ , положить  $u^{(0)} = \hat{u}$ ,  $k = 0$ .

Шаг 2. Найти решение  $x^{(k)}(t)$  задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u^{(k)}(t)), \quad x(0) = x_0.$$

Шаг 3. Определить решение  $\psi^{(k)}(t)$  задачи Коши:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= -f_x(t, x^{(k)}(t), u^{(k)}(t))^T \psi(t), \\ \psi(T) &= -J'(x^{(k)}(T)). \end{aligned}$$

Шаг 4. Получить функцию позиционного управления  $\pi^{(k)}(t, x)$ , удовлетворяющую при всех  $x \in C_X$  и почти всех  $t \in [0; T]$  условию

$$\langle \phi_x^{(k)}(t, x), f(t, x, \pi^{(k)}(t, x)) \rangle = \max_{v \in U} \langle \phi_x^{(k)}(t, x), f(t, x, v) \rangle,$$

где

$$\phi_x^{(k)}(t, x) = \psi^{(k)}(t) - \alpha e^{\beta(T-t)} (x - x^{(k)}(t)).$$

Шаг 5. Найти решение  $x^{(k+1)}(t)$  задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \pi^{(k)}(t, x(t))), \quad x(0) = x_0.$$

Шаг 6. Проверить условие улучшения

$$J(x^{(k+1)}(T)) < J(x^{(k)}(T)),$$

при отсутствии улучшения проверить условие остановки

$$\alpha > M_\alpha,$$

в случае выполнения положить  $\tilde{u} = u^{(k)}$  и закончить расчеты, иначе увеличить число  $\alpha$  и перейти к шагу 4.

Шаг 7. Найти  $u^{(k+1)} \in \mathcal{U}$ , такое, что

$$u^{(k+1)}(t) = \pi^{(k)}(t, x^{(k+1)}(t))$$

при почти всех  $t$ .

Шаг 8. Увеличить  $k$  на единицу и перейти к шагу 3.

Шаги 4, 5 и 7 алгоритма неконструктивны и их, как правило, сложно осуществлять аналитически. Однако их возможно совместить и осуществить численно. В этом случае задача максимизации на шаге 4 становится конечномерной, и из ее решения непосредственно определяются значения вектора  $u^{(k+1)}(t)$ .

Поясним сказанное более подробно. Пусть, для определенности, систему дифференциальных уравнений на шаге 5 предполагается интегрировать простейшим методом Эйлера с шагом  $h$ . Тогда на  $k$ -й итерации в момент  $t = 0$  имеем

$$x^{(k+1)}(h) = x_0 + hf(0, x_0, \pi^{(k)}(0, x_0)),$$

где неопределенным является только значение  $\pi^{(k)}(0, x_0)$ . Но это значение может быть найдено решением конечномерной экстремальной задачи

$$\langle \phi_x^{(k)}(0, x_0), f(0, x_0, v) \rangle \rightarrow \max_{v \in U},$$

где  $\phi_x^{(k)}(0, x_0) = \psi^{(k)}(0)$ . При этом  $u^{(k+1)}(0) = \pi^{(k)}(0, x_0)$ . Аналогично если  $x^{(k+1)}(t)$  уже найдено, то

$$x^{(k+1)}(t+h) = x^{(k+1)}(t) + hf(t, x^{(k+1)}(t), u^{(k+1)}(t)),$$

где значение  $u^{(k+1)}(t) = \pi^{(k)}(t, x^{(k+1)}(t))$  находится решением задачи

$$\langle \phi_x^{(k)}(t, x^{(k+1)}(t)), f(t, x^{(k+1)}(t), v) \rangle \rightarrow \max_{v \in U}.$$

Комментарии относительно выбора начального значения параметра  $\beta$  и условия остановки на шаге 6 будут даны в следующих разделах. Выбор начального значения и способа увеличения параметра  $\alpha$  в процессе применения итераций остается на усмотрение исследователя. Вычислительная практика показывает, что, по возможности, следует также уменьшать  $\alpha$  с тем, чтобы добиться более качественного улучшения за меньшее число итераций.

**4. Линейные системы с гладким ограниченным функционалом качества.** Далее сосредоточимся на исследовании двух конкретных классов задач (1.1) – (1.3). Будем считать, что в (1.1) правая часть имеет вид  $f(t, x, u) = A(t, u)x + B(t, u)$ , где  $A : [0; T] \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  и  $B : [0; T] \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  – известные непрерывные отображения, а в (1.2) и (1.3) функция  $J : O_X \rightarrow \mathbb{R}$  дважды непрерывно дифференцируема и ограничена. Не умаляя общности, будем полагать, что значения функции  $J$  ограничены отрезком  $[0; 1]$ .

Соответственно введенным дополнительным предположениям уравнения (2.1) и (2.2) переписываются в виде

$$\dot{x}(t) = A(t, \hat{u}(t))x(t) + B(t, \hat{u}(t)), \quad x(0) = x_0, \quad (4.1)$$

$$\dot{\psi}(t) = -A(t, \hat{u}(t))^T \psi(t), \quad \psi(T) = -J'(\hat{x}(T)). \quad (4.2)$$

Покажем, что в этом случае основное предположение (2.3) – (2.4) выполняется.

**Т е о р е м а 2.** Пусть  $\hat{u} \in \mathcal{U}$ ,  $\hat{x} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$  – решение (4.1),  $\hat{\psi} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$  – решение (4.2), функция  $J : O_X \rightarrow \mathbb{R}$  дважды непрерывно дифференцируема и  $J(x) \in [0; 1] \forall x \in O_X$ . Тогда найдутся такие неотрицательные числа  $\alpha$  и  $\beta$ , что

$$R(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} R(t, x, \hat{u}(t)) \quad \forall t \in [0; T], \quad (4.3)$$

$$G(\hat{x}(T)) = \max_{x \in O_X} G(x). \quad (4.4)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В силу (4.1) и (4.2) при почти всех  $t \in [0; T]$  и всех  $x \in \mathbb{R}^n$  имеет место равенство

$$\begin{aligned} R(t, x, \hat{u}(t)) &= \frac{\alpha\beta}{2} e^{\beta(T-t)} \|x - \hat{x}(t)\|^2 - \\ &- \alpha e^{\beta(T-t)} \left\langle x - \hat{x}(t), A(t, \hat{u}(t)) (x - \hat{x}(t)) \right\rangle + \\ &+ \left\langle \hat{\psi}(t), B(t, \hat{u}(t)) \right\rangle, \end{aligned}$$

а, кроме того, при всех  $x \in O_X$  справедливо

$$G(x) = -\frac{\alpha}{2} \|x - \hat{x}(T)\|^2 + J(x) - \langle J'(\hat{x}(T)), x \rangle - \langle \hat{\psi}(0), x_0 \rangle.$$

Следовательно, достаточно показать, что найдутся  $\alpha > 0$  и  $\beta \geq 0$ , для которых выполняются соотношения

$$\frac{\beta}{2} \|x - \hat{x}(t)\|^2 \geq \langle x - \hat{x}(t), A(t, \hat{u}(t))(x - \hat{x}(t)) \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \in [0; T], \quad (4.5)$$

$$\frac{\alpha}{2} \|x - \hat{x}(T)\|^2 \geq J(x) - J(\hat{x}(T)) - \langle J'(\hat{x}(T)), x - \hat{x}(T) \rangle \quad \forall x \in O_X. \quad (4.6)$$

Начнем с условия (4.5) на  $\beta$ . При  $x = \hat{x}(t)$  неравенство в (4.5) верно. Далее, поскольку отображение  $A$  непрерывно, а множество  $[0; T] \times U$  компактно, то для всех  $x \neq \hat{x}(t)$  при почти всех  $t \in [0; T]$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{\langle x - \hat{x}(t), A(t, \hat{u}(t))(x - \hat{x}(t)) \rangle}{\|x - \hat{x}(t)\|^2} &\leq \\ &\leq \|A(t, \hat{u}(t))\| \leq \max_{(s, v) \in [0; T] \times U} \|A(s, v)\|. \end{aligned}$$

Поэтому условие (4.5) будет выполнено при

$$\beta = 2 \max_{(s, v) \in [0; T] \times U} \|A(s, v)\|.$$

Перейдем к условию (4.6) на  $\alpha$ . Пусть замкнутый шар  $B(\hat{x}(T), \varepsilon)$  радиуса  $\varepsilon$  с центром в  $\hat{x}(T)$  целиком содержится в открытом множестве  $O_X \subset \mathbb{R}^n$ . Так как вторая производная функции  $J$  в силу введенных предположений непрерывна на  $B(\hat{x}(T), \varepsilon)$ , то по теореме о формуле Тейлора (см. [7, с. 145]) для

$$\alpha \geq \alpha_1 := \max_{\|\xi - \hat{x}(T)\| \leq \varepsilon} \|J''(\xi)\|$$

неравенство в условии (4.6) справедливо при  $x \in B(\hat{x}(T), \varepsilon)$ . Для всех остальных  $x \in O_X \setminus B(\hat{x}(T), \varepsilon)$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{J(x) - J(\hat{x}(T)) - \langle J'(\hat{x}(T)), x - \hat{x}(T) \rangle}{\|x - \hat{x}(T)\|^2} &\leq \\ &\leq \frac{|J(x)| + |J(\hat{x}(T))|}{\|x - \hat{x}(T)\|^2} + \frac{\|J'(\hat{x}(T))\|}{\|x - \hat{x}(T)\|} < \\ &< \frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{\|J'(\hat{x}(T))\|}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

т.е. для них требуемое неравенство имеет место при

$$\alpha \geq \alpha_2 := 4\varepsilon^{-2} + 2\varepsilon^{-1} \|J'(\hat{x}(T))\|.$$

Окончательно устанавливаем, что условие (4.6) выполняется для значения  $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\} > 0$ . Теорема 2 доказана.

Из доказательства теоремы 2 видно, что при реализации численного алгоритма последовательного улучшения (см. разд. 3) в рассматриваемом случае можно на шаге 1 положить

$$\beta = 2 \max_{(s,v) \in [0;T] \times U} \|A(s,v)\|,$$

где через  $\|\cdot\|$  обозначена стандартная норма в пространстве матриц размеров  $n \times n$ , согласованная с евклидовой нормой в  $\mathbb{R}^n$ . Доказательством теоремы 2 также объясняется последовательность действий на шаге 6.

**5. Линейные системы с вогнутым функционалом качества.** Пусть в (1.1) правая часть имеет вид  $f(t,x,u) = A(t,u)x + B(t,u)$ , где  $A : [0;T] \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  и  $B : [0;T] \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  — известные непрерывные отображения, в (1.2) и (1.3) множество  $O_X$  выпукло, а непрерывно дифференцируемая функция  $J : O_X \rightarrow \mathbb{R}$  вогнута, т.е.

$$J(\gamma x + (1-\gamma)y) \geq \gamma J(x) + (1-\gamma)J(y) \quad \forall x, y \in O_X \quad \forall \gamma \in [0;1].$$

Покажем, что в этом случае основное предположение (2.3) — (2.4) выполняется при  $\alpha = 0$ .

**Т е о р е м а 3.** Пусть  $\hat{u} \in \mathcal{U}$ ,  $\hat{x} \in \mathcal{AC}^n([0;T])$  — решение (4.1),  $\hat{\psi} \in \mathcal{AC}^n([0;T])$  — решение (4.2), множество  $O_X$  выпукло и функция  $J : O_X \rightarrow \mathbb{R}$  вогнута. Тогда для  $\alpha = 0$  и произвольного  $\beta \geq 0$  имеет место

$$R(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} R(t, x, \hat{u}(t)) \quad \forall t \in [0;T], \quad (5.1)$$

$$G(\hat{x}(T)) = \max_{x \in O_X} G(x). \quad (5.2)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** При  $\alpha = 0$  в силу (4.1) и (4.2) справедливо

$$R(t, x, \hat{u}(t)) = \langle \hat{\psi}(t), B(t, \hat{u}(t)) \rangle,$$

поэтому условие (5.1) выполняется. В то же время

$$G(x) = J(x) - \langle J'(\hat{x}(T)), x \rangle - \langle \hat{\psi}(0), x_0 \rangle,$$

поэтому условие (5.2) эквивалентно неравенству

$$J(x) - J(\hat{x}(T)) - \langle J'(\hat{x}(T)), x - \hat{x}(T) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in O_X,$$

которое верно, поскольку функция  $J$  вогнута на  $O_X$  (см. [7, с. 202]). Теорема 3 доказана.

Таким образом, при использовании алгоритма из разд. 3 в случае линейных по состоянию систем с вогнутым функционалом качества можно заведомо положить  $\alpha = 0$ .

Более того, если функция  $J$  строго вогнута на  $O_X$ , то максимум в условии (5.2) также будет строгим. Отсюда следует, что равенство  $J(\tilde{x}(T)) = J(\hat{x}(T))$  в доказательстве теоремы 1 при  $\tilde{x}(T) \neq \hat{x}(T)$  невозможно. Поэтому для линейной по состоянию системы со строго вогнутым функционалом качества выполнение условий 1) — 3) теоремы 1 и дополнительного требования  $\tilde{x}(T) \neq \hat{x}(T)$  гарантирует строгое улучшение управления  $\tilde{u}$ .

**6. Задача вероятностной оптимизации.** Рассмотрим теперь управляемую динамическую систему, которая описывается уравнением Ито:

$$d\xi(t) = \mu(t, u(t))\xi(t)dt + \sigma(t, u(t))dw(t), \quad \xi(0) = \xi_0, \quad (6.1)$$



где  $t \in [0; T]$  — время;  $\xi(t)$  —  $n$ -мерный вектор, характеризующий состояние системы в момент времени  $t$ ;  $\xi_0$  — нормально распределенный случайный вектор с нулевым средним и положительно определенной ковариационной матрицей  $N_0$ ;  $u \in \mathcal{U}$  (см. разд. 1);  $w(\cdot)$  —  $v$ -мерный стандартный винеровский процесс; отображения  $\mu : [0; T] \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  и  $\sigma : [0; T] \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times v}$  заданы и непрерывны на  $[0; T] \times U$ . Предполагается, что начальная точка  $\xi_0$  и винеровский процесс  $w(\cdot)$  независимы.

Рассмотрим следующую задачу относительно классического вероятностного критерия [8]. Пусть заданы вектор  $\kappa \in \mathbb{R}_+^n$  и число  $\phi > 0$ . Обозначим через  $\Pi_\phi$  замкнутый параллелепипед в  $\mathbb{R}^n$  со сторонами  $2\phi\kappa_i$ ,  $i = 1, n$ , и центром в нуле, т.е.

$$\Pi_\phi := \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq \phi\kappa_i, i = \overline{1, n}\}.$$

Требуется для заданного числа  $\phi > 0$  подобрать программу управления  $u \in \mathcal{U}$  так, чтобы максимизировать вероятность попадания случайного вектора  $\xi(T)$  в множество  $\Pi_\phi$ . Иными словами, решается задача вероятностной оптимизации

$$P_\phi(u) := \mathbf{P}\{\xi(T) \in \Pi_\phi\} \rightarrow \sup_{u \in \mathcal{U}}. \quad (6.2)$$

Как известно [9], при указанных выше условиях для любого  $u \in \mathcal{U}$  решение  $\xi$  уравнения (6.1) существует в сильном смысле и однозначно определено на отрезке  $[0; T]$ . При этом для любого  $t \in [0; T]$  вектор  $\xi(t)$  нормально распределен, имеет нулевое среднее и положительно определенную ковариационную матрицу  $N(t)$ , которая находится решением задачи Коши:

$$\begin{aligned} \dot{N}(t) &= \mu(t, u(t))N(t) + N(t)\mu(t, u(t))^T + \\ &+ \sigma(t, u(t))\sigma(t, u(t))^T, N(0) = N_0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Кроме того, вероятность  $\mathbf{P}\{\xi(T) \in \Pi_\phi\}$  в формуле (6.2) может быть вычислена явно, как функция матричной переменной  $N(T)$ :

$$\mathbf{P}\{\xi(T) \in \Pi_\phi\} = \mathcal{P}(N(T)), \quad (6.4)$$

где

$$\mathcal{P}(N) := (2\pi)^{-n/2} (\det N)^{-1/2} \int_{\Pi_\phi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle y, N^{-1}y \rangle\right\} dy.$$

Отсюда следует, что задача (6.1) — (6.2) на самом деле является детерминированной, задана относительно терминального (нелинейного, не выпуклого и не вогнутого) функционала качества управления  $\mathcal{P}(N(T))$  и линейной по состоянию  $N(t)$  динамической системы (6.3). Она сводится путем (симметрической) векторизации матриц  $N$  и  $N_0$  к задаче вида (1.1) — (1.2) при  $f(t, x, u) = A(t, u)x + B(t, u)$ . Матрица  $A(t, u)$  и вектор  $B(t, u)$  при этом составляют в соответствии с уравнением (6.3).

Множество  $O_X$  здесь — это открытый выпуклый конус в  $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ , который характеризуется тем, что для любого  $x \in O_X$  соответствующая ему квадратная симметрическая матрица  $N = N(x)$  размеров  $n \times n$  положительно определена. По построению для любого  $u \in \mathcal{U}$  и для любого  $t \in [0; T]$  вектор  $x(t)$ , полученный из решения векторизованной задачи, принадлежит множеству  $O_X$ , т.е.  $C_X \subset O_X$ . Для всякого  $x \in O_X$  положим  $J(x) = 1 - \mathcal{P}(N)$ . Эта функция определена и дважды непрерывно дифференцируема на множестве  $O_X$ , а ее значения ограничены отрезком  $[0; 1]$ .

Таким образом, с учетом теоремы 2 в рассматриваемом случае применим метод глобального улучшения Кротова и численный алгоритм из разд. 3.

При реализации алгоритма последовательных улучшений на шаге 3 необходимо вычислять значения производной  $J'(x)$  в различных точках  $x \in C_X$ . Для этого полезен следующий технический результат.

**Л е м м а.** Для любого вектора  $x \in O_X$ , полученного симметрической векторизацией некоторой матрицы  $N$ , вектор-градиент  $J'(x)$  функции  $J$  в точке  $x$  вычисляется путем симметрической векторизации симметрической матрицы-градиента  $-\mathcal{P}'(N)$  функции  $-\mathcal{P}$  в точке  $N$  с удвоением внедиагональных элементов, т.е. если  $\mathcal{P}'(N)_{ij} = p$ , то для соответствующего  $k = (2n - j + 2)(j - 1) / 2 + i - j + 1$  при  $i = j$  имеет место  $J'(x)_k = -p$ , а при  $i > j$  имеет место  $J'(x)_k = -2p$ . При этом справедливо соотношение

$$\mathcal{P}'(N) = \frac{1}{2}(2\pi)^{-n/2}(\det N)^{-1/2} \times \int_{\Pi_\phi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle y, N^{-1}y \rangle\right\} (N^{-1}yy^T N^{-1} - N^{-1}) dy. \quad (6.5)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $\mathbb{S}_+$  обозначает открытое множество положительно определенных симметрических матриц в пространстве  $\mathbb{R}^{n \times n}$  всех квадратных матриц размеров  $n \times n$ .

Так как функция  $N \mapsto (\det N)^{-1/2} : \mathbb{S}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  и отображение  $N \mapsto N^{-1} : \mathbb{S}_+ \rightarrow \mathbb{S}_+$  определены и бесконечно дифференцируемы в любой точке  $N \in \mathbb{S}_+$ , то таковой же является и функция  $N \mapsto \mathcal{P}(N) : \mathbb{S}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ . При этом для всякого  $N \in \mathbb{S}_+$  матрица  $\mathcal{P}'(N)$  определяет линейную часть приращения

$$\mathcal{P}(N + H) - \mathcal{P}(N) = \text{tr}[\mathcal{P}'(N)^T H] + o(\|H\|), \quad H \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Докажем сперва формулу (6.5). По правилу дифференцирования произведения функций имеем

$$\mathcal{P}'(N) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\Pi_\phi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle y, N^{-1}y \rangle\right\} dy \left((\det N)^{-1/2}\right)' + \\ + (2\pi)^{-n/2} (\det N)^{-1/2} \left[ \int_{\Pi_\phi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle y, N^{-1}y \rangle\right\} dy \right]'.$$

Так как для определителя матрицы справедлива формула разложения по любой строке, а матрица  $N$  симметрична, имеет место соотношение  $(\det N)' = \text{adj} N$ , где  $\text{adj} N$  — присоединенная к  $N$  матрица. Поэтому в первом слагаемом по правилу дифференцирования сложной функции

$$\left((\det N)^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}(\det N)^{-3/2} \text{adj} N = -\frac{1}{2}(\det N)^{-1/2} N^{-1}.$$

Во втором слагаемом по правилу Лейбница и по правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$\left[ \int_{\Pi_\phi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle y, N^{-1}y \rangle\right\} dy \right]' = \int_{\Pi_\phi} \left[ \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle y, N^{-1}y \rangle\right\} \right]' dy = \\ = -\frac{1}{2} \int_{\Pi_\phi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle y, N^{-1}y \rangle\right\} \left(\langle y, N^{-1}y \rangle\right)' dy.$$

Как известно [7, предложение 2.2.3], для линейного оператора производной отображения  $N \mapsto N^{-1}$  справедливо соотношение

$$(N^{-1})'[H] = -N^{-1}HN^{-1} \quad \forall H \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

поэтому, по правилу дифференцирования суперпозиции двух отображений (см. [7, п. 2.2.2]), имеет место

$$\left(\langle y, N^{-1}y \rangle\right)'[H] = -\langle y, N^{-1}HN^{-1}y \rangle = -\text{tr}[N^{-1}yy^T N^{-1}H].$$

Отсюда, переходя обратно к матричному представлению производных, находим

$$\left(\langle y, N^{-1}y \rangle\right)' = -N^{-1}yy^T N^{-1}.$$

Объединяя полученные результаты, устанавливаем справедливость проверяемого соотношения (6.5). В частности, доказано, что матрица  $\mathcal{P}'(N)$  является симметрической для любого  $N \in \mathbb{S}_+$ .

Вернемся к формуле для приращения значения функции  $\mathcal{P}$  в точке  $N \in \mathbb{S}_+$ . С учетом симметричности матрицы  $\mathcal{P}'(N)$  находим

$$\mathcal{P}(N + H) - \mathcal{P}(N) = \text{tr}[\mathcal{P}'(N)H] + o(\|H\|),$$

$$H \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

В свою очередь для функции  $x \mapsto J(x) : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathbb{R}$  имеет место

$$J(x + h) - J(x) = \langle J'(x), h \rangle + o(\|h\|),$$

$$h \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2}.$$

Здесь векторы  $x$  и  $h$  — это результат симметрической векторизации матриц  $N$  и  $H$  соответственно, т.е. для всех  $i \geq j$  и соответствующего  $k$  выполнено  $x_k = N_{ij}$  и  $h_k = (H_{ij} + H_{ji}) / 2$ . Но так как  $J(x + h) - J(x) = \mathcal{P}(N) - \mathcal{P}(N + H)$ , а  $o(\|H\|) = o(\|h\|)$ , имеет место

$$\langle J'(x), h \rangle = -\text{tr}[\mathcal{P}'(N)H] + o(\|h\|).$$

Сравнивая коэффициенты при  $h_k$  в левой и правой частях полученного равенства, находим, что вектор  $J'(x)$  представляет собой результат симметрической векторизации матрицы  $-\mathcal{P}'(N)$  с удвоением внедиагональных элементов. Лемма доказана.

Обсудим альтернативный подход к исследованию задачи (6.1) — (6.2), предложенный в работе [4]. В [4] на основе известного многомерного обобщения Олкина-Пратта для чебышевской оценки вероятности было показано, что значение  $P_\Phi(u)$  в формуле (6.2) удовлетворяет неравенству

$$P_\Phi(u) \geq P_\Phi^*(u) := \frac{n^2 - \phi^{-2}J^*(x(T))}{n^2}, \quad (6.6)$$

где, как и ранее,  $x(T)$  — результат векторизации матрицы  $N(T)$ , и

$$J^*(x(T)) = \left( \sqrt{\text{tr}[QEQN(T)]} + \sqrt{\text{tr}[Q\Lambda QN(T)]} \right)^2, \quad (6.7)$$

$$Q = \text{diag}(\kappa_1^{-1}, \dots, \kappa_n^{-1}), \quad E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} (n-1)^2 & 1-n & \dots & 1-n \\ 1-n & (n-1)^2 & \ddots & 1-n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-n & 1-n & \dots & (n-1)^2 \end{pmatrix}.$$

Исходя из соотношения (6.6), сформулируем задачу

$$J^*(x(T)) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}}. \quad (6.8)$$

Эта задача эквивалентна задаче максимизации оценки  $P_\phi^*(u)$ . Отметим, что в записи функционала (6.7) отсутствует параметр  $\phi$ , т.е. решение задачи (6.8), если оно существует, является приближением к решению задачи (6.2) для всех значений  $\phi > 0$  одновременно.

Задача улучшения, согласованная с (6.8), как нетрудно проверить непосредственно (см. [4, лемма 1]), является задачей с вогнутым функционалом качества. Поэтому к ней применимы результаты разд. 5. В частности, метод Кротова может быть использован при  $\alpha = 0$ .

В следующем разделе на примерах проводится сопоставление метода Кротова с  $\alpha = 0$ , примененного к функционалу оценки (6.7) в задаче (6.8), и общего метода Кротова с произвольным  $\alpha \geq 0$ , примененного к функционалу гауссовской вероятности (6.4) в задаче (6.2).

**7. Примеры решения задач.** Начнем с обсуждения общего метода Кротова с произвольным  $\alpha \geq 0$  применительно к задаче (6.1) – (6.2) в одномерном случае.

**П р и м е р 1.** На интервале времени  $[0; T]$  рассмотрим одномерную систему

$$d\xi(t) = \frac{u(t)}{2} \xi(t) dt + c dw(t), \quad \xi(0) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2), \quad \sigma_0 \neq 0.$$

Геометрические ограничения на управление заданы в виде  $|u(t)| \leq u_{\max}$ , целевая область – отрезком  $\Pi_\phi = [-\phi; \phi]$ .

Переходя к соотношениям (6.3) – (6.4), в обозначениях задачи (1.1) – (1.2) имеем

$$\dot{x}(t) = u(t)x(t) + c^2, \quad x(0) = \sigma_0^2,$$

$$J(x(T)) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\phi}{\sqrt{2x(T)}}\right), \quad \operatorname{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy.$$

Выполним один шаг итерационной процедуры улучшения некоторого заданного управления, следуя изложенному в разд. 3 алгоритму.

Пусть  $\phi = 1$  и  $\hat{u}(t) \equiv 0$ . Имеем

$$\hat{x}(t) = c^2 t + \sigma_0^2, \quad J(\hat{x}(T)) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2(c^2 T + \sigma_0^2)}}\right).$$

Будем считать, что значения параметров  $\alpha, \beta \geq 0$  заданы. В соответствии с шагами алгоритма построим последовательно элементы  $\hat{\psi}$ ,  $\hat{\pi}$ ,  $\hat{x}$  и  $\hat{u}$ . Так как

$$J'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-x^{-1}/2},$$

то

$$J'(\hat{x}(T)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(c^2 T + \sigma_0^2)^3}} e^{-(c^2 T + \sigma_0^2)^{-1}/2} =: \gamma > 0.$$

Отсюда  $\hat{\psi}(t) \equiv -\gamma$  и для построения  $\hat{\pi}$  необходимо найти максимум по  $v \in [-u_{\max}; u_{\max}]$  выражения

$$-(\gamma + \alpha e^{\beta(T-t)}(x - c^2t - \sigma_0^2))(vx + c^2), \quad x > 0.$$

Имеем

$$\hat{\pi}(t, x) = \begin{cases} -u_{\max}, & \text{если } \gamma + \alpha e^{\beta(T-t)}(x - c^2t - \sigma_0^2) > 0, \\ u_{\max}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В частности,  $\hat{\pi}(0, x(0)) = -u_{\max}$ , поэтому для нового решения  $\tilde{x}$  верно

$$\tilde{x}(t) = \frac{c^2}{u_{\max}} + \left( \sigma_0^2 - \frac{c^2}{u_{\max}} \right) e^{-u_{\max}t}, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

где момент времени  $\tau > 0$  определяется условием

$$\gamma + \alpha e^{\beta(T-\tau)} \left( \frac{c^2}{u_{\max}} + \left( \sigma_0^2 - \frac{c^2}{u_{\max}} \right) e^{-u_{\max}\tau} - c^2\tau - \sigma_0^2 \right) = 0.$$

Отметим, что для достаточно больших  $\alpha, \beta > 0$  справедливо неравенство  $\tau < T$ , так что новая программа управления  $\tilde{u}(t) = \pi(t, \tilde{x}(t))$  будет иметь переключения. При  $\alpha = 0$  переключений нет и оказывается найдено  $\tilde{u}(t) \equiv -u_{\max}$  — абсолютный оптимум в задаче.

**П р и м е р 2.** Обобщим пример 1. На интервале времени  $[0; T]$  рассмотрим одномерную систему

$$d\xi(t) = \mu(t, u(t))\xi(t)dt + \sigma(t, u(t))dw(t), \\ \xi(0) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2), \quad \sigma_0 \neq 0.$$

Геометрические ограничения на управление заданы в виде  $u(t) \in U$ , где  $U$  — произвольное замкнутое и ограниченное множество в  $\mathbb{R}^m$ , целевая область  $\Pi_\phi = [-\phi; \phi]$ .

В обозначениях задачи (1.1) — (1.2) соответственно имеем

$$\dot{x}(t) = 2\mu(t, u(t))x(t) + \sigma(t, u(t))^2, \quad x(0) = \sigma_0^2,$$

$$J(x(T)) = 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\phi}{\sqrt{2x(T)}} \right).$$

В силу того, что функция ошибок  $\operatorname{erf}$  строго возрастает, задача минимизации функционала  $J$  полностью эквивалентна задаче минимизации функционала

$$\mathcal{J}(x(T)) := x(T).$$

При этом

$$J'(x(T)) = \frac{\phi}{\sqrt{2\pi x(T)^3}} e^{-\phi^2 x(T)^{-1/2}} > 0.$$

Так как при заданном  $\hat{u}$  функция  $\hat{\psi}(t)$  находится из решения линейной задачи Коши (2.2), заведомо имеем

$$\hat{\psi}(t) = J'(\hat{x}(T))\hat{\psi}_0(t),$$

где  $\hat{\psi}_0$  удовлетворяет условию

$$\hat{\psi}_0(T) = -1 = -\mathcal{J}'(x(T))$$

и тому же дифференциальному уравнению.

Отсюда следует, что результат применения процедуры улучшения не изменится, если заменить функционал  $J$  функционалом  $\mathcal{J}$ . В самом деле, достаточно положить  $\alpha = J'(x(T))\alpha'$  и на шаге 4 алгоритма вынести за скобки общий множитель  $J'(x(T))$ . Но для линейного функционала  $\mathcal{J}$  справедливы результаты разд. 5, в частности, метод Кротова применим уже при  $\alpha = 0$ ; при этом, как отмечалось ранее, достигается наибольшая скорость улучшения.

Итак, при рассмотрении одномерных задач вида (6.1) – (6.2) всегда можно заранее положить  $\alpha = 0$  и использовать тем самым линейную реализацию метода Кротова с наибольшей скоростью улучшения.

Отметим, что в одномерном случае эквивалентные друг другу задачи  $J(x(T)) \rightarrow \inf$  и  $\mathcal{J}(x(T)) \rightarrow \inf$  также эквивалентны задаче оптимизации оценки  $J^*(x(T)) \rightarrow \inf$ , так как в формуле (6.7) в этом случае  $\Lambda = 0$  и  $J^*(x(T)) = x(T)$  с точностью до положительного множителя.

**П р и м е р 3.** На интервале времени  $[0;1]$  рассмотрим систему

$$d\xi_1(t) = -(\xi_1(t) + \xi_2(t))dt, \quad \xi_1(0) \sim \mathcal{N}(0,5),$$

$$d\xi_2(t) = (u(t)\xi_1(t) - \xi_2(t))dt, \quad \xi_2(0) \sim \mathcal{N}(0,1),$$

случайные величины  $\xi_1(0)$  и  $\xi_2(0)$  независимы. Геометрические ограничения на управление заданы в виде  $|u(t)| \leq 2$ . Целевую область  $\Pi_\Phi$  выберем прямоугольной, положим  $\kappa = (1,2)$ .

В обозначениях задачи (1.1) – (1.2) имеем:  $t \in [0;1]$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^3$ ,  $u(t) \in [-2;2] \subset \mathbb{R}$ ,

$$A(t,u) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ u & -2 & -1 \\ 0 & 2u & -2 \end{pmatrix}, \quad B(t,u) \equiv 0, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\max_{(s,v) \in [0;1] \times [-2;2]} \|A(s,v)\| \approx 5.9$ , поэтому в соответствии с результатами разд. 4 положим  $\beta = 12$ . Все дальнейшие расчеты будем выполнять численно.

Пусть задана программа управления  $\hat{u}(t) \equiv 2$ ; для нее значение функционала качества  $J(\hat{x}(1)) \approx 0.083$ . Применим описанную в разд. 3 итерационную процедуру для ее улучшения.

Положим сперва  $\alpha = 0$ ,  $M_\alpha = 100$ . На первой итерации условие улучшения окажется невыполненным: для найденного  $u^{(1)}$  получаем значение  $J(x^{(1)}(1)) \approx 0.45$ . Таким образом, в рассматриваемом двумерном примере линейная реализация метода Кротова уже не является улучшающей.

Увеличив  $\alpha$  до единицы и выполнив итерацию заново, получим новое  $u^{(1)}$  с  $J(x^{(1)}(1)) \approx 0.071$ . Через примерно 60 повторных итераций оказывается найдено  $\tilde{u}$  со значением  $J(\tilde{x}(1)) \approx 0.02$ . Если положить  $\alpha = 0.1$ , то количество необходимых итераций можно сократить до 20, а при  $\alpha = 0.01$  – до 5. При  $\alpha = 0.001$  уже вторая итерация перестает быть улучшающей и значение  $\alpha$  необходимо увеличивать еще раз.

Применим алгоритм при  $\alpha = 0$  для минимизации функционала (6.7). Вычисляя параллельно с этим значения исходного функционала  $J$ , найдем, что уже за две итерации получается тот же результат  $J(\tilde{x}(1)) \approx 0.02$ . При этом не потребовалось подбирать значения никаких дополнительных параметров.

Пример 3 демонстрирует преимущества использования оценки (6.6) в процессе исследования задач вида (6.1) – (6.2). Известная «грубость» оценок чебышевского типа в рассматриваемом случае оказывается полезной, так как в процессе максимизации функционала оценки «зазор» между ее значением и оцениваемой величиной меняется незначительно. Как следствие, уменьшение оцениваемой величины имеет тот же порядок, что и уменьшение оценки. При этом относительно простая структура и выпуклые свойства функционала (6.7) позволяют добиться наибольшей скорости улучшения.

**П р и м е р 4.** Рассмотрим задачу стабилизации двухзвенного механического манипулятора из [10] в условиях случайных возмущений за счет управления в виде линейного регулятора. Управляемая система на интервале времени  $[0;5]$  имеет вид



$$d\xi(t) = (\tilde{A} + \tilde{B}P(u(t)))\xi(t)dt + \tilde{C}dw(t), \quad \xi(0) = \xi_0,$$

где

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \frac{1}{155} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 8 & -9 \\ -9 & 14 \end{pmatrix},$$

$$P(u) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \end{pmatrix}.$$

Первые две координаты вектора  $\xi(t)$  характеризуют величины углов отклонения первого и второго звеньев манипулятора от требуемого положения, а последние две координаты — скорости изменения этих величин. В отличие от [10] будем считать, что управление в системе реализуется точно, а случайные воздействия оказывают влияние только на скорость движения манипулятора, и это влияние характеризуется матрицей

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.05 & 0.01 \\ 0.01 & 0.05 \end{pmatrix}.$$

Начальный вектор  $\xi_0$  имеет нормальное распределение с нулевым средним и ковариационной матрицей  $N_0 = 0.2I_4$ , где  $I_4$  — единичная  $4 \times 4$ -матрица. Так же как и в [10], будем считать, что требования по стабилизации положения в 1.5 раза выше, чем требования по стабилизации скорости. Целевую область  $\Pi_\phi$  зададим вектором  $\kappa = (0.1, 0.1, 0.15, 0.15)$ . Управление в системе имеет смысл коэффициентов усиления в линейном регуляторе обратной связи. Будем считать, что на них накладываются одинаковые технические ограничения:  $|u_i(t)| \leq u_{\max}$ , где  $u_{\max}$  положим равным 30.

В обозначениях задачи (1.1) — (1.2) получаем следующее:  $t \in [0; 5]$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^{10}$ ,  $u(t) \in [-1; 1]^8 \subset \mathbb{R}^8$ . Отображение  $(t, u) \mapsto A(t, u) \equiv A(u)$  можно вычислить так: запишем матрицу

$$(\tilde{A} + \tilde{B}P(u)) \otimes I_4 + I_4 \otimes (\tilde{A} + \tilde{B}P(u)) \in \mathbb{R}^{16 \times 16},$$

где  $\otimes$  — произведение Кронекера, вычеркнем из нее строки с номерами 5, 9, 10, 13, 14 и 15, а столбцы с этими же номерами вычеркнем, предварительно прибавив их к столбцам с номерами 2, 3, 7, 4, 8 и 12 соответственно. Результатом станет искомая матрица  $A(u) \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$ . Отображение  $B$  имеет вид  $B(t, u) \equiv (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.0026, 0.001, 0.0026)^T \in \mathbb{R}^{10}$ . Наконец, начальное условие  $x_0 = (0.2, 0, 0, 0, 0.2, 0, 0, 0.2, 0, 0.2) \in \mathbb{R}^{10}$ .

Ввиду высокой размерности задачи алгоритм построения последовательных улучшений относительно функционала  $J$  приводит к трудностям уже на этапе определения подходящего значения  $\beta > 0$ . Поэтому перейдем сразу к функционалу (6.7). Пусть задано управление  $\hat{u}(t) \equiv 0$ . Для этого управления вероятность  $P_1(\hat{u})$  попадания в целевую область  $\Pi_1$ , найденная по формуле (6.4), составляет примерно 0.0008, т.е. менее 0.1%. Применяя метод Кротова, найдем управление  $\tilde{u}$ , для которого  $P_1(\tilde{u}) \approx 0.87$ . Продемонстрируем качество управления  $\tilde{u}$ , выполнив численное моделирование траекторий случайного процесса  $\tilde{\xi}(t)$ .

На рис. 1 и 2 представлены результаты моделирования по переменным  $\xi_1, \dots, \xi_4$  для нескольких реализаций  $\xi(t)$ . На рис. 3 эти же результаты изображены на фазовой плоскости угловых переменных  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Сплошной линией отмечена целевая область  $\Pi_1$ , точками и звездочками — соответственно начало и конец каждой траектории.

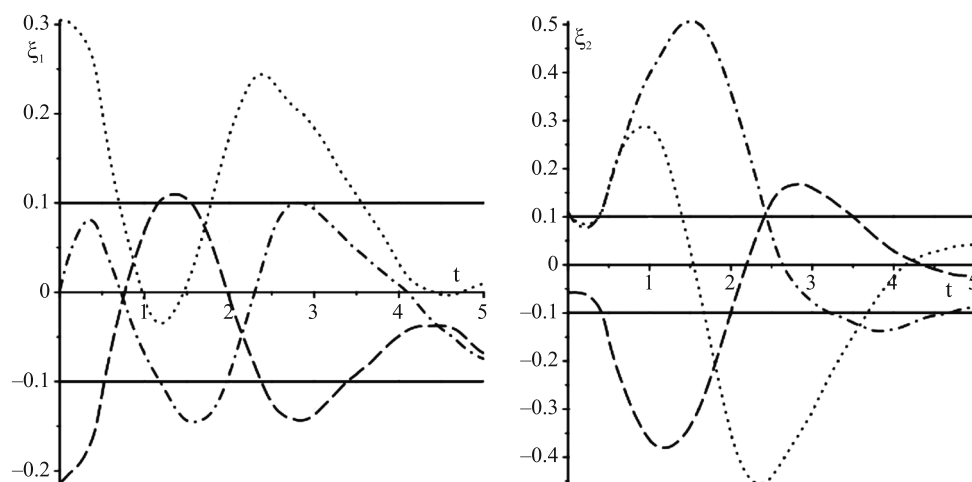


Рис. 1. Результаты моделирования по углам

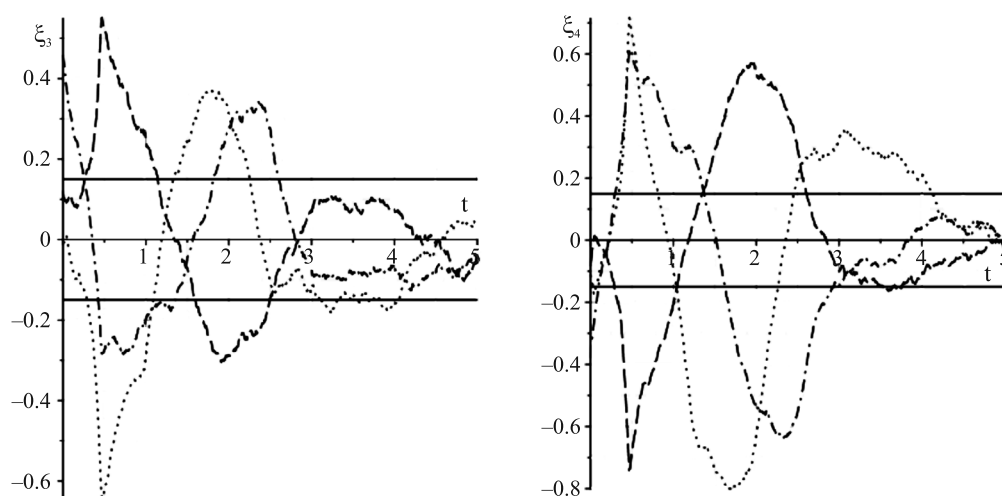


Рис. 2. Результаты моделирования по скоростям

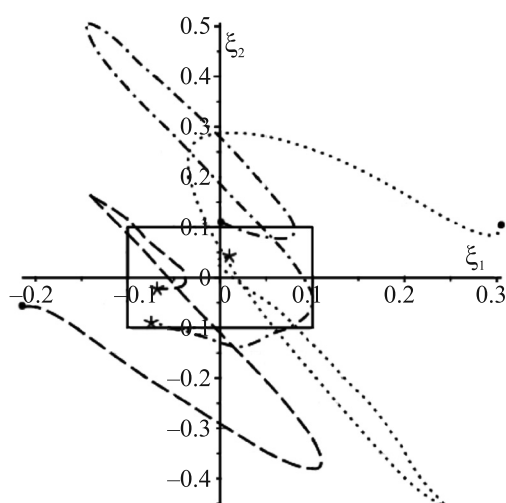


Рис. 3. Результаты моделирования на фазовой плоскости

**Заключение.** Эффективность метода глобальных последовательных улучшений Кротова обоснована для двух классов задач оптимального управления с линейной по состоянию системой и терминальным функционалом качества. Полученные результаты позволяют использовать метод для приближенного построения оптимальной программы управления в линейных стохастических задачах вероятностной оптимизации. Показано, что для существенного упрощения и ускорения итерационной процедуры могут быть использованы многомерные оценки функционала вероятности чебышевского типа.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коннов А.И., Кротов В.Ф. О глобальных методах последовательного улучшения управляемых процессов // *АиТ*. 1999. № 10. С. 77–88.
2. Кротов В.Ф., Булатов А.В., Батурина О.В. Оптимизация линейных систем с управляемыми коэффициентами // *АиТ*. 2011. № 6. С. 64–78.
3. Трушкова Е.А. Алгоритмы глобального поиска оптимального управления // *АиТ*. 2011. № 6. С. 151–159.
4. Хрусталева М.М., Царьков К.А. Метод последовательного улучшения в задачах оптимизации вероятностных критериев для линейных по состоянию диффузионно-скачкообразных систем // *АиТ*. 2023. № 6. С. 100–121.
5. Аргунинцев А.В., Дыхта В.А., Сроко В.А. Оптимальное управление: нелокальные условия, вычислительные методы и вариационный принцип максимума // *Изв. вузов. Математика*. 2009. № 1. С. 3–43.
6. Дыхта В.А. Нестандартная двойственность и нелокальные необходимые условия оптимальности в невыпуклых задачах оптимального управления // *АиТ*. 2014. № 11. С. 19–37.
7. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2005.
8. Кибзун А.И., Кан Ю.С. Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
9. Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: Физматлит, 2002.
10. Румянцев Д.С., Хрусталева М.М., Царьков К.А. Алгоритм поиска субоптимальных стратегий управления квазилинейными динамическими стохастическими системами диффузионного типа // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2014. № 1. С. 74–86.

## УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

УДК 519.857, 519.21

### СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОГО УПРАВЛЯЕМОГО ВЫХОДА АВТОНОМНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НА БЕСКОНЕЧНОМ ГОРИЗОНТЕ<sup>1</sup>

© 2024 г. А. В. Босов<sup>a</sup>, \*

<sup>a</sup>ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

\*e-mail: ABosov@frcsc.ru

Поступила в редакцию 10.04.2004 г.

После доработки 18.05.2024 г.

Принята к публикации 15.07.2024 г.

Рассматривается задача управления линейным выходом автономной нелинейной стохастической дифференциальной системы. Бесконечный горизонт и квадратичный функционал позволяют интерпретировать цель управления как стабилизацию выхода около положения, определяемого состоянием, которое описывается нелинейным стохастическим дифференциальным уравнением. Решение получено для двух вариантов модели — с точными измерениями и в предположении, что линейный выход представляет собой косвенные наблюдения за состоянием. В случае косвенных наблюдений в качестве модели состояния используется непрерывная цепь Маркова, что позволяет разделить задачи управления и фильтрации и применить фильтр Вонэма. В обоих вариантах достаточные условия существования оптимального решения состоят из типовых для линейных систем требований, обеспечивающих существование предельного решения уравнения Риккати. Дополнительные требования из-за нелинейных элементов — эргодичность нелинейной динамики и существование предела в формуле Фейнмана-Каца для коэффициентов нелинейной части управления. Приведены и проанализированы результаты численного эксперимента.

**Ключевые слова:** стохастическая дифференциальная система; оптимальное управление; стохастическая фильтрация; фильтр Вонэма; принцип разделения; уравнение Риккати

DOI: 10.31857/S0002338824050042, EDN: TTKBCP

### STABILIZATION OF THE LINEAR CONTROLLED OUTPUT OF AN AUTONOMOUS STOCHASTIC DIFFERENTIAL SYSTEM ON AN INFINITE HORIZON

A. V. Bosov<sup>a</sup>, \*

<sup>a</sup>Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences,

44/2 Vavilova Str., 119333 Moscow, Russia

\*e-mail: ABosov@frcsc.ru

The control problem of the linear output of an autonomous nonlinear stochastic differential system is considered. The infinite horizon and the quadratic objective make it possible to interpret the control goal as stabilization of the output near the position determined by the state, which is described by a nonlinear stochastic differential equation. The solution is obtained for two variants of the model: with accurate measurements and under the assumption that the linear output represents indirect observations of the state. In the case of indirect observations, a continuous Markov chain is used as a state model, which makes it possible to separate the control and filtering tasks and apply the Wonham filter. In both variants, sufficient conditions for the existence of an optimal solution consist of typical requirements for linear systems that ensure the existence of a limiting solution to the Riccati equation. Additional requirements due to nonlinear elements are the ergodicity of nonlinear dynamics and the existence of a limit in the Feynman-Katz formula for the coefficients of the nonlinear part of the control. The results of the numerical experiment are presented and analyzed.

<sup>1</sup> Работа выполнялась с помощью инфраструктуры Центра коллективного пользования “Высокопроизводительные вычисления и большие данные” (ЦКП “Информатика” ФИЦ ИУ РАН, Москва).

*Keywords:* stochastic differential system; optimal control; stochastic filtering; Wonham filter; separation principle; Riccati equation

**Введение.** Классический квадратичный критерий управления динамической системой допускает разные прикладные интерпретации, среди которых важное место занимает стабилизация состояния системы в некотором положении [1–3]. В свою очередь, задача стабилизации может иметь разный смысл: приведение системы в устойчивое «нулевое» состояние [1], движение выходной переменной по заданной траектории [4] или отслеживание меняющегося состояния цели по косвенным наблюдениям за ней [5]. В каждой такой задаче самостоятельного рассмотрения заслуживает постановка с моделью автономной динамической системы и бесконечным горизонтом управления [6, 7]. Действительно, когда нет оснований для определения времени завершения управления, естественным будет считать это время бесконечным. На систему управления в этом случае приходится накладывать довольно жесткие ограничения. Помимо формальной автономности, т.е. независимости от переменной времени всех функций как в модели состояния, так и в модели выхода и/или наблюдений и в целевом функционале, требуется устойчивость процессов, описывающих состояние, выход и косвенные наблюдения, и стабилизируемость управляемых переменных. Эти свойства хорошо иллюстрирует классическая линейноквадратичная гауссовская (LQG) задача управления с бесконечным горизонтом, в которой устойчивость и стабилизируемость означают конечность целевого функционала и принципиальную возможность управления выходной переменной [7]. Еще одно важное положение LQG-задачи с бесконечным временем — ограничение класса допустимых управлений линейными функциями выхода. Это вполне естественное предположение является следствием решения соответствующей задачи с конечным горизонтом, включая линейность оптимального управления, разделение и двойственность задач управления и фильтрации в постановке с косвенными наблюдениями, свойства фильтра Калмана-Бьюси [8] и, наконец, принципиальную роль уравнения Риккати, к исследованию свойств которого в конечном итоге сводится задача управления автономной линейной системой [6]. Оптимальное автономное управление получается как предельный случай оптимального управления в соответствующей задаче с конечным горизонтом.

Рассматриваемая в статье задача управления линейным выходом неуправляемой стохастической дифференциальной системы на бесконечном горизонте имеет и сходства, и отличия от задачи LQG. Так, используется квадратичный целевой функционал и линейный выход, дающий в оптимальном управлении линейное слагаемое. При этом есть нелинейная неуправляемая динамика, из-за которой в оптимальном управлении появляется нелинейная часть. Наконец, детально исследовано решение задачи с конечным горизонтом [9], содержащее в том числе описание нелинейной части управления, которое представляет собой параболическое дифференциальное уравнение в частных производных. Следовательно, имеются все исходные данные для того, чтобы получить решение соответствующей задачи с бесконечным горизонтом в предельной форме оптимального решения с конечным временем.

Первой в статье рассматривается постановка с полной информацией. Модель состояния в форме нелинейного уравнения Ито дает, как уже упоминалось, нелинейное слагаемое в оптимальном управлении, поэтому оптимальное автономное управление также остается нелинейным. При этом предельный переход от конечного к бесконечному горизонту управления вместо системы параболических уравнений приведет к обыкновенным дифференциальным уравнениям, хотя и нелинейным.

Вариант с косвенными наблюдениями, рассмотренный вторым, носит более частный вид. На первый план в этом варианте выходит задача нелинейной фильтрации, что исключает использование фильтра Калмана-Бьюси. Применение вместо линейных общих уравнений фильтрации на основе обновляющих процессов [10] в аналогичной задаче прекрасно продемонстрировано в [11]. Но этот очень важный для данной области результат не оставляет шансов для практической реализации. При этом автономный характер задачи управления практически никак не облегчает трудности решения задачи фильтрации, так как реализовать оптимальный фильтр продолжает оставаться гораздо сложнее, чем оптимальное управление. В качестве приемлемого промежуточного варианта можно ограничиться моделью состояния в форме цепи Маркова и, следовательно, оптимальной оценкой, задаваемой фильтром Вонэма [12]. Поведение цепи Маркова на бесконечности прекрасно изучено и изложено, например, в [13], требование эргодичности хорошо согласуется с бесконечным горизонтом управления. Таким образом, имеющееся решение задачи в постановке с неполной информацией [14] будет дополнено вариантом с бесконечным горизонтом управления.

**1. Постановка задачи.** На каноническом вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathcal{F}_t)$  с бесконечным временем  $t \in [0, \infty)$  рассмотрим автономную стохастическую динамическую систему с состоянием (входом)  $y_t \in \mathbb{R}^{n_y}$ , которое формирует управляемый линейный выход  $z_t \in \mathbb{R}^{n_z}$ :

$$dz_t = ay_t dt + bz_t dt + cu_t dt + \sigma dw_t, z_0 = Z, t \in [0, \infty), \quad (1.1)$$

где  $w_t \in \mathbb{R}^{n_w}$  — стандартный векторный винеровский процесс;  $Z \in \mathbb{R}^{n_z}$  — гауссовский случайный вектор с известными математическим ожиданием и ковариацией; управление  $u_t \in \mathbb{R}^{n_u}$  — случайный процесс из класса допустимых управлений  $\mathcal{U}_0^\infty$ , определенного далее;  $a \in \mathbb{R}^{n_z \times n_y}$ ,  $b \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ ,  $c \in \mathbb{R}^{n_z \times n_u}$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}^{n_z \times n_w}$  — заданные матрицы.

Для описания состояния  $y_t$  возможны две модели. Первая — модель системы с полной информацией, согласно которой без ошибок наблюдаются как значения выхода  $z_t$ , так и состояния  $y_t$ . В этой модели  $y_t$  определяется системой автономных нелинейных стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$dy_t = A(y_t)dt + \Sigma(y_t)dv_t, y_0 = Y, t \in [0, \infty), \quad (1.2)$$

где  $v_t \in \mathbb{R}^{n_v}$  — стандартный векторный винеровский процесс;  $Y \in \mathbb{R}^{n_y}$  — случайный вектор с конечным вторым моментом;  $v_t, w_t, Y, Z$  независимы в совокупности; векторная функция  $A = A(y): \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$  и матричная функция  $\Sigma = \Sigma(y): \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y \times n_v}$  удовлетворяют стандартным условиям Ито:

$$|A(y)| + |\Sigma(y)| \leq C_1(1 + |y|),$$

$$|A(y_1) - A(y_2)| + |\Sigma(y_1) - \Sigma(y_2)| \leq C_2|y_1 - y_2|,$$

$$C_1 = \text{const}, C_2 = \text{const}, y, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^{n_y},$$

обеспечивающим существование единственного поттраекторного решения (1.2) на любом конечном интервале  $t \in [0, T]$  [15] (здесь и далее  $|\cdot|$  обозначает евклидову норму вектора или матрицы). Чтобы рассматривать решения (1.2) на интервале  $[0, \infty)$ , дополнительно предполагается, что процесс  $y_t$  является эргодическим [13].

Во второй модели состояние  $y_t$  не наблюдается напрямую, доступна только косвенная информация. Это значит, что выход  $z_t$  выполняет функцию наблюдений. В этой модели  $y_t$  определяется марковским скачкообразным процессом — цепью с конечным числом состояний и значениями во множестве  $\{e_1, \dots, e_{n_y}\}$ , состоящем из единичных координатных векторов в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{n_y}$ . Поскольку цепь  $y_t$  эргодическая, матрица интенсивностей переходов  $\Lambda$  не зависит от времени, предельное распределение обозначается  $\pi_*$ , начальное распределение  $y_0 = Y$ , как и для диффузии (1.2).  $y_t, w_t, Y, Z$  являются независимыми в совокупности.

Если представить процесс  $y_t$  его мартингалным разложением [4]

$$dy_t = \Lambda^T y_t dt + dv_t^y, y_0 = Y, t \in [0, \infty), \quad (1.3)$$

где  $v_t^y$  —  $\mathcal{F}_t$ -согласованный мартингал с квадратичной характеристикой

$$\langle v^y, v^y \rangle_t = \int_0^t (\text{diag}(\Lambda^T y_s) - \Lambda^T \text{diag}(y_s) - \text{diag}(y_s) \Lambda) ds,$$

то вторую модель состояния можно считать частным случаем первой модели (1.2) с той разницей, что вместо винеровского процесса  $v_t$  фигурирует мартингал  $v_t^y$ , снос  $A(y_t)$  является линейной функцией  $\Lambda^T y_t$ , а диффузия  $\Sigma(y_t)$  определяется квадратичной характеристикой  $\langle v^y, v^y \rangle_t$ . Здесь и далее  $T$  — операция транспонирования.

Принципиальным отличием моделей с уравнениями состояния (1.2) или (1.3) является предположение о доступности  $y_t$  прямым или косвенным наблюдениям. В первой модели значение  $y_t$  известно и может участвовать в формировании управления  $u_t$ . Во второй модели значение  $y_t$  можно только оценить, используя вектор выхода  $z_t$  в качестве косвенных наблюдений. Возникающая таким образом задача фильтрации для (1.3) имеет известное решение —



фильтр Вонэма [12], для практической (численной) реализации которого в рассматриваемой задаче есть эффективные инструменты [16].

С другой стороны, если не ограничиваться частным случаем модели состояния (1.3), а в постановке с косвенными наблюдениями оставить модель (1.2), то для решения возникающей вспомогательной задачи фильтрации можно воспользоваться общим уравнением оптимальной фильтрации в терминах обновляющих процессов [10], в рассматриваемом случае имеющем следующий вид:

$$d\hat{y}_t = \hat{A}_t dt + \hat{\Sigma}_t a^T (\sigma \sigma^T)^{-1} (dz_t - a\hat{y}_t dt - bz_t dt - cu_t dt), \hat{y}_0 = \mathcal{E}\{Y\}, \quad (1.4)$$

где  $\hat{A}_t = \mathcal{E}\{A(y_t) | \mathcal{F}_t^z\}$ ,  $\hat{\Sigma}_t = \mathcal{E}\{(y_t - \hat{y}_t)y_t^T | \mathcal{F}_t^z\}$ . Здесь и далее обозначены  $\mathcal{E}\{\cdot\}$  и  $\mathcal{E}\{\cdot | \mathcal{F}\}$  – операторы математического и условного относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}$  математического ожидания,  $(\mathcal{F}_t^z - \sigma$ -алгебра, порожденная процессом  $z_t$ , так что  $\mathcal{F}_t^z \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ ). Таким образом, даже линейность наблюдений (1.1) не делает общее уравнение оптимальной фильтрации существенно проще, так как уравнение (1.4) остается слишком сложными для практической реализации, поскольку для вычисления условных математических ожиданий  $\hat{A}_t$  и  $\hat{\Sigma}_t$  все равно требуются апостериорные распределения  $y_t$  относительно  $\mathcal{F}_t^z$ . Устраняется эта трудность при дальнейшем уточнении (1.4) для марковской цепи  $y_t$ , состояния которой образуют множество  $\{e_1, \dots, e_{n_y}\}$ . В этом случае удастся явно записать  $\hat{A}_t$  и  $\hat{\Sigma}_t$ , что, как известно, приводит к фильтру Вонэма [4,12]:

$$d\hat{y}_t = \Lambda^T \hat{y}_t dt + (\text{diag}(\hat{y}_t) - \hat{y}_t \hat{y}_t^T) a^T (\sigma \sigma^T)^{-1} \times \\ \times (dz_t - a\hat{y}_t dt - bz_t dt - cu_t dt), \hat{y}_0 = \mathcal{E}\{Y\}. \quad (1.5)$$

Именно, структура (1.5) оценки  $\hat{y}_t = \mathcal{E}\{y_t | \mathcal{F}_t^z\}$  и дополнительное предположение об эргодичности  $y_t$  обеспечивают далее решение задачи управления для второй рассматриваемой модели. Для удобства записи функциональную зависимость оценки  $\hat{y}_t$  от наблюдений, определяемую уравнением (1.5), обозначим  $\hat{y} = \hat{y}(z)$ , так что можно записать  $\hat{y}_t = \hat{y}(z_t)$ .

Для постановки задачи управления определим уже упомянутый класс  $\mathcal{U}_0^\infty$  допустимых управлений. В варианте задачи с полной информацией, т.е. с состоянием (1.2) и выходом (1.1), допустимое управление  $u_t$  предполагается  $\mathcal{F}_t^{y,z}$ -измеримым  $\mathcal{F}_t^{y,z} - \sigma$ -алгебра, порожденная  $y_t$  и  $z_t$ ,  $\mathcal{F}_t^{y,z} \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$  и  $\mathcal{U}_0^\infty$  составляют автономные (не зависящие прямо от времени) управления с полной обратной связью. Другими словами, это функции вида  $u_t = u(y, z) \in \mathbb{R}^{n_u}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ ,  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ , при условии, что соответствующая реализация  $u_t = u(y_t, z_t)$  обеспечивает существование  $y_t, z_t$ . Поскольку состояние  $y_t$  от управления  $u_t$  не зависит, а выход  $z_t$  описывается линейным автономным уравнением с винеровским процессом, то данное формальное требование означает наличие у допустимых управлений конечного второго момента  $\mathcal{E}\{|u_t|^2\} < \infty$ , что обеспечивает существование решения (1.1) на любом конечном интервале  $t \in [0, T]$ . Условия для существования управления на интервале  $[0, \infty)$  обсуждаются далее.

Для варианта задачи с косвенными наблюдениями, т.е. с состоянием (1.3) и наблюдениями (1.1), допустимое управление  $u_t$  предполагается  $\mathcal{F}_t^z$ -измеримым и  $\mathcal{U}_0^\infty$  составляют автономные управления с полной обратной связью по выходу, т.е. функции вида  $u_t = u(z) \in \mathbb{R}^{n_u}$ ,  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ , в предположении, что соответствующая реализация  $u_t = u(z_t)$  обеспечивает выполнение условий существования  $z_t$ . На самом деле, обеспечиваемое приведенным далее квадратичным функционалом качества разделение задач управления и фильтрации на конечном горизонте управления  $t \in [0, T]$  [14], этот вариант задачи сводит к первому варианту, в котором роль уравнения состояния выполняет фильтр Вонэма (1.5). При этом обсуждаемые далее условия для существования управления на интервале  $[0, \infty)$  оказываются даже проще, чем в задаче с первым вариантом модели состояния.

Качество управления  $U_0^\infty = \{u_t, t \in [0, \infty)\} \in \mathcal{U}_0^\infty$  определяется функционалом:

$$J(U_0^\infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} J(U_0^T), J(U_0^T) = \mathcal{E}\left\{\frac{1}{T} \int_0^T P y_t + Q z_t + R u_t^2 dt\right\}, \quad (1.6)$$

где  $U_0^T = \{u_t, t \in [0, T]\}$ ;  $P \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{n_y \times n_z}$  ( $S \geq 0$ ,  $S = S'$ ) – заданные матрицы; весовая функция  $\|x\|_S^2 = x^T S x$ , единичной матрице  $S = E$  соответствует ев-

клидова норма  $\|x\|_E^2 = |x|^2$ . Кроме того, предполагается выполненным обычное условие невырожденности  $R^T S R > 0$ .

Задача состоит, таким образом, в поиске  $(U^*)_0^\infty = \{u_t^*, t \in [0, \infty)\} \in \mathcal{U}_0^\infty$  — допустимого управления, реализации которого  $u_t^* = u^*(y_t, z_t^*)$  или  $u_t^* = u^*(z_t^*), t \in [0, \infty)$  соответственно доставляют минимум квадратичному функционалу  $J(U_0^\infty)$ :

$$(U^*)_0^\infty = \operatorname{argmin}_{U_0^\infty \in \mathcal{U}_0^\infty} J(U_0^\infty). \quad (1.7)$$

Далее в обоих вариантах задачи через  $z_t^*$  обозначается решение (1.1), отвечающее оптимальному управлению  $u_t^*$ , и учитывается, что  $y_t$  от  $u_t$  не зависит.

Надо отметить, что физический смысл поставленной задачи, определенный в заголовке термином стабилизация, обеспечивается именно целевым функционалом (1.6). Такая форма записи квадратичного функционала нужна, прежде всего, чтобы формализовать цель управления, состоящую в формировании такого значения выходной переменной  $z_t$ , которое задается состоянием  $y_t$ . Типичная интерпретация, которую обеспечивает слагаемое  $P y_t + Q z_t$ , — это задача слежения за целью. Поскольку горизонт слежения бесконечный и характеристики положения цели не изменяются, отсюда получается стабилизация выхода. В варианте с цепью физическая интерпретация даже содержательнее. Так как цепь  $y_t$  после очередной смены состояния  $e_i$  на состояние  $e_j$  некоторое время пребывает в последнем, не изменяясь, то в рамках этого периода постоянства состояние  $e_j$  вносит в уравнение (1.1) систематическую (кусочно-постоянную) составляющую, которая отличается от величины  $e_i$  систематической составляющей, вносимой на предыдущем интервале постоянства. Аналогично в целевом функционале формируются ступенчатые слагаемые на интервалах постоянства  $y_t$ . Таким образом, (1.6) формализует цель управления, состоящую в стабилизации выхода  $z_t$  около скачкообразно изменяющихся кусочно-постоянных положений, задаваемых состоянием цепи  $y_t$ . По-другому эти положения можно назвать направлениями дрейфа, а цель управления — обеспечение дрейфа выхода системы  $z_t$  в заданном и периодически изменяющемся направлении.

Кроме того, следует обратить внимание на важное отличие предложенной постановки задачи управления от классической задачи LQG с бесконечным горизонтом [7], в которой класс допустимых управлений включает только линейные функции состояния и выхода или только наблюдений. В LQG такое предположение не является ограничением, так как в соответствующей задаче с конечным горизонтом оптимальное решение получилось линейным на классе всех управлений. В рассматриваемой задаче получается иначе, поскольку и состояние (1.2) или (1.3), и, главное, решение соответствующей задачи с конечным горизонтом [9] нелинейные. Далее формулируются условия, при которых искомое решение представляется в виде предельной формы оптимального управления с конечным горизонтом и остается в классе нелинейных, сохраняя допредельную структуру.

**2. Оптимальное автономное управление (полная информация).** Решение задачи (1.7) в постановке с полной информацией получается предельным переходом в соответствующей задаче с конечным горизонтом [9]. Для этого требуется выполнение ряда условий, объединенных в следующем утверждении.

**Т е о р е м а 1.** Решение  $u^*$  задачи (1.7) для системы (1.1), (1.2) на классе управлений  $\mathcal{U}_0^\infty = \{u_t = u(y, z), y \in \mathbb{R}^{n_y}, z \in \mathbb{R}^{n_z}, t \in [0, \infty)\}$  имеет вид

$$u^*(y, z) = -\frac{1}{2} (R^T S R)^{-1} (c^T (2\alpha_* z + \beta_*(y)) + 2R^T S (P y + Q z)), \quad (2.1)$$

где  $\alpha_* \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$  — симметричная неотрицательно определенная матрица, удовлетворяющая матричному уравнению:

$$\begin{aligned} (M^\alpha)^T \alpha_* + \alpha_* M^\alpha + N^\alpha - \alpha_* c (R^T S R)^{-1} c^T \alpha_* &= 0, \\ M^\alpha &= b - c (R^T S R)^{-1} R^T S Q, \\ N^\alpha &= Q^T \left( S - S R (R^T S R)^{-1} R^T S \right) Q, \end{aligned} \quad (2.2)$$

и  $\beta_* = \beta_*(y) = \left( \beta_*^{(1)}(y), \dots, \beta_*^{(n_z)}(y) \right)^T \in \mathbb{R}^{n_z}$  — вектор-функция, удовлетворяющая системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left\{ \Sigma^T \frac{\partial^2 \beta_*^{(i)}}{\partial y^2} \Sigma \right\} + A^T \frac{\partial \beta_*^{(i)}}{\partial y} + \sum_{j=1}^{n_y} y^{(j)} [M_*^\beta]^{(ji)} + \sum_{j=1}^{n_z} \beta_*^{(j)} [N_*^\beta]^{(ji)} &= 0, \\ M_*^\beta &= 2 \left( \left( a^T - P^T S R (R^T S R)^{-1} c^T \right) \alpha_* + P^T \left( S - S R (R^T S R)^{-1} R^T S \right) Q \right), \\ N_*^\beta &= b - c \left( R^T S R \right)^{-1} R^T S Q - c \left( R^T S R \right)^{-1} c^T \alpha_*, \quad i = 1, \dots, n_z, \end{aligned} \quad (2.3)$$

если для параметров системы (1.1), (1.2) и целевого функционала (1.6) выполнены следующие условия:

- 1) матрица  $b$  устойчива (все собственные значения квадратной матрицы  $b \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$  имеют отрицательные действительные части);
- 2) матрицы  $(M^\alpha, c)$  стабилизируемы (в терминах [7, разд. 5.4], пара  $(M^\alpha, c)$  является стабилизирующей);
- 3) матрицы  $\left( (M^\alpha)^T, K \right)$ ,  $K = Q^T S^{\frac{1}{2}} \left( E - S^{\frac{1}{2}} R (R^T S R)^{-1} R^T S^{\frac{1}{2}} \right)$ , стабилизируемы (в терминах [7, разд. 5.4], пара  $(K^T, M^\alpha)$  является выявляющей);
- 4) для любого  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  существует и не зависит от  $t$  конечный предел:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{E} \left\{ I_t^{-1} \int_t^T I_\tau^{-1} (M_\tau^\beta)^T y_\tau d\tau \middle| \mathcal{F}_t^y \right\}, \quad (2.4)$$

где  $I_\tau^{-1} = \exp \left\{ (N_\tau^\beta)^T \tau \right\}$ ,  $y_\tau$  — решение уравнения (1.2) с переменной времени  $\tau \in [t, \infty)$  и начальным условием  $y_t = y$ .

Уравнения (2.3) записаны с использованием обозначений  $y = \left( y^{(1)}, \dots, y^{(n_y)} \right)^T$  для элементов вектора  $y$ ,  $[A]^{(ji)}$  — для элемента  $j$ -й строки  $i$ -го столбца матрицы  $A$ ,  $\operatorname{tr} \{A\}$  — для следа матрицы  $A$ . Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Как и в случае LQG-управления, решение задачи с бесконечным временем базируется на решении соответствующей задачи с конечным горизонтом. Это управление  $(U^\#)_0^T = \arg \min_{U_0^T \in \mathcal{U}_0^T} J(U_0^T)$  из класса допустимых управлений  $\mathcal{U}_0^T = \left\{ u_t = u_t(y, z, T), y \in \mathbb{R}^{n_y}, z \in \mathbb{R}^{n_z}, t \in [0, T] \right\}$  получено в [9] и с учетом использованных обозначений может быть записано в виде

$$u_t^\#(y, z, T) = -\frac{1}{2} \left( R^T S R \right)^{-1} \left( c^T (2\alpha_t z + \beta_t) + 2R^T S (P y + Q z) \right), \quad (2.5)$$

где матричный коэффициент  $\alpha_t = \alpha_t(T) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$  является решением задачи Коши для уравнения Риккати (см. Приложение), а векторный коэффициент  $\beta_t = \beta_t(y, T) = \left( \beta_t^{(1)}(y, T), \dots, \beta_t^{(n_z)}(y, T) \right)^T \in \mathbb{R}^{n_z}$  — задачи Коши для системы параболических дифференциальных уравнений в частных производных (см. Приложение). Соответственно уравнения (2.2), (2.3) получают предельным переходом  $\alpha_* = \lim_{T \rightarrow \infty} \alpha_t(T)$  и  $\beta_*(y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \beta_t(y, T)$ , обеспечиваемым условиями теоремы.

Отметим, что как уже упоминалось выше, оптимальное автономное управление (2.1) остается нелинейным по переменной  $y$  как в допредельной постановке. Это главное отличие рассматриваемой задачи от классической задачи LQG. Здесь же надо указать и на сходство задач: слагаемые, формируемые переменной выхода  $z$ , входят в управление (2.1) линейно и определяются теми же соотношениями, что и в задаче LQG. Кроме того, конструктивными условиями существования (2.1) можно считать только традиционные требования к коэффициентам уравнения Риккати. Проверять последнее условие (2.4) без компьютерного моделирования

затруднительно. Зато если ограничиться только численными экспериментами, то можно применять как минимум два разных эффективных метода численного решения параболических уравнений, определяющих  $\beta_t(y, T)$  [17, 18], а при наличии готовых расчетов анализ сходимости  $\lim_{T \rightarrow \infty} \beta_t(y, T)$  труда не составляет. Подтверждающий это пример подробно обсуждался в [9], где роль состояния (1.2) исполняет модель эволюции процентных ставок Кокса–Ингерсона–Росса (cox–ingersoll–ross model) [19], использованная для описания показателя RTT (round-trip time) сетевого протокола TCP (transmission control protocol) [20], и поверхности  $\beta_t(y, T)$  вычислены двумя имеющимися численными методами и аналитически.

**3. Оптимальная стабилизация по косвенным наблюдениям.** Решение задачи (1.7) для модели с косвенно наблюдаемой марковской цепью так же, как и в случае с полной информацией, получается предельным переходом в соответствующей задаче с конечным горизонтом [14], условия которого сформулированы в следующем утверждении.

**Т е о р е м а 2.** Решение  $u^*$  задачи (1.7) для системы (1.2), (1.3) на классе управлений  $\mathcal{U}_0^\infty = \{u_t = u(z), z \in \mathbb{R}^{n_z}, t \in [0, \infty)\}$  имеет вид

$$u^*(z) = -\frac{1}{2}(R^T S R)^{-1} \left( c^T (2\alpha_* z + \beta_* \hat{y}(z)) + 2R^T S (P \hat{y}(z) + Qz) \right), \quad (3.1)$$

где  $\hat{y}(z)$  задано (1.5),  $\alpha_* \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$  – симметричная неотрицательно определенная матрица, удовлетворяющая матричному уравнению (2.2), и  $\beta_* \in \mathbb{R}^{n_z \times n_y}$  – прямоугольная матрица, являющаяся решением матричного уравнения:

$$\beta_* \Lambda^T + M_*^\beta - N_*^\beta \beta_* = 0, \quad (3.2)$$

где  $M_*^\beta$  и  $N_*^\beta$  определены в (2.3), если для параметров системы (1.1), (1.3) и целевого функционала (1.6) выполнены условия 1)–3) теоремы 1.

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

Как и в постановке с полной информацией решение задачи с бесконечным временем базируется на решении соответствующей задачи с конечным горизонтом. Это решение можно обозначить так же, как и выше,  $(U^\#)^T_0 = \arg \min_{U_0^T \in \mathcal{U}_0^T} J(U_0^T)$ , имея в виду класс допустимых управлений  $\mathcal{U}_0^T = \{u_t = u_t(z, T), z \in \mathbb{R}^{n_z}, t \in [0, T]\}$ . Оно получено в [14] и с учетом использованных обозначений может быть записано в виде:

$$u_t^\#(z, T) = -\frac{1}{2}(R^T S R)^{-1} \left( c^T (2\alpha_t z + \beta_t \hat{y}) + 2R^T S (P \hat{y} + Qz) \right). \quad (3.3)$$

Оценки  $\hat{y}(z_t^\#)$  на оптимальных траекториях  $z_t^\#$  задает фильтр Вонэма (1.5), матричный коэффициент  $\alpha_t = \alpha_t(T)$  является решением той же задачи Коши для уравнения Риккати, что и в теореме 1 (см. Приложение), а матричный коэффициент  $\beta_t = \beta_t(T) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_y}$  – решением задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа (см. Приложение).

Отметим, что предельная функция  $\beta_*(y)$  в первой модели и предельная матрица  $\beta_*$  во второй связаны равенством  $\beta_*(y) = \beta_* y$ . С учетом этого еще обратим внимание, что от условия 4) теоремы 1, обеспечивавшего существование предельной функции  $\beta_*(y)$  в первой модели, здесь осталась только предельная матрица  $M_*^\beta$ , существование которой обеспечивает предел  $\alpha_*$ . Так получается благодаря структуре фильтра Вонэма. Уравнение (1.5) имеет линейный снос и нелинейную диффузию, благодаря чему в оптимальном управлении второе слагаемое, формируемое состоянием  $y_t$  (а точнее, его оценкой  $\hat{y}_t$ ), как и первое, формируемое выходом  $z_t$ , оказывается линейным. Такой частный случай в задаче управления линейным дифференциальным выходом общего вида рассмотрен в [9], но здесь снос  $\Lambda^T \hat{y}_t$  не только линейный, но и аффинный, без свободного члена, что еще больше упрощает вид управления. Таким образом, нелинейность управлению  $u$  дает только оценка фильтрации  $\hat{y}_t = \hat{y}(z_t)$ . При этом если предположить, что цепь  $y_t$  доступна прямым наблюдениям, то оптимальное управление будет иметь тот же вид (3.3), где вместо  $\hat{y}_t$  будет использоваться точное значение  $y_t$ . Такое свойство управления в [11] названо сильным принципом разделения.



**4. Численный анализ предельного режима.** Упомянутые выше расчеты с моделью Кокса—Ингерсона—Росса, выполненные в [9], хорошо иллюстрируют первую модель и результативность как оптимального автономного управления, так и приближенных методов, которые можно применять для его реализации. По этой причине численный эксперимент здесь выполнен для второй модели. Именно для иллюстрации того, как работает оптимальное автономное управление  $u^*(z)$  (3.1) в сравнении с оптимальным неавтономным управлением  $u_t^\#(z, T)$  (3.3) использована предложенная в [21] модель простого механического привода

$$\begin{aligned} dx_t &= v_t dt, \quad t \in (0, T], \\ dv_t &= ax_t dt + bv_t dt + cy_t dt + hu_t dt + \sqrt{g} dw_t. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Буквенные обозначения выполнены полужирным шрифтом, чтобы исключить совпадения с использованными выше обозначениями и подчеркнуть физический смысл величин:  $v_t$  — скорость перемещения привода,  $x_t$  — его координатное положение,  $w_t$  — погрешность в задании ускорения и т.д. Не касается это только цепи  $y_t$ . Предполагается, что она имеет размерность  $n_y = 3$ , начальное распределение  $Y = (1, 0, 0)^T$  и

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

три состояния цепи — это три целевых положения привода. Начальные условия  $x_0$  и  $v_0$  — независимые гауссовские случайные величины с нулевым средним и дисперсиями  $\sigma_x^2 = \sigma_v^2 = 1$ . Остальные параметры:  $a = -1$ ,  $b = -1/2$ ,  $h = 10$ ,  $g = 0.01$  и  $c = (c_1, c_2, c_3) = (-1, 0, 1)$ . Система (4.1) устойчива при  $b < 0$  и  $b^2 + 4a = -3.75 < 0$ , поскольку  $b$  и  $b^2 + 4a$  — собственные числа матрицы системы  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ . Обсуждаемые в [21] расчеты выполнены для  $T = 10$  и целевого функционала:

$$J(U_0^T) = \mathcal{E} \left\{ \int_0^T (|Cy_t - x_t|^2 + R|u_t|^2) dt \right\}, \quad (4.2)$$

где

$$C = \left( -\frac{c_1}{a}, -\frac{c_2}{a}, -\frac{c_3}{a} \right) = (-1, 0, 1) = c, \quad R = 0.001.$$

Цель управления, минимизирующего (4.2), состоит в поддержании привода в положении  $x_t$ , задаваемом величиной  $Cy_t$ , т.е. в обеспечении дрейфа в направлении состояния цепи. Причем неуправляемый вариант системы (4.1) при  $u_t = 0$  дрейфует в направлении текущего состояния цепи в силу своей устойчивости, но эффективность этого дрейфа в сравнении с управляемой системой невелика. Проиллюстрирован этот вариант системы рис. 1, где приведена одна реализация из смоделированного пучка 1000 траекторий положения привода  $x_t$ , сформированная тремя управлениями: 1) «нулевым»  $u_t = u_t^{(0)} = 0$ ; 2) оптимальным  $u_t = u_t^\# = u_t^\#(z_t^\#, T)$ , определенным соотношением (3.3); 3) оптимальным автономным  $u_t = u_t^* = u^*(z_t^*)$ , определенным соотношением (3.1).

Рисунок иллюстрирует высокое качество управления, минимизирующего (4.2), и «обозначение» неуправляемой системой (4.1) передвижения привода в направлении дрейфа  $Cy_t$ . Главный вывод — это практически полное совпадение траекторий  $x_t^\#$  и  $x_t^*$ . Небольшая разница видна только на самом конце траектории (показана на выноске), где собственно и происходит формирование коэффициентов  $\alpha_*$  и  $\beta_*$  оптимального автономного управления из коэффициентов  $\alpha_t$  и  $\beta_t$ . Переходной процесс, который хотелось проиллюстрировать, протекает очень быстро, что подтвердил расчет с начальным значением  $x_0 = 100$ . Фактические значения целевого функционала (4.2) для этого примера приведены ниже в таблице вместе с остальными примерами.

Добиться видимой разницы в результативности автономного  $u_t$  и оптимального  $u_t^\#$  управлений оказалось довольно сложно. Дело в том, что даже сильное удаление системы (4.1) от предельного состояния, растягивающее переходной процесс при отсутствии управления, что и могло бы стать предметом для анализа, при наличии любого из двух управлений  $u_t$  или  $u_t^\#$  не сильно сказывается на общем результате. Любое из управлений, минимизирующее (4.2), очень быстро стабилизирует положение  $x_t$ , уменьшая время перехода системы в предельный режим.

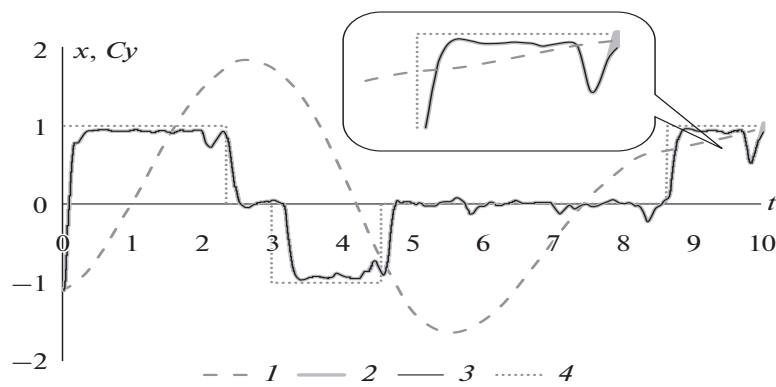


Рис. 1. Типовые траектории положения привода  $x_t$ , модель  $T = 10$  и  $R = 0.001$ ; управления: 1 –  $u_t^{(0)}$ , 2 –  $u_t^\#$ , 3 –  $u_t^*$ , 4 – направление дрейфа  $Cy_t$ .

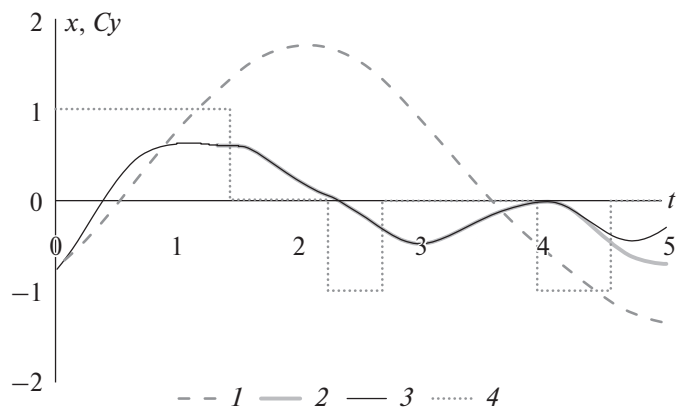


Рис. 2. Типовые траектории положения привода  $x_t$ , модель  $T = 5$  и  $R = 1$ ; управления: 1 –  $u_t^{(0)}$ , 2 –  $u_t^\#$ , 3 –  $u_t^*$ , 4 – направление дрейфа  $Cy_t$ .

Немного уменьшить этот эффект удастся только за счет увеличения цены величины управляющего воздействия  $R$  и уменьшения времени стабилизации. Два следующих примера рассчитаны для  $R = 1$  и двух значений  $T = 5$  и  $T = 1$ . Иллюстрируют эти расчеты рис. 2 и 3 соответственно, на которых приведены по одной реализации из множества смоделированных траекторий.

Таблица 1. Оценки качества управлений  $J(\mathcal{U}_0^T)$  по результатам моделирования

| Модель                        | $u_t^{(0)}$ | $u_t^\# = u_t^\#(z_t^\#, T)$ | $u_t^* = u^*(z_t^*)$ |
|-------------------------------|-------------|------------------------------|----------------------|
| $T = 10, R = 0.001$           | 8.418       | 1.093                        | 1.094                |
| $T = 5, R = 1$                | 5.148       | 2.128                        | 2.160                |
| $T = 1, R = 1$                | 1.600       | 0.926                        | 0.987                |
| $T = 5, R = 0.001, x_0 = 100$ | 11551.04    | 0.630                        | 0.631                |



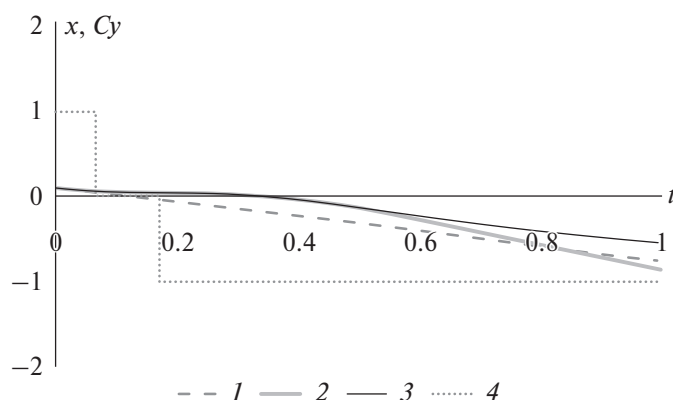


Рис. 3. Типовые траектории положения привода  $x_r$ , модель  $T = 1$  и  $R = 1$ ; управления: 1 –  $u_t^{(0)}$ , 2 –  $u_t^\#$ , 3 –  $u_t^*$ , 4 – направление дрейфа  $Cy_r$

Формальные выводы к приведенным иллюстрациям дает следующая таблица, в которой указаны значения (4.2), вычисленные приближенно путем компьютерного моделирования 1000 траекторий системы (4.1) с шагом  $\Delta t = 0.001$  и всех трех управлений  $u_t^{(0)}$ ,  $u_t^\#$  и  $u_t^*$ .

Таким образом, даже в тех примерах, где разница по критерию между автономным и оптимальным управлением есть, величина ее невелика (вторая-третья значащая цифра). С учетом сравнительной простоты расчета  $u_t$  по отношению к  $u_t^\#$  и его эффективности как средства ускорения переходного процесса и достижения предельного режима, преимущества автономного управления представляются очевидными.

**Заключение.** Решенная в статье задача — это логичное развитие задачи оптимального управления линейным выходом стохастической дифференциальной системы по квадратичному критерию на случай бесконечного времени. Основные представленные результаты в полной мере эксплуатируют классические методы исследования уравнения Риккати, давно разработанные для классической LQG-задачи управления и автономной линейной динамической системы управления/наблюдения. Однако в рассмотренных постановках эта теория обеспечивает существование только «части» искомого оптимального автономного управления, которая отвечает за линейные элементы модели. При этом остаются, как и в допредельном варианте с конечным горизонтом, нелинейные элементы. Полезным с практической точки зрения оказалось, что параметры этих нелинейных слагаемых в оптимальном автономном управлении вычислить существенно проще, чем в случае конечного горизонта, поскольку автономная система дала возможность исключить из решения сложные в реализации схемы решения параболических уравнений, заменив их на обыкновенные дифференциальные. Кроме того, бесконечное время позволило сформулировать прикладную цель полученного управления, состоящую в стабилизации выхода системы в положениях, задаваемых ее состоянием. На конечном горизонте такая интерпретация задачи выглядела несколько хуже.

Наконец, можно попробовать определить варианты дальнейшего развития. Условия, в которых решена задача стабилизации, предполагают, что полностью известны все вероятностные характеристики модели, чего на практике не бывает. Таким образом, перспективным развитием могут стать любые варианты адаптации представленных алгоритмов управления, обеспечивающие их нечувствительность к априорной неопределенности модели, не зависимо от того, будет ли это использование робастных методов оценивания или нечувствительных к риску управлений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Athans M. The Role and Use of the Stochastic Linear-Quadratic-Gaussian Problem in Control System Design // IEEE T. Automat. Contr. 1971. V. 16. № 6. P. 529–552.
2. Astrom K.J. Introduction to Stochastic Control Theory. N.Y.: Acad. Press, 1970.
3. Lindquist A. On Feedback Control of Linear Stochastic Systems // SIAM J. Control. 1973. V. 11. № 2. P. 323–343.
4. Elliott R.J., Aggoun L., Moore J.B. Hidden Markov Models: Estimation and Control. N.Y.: Springer-Verlag, 1995.
5. Bar-Shalom Y., Willett P.K., Tian X. Tracking and Data Fusion: a Handbook of Algorithms. Storrs, Conn.: YBS Publishing, 2011.

6. *Wonham W.M.* Linear Multivariable Control. A Geometric Approach. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, V. 101. Berlin: Springer-Verlag, 1974.
7. *Девис М.Х.А.* Линейное оценивание и стохастическое управление / Пер. с англ. М.: Наука, 1984.
8. *Kalman R.E., Bucy R.S.* New Results in Linear Filtering and Prediction Theory // Trans. ASME J. Basic Eng. 1965. № 83. P. 95–107.
9. *Босов А.В.* Задача управления линейным выходом нелинейной неуправляемой стохастической дифференциальной системы по квадратичному критерию // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 5. С. 52–73.
10. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). М.: Наука, 1974.
11. *Rishel R.* A Strong Separation Principle for Stochastic Control Systems Driven by a Hidden Markov Model // SIAM J. Control and Optimization. 1994. V. 32. P. 1008–1020.
12. *Wonham W.M.* Some Applications of Stochastic Differential Equations to Optimal Non-linear Filtering // SIAM J. Control. 1965. V. 2. P. 347–369.
13. *Ширяев А.Н.* Вероятность. 2-е изд. М.: Наука, 1989.
14. *Borisov A., Bosov A., Miller G.* Optimal Stabilization of Linear Stochastic System with Statistically Uncertain Piecewise Constant Drift // Mathematics. 2022. V. 10. № 2 (184).
15. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами / Пер. с англ. М.: Мир, 1978.
16. *Bosov A., Borisov A.* Comparative Study of Markov Chain Filtering Schemas for Stabilization of Stochastic Systems under Incomplete Information // Mathematics. 2022. V. 10. № 18 (338).
17. *Босов А.В., Стефанович А.И.* Управление выходом стохастической дифференциальной системы по квадратичному критерию. II. Численное решение уравнений динамического программирования // Информатика и ее применения. 2019. Вып. 1. Т. 13. С. 9–15.
18. *Босов А.В., Стефанович А.И.* Управление выходом стохастической дифференциальной системы по квадратичному критерию. IV. Альтернативное численное решение // Информатика и ее применения. 2020. Вып. 1. Т. 14. С. 24–30.
19. *Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A.* A Theory of the Term Structure of Interest Rates // Econometrica. 1985. V. 53. Iss. 2. P. 385–407.
20. *Bohacek S., Rozovskii B.* A Diffusion Model of Roundtrip Time // Computational Statistics & Data Analysis. 2004. V. 45. Iss. 1. P. 25–50.
21. *Босов А.В.* Стабилизация и слежение за траекторией линейной системы со скачкообразно изменяющимся дрейфом // АиТ. 2022. № 4. С. 27–46.
22. *Øksendal B.* Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications. N.Y.: Springer-Verlag, 2003.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

**Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.** Условия теоремы применяются к решению соответствующей задачи с конечным горизонтом. Это управление, обозначенное как  $(U^\#)_0^T = \arg \min_{U_0^T \in \mathcal{U}_0^T} J(U_0^T)$ ,  $u_t^\# = u_t^\#(y_t, z_t^\#, T)$ , оптимальное на классе допустимых управлений

$$\mathcal{U}_0^T = \left\{ u_t = u_t(y, z, T), y \in \mathbb{R}^{n_y}, z \in \mathbb{R}^{n_z}, t \in [0, T] \right\}, \text{ может быть записано в виде [9]}$$

$$u_t^\#(y, z, T) = -\frac{1}{2} \left( R^T S R \right)^{-1} \left( c^T (2\alpha_t z + \beta_t) + 2R^T S (P y + Q z) \right), \quad (\text{П.1})$$

где матричный коэффициент  $\alpha_t = \alpha_t(T) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$  является решением задачи Коши для уравнения Риккати:

$$\frac{d\alpha_t}{dt} + (M^\alpha)^T \alpha_t + \alpha_t M^\alpha + N^\alpha - \alpha_t c \left( R^T S R \right)^{-1} c^T \alpha_t = 0, \alpha_T = Q^T S Q, \quad (\text{П.2})$$

а векторный коэффициент  $\beta_t = \beta_t(y, T) = \left( \beta_t^{(1)}(y, T), \dots, \beta_t^{(n_z)}(y, T) \right)^T \in \mathbb{R}^{n_z}$  — задачей Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_t^{(i)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \Sigma^T \frac{\partial^2 \beta_t^{(i)}}{\partial y^2} \Sigma \right\} + A^T \frac{\partial \beta_t^{(i)}}{\partial y} + \sum_{j=1}^{n_y} y^{(j)} \left[ M_t^\beta \right]^{(ji)} + \sum_{j=1}^{n_z} \beta_t^{(j)} \left[ N_t^\beta \right]^{(ji)} &= 0 \\ M_t^\beta = M_t^\beta(T) &= 2 \left( \left( a^T - P^T S R \left( R^T S R \right)^{-1} c^T \right) \alpha_t + P^T \left( S - S R \left( R^T S R \right)^{-1} R^T S \right) Q \right) \\ N_t^\beta = N_t^\beta(T) &= b - c \left( R^T S R \right)^{-1} R^T S Q - c \left( R^T S R \right)^{-1} c^T \alpha_t, \\ \beta_T^{(i)} &= 2 \sum_{j=1}^{n_y} y^{(j)} \left[ Q^T S P \right]^{(ji)}, \quad i = 1, \dots, n_z. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Искомое оптимальное управление  $(U^*)_0^\infty = \arg \min_{U_0^\infty \in \mathcal{U}_0^\infty} J(U_0^\infty)$ ,  $u_t^* = u_t^*(y_t, z_t^*, T)$ , является пределом (П.1):

$$u^*(y, z) = \lim_{T \rightarrow \infty} u_t^\#(y, z, T) = -\frac{1}{2} \left( R^T S R \right)^{-1} \left( c^T (2\alpha_* z + \beta_*) + 2R^T S (P y + Q z) \right)$$

если существуют  $\alpha_*$  и  $\beta_*$ .

Требования 1)–3) теоремы — это условия существования предельного решения  $\alpha_* = \lim_{T \rightarrow \infty} \alpha_t$  матричного уравнения Риккати (П.2), неотрицательно определенного и не зависящего от граничного условия  $\alpha_T$ , согласно формулировке теоремы 12.2 из [6]. Уточнить требуется только условие 3), которое сформулировано с учетом представления матрицы  $N^\alpha = K K^T$ , так как

$$\begin{aligned} &\left( E - S^{\frac{1}{2}} R \left( R^T S R \right)^{-1} R^T S^{\frac{1}{2}} \right) \left( E - S^{\frac{1}{2}} R \left( R^T S R \right)^{-1} R^T S^{\frac{1}{2}} \right)^T = \\ &= \left( E - S^{\frac{1}{2}} R \left( R^T S R \right)^{-1} R^T S^{\frac{1}{2}} \right)^2 = E - S^{\frac{1}{2}} R \left( R^T S R \right)^{-1} R^T S^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Умножение справа и слева этого равенства на  $Q^T S^{\frac{1}{2}}$  и  $S^{\frac{1}{2}} Q$  дает разложение  $N^\alpha$ , используемое в формулировке условия 3).

Требование 1) вместе с исходным предположением об эргодичности  $U_t$  обеспечивает, кроме того, конечность целевого функционала (1.6). Кроме предела  $\alpha_*$  упомянутая теорема 12.2 из [6] гарантирует устойчивость матрицы  $N_*^\beta$  — условие, без которого не может выполняться (2.4).

Наконец, предельный переход  $\beta_*(y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \beta_t(y, T)$  обеспечивается условием 4) теоремы 1, поскольку решение может быть представлено с помощью формулы Фейнмана-Каца [22]:

$$\beta_t(y, T) = \mathcal{E} \left\{ \begin{aligned} & 2I_t^{-1} I_T^{-1} Q^T S P y_T + \\ & + I_t^{-1} \int_t^T I_\tau^{-1} (M_\tau^\beta)^T y_\tau d\tau \end{aligned} \middle| \mathcal{F}_t^y \right\}, I_t^{-1} = \exp \left\{ (N_t^\beta)^T t \right\}. \quad (\text{П.4})$$

Учитывая, что матрица  $N_*^\beta = \lim_{T \rightarrow \infty} N_t^\beta(T)$  (предел существует и не зависит от  $t$ , т.к.  $N_t^\beta(T)$  выражается линейно через  $\alpha_t(T)$ ) является устойчивой, первое слагаемое в (П.4) обращается в ноль, что вместе с условием 4) теоремы 1 обеспечивает существование предела при  $T \rightarrow \infty$  в (П.3), не зависящего от  $t$  и граничного условия  $\beta_T^{(i)}(y, T)$ , что и дает уравнения (2.3), завершая доказательство.

**Доказательство теоремы 2.** Следует повторить рассуждения теоремы 1, используя вместо оптимального управления (2.5) решение задачи  $(U^\#)_0^T = \arg \min_{U_0^T \in \mathcal{U}_0^T} J(U_0^T)$ ,  $u_t^\# = u_t^\#(z_t^\#, T)$ , оптимальное на классе  $\mathcal{U}_0^T = \{u_t = u_t(z, T), z \in \mathbb{R}^{n_z}, t \in [0, T]\}$ , т.е. для постановки с косвенными наблюдениями. Это управление может быть записано в виде [14]

$$u_t^\#(z, T) = -\frac{1}{2} (R^T S R)^{-1} (c^T (2\alpha_t z + \beta_t \hat{y}) + 2R^T S (P\hat{y} + Qz)). \quad (\text{П.5})$$

Оценки  $\hat{y}(z_t^\#)$  на оптимальных траекториях  $z_t^\#$  задает фильтр Вонэма (1.5), матричный коэффициент  $\alpha_t = \alpha_t(T)$  является решением задачи Коши для уравнения Риккати (П.2), а матричный коэффициент  $\beta_t = \beta_t(T) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_y}$  — решением задачи Коши для линейного уравнения:

$$\frac{d\beta_t}{dt} = \beta_t \Lambda^T + M_t^\beta - N_t^\beta \beta_t = 0, \beta_T = 2Q_T^T S_T P_T, \quad (\text{П.6})$$

где  $M_t^\beta$  и  $N_t^\beta$  определены в (П.3).

Искомое оптимальное управление  $(U^*)_0^\infty = \arg \min_{U_0^\infty \in \mathcal{U}_0^\infty} J(U_0^\infty)$ ,  $u_t^* = u_t^*(z_t^*)$ , является пределом (П.5):

$$u^*(z) = \lim_{T \rightarrow \infty} u_t^\#(z, T) = -\frac{1}{2} (R^T S R)^{-1} (c^T (2\alpha_* z + \beta_* \hat{y}) + 2R^T S (P\hat{y} + Qz))$$

если существуют  $\alpha_*$  и  $\beta_*$ .

Отличие в рассуждениях, таким образом, касается только уравнения (П.6), т.е. существование предельной матрицы  $\beta_*$  — решения уравнения (3.2). Устойчивость (П.6) обеспечивает устойчивость матрицы  $N_*^\beta$  и изначально предполагаемая моделью (1.3) эргодичность цепи  $y_t$ .

Это замечание завершает доказательство.

УДК 519.977

## ИСКЛЮЧЕНИЕ АКТИВНЫХ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© 2024 г. А.С. Бортакровский<sup>a, b, \*</sup>

<sup>a</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

<sup>b</sup>МИСИС (национальный исследовательский технологический ун-т), Москва, Россия

\*e-mail: asbortakov@mail.ru

Поступила в редакцию 27.05.2024 г.

После доработки 17.06.2024 г.

Принята к публикации 16.10.2024 г.

Рассматриваются задачи оптимального управления непрерывными системами с фазовыми ограничениями. Предполагается, что траекторию системы можно разбить на участки, на каждом из которых набор активных фазовых ограничений фиксирован. Такие траектории характерны для гибридных систем, в которых переход от одного участка к другому считается переключением. Применяя необходимые условия оптимальности гибридных систем с промежуточными ограничениями, получаем решение первоначальной задачи с фазовыми ограничениями.

*Ключевые слова:* гибридная система, фазовое ограничение, оптимальное управление, необходимые условия оптимальности

DOI: 10.31857/S0002338824050053, EDN: TEJUJZ

## ELIMINATION OF ACTIVE PHASE CONSTRAINTS IN OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

A.S. Bortakovskii<sup>a, b, \*</sup>

<sup>a</sup>Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

<sup>b</sup>National University of Science and Technological University (MISiS), Moscow, Russia

\*e-mail: asbortakov@mail.ru

The problems of optimal control of continuous systems with phase constraints are considered. It is assumed that the trajectory of the system can be divided into sections, on each of which a set of active phase constraints is fixed. Such trajectories are typical for hybrid systems in which the transition from one site to another is considered a switch. Applying the necessary optimality conditions for hybrid systems with intermediate constraints, we obtain a solution to the initial problem with phase constraints.

*Keywords:* hybrid system, phase limitation, optimal control, necessary optimality conditions

**Введение.** Задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями имеют многочисленные приложения. Однако их решение с использованием необходимых условий оптимальности [1, 2] довольно трудное. В первую очередь это связано с применением в этих условиях в качестве множителей Лагранжа неотрицательных мер, при помощи которых учитываются активные и пассивные фазовые ограничения. На практике специалистам, как правило, известна схема “обхода” ограничений, т.е. последовательность участков траектории, на каждом из которых набор активных ограничений не меняется. Поэтому задача сводится к оптимизации управления на каждом участке, а также оптимизации позиций переключений, в которых меняются участки движения.

Процессы управления с переключениями характерны для гибридных систем (ГС), непрерывное движение которых описывается дифференциальными уравнениями, а мгновенные изменения состояния (переключения) — рекуррентными уравнениями или включениями. Наиболее общей моделью ГС является так называемая гибридная система переменной размерности (ГСПР), в моменты переключений которой меняется пространство состояний, в частности его размерность (краткий обзор работ по ГСПР см. в [3]).

Необходимые условия оптимальности гибридных систем с промежуточными ограничениями, обобщающие принцип максимума [4], получены в работах [5, 6]. В этих публикациях количество переключений задано, а сами переключения неуправляемы. Для решения задач оптимального управления с фазовыми ограничениями применяются ГСПР. При этом допускаются процессы с мгновенными многократными переключениями [3, 7]. Такие процессы, как правило, исключаются в задачах оптимизации ГС, несмотря на то, что именно они оказываются оптимальными не только в академических примерах, но и в приложениях, например в задачах группового управления.

В статье приводятся необходимые условия оптимальности ГСПР с промежуточными и терминальными ограничениями. Затем рассматривается задача оптимального управления непрерывной системой с фазовыми ограничениями, для решения которой предлагается метод исключения активных фазовых ограничений. Этот метод применяется, если известен план “активизации” фазовых ограничений, т.е. задана конечная последовательность изменения состава активных ограничений. В результате исключения получается задача оптимального управления ГСПР с промежуточными ограничениями, для решения которой используются приведенные ранее необходимые условия оптимальности. Эффективность предлагаемого подхода демонстрируется на примерах.

**1. Оптимизация ГСПР с промежуточными ограничениями.** 1.1. **П о с т а н о в к а   з а д а ч и.** Пусть на промежутке времени  $T = [t_0, t_F]$  динамическая система совершает  $N$  переключений в моменты времени  $t_1, \dots, t_N$ , образующие вместе с моментом  $t_F$  окончания движения неубывающую конечную последовательность  $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_N, t_F\}$ :

$$t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_{N+1} \triangleq t_F. \quad (1.1)$$

Между неравными последовательными моментами переключений состояние системы изменяется непрерывно, согласно дифференциальному уравнению:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_i(t), u_i(t)), \quad t \in T_i, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (1.2)$$

а в моменты переключений — дискретно в соответствии с рекуррентным уравнением:

$$x_i(t_i) = g_i(t_i, x_{i-1}(t_i)), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.3)$$

В соотношениях (1.2)  $\mathbb{N} \triangleq \{i = 0, 1, \dots, N \mid t_i < t_{i+1}\}$  — множество номеров ненулевых (по длине) частичных промежутков  $T_i = [t_i, t_{i+1}]$  непрерывного изменения системы;  $x_i(t)$  — состояние системы в момент времени  $t \in T_i$ ,  $x_i(t) \in X_i = \mathbb{R}^{n_i}$ ;  $u_i(t)$  — управление непрерывным движением системы в момент времени  $t \in T_i$ ,  $u_i(t) \in U_i \subset \mathbb{R}^{p_i}$ ,  $U_i$  — заданное множество допустимых значений управления,  $i \in \mathbb{N}$ . При  $t_i = t_{i+1}$  дифференциальное уравнение (1.2) опускается ( $i \notin \mathbb{N}$ ), функция  $x_i(\cdot)$  определена в одной точке  $x_i(t_i) = x_i$ , а значение  $u_i(t_i)$  управления в этой точке несущественно.

Функции  $f_i : T \times X_i \times U_i \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , и  $g_i : T \times X_{i-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , непрерывны на всей области определения вместе с первыми частными производными по  $t$  и по компонентам вектора  $x_i$ . Возможное равенство последовательных моментов в (1.1) означает, что система совершает мгновенные многократные переключения [3, 7].

Начальное состояние системы задано начальным условием

$$x_0(t_0) = 0. \quad (1.4)$$

Конечная позиция системы определяется первым достижением терминальной поверхности:

$$G_F(t_F, x_N(t_F)) = 0. \quad (1.5)$$

Переключения происходят на поверхностях, которые задаются уравнениями

$$G_i(t_i, x_{i-1}(t_i)) = 0. \quad (1.6)$$



Функции  $G_F : [t_0, +\infty) \times X_N \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $G_i : [t_0, +\infty) \times X_{i-1} \rightarrow \mathbb{R}^{l_{i-1}}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , определяющие терминальные (1.5) и промежуточные (1.6) ограничения, непрерывно дифференцируемые. Терминальные условия, аналогичные (1.5), могут накладываться на левый конец траектории [8, 9] либо на оба конца траектории одновременно (например, условие периодичности).

Множество допустимых процессов  $\mathcal{D}_0(t_0, x_0)$  составляют тройки  $d = (T, x(\cdot), u(\cdot))$ , включающие неубывающую последовательность  $T$  моментов переключений (1.1); последовательность  $x(\cdot) = \{x_i(\cdot)\}_{i=0}^N$  абсолютно непрерывных функций  $x_i : T_i \rightarrow X_i$ ,  $i \in N$ ; последовательность  $u(\cdot) = \{u_i(\cdot)\}_{i=0}^N$  ограниченных измеримых функций  $u_i : T_i \rightarrow U_i$ . Причем пары  $(x_i(\cdot), u_i(\cdot))$ ,  $i \in N$ , удовлетворяют дифференциальному уравнению (1.2) почти всюду на промежутке  $T_i$ , а последовательность  $x_i(t_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , — рекуррентному уравнению (1.3). В начальный момент времени выполняется условие (1.4), в конечный — терминальное условие (1.5), в моменты переключений — промежуточные ограничения (1.6). Подчеркнем, что количество  $N$  переключений и моменты  $T$  не фиксированы и у разных допустимых процессов могут не совпадать. При этом не исключается случай отсутствия переключений, когда  $N = 0$  и  $T = \{t_F\}$ .

На множестве  $\mathcal{D}_0(t_0, x_0)$  допустимых процессов задан функционал качества:

$$I_0(t_0, x_0, d) = \sum_{i=0}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_i^0(t, x_i(t), u_i(t)) dt + \sum_{i=1}^N g_i^0(t_i, x_{i-1}(t_i)) + F_N(t_F, x_N(t_F)), \quad (1.7)$$

где скалярные функции  $f_i^0 : T_i \times X_i \times U_i \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_i^0 : T \times X_{i-1} \rightarrow \mathbb{R}_+$  и  $F_N : [t_0, +\infty) \times X_N \rightarrow \mathbb{R}$  ограничены снизу и непрерывны вместе с первыми частными производными по  $t$  и по компонентам вектора  $x_i$ . Функции  $g_i^0$  неотрицательные. Последнее условие позволяет рассматривать каждое слагаемое  $g_i^0(t_i, x_{i-1}(t_i))$  в (1.7) как затраты (или штраф) при переключении  $x_{i-1}(t_i) \rightarrow x_i(t_i) = g_i(t_i, x_{i-1}(t_i))$  из состояния  $x_{i-1}(t_i)$  в состояние  $x_i(t_i)$ . В функционале (1.7) момент окончания  $t_F$  обозначен также через  $t_{N+1}$ , как и ранее в (1.1).

Требуется найти минимальное значение функционала (1.7) и оптимальный процесс  $d^* = (T^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot), \{v^*\}) \in \mathcal{D}_0(t_0, x_0)$ , на котором это значение достигается:

$$I_0(t_0, x_0, d^*) = \min_{d \in \mathcal{D}_0(t_0, x_0)} I_0(t_0, x_0, d). \quad (1.8)$$

Если наименьшее значение (1.8) не существует, то может быть поставлена задача нахождения минимизирующей последовательности допустимых процессов [8]. Количество переключений у процессов минимизирующей последовательности может оставаться конечным или неограниченно возрастать. Бесконечное количество переключений у оптимального процесса становится невозможным, если усилить условие ограниченности функции  $g_i^0$  в (1.7), полагая  $g_i^0(t, x_{i-1}) \geq \text{const} > 0$ . Применение таких штрафов в функционале качества исключает фиктивные переключения, когда состояние не меняется:  $x_{i-1}(t_i) = x_i(t_i)$ , а также последовательности процессов с неограниченным ростом числа переключений как неминимизирующие.

Поставленная задача отличается от рассмотренной в [7] отсутствием дискретного управления переключениями, что несколько упрощает задачу. Отметим, что управляющие параметры в задаче (1.8) образуют *управляющий комплекс*, который включает: количество переключений  $N$ , моменты переключений  $t_1, \dots, t_N$ , управление непрерывным движением  $u(\cdot)$  и момент  $t_F$  окончания процесса управления. Как правило, решение поставленной задачи  $I \rightarrow \min$  сводится к решению ряда задач  $I_N \rightarrow \min$  с фиксированным числом переключений  $N$ , которое последовательно увеличивается:  $N = 0, 1, \dots$ . Отметим, что в прикладных задачах количество переключений всегда ограничено техническими требованиями.

**1.2. Необходимые условия оптимальности.** Введем функции Понтрягина для непрерывного движения и переключений соответственно [7]:

$$\begin{aligned} H_i(\psi_i, t, x_i, u_i) &= \psi_i f_i(t, x_i, u_i) - \lambda_0 f_i^0(t, x_i, u_i), \quad i = 0, 1, \dots, N, \\ \hat{H}_i(\psi_i, t, x_{i-1}) &= \psi_i g_i(t, x_{i-1}) - \lambda_0 g_i^0(t, x_{i-1}), \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь  $\lambda_0$  — неотрицательный множитель,  $\psi_i = (\psi_i^1, \dots, \psi_i^{n_i})$  — вспомогательные вектор-функции,  $i = 1, \dots, N$ . Предполагаем, что между моментами переключений функции  $\psi_i : T_i \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $i \in N$ , абсолютно непрерывны. Функции Понтрягина (1.9) используются в формулировке следующих условий оптимальности.

**Т е о р е м а** (необходимые условия оптимальности ГСПР). Пусть оптимальный процесс  $(T, x(\cdot), u(\cdot))$  имеет  $N$  переключений в моменты  $t_1, \dots, t_N$ :  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_F$ . Тогда существу-

ют функции  $\psi_i(\cdot)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , и такие числа  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N+1}$ , неравные нулю одновременно, что выполняются:

1) дифференциальные уравнения:

$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial H_i}{\partial x_i}[t], \quad t \in T_i, \quad i \in N;$$

2) промежуточные условия:

$$\left\{ H_i[t_i] - H_{i-1}[t_i] - \frac{\partial \hat{H}_i}{\partial t}[t_i] + \lambda_{i+1} - \lambda_i \right\} \delta t_i + \left\{ \psi_{i-1}(t_i) - \frac{\partial \hat{H}_i}{\partial x_{i-1}}[t_i] \right\} \delta x_{i-} = 0$$

при всех вариациях, связанных равенствами

$$\frac{\partial G_i}{\partial t}[t_i] \delta t_i + \frac{\partial G_i}{\partial x_{i-1}}[t_i] \delta x_{i-} = 0, \quad i = 1, \dots, N;$$

3) условие трансверсальности:

$$\left\{ \lambda_0 \frac{\partial F_N}{\partial t}[t_F] - H_N[t_F] - \lambda_{N+1} \right\} \delta t_F + \left\{ \frac{\partial F_N}{\partial x_N}[t_F] + \psi_N(t_F) \right\} \delta x_N = 0$$

для любых вариаций, связанных равенством

$$\frac{\partial G_F}{\partial t}[t_F] \delta t_F + \frac{\partial G_F}{\partial x_N}[t_F] \delta x_N = 0;$$

4) условие максимума функции Понтрягина по управлению непрерывным движением:

$$H_i[t] = \max_{u_i \in U_i} H_i(\psi_i(t), t, x_i(t), u_i)$$

почти всюду на  $T_i$ ,  $i \in N$ ;

5) условия дополняющей нежесткости:

$$\lambda_{i+1}(t_i - t_{i+1}) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N;$$

6) условия неотрицательности:

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, N + 1.$$

Доказательство теоремы следует из необходимых условий, приведенных в [7] для задачи с дискретным управлением переключениями. В формулировке теоремы и далее принято следующее соглашение [10]: аргумент  $t$ , заключенный в квадратные скобки, означает, что функция вычислена на оптимальном процессе в указанный момент времени. Например,  $H_i[t] = H_i(\psi_i(t), t, x_i(t), u_i(t))$ ,

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_i}[t] = \frac{\partial H_i}{\partial x_i}(\psi_i(t), t, x_i(t), u_i(t)), \quad \frac{\partial \hat{H}_i}{\partial x_{i-1}}[t_i] = \frac{\partial \hat{H}_i}{\partial x_{i-1}}(\psi_i(t_i), t_i, x_{i-1}(t_i)).$$

Заметим, что если из условия 4) теоремы удастся выразить оптимальное управление  $u_i = u_i(\psi_i, t, x_i)$  как функцию времени, состояния и вспомогательных переменных, то, подставляя это управление в уравнения движения (1.2) и уравнения п. 1) теоремы, получаем краевую задачу с промежуточными условиями (1.3). Ее решение зависит от  $2(n_0 + n_1 + \dots + n_N)$  произвольных постоянных, моментов переключений  $t_1, \dots, t_N$  и множителей Лагранжа  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N+1}$ . Всего есть  $2(n_0 + n_1 + \dots + n_N + N) + 3$  параметров. Для нахождения этих параметров имеются следующие уравнения: начальные условия (1.4) определяются  $n_0$  равенствами, промежуточные ограничения (1.6) и условия 2) теоремы задают  $n_0 + n_1 + \dots + n_N + N$  уравнений, терминальные условия (1.5) и условия трансверсальности 3) дают  $n_N + 1$  равенств, рекуррентные уравнения (1.3) представляют собой  $n_0 + n_1 + \dots + n_N$  равенств, а условия дополняющей нежесткости 5) записаны как система  $N + 1$  равенств. Всего имеется  $2(n_0 + n_1 + \dots + n_N + N) + 2$  уравнений, связывающих параметры. Этих условий хватает, так как коэффициенты  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N+1}$  определяются с точностью до положительного множителя. Как правило, систему дополняют либо равенством  $\lambda_0 = 0$  (вырожденный [11], нерегулярный [9] случаи), либо ра-

венством  $\lambda_0 = 1$  (невыврожденный, регулярный случай). Таким образом, теорема, как и принцип максимума [4], дает “полную” систему условий, для нахождения процесса, который может быть оптимальным.

**2. Задача оптимального управления с фазовыми ограничениями.** 2.1. П о с т а н о в к а задачи с ф а з о в ы м и о г р а н и ч е н и я м и. Пусть на промежутке времени  $T = [t_0, t_F]$  движение динамической системы описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (2.1)$$

где  $x(t)$  — состояние системы в момент времени  $t \in T$ ,  $x(t) \in X = \mathbb{R}^n$ ;  $u(t)$  — значение управления в момент времени  $t \in T$ ,  $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^p$ . Функция  $f : T \times X \times U \rightarrow X$  непрерывна на всей области определения вместе с первыми частными производными по  $t$  и по компонентам вектора  $x$ .

Начальное состояние системы задано начальным условием

$$x(t_0) = x_0. \quad (2.2)$$

Конечная позиция системы определяется первым достижением терминальной поверхности:

$$G_F(t_F, x(t_F)) = 0. \quad (2.3)$$

Функция  $G_F : [t_0, +\infty) \times X \rightarrow \mathbb{R}^l$  — непрерывно дифференцируемая. Терминальные условия, аналогичные (2.3), могут накладываться на левый конец траектории [8, 9] либо на оба конца траектории одновременно (например, условие периодичности).

В каждый момент времени  $t \in T$  состояние системы и управление удовлетворяют следующим ограничениям:

$$Q(t, x(t)) \leq 0, \quad (2.4)$$

$$q(t, x(t), u(t)) \leq 0, \quad (2.5)$$

$$u(t) \in U. \quad (2.6)$$

Фазовые ограничения представлены неравенством (2.4), смещанные — неравенством (2.5), геометрические — включением (2.6). Функции  $Q : T \times X \rightarrow \mathbb{R}^M$  и  $q : T \times X \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$  — непрерывно дифференцируемые,  $Q = (Q^1, \dots, Q^M)^T$ ;  $q = (q^1, \dots, q^m)^T$ ; множество  $U$  допустимых значений управления — замкнутое подмножество  $\mathbb{R}^p$ . Другие формы записи ограничений применяются в [2, 8, 11].

Множество допустимых процессов  $\mathcal{D}(t_0, x_0)$  составляют тройки  $d = (t_F, x(\cdot), u(\cdot))$ , включающие момент  $t_F$  окончания движения; абсолютно непрерывную функцию  $x : T \rightarrow X$ ; ограниченную измеримую функцию  $u : T \rightarrow U$ . Причем пары  $(x(\cdot), u(\cdot))$  удовлетворяют дифференциальному уравнению (2.1) почти всюду на промежутке  $T$ . В начальный момент времени выполняется условие (2.2), в конечный — терминальное условие (2.3), в любой момент  $t \in T$  — ограничения (2.4) — (2.6).

На множестве  $\mathcal{D}(t_0, x_0)$  допустимых процессов задан функционал качества

$$I(t_0, x_0, d) = \int_{t_0}^{t_F} f^0(t, x(t), u(t)) dt + F(t_F, x(t_F)), \quad (2.7)$$

где скалярные функции  $f^0 : T \times X \times U \rightarrow \mathbb{R}$  и  $F : [t_0, +\infty) \times X \rightarrow \mathbb{R}$  ограничены снизу и непрерывны вместе с первыми частными производными по  $t$  и по компонентам вектора  $x$ .

Требуется найти минимальное значение функционала (2.7) и оптимальный процесс  $d^* = (T^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \mathcal{D}(t_0, x_0)$ , на котором это значение достигается:

$$I_0(t_0, x_0, d^*) = \min_{d \in \mathcal{D}(t_0, x_0)} I_0(t_0, x_0, d).$$

Если наименьшее значение функционала (2.7) не существует, то может быть поставлена задача нахождения минимизирующей последовательности допустимых процессов [8].

**2.2. Задача со сменой активных фазовых ограничений.** Рассмотрим задачу минимизации функционала (2.7), в которой задана конечная последовательность

изменения активных фазовых ограничений. Напомним, что ограничение типа нестрогого неравенства называется *активным*, если оно выполняется как равенство, и *пассивным*, если оно выполняется как строгое неравенство.

Пусть на промежутке  $T$  функционирования динамической системы (2.1) существуют  $N$  моментов переключений  $t_1, \dots, t_N$ , образующих вместе с моментом  $t_F$  окончания движения неубывающую конечную последовательность  $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_N, t_F\}$ , удовлетворяющую условиям (1.1). Предполагаем, что между неравными последовательными моментами переключений состав (набор) активных фазовых ограничений в системе (2.4) постоянный, а в моменты переключений набор активных ограничений меняется. Иначе говоря, известен план “активизации” фазовых ограничений, т.е. последовательность (порядок чередования) смены активных фазовых ограничений. Моменты переключений (1.1) не фиксированы и служат ресурсом управления. Нестрогие неравенства в (1.1) допускают совпадение некоторых последовательных моментов переключений. Если в результате оптимизации управления два последовательных момента переключений оказались равными, то это значит, что либо траектория управляемого процесса «касается» активного ограничения, либо предполагаемый на этом промежутке набор активных ограничений не отвечает оптимальному процессу и его (набор) надо заменить или исключить из рассмотрения. Кроме того, нестрогие неравенства задают замкнутое множество допустимых моментов переключений, что важно для существования решения задачи оптимизации.

Обозначим, как и ранее, через  $N \triangleq \{i = 0, 1, \dots, N | t_i < t_{i+1}\}$  — множество номеров ненулевых (по длине) частичных промежутков  $T_i = [t_i, t_{i+1}]$ . Рассмотрим подробнее движение на одном ненулевом по продолжительности промежутке  $T_i$ ,  $i \in N$ . Предполагаем, что на этом промежутке  $k$  неравенств из (2.4) с разными номерами  $i_1, \dots, i_k$  выполняются как равенства

$$Q^{i_1}(t, x(t)) = 0, \dots, Q^{i_k}(t, x(t)) = 0, \quad t \in T_i. \quad (2.8)$$

Составим из этих активных на промежутке  $T_i$  фазовых ограничений систему уравнений:

$$Q_i(t, x) = 0, \quad (2.9)$$

где  $Q_i(t, x) = (Q^{i_1}(t, x), \dots, Q^{i_k}(t, x))^T$  — столбец из левых частей равенств (2.8). Так как равенства (2.9) верны на всем промежутке  $T_i$ , то, дифференцируя их в силу уравнений движения (2.1), получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial Q_i}{\partial x}(t, x)f(t, x, u) = 0. \quad (2.10)$$

Отметим, что (2.10) представляют собой дополнительное смешанное ограничение типа равенства.

Выполняя такую процедуру для каждого ненулевого (по длине) промежутка  $T_i$ , получаем задачу оптимального управления, в которой пассивные фазовые ограничения исключены:

$$t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_{N+1} \triangleq t_F,$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (2.11)$$

$$Q_i(t_i, x(t_i)) = 0, \quad \frac{\partial Q_i}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial Q_i}{\partial x}f(t, x(t), u(t)) = 0, \quad (2.12)$$

$$q(t, x(t), u(t)) \leq 0, \quad u(t) \in U, \quad t \in T_i, \quad i \in N, \quad (2.13)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad G_F(t_F, x(t_F)) = 0,$$

$$I_0(t_0, x_0, d) = \sum_{i=0}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} f^0(t, x(t), u(t)) dt + F(t_F, x(t_F)) \rightarrow \min. \quad (2.14)$$

Заметим, что основное предположение об известном плане “активизации” фазовых ограничений в прикладных задачах, как правило, оправдывается. Специалисты, разрабатывающие системы управления, знают режимы эксплуатации, ограничения, а также порядок их “преодоления” в процессе управления. Поэтому последовательность, в которой нужно учитывать те или иные ограничения, известна. Заранее неизвестны моменты времени, в которые эти

ограничения будут “возникать” в процессе управления. Эти моменты “переключений” состава активных ограничений являются ресурсом управления и находятся при оптимизации.

Если последовательность изменения состава активных фазовых ограничений точно не известна, то можно решить задачи с разными планами “активизации”, а затем выбрать наилучшее решение. Как правило, фазовых ограничений в задачах оптимального управления не очень много. Поэтому количество рациональных планов изменения состава активных ограничений не слишком большое.

**2.3. И с к л ю ч е н и е а к т и в н ы х ф а з о в ы х о г р а н и ч е н и й.** В задаче (2.14) между неравными моментами переключений набор активных ограничений фиксирован. Рассмотрим процедуру исключения этих ограничений на одном ненулевом по продолжительности промежутке  $T_i$ .

Активные на промежутке  $T_i$  ограничения представляют собой систему алгебраических уравнений (2.9), которая определяет некоторое многообразие в пространстве  $T \times X$  позиций системы (2.11). Предполагаем, что многообразие (2.9) можно задать параметрическими уравнениями, т.е. существует такая функция  $x = \alpha_i(t, x_i)$  с вектором параметров  $x_i \in X_i = \mathbb{R}^{n_i}$ , что

$$Q_i(t, \alpha_i(t, x_i)) \equiv 0. \quad (2.15)$$

Смешанное ограничение (2.10) рассматриваем как систему алгебраических уравнений относительно неизвестной  $u$ . Считаем, что ее решение можно записать в параметрической форме, используя новые управляющие параметры. Пусть существуют такие функция  $u = \beta_i(t, x_i, u_i)$  и множество  $U_i \subset \mathbb{R}^{p_i}$ , что

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t}(t, \alpha_i(t, x_i)) + \frac{\partial Q_i}{\partial x} f(t, \alpha_i(t, x_i), \beta_i(t, x_i, u_i)) \equiv 0, \quad (2.16)$$

причем

$$q(t, \alpha_i(t, x_i), \beta_i(t, x_i, u_i)) \leq 0, \quad \beta_i(t, x_i, u_i) \in U \quad (2.17)$$

при всех  $u_i \in U_i$ .

При подстановке функций  $x = \alpha_i(t, x_i)$  и  $u = \beta_i(t, x_i, u_i)$  в фазовые и в смешанные ограничения (2.12), (2.13) они выполняются “автоматически” (их можно удалить), а геометрическое ограничение заменяется новым геометрическим ограничением  $u_i \in U_i$ . Параметры  $x_i$  и  $u_i$  будем рассматривать как состояние и управление новой динамической системы. Составляем уравнения движения этой системы. Предполагая дифференцируемость функции  $x = \alpha_i(t, x_i)$ , находим ее производную в силу уравнений движения (2.11):

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t}(t, x_i) + \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i}(t, x_i) \dot{x}_i = f(t, \alpha_i(t, x_i), \beta_i(t, x_i, u_i)).$$

Выражая скорость изменения параметров, получаем

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_i(t), u_i(t)). \quad (2.18)$$

Таким образом, исключая активные фазовые ограничения на промежутке  $T_i$ , приходим к системе управления, движение которой происходит без фазовых и смешанных ограничений.

Заметим, что ограничения (2.8) становятся активными в момент  $t_i$ , когда заканчивается движение системы на предыдущем участке  $T_{i-1} = [t_{i-1}, t_i]$ . Пусть на промежутке  $T_{i-1}$  выполнена процедура исключения активных ограничений  $Q_{i-1}(t, x) = 0$ , т.е. найдена соответствующая функция  $x = \alpha_{i-1}(t, x_{i-1})$ . Тогда в момент времени  $t_i$  выполняется условие  $Q_{i-1}(t_i, \alpha_{i-1}(t_i, x_{i-1}(t_i))) = 0$ , которое можно записать в виде

$$G_i(t_i, x_{i-1}(t_i)) = 0, \quad (2.19)$$

где  $G_i(t_i, x_{i-1}) = Q_{i-1}(t_i, \alpha_{i-1}(t_i, x_{i-1}))$ . Кроме того, в момент переключения  $t_i$  траектория исходной систем остается непрерывной. Поэтому должно выполняться равенство

$$\alpha_{i-1}(t_i, x_{i-1}(t_i)) = \alpha_i(t_i, x_i(t_i)).$$

Предполагаем, что его можно решить относительно  $x_i$ , получая при этом

$$x_i(t_i) = g_i(t_i, x_{i-1}(t_i)). \quad (2.20)$$



Таким образом, порядок исключения активных на промежутке  $T_i$  фазовых ограничений (2.9) следующий:

- 1) получить параметрические уравнения  $x = \alpha_i(t, x_i)$ , удовлетворяющие (2.15);
- 2) получить параметрические уравнения  $u = \beta_i(t, x_i, u_i)$ , удовлетворяющие (2.16), (2.17);
- 3) составить дифференциальные уравнения (2.18), используя уравнения движения исходной системы;
- 4) записать ограничение (2.19) в момент переключения;
- 5) составить рекуррентное уравнение (2.20), используя условие непрерывности траектории исходной системы.

Описанная процедура кажется сложной из-за неоднозначности указанных действий. На самом деле, она аналогична методу исключения неизвестных в системах алгебраических уравнений. В общем случае этот метод трудно формализовать. Однако его применение вполне очевидное. Заметим, что фазовые ограничения являются, как правило, простыми алгебраическими неравенствами, часто линейными. В этих случаях выполнить исключение неизвестных несложно.

**2.4. Гибридная модель задачи со сменой активных фазовых ограничений.** Задачу (2.14) со сменой активных ограничений можно представить как задачу (1.8) управления ГСПР с промежуточными условиями. Для этого надо исключить активные фазовые ограничения, используя процедуру, описанную в разд. 2.3. В результате исключения на каждом участке  $T_i$  непрерывного движения системы (2.11) образуются новые векторы состояния  $x_i$  и управления  $u_i$ , а сама система (2.11) заменяется новой динамической системой меньшей размерности. Характер функционирования системы становится гибридным. Непрерывное движение чередуется с переключениями, при которых меняется размерность пространства состояний и множества значений управления. Иначе говоря, непрерывная система (2.11) становится гибридной, а задача (2.14) со сменой активных фазовых ограничений заменяется задачей управления ГСПР:

$$\begin{aligned}
 t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_{N+1} &\triangleq t_F, \\
 \dot{x}_i(t) &= f_i(t, x_i(t), u_i(t)), \\
 u_i(t) &\in U_i, \quad t \in T_i, \quad i \in \mathbb{N}, \\
 x_i(t_i) &= g_i(t_i, x_{i-1}(t_i)), \\
 G_i(t_i, x_{i-1}(t_i)) &= 0, \quad i = 1, \dots, N, \\
 x_0(t_0) = x_0, \quad G_F(t_F, \alpha_N(t_F, x_N(t_F))) &= 0, \\
 I_0(t_0, x_0, d) &= \sum_{i=0}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_i^0(t, x_i(t), u_i(t)) dt + F_N(t_F, x_N(t_F)) \rightarrow \min.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Все функции в (2.21) получаются при исключении ограничений (см. разд. 2.3), в частности,  $f_i^0(t, x_i, u_i) = f^0(t, \alpha_i(t, x_i), \beta_i(t, x_i, u_i))$ ,  $F_N(t, x_N) = F(t, \alpha_N(t, x_N))$ . Постановка задачи (2.21) почти совпадает с рассмотренной в разд. 1.1 задачей управления ГС с промежуточными ограничениями. Отличие состоит в отсутствии в функционале качества суммы затрат на переключения. Поэтому для ее решения можно использовать необходимые условия, приведенные в разд. 1.2, при  $g_i^0 = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Заметим, что количество  $N$  переключений в задаче (2.21) считается известным, так как задан план “активизации” ограничений. Поэтому управляющий комплекс составляют моменты переключений  $t_1, \dots, t_N$ , момент  $t_F$  окончания процесса управления и управление  $u(\cdot) = \{u_i(\cdot)\}_{i=0}^N$  непрерывным движением.

**2.5. Исключение линейных фазовых ограничений в задаче управления линейной системой.** Рассмотрим задачу управления линейной стационарной системой с линейными фазовыми ограничениями:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{2.22}$$

$$Qx(t) \leq q, \tag{2.23}$$

$$u(t) \in U, \quad t \in [t_0, t_F]. \tag{2.24}$$



Матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $Q$ ,  $q$  имеют размеры  $n \times n$ ,  $n \times p$ ,  $m \times n$ ,  $m \times 1$  соответственно. Начальные и конечные условия, а также минимизируемый функционал не указываются, так как речь пойдет только об исключении фазового ограничения (2.23).

Предполагаем, что план “активизации” ограничений известен, т.е. промежуток функционирования системы (2.22) разбивается моментами переключений  $t_1, \dots, t_N$ , удовлетворяющими (1.1), на промежутки  $T_i = [t_i, t_{i+1}]$ , на каждом из которых часть неравенств (2.23) выполняются как равенства

$$Q_i x = q_i. \quad (2.25)$$

Решение линейной системы (2.25) алгебраических уравнений можно представить в виде

$$x = \phi^i + \Phi_i x_i, \quad (2.26)$$

где  $\phi^i$  — частное решение системы (2.25),  $\Phi_i$  — фундаментальная матрица соответствующей однородной системы, а  $x_i$  — столбец произвольных постоянных.

Дифференцируя (2.25) в силу уравнений движения (2.22) и подставляя (2.26), получаем

$$Q_i(Ax + Bu) = 0 \Leftrightarrow Q_i Bu = -Q_i Ax \Leftrightarrow Q_i Bu = -Q_i A(\phi^i + \Phi_i x_i). \quad (2.27)$$

Решение линейной системы (2.27) алгебраических уравнений можно представить в виде

$$u = \psi^i + \Psi_i u_i, \quad (2.28)$$

где  $\psi^i$  — частное решение системы (2.27),  $\Psi_i$  — фундаментальная матрица соответствующей однородной системы, а  $u_i$  — столбец произвольных постоянных. Геометрические ограничения (2.24) на значения управления  $u = \psi^i + \Psi_i u_i \in U$  нужно обеспечить выбором ограничений  $u_i \in U_i$ . Поскольку матрица  $\Psi_i$  невырожденная, то  $U_i = \Psi_i^{-1}(U - \psi^i)$ .

Как видим, столбцы произвольных постоянных  $x_i$  и  $u_i$  становятся векторами состояния и управления новой динамической системы. Осталось получить дифференциальные уравнения непрерывного движения этой системы и рекуррентные уравнения переключений. Подставляя (2.25) и (2.28) в (2.22), находим

$$\Phi_i \dot{x}_i = A(\phi^i + \Phi_i x_i) + B(\psi^i + \Psi_i u_i) \Leftrightarrow \dot{x}_i = \Phi_i^{-1}[A(\phi^i + \Phi_i x_i) + B(\psi^i + \Psi_i u_i)].$$

Записываем, фазовые ограничения в момент  $t_i$  их активизации и условия непрерывности:

$$Q_{i-1}[\phi^{i-1} + \Phi_{i-1} x_{i-1}(t_i)] = 0, \quad (2.29)$$

$$\phi^{i-1} + \Phi_{i-1} x_{i-1}(t_i) = \phi^i + \Phi_i x_i(t_i) \Leftrightarrow x_i(t_i) = \Phi_i^{-1}[\phi^{i-1} - \phi^i + \Phi_{i-1} x_{i-1}(t_i)]. \quad (2.30)$$

Процедура исключения активных на промежутке  $T_i$  фазовых ограничений (2.25) закончена. Движение системы (2.22) на этом промежутке заменяется непрерывным движением новой системы:

$$\dot{x}_i = \Phi_i^{-1}[A(\phi^i + \Phi_i x_i) + B(\psi^i + \Psi_i u_i)], \quad u_i(t) \in U_i, \quad t \in T_i, \quad (2.31)$$

с переключением (2.30) и промежуточным условием (2.29) в момент  $t_i$ :

$$x_i(t_i) = \Phi_i^{-1}[\phi^{i-1} - \phi^i + \Phi_{i-1} x_{i-1}(t_i)], \quad Q_{i-1}[\phi^{i-1} + \Phi_{i-1} x_{i-1}(t_i)] = 0.$$

Векторы состояния  $x$  и управления  $u$  системы (2.22) выражаются через состояние  $x_i$  и управление  $u_i$  новой системы (2.31) по формулам (2.26) и (2.28). Заметим, что решения систем (2.25), (2.27) линейных алгебраических уравнений можно было записать, выражая базисные переменные через свободные. В этом случае новыми векторами состояния  $x_i$  и управления  $u_i$  стали бы соответствующие свободные переменные.

**3. Примеры.** Рассмотрим два примера применения необходимых условий ГСПР для решения задач с фазовыми ограничениями. В первом примере модель движения простая. В зависимости от начальных условий оптимальные процессы реализуют разные планы “активизации” фазовых ограничений. Аналитическое решение подтверждается геометрическими соображениями. Второй пример — это классическая задача Фельдбаума А. А. [12] с двумя дополнитель-

ными фазовыми ограничениями. План “активизации” ограничений строится на основе известного “свободного” движения (без фазовых ограничений).

П р и м е р 1. Найти оптимальное управление в задаче быстрогодействия

$$\dot{x}(t) = u(t),$$

$$u(t) \in U(x(t)),$$

$$x(t) \geq 0, \quad t \in [0, T],$$

$$x(0) = A, \quad x(T) = O,$$

$$T \rightarrow \min. \quad (3.1)$$

Здесь  $x = (x^1, x^2, x^3)^T$ ,  $u = (u^1, u^2, u^3)^T$  – векторы состояния и управления,  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $u \in \mathbb{R}^3$ ; фазовое ограничение  $x \geq 0$  определяет неотрицательный октант  $x^1 \geq 0$ ,  $x^2 \geq 0$ ,  $x^3 \geq 0$ , допустимые значения управления ограничены по модулю:

$$U(x) = \begin{cases} |u| \leq 1, & x^1 > 0, x^2 > 0, x^3 > 0, \\ |u| \leq \sqrt{2}, & x^1 > 0, x^2 > 0, x^3 = 0, \\ |u| \leq 2, & x^1 x^2 = 0, x^3 = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

В поставленной задаче имеются три фазовых ограничения и смешанное ограничение (3.2). Движение системы внутри положительного октанта  $x > 0$  происходит со скоростью, ограниченной неравенством  $|u| = \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2} \leq 1$ . При движении по координатной плоскости  $x^3 = 0$  внутри первой четверти ( $x^1 > 0$  и  $x^2 > 0$ ) допускается большая скорость, удовлетворяющая неравенству  $|u| = \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2} \leq \sqrt{2}$ , при этом, разумеется,  $u^3 = 0$ . Наконец, скорость движения по оси абсцисс или оси ординат, когда  $x^3 = 0$ ,  $u^3 = 0$ , а также  $x^1 = 0$  и  $u^1 = 0$  или  $x^2 = 0$  и  $u^2 = 0$ , может быть самой большой, так как она ограничена неравенством  $|u| \leq 2$ . Требуется найти наименьшее время (3.1) перемещения системы из заданного начального состояния  $A(x_A^1, x_A^2, x_A^3)$  в начало координат  $O(0; 0; 0)$ .

Предполагаем, что начальное состояние  $x(0) = A$  находится внутри положительного октанта, т.е.  $x_A^1 > 0$ ,  $x_A^2 > 0$ ,  $x_A^3 > 0$ , причем  $x_A^1 \geq x_A^2$ . “Симметричный” случай  $x^1 \leq x^2$  рассматривается аналогично. В других случаях, когда начальное состояние принадлежит координатной оси или координатной плоскости, решение упрощается.

Составим план “активизации” фазовых ограничений. Возможны четыре варианта:

- 0) “свободное” движение (без активных фазовых ограничений);
- 1) движение с одним активным фазовым ограничением  $x^3 = 0$ ;
- 2) движение с одновременной активизацией двух фазовых ограничений  $x^3 = 0$  и  $x^2 = 0$ ;
- 3) движение с последовательной активизацией двух ограничений, сначала  $x^3 = 0$ , а потом дополнительно  $x^2 = 0$ .

Случай 0). Оптимальное “свободное” движение определяем при помощи принципа максимума. Составляем функцию Понтрягина  $H = \psi u - \lambda_0$ , где  $\psi = (\psi^1, \psi^2, \psi^3)$  – вспомогательная вектор-функция, которая удовлетворяет уравнению  $\dot{\psi} = 0$ . Находим точку максимума функции Понтрягина по управлению  $u = \psi^T / |\psi|$ . Из условия трансверсальности получаем  $H[T] = \lambda_0$ . Поскольку  $\lambda_0 > 0$ , полагаем, что  $\lambda_0 = 1$ . Тогда  $|\psi(T)| = 1$  и управление  $u = \psi^T$ . Так как вспомогательная переменная постоянна, то управление тоже постоянно. Из начальных и конечных условий заключаем, что  $u = -\overline{OA} / |\overline{OA}|$ , а оптимальная траектория – отрезок  $OA$ . На рис. 1 отрезок  $OA$  изображен полужирной линией. Стрелкой обозначено направление движения. Точки  $A_0$  и  $A_1$  – проекции точки  $A$  на координатную плоскость  $Ox^1x^2$  и координатную ось  $Ox^1$  соответственно. Наименьшее время движения, численно равное длине отрезка  $OA$ , обозначим как

$$T_0 = \sqrt{(x_A^1)^2 + (x_A^2)^2 + (x_A^3)^2}.$$



Поскольку вариации  $\delta t_1$ ,  $\delta x_0^1$ ,  $\delta x_0^2$  произвольные, получаем в момент  $t_1$

$$|\psi_1| \sqrt{2} - |\psi_0| = 0, \quad \psi_0^1 = \psi_1^1, \quad \psi_0^2 = \psi_1^2. \quad (3.7)$$

В конечный момент времени  $T$  условие transversальности имеет вид

$$\{|\psi_1| \sqrt{2} - 1\} \delta T + \psi_1^1 \delta x_1^1 + \psi_1^2 \delta x_1^2 = 0.$$

Отсюда, учитывая равенства  $\delta x_1^1 = \delta x_1^2 = 0$  для фиксированного конечного состояния и произвольность вариации  $\delta T$ , получаем

$$|\psi_1(T)| \sqrt{2} = 1. \quad (3.8)$$

На каждом промежутке непрерывного движения вспомогательные переменные постоянны. Поэтому управление тоже постоянное. Обозначим через  $B(x_B^1, x_B^2, 0)$  состояние системы в момент  $t_1$ . Из уравнений движения на последнем участке следует, что

$$0 = x_B^1 + (T - t_1)u_1^1, \quad 0 = x_B^2 + (T - t_1)u_1^2.$$

Отсюда  $|\overline{OB}|^2 = (T - t_1)^2 |u_1|^2$ . Так как  $|u_1| = \sqrt{2}$ , значит,  $T - t_1 = |\overline{OB}| / \sqrt{2}$ . Тогда

$$u_1^1 = -x_B^1 \sqrt{2} / |\overline{OB}|, \quad u_1^2 = -x_B^2 \sqrt{2} / |\overline{OB}|. \quad (3.9)$$

Итак, оптимальное управление (3.9) выражено через координаты точки  $B$ . Отметим еще, что, учитывая (3.8) и (3.6), имеем  $|\psi_1| = 1 / \sqrt{2}$ , следовательно,  $u_1 = 2\psi_1$ .

Переходим к первому участку, который заканчивается точкой  $B$ . Записываем условия (3.7):

$$|\psi_0| = |\psi_1| \sqrt{2} = 1, \quad \psi_0^1 = \psi_1^1 = 0.5u_1^1, \quad \psi_0^2 = \psi_1^2 = 0.5u_1^2.$$

Тогда из (3.5) следует, что  $u_0 = \psi_0$ . Поэтому  $u_0^1 = 0.5u_1^1$ ,  $u_0^2 = 0.5u_1^2$ . Интегрируя уравнения движения, имеем

$$x_B^1 = x_A^1 + u_0^1 t_1, \quad x_B^2 = x_A^2 + u_0^2 t_1, \quad 0 = x_A^3 + u_0^3 t_1.$$

Координаты  $u_0^1$  и  $u_0^2$  пропорциональны координатам  $u_1^1$  и  $u_1^2$  соответственно. Поэтому векторы  $\overline{OB}$  и  $\overline{OA_0}$  коллинеарны. Напомним, что  $A_0$  — проекция точки  $A$  на координатную плоскость  $Ox^1x^2$ .

Выражаем квадрат модуля управления  $u_0$ :

$$1 = (u_0^1)^2 + (u_0^2)^2 + (u_0^3)^2 = \frac{(x_B^1)^2}{2|\overline{OB}|^2} + \frac{(x_B^2)^2}{2|\overline{OB}|^2} + \frac{(x_A^3)^2}{t_1} = \frac{1}{2} \frac{(x_A^3)^2}{t_1}.$$

Значит,  $t_1 = x_A^3 \sqrt{2}$ . Поскольку скорость движения на первом участке единичная, то  $t_1 = AB$ . Поэтому  $AB = x_A^3 \sqrt{2}$ , т.е. угол  $ABA_0 = \pi / 4$ . Тогда точка  $B$  имеет координаты

$$x_B^1 = kx_A^1, \quad x_B^2 = kx_A^2, \quad t_N,$$

где  $k = 1 - x_A^3 / |\overline{OA_0}|$ . Следовательно, оптимальное управление на первом участке

$$u_0 = -\frac{\overline{BA}}{|\overline{BA}|} \Leftrightarrow u_0^1 = -\frac{x_A^1}{\sqrt{2}|\overline{OA_0}|}, \quad u_0^2 = -\frac{x_A^2}{\sqrt{2}|\overline{OA_0}|}, \quad u_0^3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, в случае 1) оптимальная траектория является ломаной  $ABO$ , представленной на рис. 2 полужирными отрезками. Стрелками указано направление движения. Время  $T_1$  движения по оптимальной траектории вычисляется по формуле

$$T_1 = AB + \frac{OB}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(OA_0 + x_A^3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_A^3 + \sqrt{(x_A^1)^2 + (x_A^2)^2}).$$

Заметим, что такая траектория существует, если  $OA_0 > x_A^3$ .

Случай 2). Предполагаем, что сначала система движется “свободно” (без активных фазовых ограничений), затем в некоторый момент  $t_1$  она попадает на ось абсцисс и движется по ней до

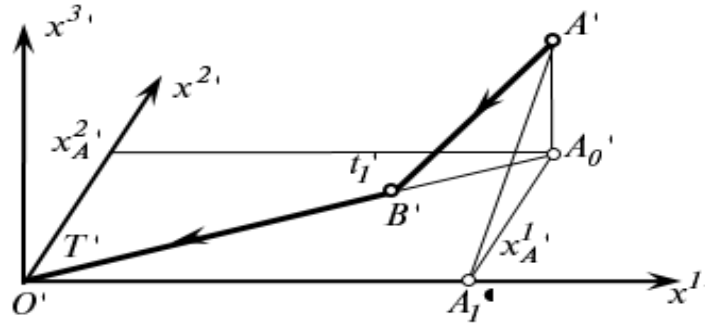


Рис. 2. Траектория с одним активным ограничением.

начала координат. Иначе говоря, в момент  $t_1$  активными становятся два фазовых ограничения:  $x^2 = 0$ ,  $x^3 = 0$ . Записываем соответствующую задачу оптимального управления ГСПР:

$$0 < t_1 < T,$$

$$\dot{x}_0^1(t) = u_0^1(t), \quad \dot{x}_0^2(t) = u_0^2(t), \quad \dot{x}_0^3(t) = u_0^3(t), \quad |u_0(t)| \leq 1, \quad t \in [0; t_1],$$

$$x_0(0) = A, \quad x_0^2(t_1) = 0, \quad x_0^3(t_1) = 0,$$

$$\dot{x}_1^1(t) = u_1^1(t), \quad |u_1(t)| \leq 2, \quad t \in [t_1; T],$$

$$x_1^1(t_1) = x_0^1(t_1), \quad x_1^1(T) = 0, \quad (3.10)$$

$$T \rightarrow \min. \quad (3.11)$$

Активные на втором участке движения фазовые ограничения  $x^2 = 0$  и  $x^3 = 0$  исключены. Координаты  $x^2, x^3$  и  $u^2, u^3$  удалены из векторов состояния  $x_1 = x_1^1$  и управления  $u_1 = u_1^1$ . Ограничения  $x^2 = 0$ ,  $x^3 = 0$  в момент  $t_1$  записаны как терминальные ограничения  $x_0^2(t_1) = 0$ ,  $x_0^3(t_1) = 0$  для первого участка. Условия непрерывности траектории в момент  $t_1$  представлены уравнением переключения (3.10) в момент  $t_1$ .

Применяем для решения задачи (3.11) необходимые условия оптимальности ГСПР. Поскольку переключение происходит в момент  $t_1$ , отличный от начального и конечного моментов времени, то из условий дополняющей нежесткости следует равенство нулю множителей Лагранжа  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Тогда  $\lambda_0 \neq 0$ , поэтому можно взять  $\lambda_0 = 1$ . Для каждого промежутка непрерывного движения записываем функцию Понтрягина, дифференциальные уравнения для вспомогательных переменных, выражение для оптимального управления:

$$H_0 = \psi_0^1 u_0^1 + \psi_0^2 u_0^2 + \psi_0^3 u_0^3 - 1, \quad \dot{\psi}_0 = 0, \quad u_0 = \frac{\psi_0}{|\psi_0|}, \quad t \in [0; t_1], \quad (3.12)$$

$$H_1 = \psi_1 u_1^1 - 1, \quad \dot{\psi}_1 = 0, \quad u_1 = 2 \operatorname{sign} \psi_1, \quad t \in [t_1; T]. \quad (3.13)$$

Для момента переключения составляем функцию Понтрягина и записываем промежуточное условие:

$$\hat{H}_1 = \psi_1 x_0^1, \quad \{2|\psi_1| - |\psi_0|\} \delta t_1 + \{\psi_0^1 - \psi_1\} \delta x_0^1 = 0.$$

Поскольку вариации  $\delta t_1$ ,  $\delta x_0^1$  произвольные, получаем в момент  $t_1$

$$2|\psi_1| - |\psi_0| = 0, \quad \psi_0^1 = \psi_1. \quad (3.14)$$

В конечный момент времени  $T$  условие трансверсальности имеет вид

$$\{2|\psi_1| - 1\} \delta T + \psi_1 \delta x_1^1 = 0.$$

Отсюда, учитывая равенство  $\delta x_1^1 = 0$  для фиксированного конечного состояния и произвольность вариации  $\delta T$ , получаем

$$2 |\psi_1(T)| = 1. \quad (3.15)$$

На каждом промежутке непрерывного движения вспомогательные переменные постоянны. Поэтому управление тоже постоянное. Обозначим через  $C(x_C^1, 0, 0)$  состояние системы в момент  $t_1$ . Из уравнений движения на последнем участке следует, что  $x_C^1 = -(T - t_1)u_1$ . Так как  $|u_1| = 2$  и  $x_C^1 > 0$ , значит,  $u_1 = -2$  и  $T - t_1 = x_C^1 / 2$ . Отметим, что из условия (3.13) и (3.15) следует, что  $\psi_1 = -0.5$ . Управление на втором участке найдено.

Переходим к первому участку, который заканчивается точкой  $C$ . Записываем условия (3.14):

$$|\psi_0| = 2 |\psi_1| = 1, \quad \psi_0^1 = \psi_1 = -0.5.$$

Тогда из (3.12) вытекает, что  $u_0^1 = \psi_0^1 = -0.5$ . Интегрируя уравнения движения, получаем

$$x_C^1 = x_A^1 - 0.5t_1, \quad 0 = x_A^2 + u_0^2 t_1, \quad 0 = x_A^3 + u_0^3 t_1.$$

Выражаем координаты  $u_0^2$  и  $u_0^3$  управления и подставляем их в равенство  $|u_0|^2 = 1$ :

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{t_1^2} [(x_A^2)^2 + (x_A^3)^2] = \frac{1}{4} + \frac{1}{t_1^2} (AA_1)^2 \Leftrightarrow t_1 = \frac{2AA_1}{\sqrt{3}}.$$

Напомним, что  $A_1$  — проекция точки  $A$  на ось абсцисс (см. рис. 1). Учитывая численное равенство  $t_1 = AC$ , заключаем, что  $AC\sqrt{3} = 2AA_1$ , т.е. угол  $ACA_1 = \pi / 3$ . Следовательно, абсцисса точки  $C$  равна  $x_C^1 = x_A^1 - AA_1 / \sqrt{3}$ . Значит, оптимальное управление на первом участке

$$u_0^1 = -0.5, \quad u_0^2 = -\frac{\sqrt{3} x_A^2}{2AA_1}, \quad u_0^3 = -\frac{\sqrt{3} x_A^3}{2AA_1}.$$

Таким образом, в случае 2) оптимальная траектория представляет собой ломаную  $ACO$ , представленную на рис. 3 полужирными отрезками. Стрелками указано направление движения. Время  $T_2$  движения по оптимальной траектории вычисляется по формуле

$$T_2 = AC + \frac{OC}{2} = \frac{x_A^1}{2} + \frac{AA_1\sqrt{3}}{2} = \frac{x_A^1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(x_A^2)^2 + (x_A^3)^2}.$$

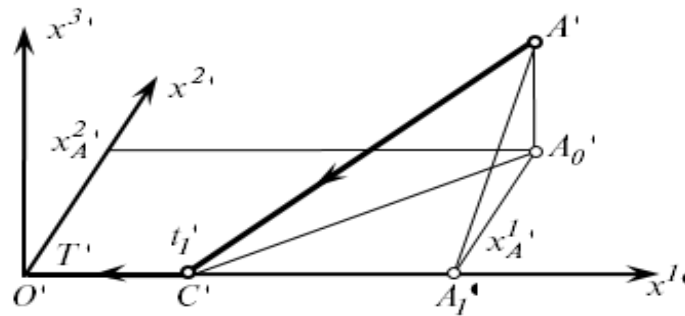


Рис. 3. Траектория с одновременной активизацией двух ограничений.

Заметим, что такая траектория существует, если  $x_A^1 > AA_1 / \sqrt{3}$ .

Случай 3). Предполагаем, что сначала система движется “свободно” (без активных фазовых ограничений), затем в некоторый момент  $t_1$  она попадает на координатную плоскость  $Ox^1x^2$ . Движение в первой четверти этой координатной плоскости продолжается до момента времени  $t_2$ , когда система оказывается на оси абсцисс, по которой она перемещается в начало координат. Иначе говоря, в момент  $t_1$  активным становится фазовое ограничение  $x^3 = 0$ , а в момент  $t_2$  дополнительно “активизируется” ограничение  $x^2 = 0$ . Записываем соответствующую задачу оптимального управления ГСПР:

$$0 < t_1 < t_2 < T,$$



$$\begin{aligned} \dot{x}_0^1(t) &= u_0^1(t), \quad \dot{x}_0^2(t) = u_0^2(t), \quad \dot{x}_0^3(t) = u_0^3(t), \quad |u_0(t)| \leq 1, \quad t \in [0; t_1], \\ x_0(0) &= A, \quad x_0^3(t_1) = 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^1(t) &= u_1^1(t), \quad \dot{x}_1^2(t) = u_1^2(t), \quad |u_1(t)| \leq \sqrt{2}, \quad t \in [t_1; t_2]; \\ x_1^1(t_1) &= x_0^1(t_1), \quad x_1^2(t_1) = x_0^2(t_1), \quad x_1^2(t_2) = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2^1(t) &= u_2^1(t), \quad |u_2(t)| \leq 2, \quad t \in [t_2; T]; \\ x_2^1(t_2) &= x_1^1(t_2), \quad x_2^1(T) = 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$T \rightarrow \min. \quad (3.19)$$

Активное на втором участке движения фазовое ограничение  $x^3 = 0$  исключено. Координаты  $x^3$  и  $u^3$  удалены из векторов состояния и управления. Равенство  $x^3 = 0$  в момент  $t_1$  записано как терминальное ограничение (3.16) для первого участка. Условия непрерывности траектории в момент  $t_1$  представлены уравнением переключения (3.17) в момент  $t_1$ . На третьем участке дополнительно исключается активное ограничение  $x^2 = 0$ . Координаты  $x^2$  и  $u^2$  удаляются из векторов состояния и управления, в момент  $t_2$  добавляется терминальное для второго участка ограничение (3.17), а условия непрерывности траектории в момент  $t_2$  записывается как переключение (3.18).

Применяем для решения задачи (3.19) необходимые условия оптимальности ГСПР. Поскольку переключения происходят в разные моменты, отличные от начального и конечного момента времени, то из условий дополняющей нежесткости следует равенство нулю множителей Лагранжа  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ . Тогда  $\lambda_0 \neq 0$ , поэтому можно взять  $\lambda_0 = 1$ . Для каждого промежутка непрерывного движения записываем функцию Понтрягина, дифференциальные уравнения для вспомогательных переменных, выражение для оптимального управления:

$$\begin{aligned} H_0 &= \psi_0^1 u_0^1 + \psi_0^2 u_0^2 + \psi_0^3 u_0^3 - 1, \quad \dot{\psi}_0 = 0, \quad u_0 = \frac{\psi_0}{|\psi_0|}, \quad t \in [0; t_1], \\ H_1 &= \psi_1^1 u_1^1 + \psi_1^2 u_1^2 - 1, \quad \dot{\psi}_1 = 0, \quad u_1 = \frac{\psi_1}{|\psi_1|} \sqrt{2}, \quad t \in [t_1; t_2], \\ H_2 &= \psi_2 u_2 - 1, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad u_2 = 2 \operatorname{sign} \psi_2, \quad t \in [t_2; T]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Для моментов переключения составляем функции Понтрягина (1.9), записываем промежуточные условия, из которых получаем соотношения для вспомогательных переменных. В момент времени  $t_1$ :

$$\hat{H}_1 = \psi_1^1 x_0^1 + \psi_1^2 x_0^2,$$

$$\{|\psi_1| \sqrt{2} - |\psi_0|\} \delta t_1 + \{\psi_0^1 - \psi_1^1\} \delta x_0^1 + \{\psi_0^2 - \psi_1^2\} \delta x_0^2 = 0.$$

Поскольку вариации  $\delta t_1$ ,  $\delta x_0^1$ ,  $\delta x_0^2$  произвольные, получаем

$$|\psi_1| \sqrt{2} - |\psi_0| = 0, \quad \psi_0^1 = \psi_1^1, \quad \psi_0^2 = \psi_1^2. \quad (3.21)$$

В момент времени  $t_2$ :

$$\hat{H}_2 = \psi_2 x_1^1, \quad \{2|\psi_2| - \sqrt{2}|\psi_1|\} \delta t_2 + \{\psi_1^1 - \psi_2\} \delta x_1^1 = 0.$$

Отсюда при произвольных вариациях  $\delta t_2$ ,  $\delta x_1^1$  находим

$$2|\psi_2| - \sqrt{2}|\psi_1| = 0, \quad \psi_1^1 = \psi_2. \quad (3.22)$$

В конечный момент времени  $T$  условие трансверсальности имеет вид

$$\{2|\psi_2|-1\}\delta T + \psi_2\delta x_2^1 = 0.$$

Учитывая равенство  $\delta x_2^1 = 0$  для фиксированного конечного состояния и произвольность вариации  $\delta T$ , получаем

$$2|\psi_2| = 1. \quad (3.23)$$

На каждом промежутке непрерывного движения вспомогательные переменные постоянны. Поэтому управление тоже постоянное. Обозначим через  $C(x_C^1, 0, 0)$  состояние системы в момент  $t_2$ . Из уравнений движения на последнем участке следует, что  $x_C^1 = -(T - t_2)u_2$ . Так как  $|u_1| = 2$  и  $x_C^1 > 0$ , значит,  $u_2 = -2$  и  $T - t_2 = x_C^1 / 2$ . Отметим, что из условий (3.21) и (3.23) следует, что  $\psi_2 = -0.5$ . Управление на третьем участке найдено.

Переходим ко второму участку, который заканчивается точкой  $C$ . Записываем условия (3.22) с учетом равенства  $\psi_2 = -0.5$ :

$$|\psi_1| = \sqrt{2}|\psi_2| = 1/\sqrt{2}, \quad \psi_1^1 = \psi_2 = -0.5.$$

Тогда из (3.20) вытекает, что  $u_1 = 2\psi_1$ ,  $u_1^1 = -1$ . Так как  $|u_1| = \sqrt{2}$ , то  $u_1^2 = -1$ . Положительное значение  $u_1^2 = 1$  не подходит, так как координата  $x_2^2$  уменьшается на втором участке. Следовательно,  $\psi_1^1 = -0.5$ ,  $\psi_1^2 = -0.5$ . Обозначим через  $B(x_B^1, x_B^2, 0)$  состояние системы в момент времени  $t_1$ . Тогда равенство  $t_2 - t_1 = BC / \sqrt{2}$  определяет продолжительность второго участка.

Переходим к первому участку, который заканчивается в точке  $B$ . Записываем условия (3.21) с учетом равенств  $|\psi_1| = 1/\sqrt{2}$ ,  $\psi_1^1 = -0.5$ ,  $\psi_1^2 = -0.5$ :

$$|\psi_0| = |\psi_1|/\sqrt{2} = 1, \quad \psi_0^1 = \psi_1^1 = -0.5, \quad \psi_0^2 = \psi_1^2 = -0.5.$$

Поскольку  $u_0 = \psi_0$ , то  $u_0^1 = -0.5$ ,  $u_0^2 = -0.5$ . Из условия  $|u_0| = 1$  определяем  $u_0^3 = -1/\sqrt{2}$ . Положительное значение  $u_0^3 = 1/\sqrt{2}$  не подходит, так как координата  $x_0^3$  уменьшается на первом участке. Оптимальное управление на первом участке найдено. Определим продолжительность этого участка. Интегрируя уравнение движения, получаем

$$x_B^1 = x_A^1 - 0.5t_1, \quad x_B^2 = x_A^2 - 0.5t_1, \quad 0 = x_A^3 - t_1/\sqrt{2}.$$

Следовательно,  $t_1 = \sqrt{2}x_A^3$ . Определяем координаты точки  $B(x_A^1 - x_A^3/\sqrt{2}; x_A^2 - x_A^3/\sqrt{2}; 0)$ . Заметим, что  $BA_0 = x_A^3$ . Поэтому угол  $ABA_0$  равен  $\pi/4$ .

Теперь определим абсциссу точки  $C$ . Интегрируя уравнения движения на втором участке, получаем при управлении  $u_1^1 = u_1^2 = -1$ :

$$x_C^1 = x_B^1 - (t_2 - t_1), \quad 0 = x_B^2 - (t_2 - t_1).$$

Следовательно,  $t_2 - t_1 = x_B^2$ ,  $x_C^1 = x_B^1 - x_B^2 = x_A^1 - x_A^2$ . Заметим, что угол  $BCA_1$  равен  $\pi/4$ .

Таким образом, в случае 3) оптимальная траектория представляет собой ломаную  $ABCO$ , представленную на рис. 4 полужирными отрезками. Стрелками указано направление движения. Время  $T_3$  движения по оптимальной траектории вычисляется по формуле

$$T_3 = AB + \frac{BC}{\sqrt{2}} + \frac{OC}{2} = \frac{x_A^1 + x_A^2}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x_A^3.$$

Отметим, что такая траектория существует, если  $x_A^2 > x_A^3$ .

В зависимости от начального состояния каждая из четырех найденных траекторий  $AO$ ,  $ABO$ ,  $ACO$ ,  $ABCO$  может быть оптимальной. Поэтому нужно определить значение времени движения для каждой допустимой траектории и выбрать наименьшее:

$$T = \min\{T_0, T_1, T_2, T_3\}. \quad (3.24)$$

В формуле (3.24) считаем, что время движения по недопустимой траектории равно  $+\infty$ .

Например, для начального состояния  $A(5; 3; 2)$  получаем (приблизленно)

$$T_0 = 6.16, \quad T_1 = 5.54, \quad T_2 = 5.62, \quad T_3 = 5.41.$$

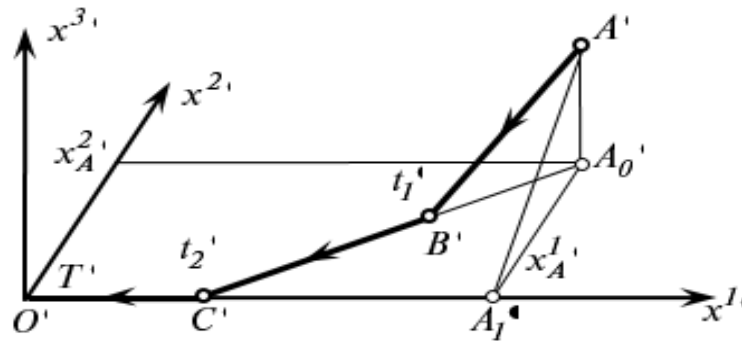


Рис. 4. Траектория с последовательной активизацией двух ограничений.

Значит, наименьшее время  $T = 5.41$  достигается на траектории  $ABCO$  с двумя переключениями в точках  $B(3.59; 1.59; 0)$  и  $C(2; 0; 0)$ . Для начального состояния  $A(4; 3; 5)$  находим

$$T_0 = 7.07, T_1 = +\infty, T_2 = 7.05, T_3 = +\infty,$$

т.е. траектории  $ABO$  и  $ABCO$  не существуют, а наименьшее время  $T = 7.05$  достигается на траектории  $ACO$  с одним переключением в точке  $C(0.63; 0; 0)$ .

Решение примера может быть получено, используя соображения геометрической оптики. Действительно, минимальную длину пути (соответственно наименьшее значение времени) дает луч света, исходящий из начального состояния и попадающий в начало координат после преломления на координатной плоскости  $Ox^1x^2$  или на оси абсцисс. Отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно отношению скоростей света в соответствующих средах.

Для траектории  $ABO$  преломление происходит в точке  $B$  на координатной плоскости. Отношение скоростей движения до и после преломления составляет  $1 : \sqrt{2}$ . Угол падения равен  $\pi / 2 - \angle ABA_0$ , а угол преломления —  $\pi / 2$ . Поэтому  $\angle ABA_0 = \pi / 4$ . Эта величина была получена в случае 1).

Для траектории  $ACO$  преломление происходит в точке  $C$  на оси абсцисс. Отношение скоростей движения до и после преломления составляет  $1 : 2$ . Угол падения равен  $\pi / 2 - \angle ACA_1$ , а угол преломления —  $\pi / 2$ . Поэтому  $\angle ACA_1 = \pi / 3$ . Эта величина была получена в случае 2).

Для траектории  $ABCO$  преломление происходит в точках  $B$  и  $C$ . Отношения скоростей движения до и после преломления равны  $1 : \sqrt{2}$  в точке  $B$  и  $\sqrt{2} : 2$  в точке  $C$ . Отсюда находим, что  $\angle ABA_0 = \pi / 4$  и  $\angle BCA_1 = \pi / 4$ . Эти углы были получены в случае 3).

**Пример 2.** Найти оптимальное управление в задаче быстрогодействия Фельдбаума А. А. [12] с дополнительными фазовыми ограничениями

$$\begin{aligned} \dot{x}^1(t) &= x^2(t), \quad \dot{x}^2(t) = u(t), \\ |u(t)| &\leq 1, \\ x^2(t) &\geq x^1(t) - 5, \quad x^2(t) \geq -2, \quad 0 \leq t \leq T, \\ x^1(0) &= 4.5, \quad x^2(0) = 0.5, \quad x^2(T) = 0, \\ T &\rightarrow \min. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Решение этой задачи без фазовых ограничений известно [4, 12]. Оптимальным для заданных начальных условий является релейное управление с одним переключением:

$$u(t) = -1, \quad 0 \leq t \leq \tau; \quad u(t) = 1, \quad \tau \leq t \leq T,$$

где  $\tau = 0.5 + \sqrt{4.625}$ ,  $T = 0.5 + 2\sqrt{4.625}$ . Оптимальная фазовая траектория изображена на рис. 5 полужирной кривой  $ABCDEO$ , а ограничения — прямыми. Допустимое множество состояний системы представляет собой тупой плоский угол  $BFE$ , ограниченный прямыми  $x^2 = x^1 - 5$  и  $x^2 = -2$ , пересекающимися в точке  $F(3; -2)$ . Как видим, оптимальный процесс нарушает ограничения — участки  $BC$  и  $DE$  фазовой траектории находятся вне угла  $BFE$ .

Полное исследование задачи Фельдбаума А. А. с одним линейным фазовым ограничением проведено в [13] на основе классических условий Дубовицкого – Милютина. Получим решение задачи (3.25) с двумя ограничениями путем исключения активных фазовых ограничений.

Учитывая решение задачи (3.25) без фазовых ограничений (см. рис. 5), составим план “активизации” ограничений. На рис. 6 допустимое множество состояний (плоский угол  $BFE$ ) не заштриховано. Начальное  $A(4.5; 0.5)$  и конечное  $O(0; 0)$  состояния лежат внутри угла  $BFE$ . Поэтому в начале и в конце процесса управления движение системы “свободное”, при этом оба фазовых ограничения – пассивные. Предполагаем, что в некоторый момент  $t_1$  становится активным первое ограничение  $x^2 \geq x^1 - 5$ , т.е. состояние системы оказывается на прямой  $BF$ . Затем система “движется” по этой прямой некоторой точки  $C$ , которую достигает в момент времени  $t_2$ . В этот момент времени система “сходит” с прямой  $BF$  и продолжает “свободное” движение (без активных фазовых ограничений). “Свободное” движение заканчивается в момент  $t_3$  (в точке  $D$ ), когда система “попадает” на прямую  $FE$ , т.е. активным становится ограничение  $x^2 \geq -2$ . Далее, система передвигается “по ограничению” до точки  $E$ , которую достигает в момент  $t_4$ . В этот момент система “покидает” ограничение и, оказавшись внутри допустимого множества, перемещается “свободно” до момента  $T$  окончания движения в точке  $O$ .

Таким образом, предполагаем, что движение системы на промежутке  $[0, T]$  происходит по следующему плану: при  $t \in [0, t_1]$  система движется “свободно” (без активных фазовых ограничений); при  $t \in [t_1, t_2]$  система перемещается по прямой  $x^2 = x^1 - 5$ , при  $t \in [t_2, t_3]$  происходит “свободное” движение; при  $t \in [t_3, t_4]$  – передвижение по прямой  $x^2 = -2$ ; при  $t \in [t_4, T]$  движение системы опять “свободное”. Моменты переключений  $t_1, t_2, t_3, t_4$  удовлетворяют неравенствам

$$0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < T. \quad (3.26)$$

Первое и последнее неравенства строгие, поскольку промежутки “свободного” движения в начале и конце процесса управления ненулевые (по продолжительности). В случае  $t_1 = t_2$

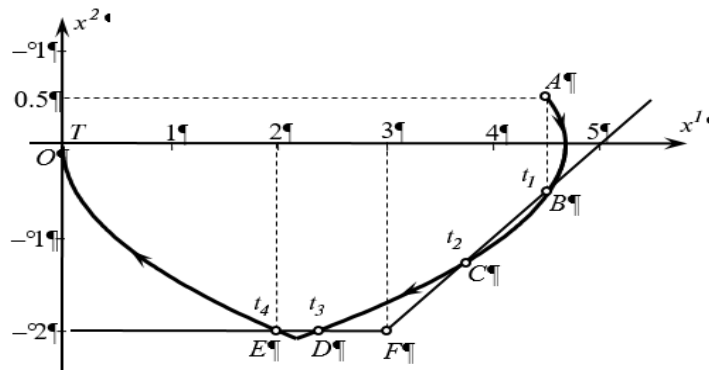


Рис. 5. Оптимальная траектория без фазовых ограничений.

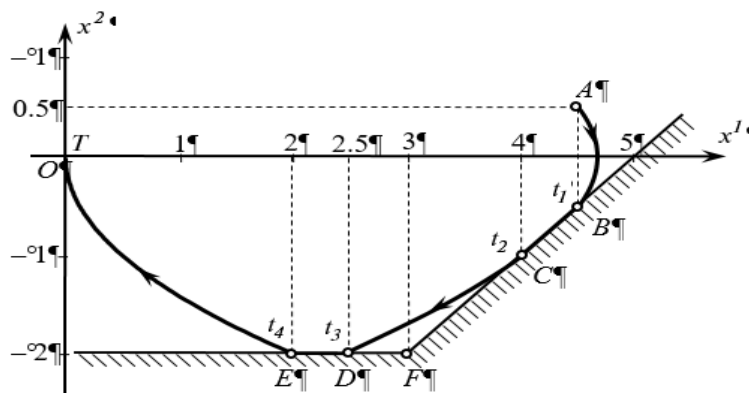


Рис. 6. Оптимальная траектория с фазовыми ограничениями.

ограничение  $x^2 \geq x^1 - 5$  не становится активным и его можно удалить из плана “активизации”. Однако это неверно, так как оптимальная траектория без этого ограничения (дуга  $ABC$  на рис. 5) пересекает прямую  $x^2 = x^1 - 5$ . Аналогично убеждаемся, что равенство  $t_3 = t_4$  невозможно, поскольку ограничение  $x^2 \geq -2$  обязательно будет активным (дуга  $DEO$  на рис. 5) и его нельзя удалить. Случай равенства  $t_2 = t_3$ , когда одно активное ограничение меняется на другое, рассмотрим позже.

Исключая активные фазовые ограничения, составляем задачу управления ГСПР. Напомним, что нижний индекс у вектора состояния ГС указывает номер текущего промежутка времени или, что то же самое, количество уже совершившихся переключений.

На промежутке  $[t_1, t_2]$  выполняется тождество

$$x^2(t) = x^1(t) - 5. \quad (3.27)$$

Записываем уравнения движения системы (3.25) с учетом (3.27) и равенство  $\dot{x}^2(t) = \dot{x}^1(t)$ , которое получается при дифференцировании (3.27). Получаем

$$\dot{x}^1(t) = x^2(t) \Rightarrow \dot{x}^1(t) = x^1(t) - 5; \quad \dot{x}^2(t) = u(t) \Rightarrow u(t) = \dot{x}^1(t) \Rightarrow u(t) = x^1(t) - 5.$$

Следовательно, движение системы (3.25) на промежутке  $[t_1, t_2]$  описывается уравнениями

$$\dot{x}_1^1(t) = x_1^1(t) - 5; \quad u_1(t) = x_1^1(t) - 5. \quad (3.28)$$

Заметим, что система (3.28) одномерная. Переменная  $x^2$  исключена из уравнений. Тождество (3.27) будет выполняться, если оно верно в момент времени  $t_1$ . Чтобы обеспечить равенство  $x^2(t_1) = x^1(t_1) - 5$ , записываем его как терминальное условие на предыдущем промежутке  $[0, t_1]$ :

$$x_0^2(t_1) = x_0^1(t_1) - 5, \quad (3.29)$$

которое дополняем условием непрерывности траектории

$$x_1^2(t_1) = x_0^1(t_1). \quad (3.30)$$

Условие (3.29) является промежуточным ограничением для ГС, а равенство (3.30) определяет переключение ГСПР в момент  $t_1$ .

На промежутке  $[t_3, t_4]$  выполняется тождество

$$x^2(t) = -2. \quad (3.31)$$

Записываем уравнения движения системы (3.25) с учетом (3.31) и равенство  $\dot{x}^2(t) = 0$ , которое получается при дифференцировании (3.31). Тогда

$$\dot{x}^1(t) = x^2(t) \Rightarrow \dot{x}^1(t) = -2; \quad \dot{x}^2(t) = u(t) \Rightarrow u(t) = 0.$$

Следовательно, движение системы (3.25) на промежутке  $[t_3, t_4]$  описывается уравнениями

$$\dot{x}_3^1(t) = -2, \quad u_3(t) = 0.$$

Равенство (3.31) в момент времени  $t_3$  обеспечиваем промежуточным ограничением  $x_2^1(t_3) = -2$  и условием непрерывности  $x_3^1(t_3) = x_2^1(t_3)$ .

На промежутках  $[0, t_1]$ ,  $[t_2, t_3]$ ,  $[t_4, T]$  уравнения движения систем (3.25) не меняются, а переключения в моменты  $t_2$ ,  $t_4$  происходят согласно уравнениям

$$x_2^1(t_2) = x_1^1(t_2), \quad x_2^2(t_2) = x_1^1(t_2) - 5; \quad x_4^1(t_4) = x_3^1(t_4), \quad x_4^2(t_4) = -2,$$

которые следуют из условия непрерывности траектории системы (3.25).

Таким образом, задаче (3.25) с фазовыми ограничениями соответствует задача оптимального управления ГСПР:

$$\begin{aligned}
0 < t_1 \leq t_2 \leq t_3 < T, \\
\dot{x}_0^1(t) = x_0^2(t), \quad \dot{x}_0^2(t) = u_0(t), \quad |u_0(t)| \leq 1, \quad t \in [0, t_1], \\
x_0^2(t_1) = x_0^1(t_1) - 5, \quad x_1^2(t_1) = x_0^1(t_1), \\
\dot{x}_1^1(t) = x_1^1(t) - 5, \quad u_1 = x_1^1(t) - 2, \quad t \in [t_1, t_2], \\
x_2^1(t_2) = x_1^1(t_2), \quad x_2^2(t_2) = x_1^1(t_2) - 5, \\
\dot{x}_2^1(t) = x_2^2(t), \quad \dot{x}_2^2(t) = u_2(t), \quad |u_2(t)| \leq 1, \quad t \in [t_2, t_3], \\
x_2^1(t_3) = -2, \quad x_3^1(t_3) = x_2^1(t_3), \\
\dot{x}_3^1(t) = -1, \quad u_3(t) = 0, \quad t \in [t_3, t_4], \\
x_4^1(t_4) = x_3^1(t_4), \quad x_4^2(t_4) = -2, \\
\dot{x}_4^1(t) = x_4^2(t), \quad \dot{x}_4^2(t) = u_4(t), \quad |u_4(t)| \leq 1, \quad t \in [t_4, T], \\
x^1(0) = 4.5, \quad x^2(0) = 0.5, \quad x^1(T) = 0, \quad x^2(T) = 0, \\
T \rightarrow \min.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Применяем для решения задачи (3.32) необходимые условия ГСПР (см. разд. 1.2). Для каждого промежутка непрерывного движения составляем функцию Понтрягина (1.9), записываем дифференциальные уравнения для вспомогательных функций и выражение для оптимального управления:

$$H_0 = \psi_0^1 x_0^2 + \psi_0^2 u_0 - \lambda_0, \quad \dot{\psi}_0^1 = 0, \quad \dot{\psi}_0^2 = -\psi_0^2, \quad u_0 = \text{sign } \psi_0^2, \quad t \in [0, t_1],$$

$$H_1 = \psi_1^1 \cdot (x_1^1 - 5) - \lambda_0, \quad \dot{\psi}_0^1 = -\psi_1^1, \quad u_1 = x_1^1 - 5, \quad |x_1^1 - 5| \leq 1, \quad t \in [t_1, t_2],$$

$$H_2 = \psi_2^1 x_2^2 + \psi_2^2 u_2 - \lambda_0, \quad \dot{\psi}_2^1 = 0, \quad \dot{\psi}_2^2 = -\psi_2^2, \quad u_2 = \text{sign } \psi_2^2, \quad t \in [t_2, t_3],$$

$$H_3 = \psi_3^1 \cdot (-2) - \lambda_0, \quad \dot{\psi}_3^1 = 0, \quad u_3 = 0, \quad t \in [t_3, t_4],$$

$$H_4 = \psi_4^1 x_4^2 + \psi_4^2 u_4 - \lambda_0, \quad \dot{\psi}_4^1 = 0, \quad \dot{\psi}_4^2 = -\psi_4^2, \quad u_4 = \text{sign } \psi_4^2, \quad t \in [t_4, T].$$

Составляем функции Понтрягина (1.9) для переключений и записываем условия трансверсальности для моментов переключений:

$$\hat{H}_1 = \psi_1^1 x_0^1, \quad \{\psi_1^2 \cdot (x_1^2 - 5) - \lambda_0 - (\psi_0^1 x_0^1 + |\psi_0^2| - \lambda_0) + \lambda_2 - \lambda_1\} \delta t_1 + (\psi_0^1 - \psi_1^1) \delta x_1^1 + \psi_0^2 \delta x_0^2 = 0$$

в момент  $t = t_1$ , где  $\delta x_0^1 = \delta x_0^2$ , а вариация  $\delta t_1$  — любая;

$$\hat{H}_2 = \psi_2^1 x_1^1 + \psi_2^2 \cdot (x_1^1 - 5),$$

$$\{\psi_2^2 x_2^2 + |\psi_2^2| - \lambda_0 - [\psi_1^1 \cdot (x_1^1 - 5) - \lambda_0] + \lambda_3 - \lambda_2\} \delta t_2 + (\psi_1^1 - \psi_2^1 - \psi_2^2) \delta x_1^1 = 0$$

в момент  $t = t_2$ , где вариации  $\delta t_2$ ,  $\delta x_1^1$  — любые;

$$\hat{H}_3 = \psi_3^1 x_3^1, \quad \{\psi_3^1 \cdot (-2) - \lambda_0 - (\psi_2^1 x_2^2 + |\psi_2^2| - \lambda_0) + \lambda_4 - \lambda_3\} \delta t_3 + (\psi_2^1 - \psi_3^1) \delta x_2^1 + \psi_2^2 \delta x_2^2 = 0$$

в момент  $t = t_3$ , где  $\delta x_2^2 = 0$ , а вариация  $\delta t_3$  — любая;

$$\hat{H}_4 = \psi_4^1 x_3^1 + \psi_4^2 \cdot (-2),$$

$$\{\psi_4^1 x_4^2 + |\psi_4^2| - \lambda_0 - [\psi_3^1 \cdot (-2) - \lambda_0] + \lambda_5 - \lambda_4\} \delta t_4 + (\psi_3^1 - \psi_4^1) \delta x_3^1 + \psi_3^2 \delta x_3^2 = 0$$

в момент  $t = t_4$ , где  $\delta x_3^2 = 0$ , а вариации  $\delta t_4$ ,  $\delta x_3^1$  — любые;

$$\hat{H}_4 = \psi_4^1 x_3^1 + \psi_4^2 \cdot (-2),$$



$$\{\psi_4^1 x_4^2 + |\psi_4^2| - \lambda_0 - [\psi_3^1 \cdot (-2) - \lambda_0] + \lambda_5 - \lambda_4\} \delta t_4 + (\psi_3^1 - \psi_4^1) \delta x_3^1 + \psi_3^1 \delta x_3^2 = 0$$

в момент  $t = t_4$ , где  $\delta x_3^2 = 0$ , а вариации  $\delta t_4$ ,  $\delta x_3^1$  — любые. Упрощаем полученные условия, учитывая уравнения переключений и промежуточные ограничения:

$$\begin{aligned} \psi_0^2 \cdot x_0^2 - |\psi_0^2| + \lambda_2 - \lambda_1 &= 0, \quad \psi_1^1 - \psi_0^1 = \psi_0^2, \quad t = t_1, \\ -\psi_2^2 x_2^2 + |\psi_2^2| + \lambda_3 - \lambda_2 &= 0, \quad \psi_1^1 - \psi_2^1 = \psi_2^2, \quad t = t_2, \\ |\psi_2^2| + \lambda_4 - \lambda_3 &= 0, \quad \psi_2^1 - \psi_3^1 = 0, \quad t = t_3, \\ |\psi_4^2| + \lambda_5 - \lambda_4 &= 0, \quad \psi_3^1 - \psi_4^1 = 0, \quad t = t_4. \end{aligned} \quad (3.33)$$

В конечный момент времени  $T$  из условия трансверсальности получаем

$$-\psi_4^1 x_4^2 + |\psi_4^2| - \lambda_0 = 0 \Rightarrow |\psi_4^2| = \lambda_0. \quad (3.34)$$

Осталось записать условия дополняющей нежесткости:

$$\lambda_1(-t_1) = 0, \quad \lambda_2(t_1 - t_2) = 0, \quad \lambda_3(t_2 - t_3) = 0, \quad \lambda_4(t_3 - t_4) = 0, \quad \lambda_5(t_4 - T) = 0, \quad (3.35)$$

а также условие неотрицательности  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, 5$ .

Будем решать систему уравнений (3.33) – (3.35). В случае (3.26), когда моменты переключений не совпадают, из условий (3.35) следует, что все множители Лагранжа, за исключением  $\lambda_0$ , равны нулю. Поэтому можно взять  $\lambda_0 = 1$ . При этом уравнения (3.33), (3.34) принимают вид

$$\begin{aligned} \psi_0^2 \cdot x_0^2 - |\psi_0^2| &= 0, \quad \psi_1^1 - \psi_0^1 = \psi_0^2, \quad t = t_1, \\ -\psi_2^2 x_2^2 + |\psi_2^2| &= 0, \quad \psi_1^1 - \psi_2^1 = \psi_2^2, \quad t = t_2, \\ |\psi_2^2| &= 0, \quad \psi_2^1 - \psi_3^1 = 0, \quad t = t_3, \\ |\psi_4^2| &= 0, \quad \psi_3^1 - \psi_4^1 = 0, \quad t = t_4, \\ |\psi_4^2| &= 1. \end{aligned}$$

На последнем промежутке времени  $[t_4, T]$  из условия  $|\psi_4^2(t_4)| = 0$  следует, что  $\psi_4^2(t_4) = 0$ . Поэтому функция  $\psi_4^2(t)$  имеет постоянный знак при  $t \in (t_4, T)$ . Она либо убывает, либо возрастает, согласно уравнению  $\dot{\psi}_4^2 = -\psi_4^1 = \text{const}$ . Значит, управление  $u_4$  постоянно. Однако если  $u_4 = -1$ , то будет нарушено ограничение  $x^2 \geq -2$ . Потому  $u_4(t) = 1$  при  $t \in [t_4, T]$ . Тогда фазовая траектория  $OE$  имеет вид  $x_4^1 = 0.5(x_4^2)^2$ , начинается в точке  $E(2; -2)$  и заканчивается в начале координат  $O(0; 0)$ . Время движения на этом участке  $T - t_4 = 2$ .

На промежутке времени  $[t_2, 3]$  из условия  $|\psi_2^2(t_3)| = 0$  следует, что  $\psi_2^2(t_3) = 0$ . Поэтому функция  $\psi_2^2(t)$  имеет постоянный знак при  $t \in (t_2, t_3)$ . Она либо убывает, либо возрастает, согласно уравнению  $\dot{\psi}_2^2 = -\psi_2^1 = \text{const}$ . Значит, управление  $u_2$  постоянно. Причем  $u_2 = -1$  при  $t \in (t_2, t_3)$ , поскольку скорость движения на этом промежутке убывает, так как  $x_2^2(t_2) > x_2^2(t_3) = -2$ . Заметим, что  $u_2(t_2) = -1$ , поэтому  $\psi_2^2(t_2) < 0$ , тогда

$$-\psi_2^2(t_2)x_2^2(t_2) + |\psi_2^2(t_2)| = 0 \Rightarrow -\psi_2^2(t_2)[x_2^2(t_2) + 1] = 0 \Rightarrow x_2^2(t_2) = -1.$$

Значит,  $x_2^1(t_2) = 4$ , поскольку состояние системы в момент  $t_2$  находится на прямой  $x^2 = x^1 - 5$ . Фазовая траектория  $CD$ , соответствующая управлению  $u_2 = -1$  и проходящая через точку  $C(4; -1)$ , имеет вид  $x_2^1 = 4.5 - 0.5(x_2^2)^2$ . Она начинается в точке  $C$  и заканчивается на прямой  $x^2 = -2$  в точке  $D(2.5; -2)$ . Время движения по этому участку  $t_3 - t_2 = 1$ .

На отрезке  $DE$  уравнение движения  $\dot{x}_3^1 = -2$ . Поэтому  $x_3^1(t) = 2.5 - 2(t - t_3)$ ,  $t \in [t_3; t_4]$ . Время движения по этому участку  $t_4 - t_3 = 0.25$ . На участке  $BC$  движение описывается уравнением  $\dot{x}_1^1 = x_1^1 - 5$ , причем в момент  $t_2$  система находится в точке  $C$ , т.е. абсцисса  $x_1^1(t_2) = 4$ . Следовательно,  $x_1^1(t) = 5 - e^{t-t_2}$ ,  $u_1(t) = -e^{t-t_2}$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ . Заметим, что  $x_1^1(t_1) < 5$ , значит,  $x_0^1(t_1) < 5$  и  $x_0^2(t_1) < 0$ .

Определим знак  $\psi_0^2$  в момент переключения  $t_1$ . Если  $\psi_0^2(t_1) > 0$ , то из условия трансверсальности имеем  $\psi_0^2(t_1)[x_0^2(t_1) - 1] = 0$ . Значит,  $x_0^2(t_1) = 1$ , что противоречит полученному выше условию отрицательности:  $x_0^2(t_1) < 0$ . Если  $\psi_0^2(t_1) < 0$ , то  $\psi_0^2(t_1)[x_0^2(t_1) + 1] = 0$ . Следовательно,  $x_0^2(t_1) = -1$ , тогда  $x_0^1(t_1) = 4$ . В этом случае  $t_1 = t_2$ , что противоречит предположению  $t_1 < t_2$ . Таким образом,  $\psi_0^2(t_2) = 0$ . Учитывая, уравнение  $\dot{\psi}_0^2 = -\psi_0^1 = \text{const}$ , делаем вывод, что функция  $\psi_0^1$  имеет постоянный знак на промежутке  $(0; t_1)$ . Значит, управление постоянно: либо  $u_0 = -1$ , либо  $u_0 = 1$ . В последнем случае скорость  $x_0^2(t)$  возрастает, поэтому  $x_0^2(t_1) > 0$ , что противоречит условию отрицательности:  $x_0^2(t_1) < 0$ . Фазовая траектория  $AB$ , соответствующая управлению  $u_0 = -1$  и проходящая через точку  $A(4.5; 0.5)$ , имеет вид  $x_0^1 = 4.625 - 0.5(x_0^2)^2$ . Она начинается в точке  $A$  и заканчивается на прямой  $x^2 = x^1 - 5$  в точке  $B(4.5; -0.5)$ . Время движения по этому участку  $t_1 = 1$ .

Вычисляем время движения по траектории  $ABCDEO$ . Время перемещения по отрезку  $BC$  определяется из условия  $x_1^1(t_1) = 4.5$ , т.е.  $x_1^1(t_1) = 5 - e^{t_1 - t_2} = 4.5$ . Следовательно,  $t_2 - t_1 = \ln 2$ . Суммируя время движения по всем участкам, получаем  $T = 4.25 + \ln 2$ .

Решение задачи получено при условиях (3.26). Ранее было показано, что все неравенства в (3.26) обязательно строгие, за исключением, быть может, случая  $t_2 = t_3$ . Следовательно, траектория проходит через точку  $F(3; -2)$  пересечения прямых  $x^2 = x^1 - 5$  и  $x^2 = -2$ . Тогда в точке  $F$  управление  $u_2 = 3 - 5 = -2$ , что противоречит ограничению  $|u| \leq 1$ . Значит,  $t_2 \neq t_3$ , т.е.  $t_2 < t_3$ .

Таким образом, траектория с четырьмя моментами переключений является оптимальной. Наименьшее время достижения начала координат  $T = 4.25 + \ln 2$ .

**Заключение.** Предлагаемый подход для решения задач оптимального управления непрерывными системами с фазовыми ограничениями вполне эффективен, хотя и громоздкий. Методика применения необходимых условий оптимальности гибридных систем аналогична использованию принципа максимума для непрерывных систем. Трудно формализуемым местом предлагаемого подхода является процедура планирования порядка активизации фазовых ограничений. Решающую роль при этом играют практические представления о характере оптимального процесса. Если таких представлений нет, то приходится рассматривать разные планы «активизации» фазовых ограничений, что, разумеется, усложняет решение задачи.

Разработанный метод исключения активных фазовых ограничений можно применять не только для непрерывных систем. Он распространяется на задачи оптимального управления непрерывно-дискретными и гибридными системами с фазовыми ограничениями. При этом методика замены фазовых ограничений на промежуточные ограничения для гибридной системы переменной размерности остается неизменной.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВ-МиМФ. 1965. Т. 5. № 3. С. 395–453.
2. Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2004.
3. Бортакровский А.С. Необходимые условия оптимальности гибридных систем переменной размерности // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 1. С. 28–40.
4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
5. Sussmann H.J. A Maximum Principle for Hybrid Optimal Control Problems // Proc. 38th IEEE Conf. on Decision and Control. Phoenix, 1999.
6. Дмитрук А.В., Каганович А.М. Принцип максимума для задач оптимального управления с промежуточными ограничениями. // Нелинейная динамика и управление. Вып. 6. М.: Физматлит, 2008. С. 101–136.
7. Bortakovskii A.S. Necessary Optimality Conditions for Hybrid System of Variable Dimension with Intermediate Constraints // J. Math. Sci. 2023. V. 270. No. 5. P. 640–653.
8. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
9. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
10. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
11. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
12. Фельдбаум А.А. О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства // Аи Т. 1955. Т. 16. № 2. С. 129–149.13.
13. Dmitruk A., Samylovskiy I. Optimal Synthesis in a Time-Optimal Problem for the Double Integrator System with a Linear State Constraint // J. Dynamical and Control Systems. 2023. V. 29. P. 21–42.

УДК 519.7

## ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧЕ СО СКЛАДАМИ

© 2024 г. В. В. Лобанцов<sup>a, \*</sup>, А. П. Тизик<sup>b, \*\*</sup>, В. И. Цурков<sup>c, \*\*\*</sup>

<sup>a</sup>ФГБОУ ВО “Государственный университет по землеустройству”, Москва, Россия

<sup>b</sup>“Центральный научно-исследовательский ин-т связи”, Москва, Россия

<sup>c</sup>ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

\*e-mail: lobantsov.vv@phystech.edu

\*\*e-mail: tizik\_ap@mail.ru

\*\*\*e-mail: tsur@ccas.ru

Поступила в редакцию 27.06.2024 г.

После доработки 18.07.2024 г.

Принята к публикации 16.10.2024 г.

Метод решения классической транспортной задачи в целочисленной постановке, основанный на декомпозиции исходной задачи на последовательность двумерных задач с пересчетом коэффициентов целевых функций, успешно применяется в случае дополнительных пунктов производства и потребления. Представлен подробный анализ задач с нелинейными стоимостями перевозок для дополнительных пунктов.

**Ключевые слова:** транспортная задача, декомпозиция, обобщенные поставщики и потребители

DOI: 10.31857/S0002338824050065, EDN: TEDTFU

## DECOMPOSITION ALGORITHM IN A NONLINEAR TRANSPORT PROBLEM WITH STORAGE

V. V. Lobantsov<sup>a, \*</sup>, A. P. Tizik<sup>b, \*\*</sup>, V. I. Tsurkov<sup>c, \*\*\*</sup>

<sup>a</sup>The State University of Land Use Planning, Moscow

<sup>b</sup>Central Communications Research Institute, Moscow

<sup>c</sup>Federal Research Center “Computer Science and Control”, Russian Academy of Sciences, Moscow

\*e-mail: lobantsov.vv@phystech.edu

\*\*e-mail: tizik\_ap@mail.ru

\*\*\*e-mail: tsur@ccas.ru

Previously, a method was proposed for solving the classical transport problem in an integer formulation, based on the decomposition of the original problem into a sequence of two-dimensional problems with recalculation of the coefficients of the objective functions. The method was then extended to cover additional points of production and consumption. This paper considers the case when transportation costs for additional points are proportional to arbitrary powers of the transportation volume.

**Keywords:** transportation problem, decomposition, generalized suppliers and consumers

**Введение.** Известные алгоритмы решения транспортных задач основаны на методе улучшения плана в линейном программировании [1,2]. Однако распространение на более широкие транспортные постановки сопровождается трудностями. В [3] предложен декомпозиционный метод решения классической транспортной задачи. Основой для этого метода являются подходы для оптимизации сетевых задач [4–6]. В [7] эти идеи используются для решения транспортной задачи с дополнительными пунктами производства и потребления (со складами), для которых установлены квадратичные штрафы. В настоящей работе указанные подходы распространяются на нелинейные зависимости.

**1. Постановка задачи.** Имеется, как и в классической транспортной задаче,  $m$  пунктов производства и  $n$  пунктов потребления. В каждом  $i$ -м пункте производства задан объем производства  $a_i, i = \overline{1, m}$ , в каждом  $j$ -м — объем потребления  $b_j, j = \overline{1, n}$ . Кроме того, существуют еще  $n$  дополнительных пунктов производства. Каждый  $j$ -й дополнительный пункт производства может поставлять свою продукцию только  $j$ -му пункту потребления. Объем производства в дополнительных пунктах производства не ограничен. Имеется также  $m$  дополнительных пунктов потребления. Каждому  $i$ -му дополнительному пункту потребления продукцию может поставлять только  $i$ -й обычный пункт производства. Объем потребления в дополнительных пунктах не ограничен. Указанные промежуточные пункты можно интерпретировать как склады.

Стоимость перевозки из  $j$ -го дополнительного пункта производства пропорциональна  $p_j$  — степени от объема производства. Стоимость перевозки в  $i$ -й дополнительный пункт потребления пропорциональна  $r_i$  — степени от объема перевозки. Необходимо минимизировать суммарные затраты на перевозки.

Формальная запись задачи имеет вид

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i = a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1.1)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} + w_j = b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.2)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^m d_i y_i^r + \sum_{j=1}^n e_j w_j^p \rightarrow \min, \quad (1.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, y_i \geq 0, w_j \geq 0, c_{ij} \geq 0, d_i, e_j — \text{целые}. \quad (1.4)$$

Здесь  $x_{ij}$  — количество продукта, перевозимого из пункта  $j$  в пункт  $i$ ;  $y_i$  — количество продукта, доставляемого в дополнительный  $j$ -й пункт потребления;  $w_j$  — количество продукта, вывозимого из дополнительного  $j$ -го пункта производства. Кроме того, будем считать  $c_{ij}$  четными числами, что не ограничивает общности рассмотрения.

**2. Метод решения задачи.** 2.1. П е р в ы й э т а п. Сформируем  $m + n$  одномерных задач. Первые  $m$  одномерных задач имеют вид ( $i = \overline{1, m}$  — фиксировано):

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i = a_i, \quad (2.1)$$

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}^1 x_{ij} + d_i y_i^r \rightarrow \min, \quad (2.2)$$

$$c_{ij}^1 = \frac{c_{ij}}{2}, \quad 0 \leq x_{ij} \leq \min(a_i, b_j), \quad x_{ij}, y_i \geq 0 — \text{целые}. \quad (2.3)$$

Вторые  $n$  оптимизационных задач с одним ограничением запишем как ( $j$  фиксировано):

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} + w_j = b_j, \quad (2.4)$$

$$\sum_{i=1}^m c_{ij}^2 x_{ij} + e_j w_j^p \rightarrow \min, \quad (2.5)$$

$$c_{ij}^2 = \frac{c_{ij}}{2}, \quad 0 \leq x_{ij} \leq \min(a_i, b_j). \quad (2.6)$$

Здесь  $x_{ij}, w_j \geq 0$  — целые.

Задачи (2.1)–(2.3) решаются следующим образом. Сравниваем  $d_i$  с  $c_{ij}^1 = \min_j c_{ij}^1$  ( $i$  фиксировано). Если  $d_i > c_{ij}^1$ , то полагаем  $x_{ij}^* = \min(a_i, b_j)$ . При  $b_j^* < a_i$  сравниваем  $d_i$  с  $c_{ij}^{1**} = \min_{j \neq j^*} c_{ij}^1$ . Если  $d_i > c_{ij}^{1**}$ , то полагаем  $x_{ij}^{**} = \min(a_i - b_j^*, b_j^{**})$  и т.д. Если имеет место неравенство  $d_i \leq c_{ij}^1$

(сразу или после нескольких назначений линейных переменных), то ищется целочисленный минимум выражения  $d_i y_i^{f_i} + c_{ij}^* (\min(a_i, b_j^*) - y_i)$ .

Обозначим через  $y_i^*$  оптимальное значение  $y_i$ . Тогда, очевидно,  $x_{ij}^* = \min(a_i, b_j^*) - y_i^*$ . Если при этом (2.1) не является равенством, то далее задачи (2.1)–(2.3) решаются как линейные (см., например, [3]). Задачи вида (2.4)–(2.6) решаются вполне аналогичным образом.

Пусть все  $m + n$  задач вида (2.1)–(2.3) и (2.4)–(2.6) решены. Если объединение оптимальных решений всех  $m + n$  задач является допустимым решением исходной задачи (1.1)–(1.4), то, очевидно, тем самым получено оптимальное решение задачи (1.1)–(1.4). Если оптимальное решение задачи (1.1)–(1.4) не получено, то начинаем итерационный циклический процесс решения  $m \times n$  оптимизационных задач с двумя ограничениями.

2.2. В т о р о й э т а п. Первая двумерная задача имеет вид:

$$\sum_{j=1}^n x_{1j} + y_1 = a_1, \quad (2.7)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{i1} + w_1 = b_1, \quad (2.8)$$

$$\sum_{j=1}^n c_{1j}^1 x_{1j} + \sum_{i=1}^m c_{i1}^2 x_{i1} + e_1 w_1^{p_1} + d_1 y_1^{q_1} \rightarrow \min, \quad (2.9)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq \min(a_i, b_j). \quad (2.10)$$

Здесь  $x_{ij}, y_i \geq 0, w_1 \geq 0$  – целые.

Задача (2.7)–(2.10) решается следующим образом. Единственной общей переменной в (2.7) и (2.8) является  $x_{11}$ . Поэтому решение задачи (2.7)–(2.10) зависит от соотношения между  $c_{11} = c_{11}^1 + c_{11}^2$  и другими коэффициентами в целевой функции (2.9).

Пусть

$$c_{11} < \min_{i,j \neq 1} (c_{1j}^1 + c_{i1}^2, c_{1j}^1 + e_1, c_{i1}^2 + d_1, d_1 + e_1). \quad (2.11)$$

Тогда, очевидно, что в оптимальном решении задачи (2.7)–(2.10)  $x_{11} = \min(a_1, b_1)$ , после чего задача (2.7)–(2.10) распадается на две одномерные, рассмотренные выше.

Определим новые значения  $c_{11}^1$  и  $c_{11}^2$  следующим образом. Возьмем целочисленные значения  $c_{11}^1$  и  $c_{11}^2$ , подчиняющиеся условиям  $c_{11}^1 \leq d_1, c_{11}^2 \leq e_1$ . Пусть  $c_{11} < \min_{i,j \neq 1} (c_{1j}^1 + c_{i1}^2, c_{1j}^1 + e_1, c_{i1}^2 + d_1, d_1 + e_1) = d_1 + e_1$ . Очевидно, что тогда  $c_{11}^1 = d_1, c_{11}^2 = e_1$ . При новых значениях  $c_{11}^1$  и  $c_{11}^2$  объединение оптимальных решений соответствующих одномерных задач будет совпадать с оптимальным решением задачи (2.7)–(2.10).

Допустим, что  $c_{11} > \min_{i,j \neq 1} (c_{1j}^1 + c_{i1}^2, c_{1j}^1 + e_1, c_{i1}^2 + d_1, d_1 + e_1)$ . Тогда, исключив общую переменную, решаются две одномерные задачи. Далее вычисляются следующие величины:

$$\Delta u_0 = d_1 \left[ (y_1^*)^{q_1} - (y_1^* - 1)^{q_1} \right] + e_1 \left[ (w_1^*)^{p_1} - (w_1^* - 1)^{p_1} \right],$$

$$\Delta u_1 = d_1 \left[ (y_1^*)^{q_1} - (y_1^* - 1)^{q_1} \right] + c_{i^*1}^2,$$

$$\Delta u_2 = e_1 \left[ (w_1^*)^{p_1} - (w_1^* - 1)^{p_1} \right] + c_{1j^*}^1,$$

$$\Delta u_3 = c_{1j^*}^1 + c_{i^*1}^2.$$

Здесь  $y_1^*, w_1^*$  – значения переменных  $y_1, w_1$  в оптимальных решениях одномерных задач без  $x_{11}$ , а  $c_{1j^*}^1, c_{i^*1}^2$  – максимальные коэффициенты при положительных значениях переменных  $x_{1j}, x_{i1}$ .

Если  $\max_{0 \leq k \leq 3} \Delta u_k = \Delta u_3$  и  $c_{11} > c_{1j^*}^1 + c_{i^*1}^2$ , то двумерная задача решена. При этом  $c_{11}^1 \geq c_{1j^*}^1$  и  $c_{11}^2 \geq c_{i^*1}^2$ . Если  $\max_{0 \leq k \leq 3} \Delta u_k = \Delta u_3$  и  $c_{11} = c_{1j^*}^1 + c_{i^*1}^2$ , то, обозначив через  $x_{1j^*}^*$  и  $x_{i^*1}^*$  значения соот-



ветствующих переменных в оптимальных решениях одномерных задач, в двумерную задачу запишем ограничения

$$x_{1j}^* + x_{11} = x_{1j}^*, x_{i1}^* + x_{11} = x_{i1}^*, c_{11}^1 = c_{1j}^1 \text{ и } c_{11}^2 = c_{i1}^2.$$

Если  $\max_{0 \leq k \leq 3} \Delta u_k = \Delta u_3$  и  $c_{11} < c_{1j}^1 + c_{i1}^2$ , то  $x_{11}$  увеличивается на  $\min(x_{1j}^*, x_{i1}^*)$  (или до своего максимума). Если при этом  $x_{11}$  достигает максимума, то решение двумерной задачи окончено и  $c_{11}^1 \leq c_{1j}^1, c_{11}^2 \leq c_{i1}^2$ . В противном случае пересчитываются  $\Delta u_k, k = \overline{0, 3}$ , и процесс решения продолжается.

Если  $\max_{0 \leq k \leq 3} \Delta u_k = \Delta u_2$ , то при  $c_{11} > \Delta u_2$  решение двумерной задачи окончено и  $c_{11}^1 \geq c_{1j}^1, c_{11}^2 \geq e_1 \left[ (w_1^*)^{p_1} - (w_1^* - 1)^{p_1} \right]$ . При  $c_{11} = \Delta u_2$  полагаем  $c_{11}^1 = c_{1j}^1, c_{11}^2 = e_1 \left[ (w_1^*)^{p_1} - (w_1^* - 1)^{p_1} \right]$ . При  $c_{11} < \Delta u_2$  увеличивается  $x_{11}$ , а  $w_1$  и  $x_{1j}^*$  уменьшаются до момента, когда  $\Delta u_2$  перестает быть максимумом. Затем пересчитываются все  $\Delta u_k$  и процесс решения продолжается.

Если  $\max_{0 \leq k \leq 3} \Delta u_k = \Delta u_1$ , то при  $c_{11} > \Delta u_1$  решение двумерной задачи окончено и  $c_{11}^1 \geq d_1 \left[ (y_1^*)^{q_1} - (y_1^* - 1)^{q_1} \right], c_{11}^2 \geq c_{i1}^2$ . При  $c_{11} = \Delta u_1$   $c_{11}^1 = d_1 \left[ (y_1^*)^{q_1} - (y_1^* - 1)^{q_1} \right], c_{11}^2 = c_{i1}^2$ . При  $c_{11} < \Delta u_1$  все аналогично случаю  $c_{11} < \Delta u_2$ .

Если  $\max_{0 \leq k \leq 3} \Delta u_k = \Delta u_0$  и  $c_{11} < \Delta u_0$ , то  $y_1^*$  и  $w_1^*$  уменьшаются, а  $x_{11}$  увеличивается до потери  $\Delta u_0$  статуса максимума. Далее все  $\Delta u_k$  пересчитываются и процесс решения продолжается.

Так же, как и в линейном случае [3], имеет место монотонное возрастание суммы значений целевых функций в оптимальных решениях всех  $m + n$  одномерных задач в циклическом процессе решения двумерных задач и их разведения на одномерные задачи. Сумма эта, очевидно, ограничена сверху, процесс — целочисленен, следовательно, за конечное число шагов достигается предел. Точно так же, как и в линейном случае [3], если объединение оптимальных решений одномерных задач (в предельном состоянии) является допустимым решением исходной задачи (1.1)–(1.4), то оно выступает ее оптимальным решением. В противном случае, как и в [3], образуются обобщенные производители и потребители.

**3. Пример.** Рассмотрим транспортную задачу с дополнительными пунктами потребления и производства со степенной зависимостью от объема производства и потребления в дополнительных пунктах. Ограничения и целевую функцию запишем следующим образом:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 = 10, \quad x_{11} + x_{21} + x_{31} + w_1 = 6,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 = 20, \quad x_{12} + x_{22} + x_{32} + w_2 = 22,$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 = 30, \quad x_{13} + x_{23} + x_{33} + w_3 = 32,$$

$$8x_{11} + 12x_{12} + 18x_{13} + y_1^2 + 16x_{21} + 20x_{22} + 18x_{23} + 2y_2^3 + 16x_{31} + 18x_{32} + 20x_{33} + 3y_3^3 + w_1^2 + 2w_2^3 + 3w_3^3 \rightarrow \min.$$

3.1. П е р в ы й э т а п. 3.1.1. Первая одномерная задача:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 = 10,$$

$$4x_{11} + 6x_{12} + 9x_{13} + y_1^2 \rightarrow \min.$$

Здесь  $c_{11}^1 > d_1$ , поэтому ищем целочисленный минимум выражения  $y_1^2 + 4(10 - y_1)$ :

$$\min_{y_1 \geq 0} [y_1^2 + 4(10 - y_1)],$$

$$f'(y_1) = 2y_1 - 4 = 0,$$



$$y_1 = 2,$$

$$x_{11} = 6, x_{12} = 2.$$

3. 1. 2. Вторая одномерная задача:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 = 20,$$

$$8x_{21} + 10x_{22} + 9x_{23} + 2y_2^3 \rightarrow \min.$$

Здесь  $c_{21}^1 > d_2$ , поэтому вычисляем целочисленный минимум  $2y_2^3 + 8(20 - y_2)$ :

$$\min_{y_2 \geq 0} [2y_2^3 + 8(20 - y_2)],$$

$$f'(y_2) = 6y_2^2 - 8 = 0,$$

$$y_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Целочисленный минимум достигается при  $y_2 = 1$ :

$$x_{21} = 6, x_{22} = 13.$$

3. 1. 3. Третья одномерная задача:

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 = 30,$$

$$8x_{31} + 9x_{32} + 10x_{33} + 3y_3^3 \rightarrow \min.$$

Здесь  $c_{31}^1 > d_1$ , ищем целочисленный минимум:

$$\min_{y_3 \geq 0} [3y_3^3 + 8(30 - y_3)],$$

$$f'(y_3) = 9y_3^2 - 8 = 0,$$

$$y_3 = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Целочисленный минимум достигается при  $y_3 = 1$ :

$$x_{31} = 6, x_{32} = 22, x_{33} = 1.$$

3. 1. 4. Четвертая одномерная задача:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + w_1 = 6,$$

$$4x_{11} + 8x_{21} + 8x_{31} + w_1^2 \rightarrow \min.$$

Здесь  $c_{11}^2 > e_1$ , находим минимум выражения  $w_1^2 + 4(6 - w_1)$ :

$$\min_{w_1 \geq 0} [w_1^2 + 4(6 - w_1)],$$

$$f'(w_1) = 2w_1 - 4 = 0,$$

$$w_1 = 2,$$

$$x_{11} = 4, x_{21} = 0, x_{31} = 0.$$

Далее решать одномерные задачи не имеет смысла, так как, например, в третьей задаче  $x_{31} = 6$ , а в четвертой  $x_{31} = 0$ .

3.2. В т о р о й э т а п. 3. 2. 1. Первая двумерная задача:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 = 10,$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + w_1 = 6,$$

$$8x_{11} + 6x_{12} + 9x_{13} + 8x_{21} + 8x_{31} + y_1^2 + w_1^2 \rightarrow \min.$$

Здесь  $c_{11} > d_1 + e_1$ , поэтому решаются две одномерные задачи.

3. 2. 1. 1. Первая одномерная задача:

$$x_{12} + x_{13} + y_1 = 10,$$

$$6x_{12} + 9x_{13} + y_1^2 \rightarrow \min.$$

Здесь  $c_{12}^1 > d_1$ , поэтому вычисляем минимум:

$$\min_{y_1 \geq 0} [y_1^2 + 6(10 - y_1)],$$

$$f'(y_1) = 2y_1 - 6 = 0,$$

$$y_1 = 3,$$

$$x_{12} = 7, x_{13} = 0.$$

3. 2. 1. 2. Вторая одномерная задача:

$$x_{21} + x_{31} + w_1 = 6,$$

$$8x_{21} + 8x_{31} + w_1^2 \rightarrow \min.$$

Здесь  $c_{21}^2 > e_1$ , ищем минимум:

$$\min_{w_1 \geq 0} [w_1^2 + 8(6 - w_1)],$$

$$f'(w_1) = 2w_1 - 8 = 0,$$

$$w_1 = 4,$$

$$x_{21} + x_{31} = 2,$$

$$\Delta u_0 = 1(9 - 4) + 1(16 - 9) = 12,$$

$$\Delta u_1 = 5 + 8 = 13,$$

$$\Delta u_2 = 7 + 6 = 13,$$

$$\Delta u_3 = 6 + 8 = 14.$$

Здесь  $c_{11} < \Delta u_3$ , поэтому  $x_{11} = 2, x_{21} = 0, x_{31} = 0, x_{12} = 5, y_1 = 3, w_1 = 4$ :

$$\Delta u_0 = 1(9 - 4) + 1(16 - 9) = 12,$$

$$\Delta u_1 = 5 + 0 = 5,$$

$$\Delta u_2 = 7 + 6 = 13,$$

$$\Delta u_3 = 6 + 0 = 6.$$

Здесь  $c_{11} < \Delta u_2$ , поэтому  $x_{11}$  увеличивается за счет  $x_{12}$  и  $w_1$ :

$$x_{11} = 3, x_{12} = 4, w_1 = 3, y_1 = 3,$$

$$\Delta u_0 = 1(9 - 4) + 1(9 - 4) = 10,$$

$$\Delta u_1 = 5 + 0 = 5,$$

$$\Delta u_2 = 5 + 6 = 11,$$

$$\Delta u_3 = 6 + 0 = 6.$$

Снова  $c_{11} < \Delta u_2$ , поэтому  $x_{11} = 4, x_{12} = 3, w_1 = 2, y_1 = 3$ :

$$\Delta u_0 = 5 + 3 = 8,$$

$$\Delta u_1 = 5 + 0 = 5,$$

$$\Delta u_2 = 3 + 6 = 9,$$

$$\Delta u_3 = 6 + 0 = 6.$$

Снова  $c_{11} < \Delta u_2$ , поэтому  $x_{11} = 5, x_{12} = 2, w_1 = 1, y_1 = 3$ :

$$\Delta u_0 = 5 + 1 = 6,$$

$$\Delta u_1 = 5 + 0 = 5,$$

$$\Delta u_2 = 1 + 6 = 7,$$

$$\Delta u_3 = 6 + 0 = 6.$$

Здесь  $c_{11} > \Delta u_2$ , поэтому решение второй одномерной задачи окончено.

### 3. 2. 2. Вторая двумерная задача:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 = 10,$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + w_2 = 22,$$

$$6x_{11} + 12x_{12} + 9x_{13} + 10x_{22} + 9x_{32} + y_1^2 + 2w_2^3 \rightarrow \min.$$

Имеем  $c_{12} = 12 > d_1 + e_2 = 3$ , поэтому сначала  $x_{12}$  исключается и решаются две одномерные задачи.

#### 3. 2. 2. 1. Первая одномерная задача:

$$x_{11} + x_{13} + y_1 = 10,$$

$$6x_{11} + 9x_{13} + y_1^2 \rightarrow \min.$$

Здесь  $c_{11}^1 > d_1$ , поэтому находим минимум:

$$y_1^3 + 6(10 - y_1),$$

$$f'(y_1) = 3y_1^2 - 6 = 0,$$

$$y_1^2 = 2,$$

$$y_1 = \sqrt{2}.$$

Целочисленный минимум достигается при  $y_1 = 1$ . При этом  $x_{11} = 6, x_{13} = 3$ .

3. 2. 2. 2. Вторая одномерная задача:

$$x_{22} + x_{32} + w_2 = 22,$$

$$10x_{22} + 9x_{32} + 2w_2^3 \rightarrow \min.$$

Имеем  $c_{32} > e_2$ , поэтому отыскиваем целочисленный минимум:

$$2w_2^3 + 9(22 - w_2),$$

$$f'(w_2) = 6w_2^2 - 9 = 0,$$

$$w_2^2 = 1.5,$$

$$w_2 = \sqrt{1.5}.$$

Целочисленный минимум достигается при  $w_2 = 1$ . При этом  $x_{32} = 21, x_{22} = 0$ :

$$\Delta u_0 = 1(1 - 0) + 2(1 - 0) = 3,$$

$$\Delta u_1 = 1(1 - 0) + 9 = 10,$$

$$\Delta u_2 = 2(1 - 0) + 9 = 11,$$

$$\Delta u_3 = 9 + 9 = 18.$$

Здесь  $12 = c_{12} < \Delta u_3 = 18$ , поэтому  $x_{12} = \min(21, 3) = 3$ . Имеем  $x_{12} = 3, x_{11} = 6, x_{13} = 0, y_1 = 1, x_{22} = 0, x_{32} = 18, w_2 = 1$ :

$$\Delta u_0 = 3,$$

$$\Delta u_1 = 1 + 9 = 10,$$

$$\Delta u_2 = 2 + 6 = 8,$$

$$\Delta u_3 = 9 + 6 = 15.$$

Здесь  $12 = c_{12} < \Delta u_3 = 15$ , поэтому  $x_{12}$  увеличивается на  $\min(9, 6) = 6; x_{12} = 9$ . Имеем  $x_{12} = 9, x_{11} = 0, x_{13} = 0, y_1 = 1, x_{22} = 0, x_{32} = 12, w_2 = 1$ :

$$\Delta u_0 = 3,$$

$$\Delta u_1 = 1(1 - 0) + 9 = 10,$$

$$\Delta u_2 = 2 + 0 = 2,$$

$$\Delta u_3 = 0 + 9 = 9.$$

Здесь  $12 = c_{12} > \Delta u_1 = 10$ . Решение двумерной задачи окончено. При этом  $c_{12}^1 = 3$ ,  $c_{12}^2 = 9$ .

3. 2. 3. Третья двумерная задача:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 = 10,$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + w_3 = 32,$$

$$6x_{11} + 3x_{12} + 18x_{13} + 9x_{23} + 10x_{33} + y_1^3 + 3w_3^3 \rightarrow \min.$$

Здесь  $c_{13} > d_1 + e_3$ , поэтому решаются две одномерные задачи.

3. 2. 3. 1. Первая одномерная задача:

$$x_{11} + x_{12} + y_1 = 10,$$

$$6x_{11} + 3x_{12} + y_1^3 \rightarrow \min.$$

Здесь  $c_{12} > d_1$ , поэтому находим минимум:

$$y_1^3 + 3(10 - y_1),$$

$$f'(y_1) = 3y_1^2 - 3 = 0,$$

$$y_1 = 1.$$

Тогда  $x_{12} = 9$ . Первая одномерная задача решена.

3. 2. 3. 2. Вторая одномерная задача:

$$x_{23} + x_{33} + w_3 = 32,$$

$$9x_{23} + 10x_{33} + 3w_3^3 \rightarrow \min.$$

Здесь  $c_{23} > e_3$ , поэтому вычисляем минимум:

$$3w_3^3 + 9(30 - w_3),$$

$$f'(w_3) = 9w_3^2 - 9 = 0,$$

$$w_3 = 1,$$

$$x_{23} = 20, x_{33} = 11,$$

$$\Delta u_0 = 1(1 - 0) + 3(1 - 0) = 4,$$

$$\Delta u_1 = 1(1 - 0) + 10 = 11,$$

$$\Delta u_2 = 3(1 - 0) + 3 = 6,$$

$$\Delta u_3 = 6 + 11 = 17.$$

Здесь  $18 = c_{13} > \Delta u_3 = 17$ , поэтому двумерная задача решена:  $c_{13}^1 = 7, c_{13}^2 = 11$ .

3. 2. 4. Четвертая двумерная задача:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 = 20,$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + w_1 = 6,$$

$$0x_{11} + 16x_{21} + 10x_{22} + 9x_{23} + 8x_{31} + 2y_2^3 + w_1^3 \rightarrow \min.$$

Здесь  $16 = c_{21} > d_2 + e_1 = 3$ , поэтому решаются две одномерные задачи.

3. 2. 4. 1. Первая одномерная задача:

$$x_{22} + x_{23} + y_2 = 20,$$

$$10x_{22} + 9x_{23} + 2y_2^3 \rightarrow \min.$$

Здесь  $c_{23} > d_2$ , поэтому ищем минимум:

$$2y_2^3 + 9(20 - y_2),$$

$$f'(y_2) = 6y_2^2 - 9 = 0,$$

$$y_2^2 = 1.5,$$

$$y_2 = \sqrt{1.5}.$$

Целочисленный минимум достигается при  $y_2 = 1, x_{23} = 19, x_{22} = 0$ .

3. 2. 4. 2. Вторая одномерная задача:

$$x_{11} + x_{31} + w_1 = 6,$$

$$0x_{11} + 8x_{31} + w_1^3 \rightarrow \min.$$

Здесь  $0 = c_{11}^2 < e_1 = 1$ , поэтому  $x_{11} = 6, x_{31} = 0, w_1 = 0$ :

$$\Delta u_0 = 2(1 - 0) + 0 = 2,$$

$$\Delta u_1 = 2(1 - 0) + 0 = 2,$$

$$\Delta u_2 = 0 + 9 = 9,$$

$$\Delta u_3 = 0 + 9 = 9.$$

Здесь  $16 = c_{21} > \Delta u_3 = 9$ , поэтому двумерная задача решена:

$$x_{21} = 0, x_{22} = 0, x_{23} = 19, y_2 = 1, x_{11} = 6, x_{31} = 0,$$

$$w_1 = 0, c_{21}^1 = 12, c_{21}^2 = 4.$$

3. 2. 5. Пятая двумерная задача:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 = 20,$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + w_2 = 22,$$

$$12x_{21} + 20x_{22} + 9x_{23} + 9x_{12} + 9x_{32} + 2y_2^3 + 2w_2^3 \rightarrow \min.$$

Здесь  $c_{22} > d_2 + e_2$ , поэтому решаются две одномерные задачи.

3. 2. 5. 1. Первая одномерная задача:

$$x_{21} + x_{23} + y_2 = 20,$$



$$12x_{21} + 9x_{23} + 2y_2^3 \rightarrow \min.$$

Здесь  $c_{23}^1 > d_2$ , поэтому отыскиваем минимум:

$$2y_2^3 + 9(20 - y_2),$$

$$f'(y_2) = 6y_2^2 - 9 = 0,$$

$$y_2^2 = 1.5,$$

$$y_2 = \sqrt{1.5}.$$

Целочисленный минимум достигается при  $y_2 = 1$ :

$$x_{23} = 19, x_{21} = 0.$$

3. 2. 5. 2. Вторая одномерная задача:

$$x_{12} + x_{32} + w_2 = 22,$$

$$9x_{12} + 9x_{32} + 2w_2^3 \rightarrow \min.$$

Здесь  $c_{12} = c_{32} > e_2$ , поэтому находим минимум:

$$2w_2^3 + 9(10 - w_2),$$

$$f'(w_2) = 6w_2^2 - 9 = 0,$$

$$w_2^2 = 1.5,$$

$$w_2 = \sqrt{1.5}.$$

Целочисленный минимум достигается при  $w_2 = 1$ :

$$x_{12} = 10, x_{32} = 11,$$

$$\Delta u_0 = 2(1 - 0) + 2(1 - 0) = 4,$$

$$\Delta u_1 = 2(1 - 0) + 9 = 11,$$

$$\Delta u_2 = 2(1 - 0) + 9 = 11,$$

$$\Delta u_3 = 9 + 9 = 18.$$

Здесь  $20 = c_{22} > \Delta u_3 = 18$ , поэтому пятая двумерная задача решена:

$$x_{21} = 0, x_{22} = 0, x_{23} = 19, y_2 = 1, x_{12} = 10, x_{32} = 1,$$

$$w_2 = 1, c_{22}^1 = 10, c_{22}^2 = 10.$$

3. 2. 6. Шестая двумерная задача:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 = 20,$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + w_3 = 32,$$

$$12x_{21} + 10x_{22} + 18x_{23} + 11x_{13} + 10x_{33} + 2y_2^3 + 3w_3^3 \rightarrow \min.$$

Здесь  $18 = c_{23} > d_2 + e_3 = 5$ , поэтому решаются две одномерные задачи.

3. 2. 6. 1. Первая одномерная задача:

$$x_{21} + x_{22} + y_2 = 20,$$

$$12x_{21} + 10x_{22} + 2y_2^3 \rightarrow \min.$$

Здесь  $c_{22}^1 > d_2$ , поэтому отыскиваем минимум:

$$2y_2^3 + 10(20 - y_2),$$

$$f'(y_2) = 6y_2^2 - 10 = 0,$$

$$y_2^2 = \frac{5}{3},$$

$$y_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Целочисленный минимум достигается при  $y_2 = 1$ :

$$x_{22} = 19, x_{21} = 0.$$

3. 2. 6. 2. Вторая одномерная задача:

$$x_{13} + x_{33} + w_3 = 32,$$

$$11x_{13} + 10x_{33} + 3w_3^3 \rightarrow \min.$$

Здесь  $c_{32}^2 > e_3$ , поэтому ищем минимум:

$$3w_3^3 + 10(30 - w_3),$$

$$f'(w_3) = 9w_3^2 - 10 = 0,$$

$$w_3^2 = \frac{10}{9},$$

$$w_3 = \sqrt{\frac{10}{9}}.$$

Целочисленный минимум достигается при  $w_3 = 1$ :

$$x_{33} = 30, x_{13} = 1,$$

$$\Delta u_0 = 2(1 - 0) + 3(1 - 0) = 5,$$

$$\Delta u_1 = 2(1 - 0) + 11 = 13,$$

$$\Delta u_2 = 3(1 - 0) + 10 = 13,$$

$$\Delta u_3 = 10 + 11 = 21.$$

Здесь  $c_{23} < \Delta u_3$ , следовательно  $x_{23} = 1, x_{22} = 18, x_{13} = 0, x_{33} = 30$ :

$$\Delta u_0 = 5,$$

$$\Delta u_1 = 2(1 - 0) + 10 = 12,$$

$$\Delta u_2 = 3(1 - 0) + 10 = 13,$$

$$\Delta u_3 = 10 + 10 = 20.$$

Снова  $c_{23} < \Delta u_3$ , следовательно  $x_{23} = 19, x_{22} = 0, x_{13} = 0, x_{33} = 12$ . Здесь  $x_{23}$  достигло максимума, поэтому шестая двумерная задача решена:

$$x_{21} = 0, x_{22} = 0, x_{23} = 19, y_2 = 1, x_{13} = 0, x_{33} = 12,$$

$$w_3 = 1, c_{23}^1 = 9, c_{23}^2 = 9.$$

3. 2. 7. Седьмая двумерная задача:

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 = 30,$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + w_1 = 6,$$

$$16x_{31} + 9x_{32} + 10x_{33} + 0x_{11} + 4x_{21} + 3y_3^3 + w_1^3 \rightarrow \min.$$

Здесь  $16 = c_{31} > d_3 + e_1 = 4$ , поэтому решаются две одномерные задачи.

3. 2. 7. 1. Первая одномерная задача:

$$x_{32} + x_{33} + y_3 = 30,$$

$$9x_{32} + 10x_{33} + 3y_3^3 \rightarrow \min.$$

Здесь  $c_{32} > d_3$ , поэтому вычисляем минимум:

$$3y_3^3 + 9(30 - y_3),$$

$$f'(y_3) = 9y_3^2 - 9 = 0,$$

$$y_3 = 1,$$

$$x_{32} = 22, x_{33} = 7.$$

3. 2. 7. 2. Вторая одномерная задача:

$$x_{11} + x_{21} + w_1 = 6,$$

$$0x_{11} + 4x_{21} + w_1^3 \rightarrow \min.$$

Здесь, очевидно,  $x_{11} = 6, x_{21} = 0, w_1 = 0$ :

$$\Delta u_0 = 3(1 - 0) + 0 = 3,$$

$$\Delta u_1 = 3(1 - 0) + 0 = 3,$$

$$\Delta u_2 = 0 + 10 = 10,$$

$$\Delta u_3 = 10 + 0 = 10.$$

Здесь  $c_{32} > \Delta u_3$ , следовательно двумерная задача решена:

$$x_{11} = 6, x_{21} = 0, x_{31} = 0, x_{32} = 22, x_{33} = 7, y_3 = 1,$$

$$w_1 = 0, c_{31}^1 = 11, c_{31}^2 = 5.$$

3. 2. 8. Восьмая двумерная задача:

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 = 30,$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + w_2 = 22,$$

$$11x_{31} + 18x_{32} + 10x_{33} + 9x_{12} + 10x_{22} + 3y_3^3 + 2w_2^3 \rightarrow \min.$$

Здесь  $18 = c_{32} > d_3 + e_2 = 5$ , поэтому решаются две одномерные задачи.

3. 2. 8. 1. Первая одномерная задача:

$$x_{31} + x_{33} + y_3 = 30,$$

$$11x_{31} + 10x_{33} + 3y_3^3 \rightarrow \min.$$

Здесь  $c_{33}^1 > d_3$ , поэтому находим минимум:

$$3y_3^3 + 10(30 - y_3),$$

$$f'(y_3) = 9y_3^2 - 10 = 0,$$

$$y_3^2 = \frac{10}{9},$$

$$y_3 = \sqrt{\frac{10}{9}}.$$

Целочисленный минимум достигается при  $y_3 = 1$ :

$$x_{33} = 29, x_{31} = 0.$$

3. 2. 8. 2. Вторая одномерная задача:

$$x_{12} + x_{22} + w_2 = 22,$$

$$9x_{12} + 10x_{22} + 2w_2^3 \rightarrow \min.$$

Здесь  $c_{12} > e_2$ , поэтому отыскиваем минимум:

$$2w_2^3 + 9(10 - w_2),$$

$$f'(w_2) = 6w_2^2 - 9 = 0,$$

$$w_2^2 = \frac{3}{2},$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Целочисленный минимум достигается при  $w_2 = 1$ :

$$x_{12} = 10, x_{22} = 11,$$

$$\Delta u_0 = 3(1 - 0) + 2(1 - 0) = 5,$$

$$\Delta u_1 = 3(1 - 0) + 10 = 13,$$

$$\Delta u_2 = 2(1 - 0) + 10 = 12,$$

$$\Delta u_3 = 10 + 10 = 20.$$

Здесь  $c_{32} < \Delta u_3$ , поэтому  $x_{32} = 11, x_{33} = 18, x_{12} = 10, x_{22} = 0, x_{31} = 0, y_3 = 1, w_2 = 1$ :

$$\Delta u_0 = 5,$$

$$\Delta u_1 = 3 + 9 = 12,$$

$$\Delta u_2 = 2 + 10 = 12,$$

$$\Delta u_3 = 9 + 10 = 19.$$

Здесь  $c_{32} < \Delta u_3$ , поэтому  $x_{32} = 21, x_{33} = 8, x_{12} = 0, x_{22} = 0, x_{31} = 0, y_3 = 1, w_2 = 1$ :

$$\Delta u_0 = 5,$$

$$\Delta u_1 = 3 + 0 = 3,$$

$$\Delta u_2 = 2 + 8 = 10,$$

$$\Delta u_3 = 8 + 0 = 8.$$

Здесь  $c_{32} > \Delta u_3$ , поэтому восьмая двумерная задача решена:

$$c_{32}^1 = 9.5, c_{32}^2 = 8.5.$$

3. 2. 9. Девятая двумерная задача:

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 = 30,$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + w_3 = 32,$$

$$11x_{31} + 9.5x_{32} + 20x_{33} + 11x_{13} + 9x_{23} + 3y_3^3 + 3w_3^3 \rightarrow \min.$$

Здесь  $c_{33} > d_3 + e_3$ , поэтому решаются две одномерные задачи.

3. 2. 9. 1. Первая одномерная задача:

$$x_{31} + x_{32} + y_3 = 30,$$

$$11x_{31} + 9.5x_{32} + 3y_3^3 \rightarrow \min.$$

Здесь  $c_{32}^1 > d_3$ , поэтому вычисляем минимум:

$$3y_3^3 + 9.5(22 - y_3),$$

$$f'(y_3) = 9y_3^2 - 9.5 = 0,$$

$$y_3^2 = \frac{9.5}{9},$$

$$y_3 = \sqrt{\frac{9.5}{9}}.$$

Целочисленный минимум достигается при  $y_3 = 1$ :

$$x_{32} = 22, x_{31} = 7.$$

3. 2. 9. 2. Вторая одномерная задача:

$$x_{13} + x_{23} + w_3 = 32,$$

$$11x_{13} + 9x_{23} + 3w_3^3 \rightarrow \min.$$

Здесь  $c_{23}^2 > e_3$ , поэтому находим минимум:

$$3w_3^3 + 9(20 - w_3),$$

$$f'(w_3) = 9w_3^2 - 9 = 0,$$

$$w_3 = 1,$$

$$x_{13} = 10, x_{23} = 20,$$

$$\Delta u_0 = 3(1 - 0) + 3(1 - 0) = 6,$$

$$\Delta u_1 = 3(1 - 0) + 11 = 14,$$

$$\Delta u_2 = 3(1 - 0) + 11 = 14,$$

$$\Delta u_3 = 11 + 11 = 22.$$

Здесь  $c_{33} < \Delta u_3$ , поэтому  $x_{33} = 7, x_{32} = 22, x_{23} = 20, x_{13} = 4, y_3 = 1, w_3 = 1, x_{31} = 0$ :

$$\Delta u_0 = 6,$$

$$\Delta u_1 = 3 + 9 = 12,$$

$$\Delta u_2 = 3 + 9.5 = 12.5,$$

$$\Delta u_3 = 9 + 9.5 = 18.5.$$

Здесь  $c_{33} > \Delta u_3$ , поэтому  $c_{33}^1 = 10, c_{33}^2 = 10$ . Решение девятой двумерной задачи окончено.

По итогам первого цикла допустимое решение исходной задачи не получено. Всего потребовалось для получения оптимального решения провести шесть циклов вычислений. Ниже приведено оптимальное решение примера как объединение оптимальных решений всех шести одномерных задач с найденными коэффициентами целевых функций.

3.3. Р е ш е н и е и с х о д н о й з а д а ч и. Рассматривается как объединение решений одномерных задач:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 = 10,$$

$$3.6x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + y_1^2 \rightarrow \min,$$

$$x_{11} = 4, x_{12} = 4, y_1 = 2,$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + w_1 = 6,$$



$$4.4x_{11} + 4.5x_{21} + 5x_{31} + w_1^2 \rightarrow \min,$$

$$x_{11} = 4, w_1 = 2,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 = 20,$$

$$11x_{21} + 10x_{22} + 8x_{23} + 2y_2^3 \rightarrow \min,$$

$$x_{23} = 19, y_2 = 1,$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + w_2 = 22,$$

$$8x_{12} + 10x_{22} + 8x_{32} + w_2^3 \rightarrow \min,$$

$$x_{12} = 4, w_2 = 1, x_{32} = 17,$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 = 30,$$

$$11x_{31} + 10x_{32} + 10x_{33} + 3y_3^3 \rightarrow \min,$$

$$x_{32} = 17, x_{33} = 12, y_3 = 1,$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + w_3 = 32,$$

$$12x_{13} + 10x_{23} + 10x_{33} + 3w_3^3 \rightarrow \min,$$

$$x_{23} = 19, x_{33} = 12, w_3 = 1.$$

**4. Численные расчеты.** Была осуществлена программная реализация предложенного метода. Проведен счет с различным количеством ограничений (до 300). Время счета было пропорционально  $n^{4.6}$ .

**5. Расширение класса решаемых задач.** Анализ шагов алгоритма решения задач показывает, что нелинейные слагаемые в целевой функции должны удовлетворять следующим ограничениями:

- 1) при  $y_i = 0, 1 \leq i \leq m$  и  $w_j = 0, 1 \leq j \leq n$  соответствующие слагаемые равны нулю,
- 2) при  $y_i > 0, 1 \leq i \leq m$  и  $w_j > 0, 1 \leq j \leq n$  все соответствующие слагаемые положительны,
- 3) первые производные всех нелинейных слагаемых целевой функции являются строго возрастающими функциями.

Выполнение этих ограничений обеспечивает монотонность итерационного процесса. Таким образом, предлагаемым подходом можно решать обширный класс задач. Для примера решим следующую небольшую задачу:

$$x_{11} + x_{12} + y_1 = 24,$$

$$x_{11} + x_{21} + w_1 = 18,$$

$$x_{21} + x_{22} + y_2 = 16,$$

$$x_{12} + x_{22} + w_2 = 22,$$

$$24x_{11} + 20x_{12} + 22x_{21} + 28x_{22} + 2(e^{0.4y_1} - 1) + 3(e^{0.5y_2} - 1) + 4(e^{0.6w_1} - 1) + 5(e^{0.3w_2} - 1) \rightarrow \min.$$

5.1. П е р в ы й э т а п. 5. 1. 1. Первая одномерная задача:

$$x_{11} + x_{12} + y_1 = 24,$$

$$12x_{11} + 10x_{12} + 2(e^{0.4y_1} - 1) \rightarrow \min,$$

$$\left[ 2(e^{0.4y_1} - 1) + 10(24 - y_1) \right]' = 0.8e^{0.4y_1} - 10 = 0,$$

$$e^{0.4y_1} = 12.5,$$

$$0.4y_1 = \ln(12.5) = 2.5257,$$

$$y_1 = 6.314.$$

Целочисленный минимум достигается при  $y_1 = 6$ :

$$x_{12} = 18, x_{11} = 0.$$

5. 1. 2. Вторая одномерная задача:

$$x_{21} + x_{22} + y_2 = 16,$$

$$11x_{21} + 14x_{22} + 3(e^{0.5y_2} - 1) \rightarrow \min,$$

$$\left[ 3(e^{0.5y_2} - 1) + 11(16 - y_2) \right]' = 1.5e^{0.5y_2} - 11 = 0,$$

$$e^{0.5y_2} = 7.3333,$$

$$0.5y_2 = \ln(7.3333) = 1.9924,$$

$$y_2 = 3.9849.$$

Целочисленный минимум достигается при  $y_2 = 4$ :

$$x_{21} = 12, x_{22} = 0.$$

5. 1. 3. Третья одномерная задача:

$$x_{11} + x_{21} + w_1 = 18,$$

$$12x_{11} + 11x_{21} + 4(e^{0.6w_1} - 1) \rightarrow \min,$$

$$\left[ 4(e^{0.6w_1} - 1) + 11(18 - w_1) \right]' = 2.4e^{0.6w_1} - 11 = 0,$$

$$e^{0.6w_1} = 4.5833,$$

$$0.6w_1 = \ln(4.5833) = 1.5224,$$

$$w_1 = 2.5374.$$

Целочисленный минимум достигается при  $w_1 = 3$ :

$$x_{21} = 15, x_{11} = 0.$$

Четвертую одномерную задачу решать не имеет смысла, так как во второй задаче  $x_{21} = 12$ , а в третьей  $x_{21} = 15$ .

5.2. В т о р о й э т а п. 5.2.1. Первая двумерная задача:

$$x_{11} + x_{12} + y_1 = 24,$$

$$x_{11} + x_{21} + w_1 = 18,$$

$$24x_{11} + 10x_{12} + 11x_{21} + 2(e^{0.4y_1} - 1) + 4(e^{0.6w_1} - 1) \rightarrow \min.$$

Здесь  $24 = c_{11} > 2(e^{0.4} - 1) + 4(e^{0.6} - 1)$ , поэтому решаются две одномерные задачи.

5.2.1.1. Первая одномерная задача:

$$x_{12} + y_1 = 24,$$

$$10x_{12} + 2(e^{0.4y_1} - 1) \rightarrow \min,$$

$$\left[ 2(e^{0.4y_1} - 1) + 10(24 - y_1) \right]' = 0.8e^{0.4y_1} - 10 = 0,$$

$$e^{0.4y_1} = 12.5,$$

$$0.4y_1 = \ln(12.5) = 2.5257,$$

$$y_1 = 6.314.$$

Целочисленный минимум достигается при  $y_1 = 6$ :

$$x_{12} = 18.$$

5.2.1.2. Вторая одномерная задача:

$$x_{21} + w_1 = 18,$$

$$11x_{21} + 4(e^{0.6w_1} - 1) \rightarrow \min,$$

$$\left[ 4(e^{0.6w_1} - 1) + 11(18 - w_1) \right]' = 2.4e^{0.6w_1} - 11 = 0,$$

$$e^{0.6w_1} = 4.5833,$$

$$0.6w_1 = \ln(4.5833) = 1.5224,$$

$$w_1 = 2.537.$$

Целочисленный минимум достигается при  $w_1 = 3$ :

$$x_{21} = 15,$$

$$\Delta u_0 = 2(e^{0.4 \cdot 6} - e^{0.4 \cdot 5}) + 4(e^{0.6 \cdot 3} - e^{0.6 \cdot 2}) \approx 18.19,$$

$$\Delta u_1 = 2(e^{0.4 \cdot 6} - e^{0.4 \cdot 5}) + 11 \approx 18.27,$$

$$\Delta u_2 = 4(e^{0.6 \cdot 3} - e^{0.6 \cdot 2}) + 10 \approx 20.92,$$

$$\Delta u_3 = 10 + 11 = 21.$$

Здесь  $c_{11} > \Delta u_3$ , поэтому  $x_{11} = 0, x_{12} = 18, y_1 = 6, x_{21} = 15, w_1 = 3, c_{11}^1 = 12, c_{11}^2 = 12$ .

5. 2. 2. Вторая двумерная задача:

$$x_{11} + x_{12} + y_1 = 24,$$

$$x_{12} + x_{22} + w_2 = 22,$$

$$20x_{12} + 12x_{11} + 14x_{22} + 2(e^{0.4y_1} - 1) + 5(e^{0.3w_2} - 1) \rightarrow \min.$$

Здесь  $20 = c_{12} > 2(e^{0.4} - 1) + 5(e^{0.3} - 1)$ , поэтому решаются две одномерные задачи.

5. 2. 2. 1. Первая одномерная задача:

$$x_{11} + y_1 = 24,$$

$$12x_{11} + 2(e^{0.4y_1} - 1) \rightarrow \min,$$

$$\left[ 2(e^{0.4y_1} - 1) + 12(24 - y_1) \right]' = 0.8e^{0.4y_1} - 12 = 0,$$

$$e^{0.4y_1} = 15,$$

$$0.4y_1 = \ln(15) = 2.7081,$$

$$y_1 = 6.77.$$

Целочисленный минимум достигается при  $y_1 = 7$ :

$$x_{11} = 17.$$

5. 2. 2. 2. Вторая одномерная задача:

$$x_{22} + w_2 = 22,$$

$$14x_{22} + 5(e^{0.3w_2} - 1) \rightarrow \min,$$

$$\left[ 5(e^{0.3w_2} - 1) + 14(22 - w_2) \right]' = 1.5e^{0.3w_2} - 14 = 0,$$

$$e^{0.3w_2} = 9.333,$$

$$0.3w_2 = \ln(9.333) = 2.234,$$

$$w_2 = 7.445.$$

Целочисленный минимум достигается при  $w_2 = 7$ :

$$x_{22} = 15,$$

$$\Delta u_0 = 2(e^{0.4 \cdot 7} - e^{0.4 \cdot 6}) + 5(e^{0.3 \cdot 7} - e^{0.3 \cdot 6}) \approx 23.87,$$

$$\Delta u_1 = 2(e^{0.4 \cdot 7} - e^{0.4 \cdot 6}) + 14 \approx 25.12,$$

$$\Delta u_2 = 5(e^{0.3 \cdot 7} - e^{0.3 \cdot 6}) + 12 \approx 24.75,$$

$$\Delta u_3 = 12 + 14 = 26.$$

Здесь  $c_{12} < \Delta u_3$ , поэтому

$$x_{12} = 15, x_{22} = 0, x_{11} = 2, y_1 = 7, w_2 = 6,$$

$$\Delta u_0 \approx 23.87,$$

$$\Delta u_1 = 11.12 + 0 = 11.12,$$

$$\Delta u_2 = 12.75 + 12 = 24.75,$$

$$\Delta u_3 = 12 + 0 = 12.$$

Здесь  $c_{12} < \Delta u_2$ , отсюда

$$w_2 = 6, x_{12} = 16, x_{22} = 0, x_{11} = 1, y_1 = 7,$$

$$\Delta u_0 = 11.12 + 7.7765 = 18.8965,$$

$$\Delta u_1 = 11.12,$$

$$\Delta u_2 = 7.7765 + 12 = 19.7765,$$

$$\Delta u_3 = 12 + 0 = 12.$$

Решение второй двумерной задачи окончено. Здесь  $c_{12} > \Delta u_3$ , поэтому

$$w_2 = 6, x_{12} = 16, x_{22} = 0, x_{11} = 1, y_1 = 7, c_{12}^1 = 12, c_{12}^2 = 10.$$

5. 2. 3. Третья двумерная задача:

$$x_{21} + x_{22} + y_2 = 16,$$

$$x_{11} + x_{21} + w_1 = 18,$$

$$22x_{21} + 12x_{11} + 14x_{22} + 3(e^{0.5y_2} - 1) + 4(e^{0.6w_1} - 1) \rightarrow \min.$$

Здесь  $22 = c_{21} > 3(e^{0.5} - 1) + 4(e^{0.6} - 1)$ , поэтому решаются две одномерные задачи.

5. 2. 3. 1. Первая одномерная задача:

$$x_{22} + y_2 = 16,$$

$$14x_{22} + 3(e^{0.5y_2} - 1) \rightarrow \min,$$

$$\left[ 3(e^{0.5y_2} - 1) + 14(16 - y_2) \right]' = 1.5e^{0.5y_2} - 14 = 0,$$

$$e^{0.5y_2} = 9.3333,$$

$$0.5y_2 = \ln(9.3333) = 2.2336,$$

$$y_2 = 4.467.$$

Целочисленный минимум достигается при  $y_2 = 4$ :

$$x_{22} = 12.$$

5. 2. 3. 2. Вторая одномерная задача:

$$x_{11} + w_1 = 18,$$

$$12x_{11} + 4(e^{0.6w_1} - 1) \rightarrow \min,$$

$$\left[ 4(e^{0.6w_1} - 1) + 12(18 - w_1) \right]' = 2.4e^{0.6w_1} - 12 = 0,$$

$$e^{0.6w_1} = 5,$$

$$0.6w_1 = \ln 5 = 1.6094,$$

$$w_1 = 2.682.$$

Целочисленный минимум достигается при  $w_1 = 3$ :

$$x_{11} = 15,$$

$$\Delta u_0 = 3(e^{0.5 \cdot 4} - e^{0.5 \cdot 3}) + 4(e^{0.6 \cdot 3} - e^{0.6 \cdot 2}) = 19.48,$$

$$\Delta u_1 = 3(e^{0.5 \cdot 4} - e^{0.5 \cdot 3}) + 12 = 20.6487,$$

$$\Delta u_2 = 4(e^{0.6 \cdot 3} - e^{0.6 \cdot 2}) + 14 = 24.834,$$

$$\Delta u_3 = 14 + 12 = 26.$$

Здесь  $c_{21} < \Delta u_3$ , поэтому

$$x_{21} = 12, x_{22} = 0, x_{11} = 3, w_1 = 3, y_2 = 4,$$

$$\Delta u_0 = 19.48,$$

$$\Delta u_1 = 20.6487,$$

$$\Delta u_2 = 10.83 + 0 = 10.83,$$

$$\Delta u_3 = 0 + 12 = 12.$$

Здесь  $c_{21} > \Delta u_1$ , поэтому решение двумерной задачи окончено:

$$c_{21}^1 = 10, c_{21}^2 = 12.$$

5. 2. 4. Четвертая двумерная задача:

$$x_{21} + x_{22} + y_2 = 16,$$

$$x_{12} + x_{22} + w_2 = 22,$$

$$10x_{21} + 28x_{22} + 10x_{12} + 3(e^{0.5y_2} - 1) + 5(e^{0.3w_2} - 1) \rightarrow \min.$$

Здесь  $28 = c_{22} > 3(e^{0.5} - 1) + 5(e^{0.3} - 1)$ , поэтому решаются две одномерные задачи.

5. 2. 4. 1. Первая одномерная задача:

$$x_{21} + y_2 = 16,$$

$$10x_{21} + 3(e^{0.5y_2} - 1) \rightarrow \min,$$

$$\left[ 3(e^{0.5y_2} - 1) + 10(16 - y_2) \right]' = 1.5e^{0.5y_2} - 10 = 0,$$

$$1.5e^{0.5y_2} = 10,$$

$$e^{0.5y_2} = 6.6666,$$

$$0.5y_2 = \ln(6.6666) = 1.897,$$

$$y_2 = 3.79.$$

Целочисленный минимум достигается при  $y_2 = 4$ :

$$x_{21} = 12, x_{22} = 0.$$

5. 2. 4. 2. Вторая одномерная задача:

$$x_{12} + w_2 = 22,$$

$$10x_{12} + 5(e^{0.3w_2} - 1) \rightarrow \min,$$

$$\left[ 5(e^{0.3w_2} - 1) + 10(22 - w_2) \right]' = 15e^{0.3w_2} - 10 = 0,$$

$$e^{0.3w_2} = 6.6666,$$

$$0.3w_2 = \ln(6.6666) = 1.897,$$

$$w_2 = 6.3237.$$

Целочисленный минимум достигается при  $w_2 = 6$ :

$$x_{12} = 16,$$

$$\Delta u_0 = 3(e^{0.5 \cdot 4} - e^{0.5 \cdot 3}) + 5(e^{0.3 \cdot 6} - e^{0.3 \cdot 5}) = 16.4252,$$

$$\Delta u_1 = 8.6487 + 10 = 18.6487,$$

$$x_{12} + w_2 = 22,$$

$$\Delta u_3 = 10 + 10 = 20.$$

Здесь  $c_{22} > \Delta u_3$ , поэтому решение четвертой двумерной задачи окончено:

$$y_2 = 4, x_{21} = 12, x_{22} = 0, w_2 = 6, x_{12} = 16, c_{22}^1 = 14, c_{22}^2 = 14.$$

Легко видеть, что из полученных решений двумерных задач сформировать решение исходной задачи невозможно. Для достижения предельного состояния итерационного процесса потребовалось четыре цикла.

5. 2. 5. Итоговый набор одномерных задач имеет следующий вид:

$$x_{11} + x_{12} + y_1 = 24,$$

$$10x_{11} + 10x_{12} + 2(e^{0.4y_1} - 1) \rightarrow \min.$$

Решение:  $y_1 = 6, x_{11} + x_{12} = 18$ ;



$$x_{21} + x_{22} + y_2 = 16,$$

$$8x_{21} + 13x_{22} + 3(e^{0.5y_2} - 1) \rightarrow \min.$$

Решение:  $y_2 = 3, x_{21} = 13, x_{22} = 0$ ;

$$x_{11} + x_{21} + w_1 = 18,$$

$$14x_{11} + 14x_{21} + 4(e^{0.6w_1} - 1) \rightarrow \min.$$

Решение:  $w_1 = 3, x_{11} + x_{21} = 15$ ;

$$x_{12} + x_{22} + w_2 = 22,$$

$$10x_{12} + 15x_{22} + 5(e^{0.3w_2} - 1) \rightarrow \min.$$

Решение:  $w_2 = 6, x_{12} = 16$ .

Из этого набора решений легко формируется итоговый результат:

$$x_{11} = 2, x_{12} = 16, x_{21} = 13, x_{22} = 0, y_1 = 6, y_2 = 3, w_1 = 3, w_2 = 6.$$

**Заключение.** Декомпозиционный подход оказался применим для еще одного класса задач. Намечается путь к рассмотрению двух индексов в данной постановке.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. М.: Наука, 1969.
2. Триус Е.Б. Задачи математического программирования транспортного типа. М.: Сов. радио, 1967.
3. Тизик А.П., Цурков В.И. Метод последовательных изменений параметров функционала для решения транспортной задачи // *Аи Т.* 2012. № 1. Р. 148–158.
4. Тизик А.П., Цурков В.И. Декомпозиционная методика для одного класса задач блочного программирования // *ЖВМ и МФ.* 1989. Т. 29. № 10. Р. 1581–1586.
5. Тизик А.П., Цурков В.И. Оптимальное распределение каналов на сети связи // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.* 1989. № 4. Р. 153–159.
6. Думбадзе Л.Г. Разработка методов и алгоритмов в задачах оптимального использования и развития сетей: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ РАН, 2007.
7. Соколов А.А., Тизик А.П., Цурков В.И. Итеративный метод для транспортной задачи с дополнительными пунктами производства и потребления и квадратичным штрафом // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2013. № 4. С. 88–98.

## ИНТЕРВАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПАРИТЕТА ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ ДЕФЕКТОВ В ДИСКРЕТНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ<sup>1</sup>

© 2024 г. А. Н. Жирабок<sup>a, b, \*</sup>, В. В. Зуев<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Дальневосточный федеральный ун-т, Владивосток, Россия

<sup>b</sup>Институт проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток, Россия

\*e-mail: zhirabok@mail.ru

Поступила в редакцию: 24.08.2023 г.

После доработки 22.01.2024 г.

Принята к публикации 13.05.2024 г.

Рассматривается задача построения так называемых интервальных соотношений паритета для решения задачи обнаружения дефектов в стационарных дискретных системах, описываемых линейными и нелинейными динамическими моделями, при наличии внешних возмущений. Решение основывается на модели исходной системы, имеющей минимальную размерность, оценивающую некоторую линейную функцию вектора выхода системы и нечувствительную или минимально чувствительную к возмущениям. Полученные результаты позволяют строить соотношения паритета, на базе которых решается задача обнаружения дефектов. Теоретические результаты иллюстрируются примером.

**Ключевые слова:** динамические системы, возмущения, интервальные соотношения паритета, диагностирование

DOI: 10.31857/S0002338824050078, EDN: TDZHIL

## INTERVAL PARITY RELATIONS FOR FAULT DIAGNOSIS IN DISCRETE-TIME STATIONARY DYNAMIC SYSTEMS<sup>2</sup>

A. Zhirabok<sup>a, b, \*</sup>, A. Zuev<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia

<sup>b</sup>Institute of Marine Technology Problems, Vladivostok, Russia

\*e-mail: zhirabok@mail.ru

The problem of interval parity relations design to solve the problem of fault detection in stationary systems described by linear and nonlinear dynamic models under external disturbances is studied. It is assumed that a solution is based on the model of minimal dimension estimating some linear function of the system state vector and insensitive or having minimal sensitivity to the disturbances. The results obtained allow designing interval parity relations which are basis to solve the problem of fault diagnosis. Theoretical results are illustrated by example.

**Keywords:** dynamic systems, external disturbances, interval parity relations, fault detection, models

**Введение.** Задача интервального оценивания вектора состояния динамической системы имеет важное теоретическое и прикладное значение. Для ее решения активно используются интервальные наблюдатели, методы построения которых разрабатываются последние годы. обстоятельные обзоры полученных за это время результатов содержатся в [1, 2], решения для различных классов систем — непрерывных, дискретных, гибридных, с запаздыванием, а также практические приложения можно найти в [3–8]. В работах [9, 10] интервальные наблюдатели применяются для решения задачи обнаружения дефектов.

<sup>1</sup> Работа поддержана Российским научным фондом (проект 23-29-00191), <https://rscf.ru/project/23-29-00191/>.

<sup>2</sup> Работа поддержана Российским научным фондом (проект 23-29-00191), <https://rscf.ru/project/23-29-00191/>.

Во многих указанных работах такие наблюдатели строятся на основе исходной системы, с их помощью определяется оценка множества допустимых значений всего вектора состояния, в то время как теоретический и практический интерес может представлять соответствующая оценка только для заданной линейной функции этого вектора.

Известен ряд работ, в которых задача оценивания заданной линейной функции вектора состояния решается на базе так называемых функциональных наблюдателей [11–13], которые также используются при построении средств функционального диагностирования линейных и нелинейных динамических систем [14, 15]. Напомним, что под функциональным диагностированием понимается процесс проверки правильности функционирования системы на рабочих входных воздействиях, включающий в себя обнаружение дефекта, локализацию (указание места его появления) и оценивание его величины. Традиционный диагностический наблюдатель [16, 17] формирует так называемую невязку, представляющую собой определенным образом рассчитанное рассогласование между поведением исходной системы и наблюдателя; по характеру невязки принимается решение об отсутствии или наличии в системе дефекта и, если необходимо, месте его появления и величине.

В отличие от диагностического наблюдателя, его интервальный аналог формирует две невязки так, что при отсутствии дефектов одна из них является неположительной, вторая – неотрицательной, т.е. попадание числа нуль между этими невязками говорит о том, что дефекты в системе, на обнаружение которых рассчитан наблюдатель, отсутствуют. Случай, когда нуль находится за пределами этих невязок, квалифицируется как появление дефекта.

Кроме диагностических наблюдателей при синтезе средств функционального диагностирования стационарных дискретных систем, описываемых линейными и нелинейными динамическими моделями, применяются также так называемые соотношения паритета (*parity relations*) [16, 17]. Главное отличие соотношений паритета от диагностических наблюдателей состоит в том, что последние имеют обратную связь, обеспечивающую устойчивость наблюдателей. Известно, что в нелинейном случае обеспечение устойчивости может быть весьма сложной задачей. Напротив, соотношения паритета представляют собой конструкцию без обратных связей, в основе их построения лежит описание системы на языке вход-выход. При отсутствии дефектов соотношения паритета выступают равенством, в котором преобразованное значение вектора выхода системы в момент времени  $t$  определяется значениями компонент векторов выхода и входа (управления) системы в моменты  $t-1, t-2, \dots, t-t_0$  для некоторого конечного  $t_0$ ; при появлении дефектов это равенство нарушается. Как и диагностические наблюдатели, соотношения паритета формируют невязку для принятия решения об отсутствии или наличии в системе дефектов.

Когда исходная система линейна, задача обнаружения дефектов на основе интервальных наблюдателей решается достаточно просто, наличие нелинейностей усложняет решение, при этом на класс нелинейностей приходится накладывать определенные ограничения. Использование для этих целей соотношений паритета позволяет за счет введения некоторых ограничений на класс дефектов, рассматриваемых в разд. 4, решить задачу обнаружения дефектов для произвольных нелинейностей. Отметим, что в отличие от линейного случая нелинейные наблюдатели не эквивалентны соотношениям паритета.

В цитированных выше работах [14, 15] для целей обнаружения дефектов строятся интервальные диагностические наблюдатели. Поскольку соотношения паритета в нелинейном случае имеют перед ними определенные преимущества, в работе ставится и решается задача построения интервальных соотношений паритета для решения одной из задач функционального диагностирования – обнаружения дефектов – в стационарных дискретных системах, описываемых линейными и нелинейными динамическими моделями, при наличии внешних возмущений.

1. Основные модели и соотношения. Рассмотрим систему, представленную дискретной нелинейной моделью:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) + C\Psi(x(t), u(t)) + Lp(t) + Dd(t), \quad x(0) = x_0, \\ y(t) &= Hx(t), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $t=0, 1, 2, \dots$  – дискретное время,  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^m$  и  $y(t) \in R^l$  – векторы состояния, управления и выхода;  $F, G, H, L, C$  и  $D$  – матрицы размеров  $n \times n$ ,  $n \times m$  и  $l \times n$ ,  $n \times q$ ,  $n \times p$  и  $n \times s$

соответственно. Здесь  $s$  – размерность вектора  $d(t)$ ;  $\rho(t) \in R^q$  – неизвестная ограниченная функция времени, описывающая действующие на систему возмущения,  $\underline{\rho} \leq \rho(t) \leq \bar{\rho}$  при всех  $t \geq 0$ . Нелинейный член  $\Psi(x(t), u(t))$  имеет вид:

$$\Psi(x(t), u(t)) = \begin{pmatrix} \phi_1(A_1 x(t), u(t)) \\ \dots \\ \phi_p(A_p x(t), u(t)) \end{pmatrix},$$

где  $A_1, \dots, A_p$  – матрицы-строки;  $\phi_1, \dots, \phi_p$  – нелинейные (возможно, недифференцируемые) функции.

Слагаемое  $Dd(t)$  отражает дефекты, возможные в системе. Они могут быть вызваны как внешними причинами, не связанными с возмущением  $\rho(t)$ , например повышением температуры окружающей среды, так и изменением значений элементов матриц  $F$ ,  $G$ ,  $H$  и  $C$  в некоторый неизвестный момент времени  $t_d$ , например вследствие поломки механических элементов из-за скрытого производственного брака в них. Поскольку появление дефектов выступает следствием недопустимых изменений значений этих факторов, будем полагать, что вариации функции  $d(t) \in R^s$  в пределах  $\underline{d} \leq d(t) \leq \bar{d}$  при всех  $t \geq 0$  для известных  $\underline{d}$  и  $\bar{d}$  являются допустимыми и не рассматриваются как дефект. Выход за пределы интервала  $[\underline{d}, \bar{d}]$  квалифицируется как появление дефекта, который должен быть обнаружен. Как и в работе [1], для векторов  $x^{(1)}, x^{(2)}$  отношение  $x^{(1)} \leq x^{(2)}$  понимается поэлементно. Так как конкретная причина, вызывающая дефект, остается неизвестной, будем полагать  $d(t)$  неизвестной функцией времени.

Как следует из системы (1.1) и ее описания, неопределенность в задаче представлена в виде возмущающего входного сигнала  $\rho(t)$  с известными границами  $\underline{\rho}$  и  $\bar{\rho}$  и вариации функции  $d(t)$  с границами  $\underline{d}$  и  $\bar{d}$ .

Рассматриваемая задача вначале решается в линейном случае, когда  $C = 0$ . Для этого коротко напомним результаты работы [8], где строится редуцированная (имеющая меньшую размерность) линейная модель системы (1.1), оценивающая переменную  $y_*$ , задаваемую равенством  $y_*(t) = R_* y(t)$  для матрицы  $R_*$ , подлежащей определению в ходе решения задачи. Такая модель в общем случае описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} x_*(t+1) &= F_* x_*(t) + J_* y(t) + G_* u(t) + L_* \rho(t) + D_* d(t), \quad x_*(0) = x_{*0}, \\ y_*(t) &= H_* x_*(t), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $x_* \in R^k$  – вектор состояния модели,  $k$  – размерность модели,  $F_*$ ,  $J_*$ ,  $G_*$ ,  $L_*$ ,  $D_*$  и  $H_*$  – матрицы, подлежащие определению.

**З а м е ч а н и е 1.** В отличие от строящихся соотношений паритета, модель (1.2) – это виртуальный объект, фактически она представляет собой некоторую часть системы (1.1), описываемую отдельными уравнениями; сама по себе эта часть может быть неустойчивой. В работе [1] модель является основой для построения интервального наблюдателя, в настоящей работе – для построения соотношений паритета.

Для решения задачи предполагается, что существует матрица  $\Phi$ , такая, что

$$x_*(t) = \Phi x(t)$$

для всех  $t \geq 0$ . Известно [8], что матрицы, описывающие модель, удовлетворяет уравнениям

$$R_* H = H_* \Phi, \quad \Phi F = F_* \Phi + J_* H, \quad G_* = \Phi G, \quad L_* = \Phi L, \quad D_* = \Phi D. \quad (1.3)$$

Для обоснования соотношений (1.3) запишем равенство  $x_*(t) = \Phi x(t)$  для момента времени  $t+1$ :  $x_*(t+1) = \Phi x(t+1)$  и заменим  $x(t+1)$  и  $x_*(t+1)$  правыми частями уравнений (1.1) и (1.2) соответственно:

$$\Phi F x(t) + \Phi G u(t) + \Phi D d(t) + \Phi L \rho(t) = F_* x_*(t) + J_* H x(t) + G_* u(t) + D_* d(t) + L_* \rho(t).$$

Произведем преобразования, принимая во внимание равенство  $x_*(t) = \Phi x(t)$ :

$$(\Phi F - F_*\Phi - J_*H)x(t) + (\Phi G - G_*)u(t) + (\Phi L - L_*)\rho(t) + (\Phi D - D_*)d(t) = 0.$$

Нетрудно видеть, что из соотношений (1.3) следует последнее равенство. Для обоснования первого равенства в (1.3) заменим в выражении  $y_*(t) = R_*y(t)$  переменную  $y_*(t)$  на  $H_*x_*(t) = H_*\Phi x(t)$  и  $y(t)$  на  $y(t) = Hx(t)$ :  $H_*\Phi x(t) = R_*Hx(t)$ , что справедливо, если  $R_*H = H_*\Phi$ .

Модель (1.2) является основой, на которой далее строятся интервальные соотношения паритета. Как будет ясно из вида этих соотношений, чем уже получаемый интервал, тем меньше число ошибочных решений при диагностировании. Из общих соображений понятно, что неопределенность, вызванная возмущением, будет влиять на ширину интервала, увеличивая его. Поэтому наилучшей с точки зрения диагностирования является модель (1.2), не чувствительная к возмущению  $\rho(t)$ . Из вида слагаемого  $L_*\rho(t)$  в (1.2) следует, что нечувствительность обеспечивается условием  $\Phi L = 0$ .

**2. Построение модели, не чувствительной к возмущению.** Система матричных уравнений (1.3) имеет множество решений, для упрощения процедуры поиска зададим матрицы  $F_*$  и  $H_*$  в идентификационной канонической форме:

$$F_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad H_* = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0). \quad (2.1)$$

Если система (1.2) наблюдаема, то она всегда может быть приведена к виду с такими матрицами [18]. Если она не наблюдаема, то ее можно привести к виду с наблюдаемой подсистемой и матрицы этой подсистемы искать в виде (2.1) [18]. Отметим, что для обеспечения устойчивости модели собственные числа матрицы  $F_*$  по модулю не должны превосходить единицу; для матрицы  $F_*$  в (2.1) они равны нулю.

Два первых соотношения в (1.3) с учетом (2.1) можно записать как

$$\Phi_1 = R_*H, \quad \Phi_i F = \Phi_{i+1} + J_{*i}H, \quad i = \overline{1, k-1}, \quad \Phi_k F = J_{*k}H, \quad (2.2)$$

где  $\Phi_i$  и  $J_{*i}$  —  $i$ -я строка матриц  $\Phi$  и  $J_*$ . Умножением справа на матрицу  $F$  и подстановками одно в другое соотношения (2.2) можно свести в одно уравнение:

$$R_*HF^k + J_{*1}HF^{k-1} + \dots + J_{*k}H = 0,$$

которое представим в виде:

$$(R_* - J_{*1} \dots - J_{*k})V^{(k)} = 0, \quad (2.3)$$

где

$$V^{(k)} = \begin{pmatrix} HF^k \\ HF^{k-1} \\ \vdots \\ H \end{pmatrix}.$$

Условие нечувствительности к возмущениям  $L_* = \Phi L = 0$  запишем покомпонентно:

$$\Phi_1 L = R_*HL = 0, \quad \Phi_2 L = (R_*HF - J_{*1}H)L = 0, \quad \Phi_k L = (R_*HF^{k-1} - J_{*1}HF^{k-2} - \dots - J_{*k-1}H)L = 0.$$

Нетрудно видеть, что эти уравнения также можно свернуть в одно:

$$(R_* - J_{*1} \dots - J_{*k})L^{(k)} = 0,$$

где

$$L^{(k)} = \begin{pmatrix} HL & HFL & \dots & HF^{k-1}L \\ 0 & HL & \dots & HF^{k-2}L \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Объединяя последнее уравнение с (2.3), получаем в итоге

$$(R_* \quad -J_{*1} \quad \dots \quad -J_{*k})(V^{(k)} \quad L^{(k)}) = 0. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) имеет нетривиальное решение, если

$$\text{rank}(V^{(k)} \quad L^{(k)}) < l(k+1). \quad (2.5)$$

Для построения модели из (2.5), начиная с  $k=1$ , определяется минимальное  $k$  и из (2.4) — строка  $(R_* \quad -J_{*1} \quad \dots \quad -J_{*k})$ , затем на основе соотношений (2.2) строится матрица  $\Phi$ ;  $G_*$  определяется из (1.3). Таким образом, линейная модель (1.2) с  $L_*=0$  построена; предполагается, что  $D_* \neq 0$ .

**3. Построение линейных соотношений паритета.** С учетом вида (2.1) матрицы  $F_*$  представим модель (1.2) покомпонентно:

$$\begin{aligned} x_{*1}(t+1) &= x_{*2}(t) + J_{*1}y(t) + G_{*1}u(t) + D_{*1}d(t), \\ x_{*2}(t+1) &= x_{*3}(t) + J_{*2}y(t) + G_{*2}u(t) + D_{*2}d(t), \\ &\dots \\ x_{*k}(t+1) &= J_{*k}y(t) + G_{*k}u(t) + D_{*k}d(t), \\ y_*(t) &= x_{*1}(t) = R_*y(t), \end{aligned}$$

$$x_*(0) = x_{*0}.$$

Произведем  $k$  временных сдвигов выходного сигнала модели, выполняя соответствующие подстановки одних уравнений в другие:

$$\begin{aligned} y_*(t+1) &= x_{*1}(t+1) = x_{*2}(t) + J_{*1}y(t) + G_{*1}u(t) + D_{*1}d(t), \\ y_*(t+2) &= x_{*2}(t+1) + J_{*1}y(t+1) + G_{*1}u(t+1) + D_{*1}d(t+1) = \\ &= x_{*3}(t) + J_{*2}y(t) + G_{*2}u(t) + J_{*1}y(t+1) + G_{*1}u(t+1) + D_{*1}d(t+1), \\ &\dots \\ y_*(t+k) &= J_{*1}y(t+k-1) + G_{*1}u(t+k-1) + D_{*1}d(t+k-1) + \\ &+ J_{*2}y(t+k-2) + G_{*2}u(t+k-2) + D_{*2}d(t+k-2) + \dots + \\ &+ J_{*k}y(t) + G_{*k}u(t) + D_{*k}d(t). \end{aligned}$$

Выполняя временной сдвиг на  $-k$ , приведем последнее выражение к виду

$$y_*(t) = R_*y(t) = \sum_{i=1}^k (J_{*i}y(t-i) + G_{*i}u(t-i) + D_{*i}d(t-i)), \quad (3.1)$$

представляющему собой вход-выходное описание модели.

Искомые интервальные соотношения паритета строятся на основе этого выражения и описываются уравнениями:

$$\begin{aligned}
\underline{y}_*(t) &= \sum_{i=1}^k (J_{*i}y(t-i) + G_{*i}u(t-i) + D_{*i}^+ \underline{d} - D_{*i}^- \bar{d}), \\
\bar{y}_*(t) &= \sum_{i=1}^k (J_{*i}y(t-i) + G_{*i}u(t-i) + D_{*i}^+ \bar{d} - D_{*i}^- \underline{d}), \\
\underline{r}(t) &= y_*(t) - \bar{y}_*(t) = R_* y(t) - \bar{y}_*(t), \\
\bar{r}(t) &= y_*(t) - \underline{y}_*(t) = R_* y(t) - \underline{y}_*(t),
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где  $A^+ = \max(0, A)$ ,  $A^- = A^+ - A$  для произвольной матрицы  $A$ ; нетрудно видеть, что  $A^+ \geq 0$ ,  $A^- \geq 0$ .

По сравнению с (3.1), соотношения паритета (3.2) содержат дополнительные члены  $D_{*i}^+ \underline{d} - D_{*i}^- \bar{d}$  и  $D_{*i}^+ \bar{d} - D_{*i}^- \underline{d}$ , формирующие искомый интервал по аналогии с интервальным наблюдателем [14, 15]. Переменные  $\underline{r}(t) = R_* y(t) - \bar{y}_*(t)$  и  $\bar{r}(t) = R_* y(t) - \underline{y}_*(t)$  называются невязками, поскольку они описывают рассогласование между поведением системы (1.1) (представленным переменной  $y_*(t) = R_* y(t)$ ) и поведением соотношений паритета (представленными переменными  $\underline{y}_*(t)$  и  $\bar{y}_*(t)$ , согласно (3.2)).

**Т е о р е м а.** В случае отсутствия дефектов при всех  $t \geq k$  выполняется включение  $0 \in [\underline{r}(t), \bar{r}(t)]$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим невязку  $\underline{r}(t) = R_* y(t) - \bar{y}_*(t)$ :

$$\begin{aligned}
\underline{r}(t) &= \sum_{i=1}^k (J_{*i}y(t-i) + G_{*i}u(t-i) + D_{*i}d(t-i)) - \\
&\quad - \left( \sum_{i=1}^k (J_{*i}y(t-i) + G_{*i}u(t-i) + D_{*i}^+ \bar{d} - D_{*i}^- \underline{d}) \right) = \\
&\quad = \sum_{i=1}^k (D_{*i}d(t-i) - D_{*i}^+ \bar{d} + D_{*i}^- \underline{d}).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Поскольку  $D_{*i} = D_{*i}^+ - D_{*i}^-$ , то

$$\begin{aligned}
&D_{*i}d(t-i) - D_{*i}^+ \bar{d} + D_{*i}^- \underline{d} = \\
&= D_{*i}^+ d(t-i) - D_{*i}^- d(t-i) - D_{*i}^+ \bar{d} + D_{*i}^- \underline{d} = \\
&= D_{*i}^+ (d(t-i) - \bar{d}) + D_{*i}^- (\underline{d} - d(t-i)).
\end{aligned}$$

Так как при отсутствии дефектов  $\underline{d} \leq d(t) \leq \bar{d}$  при всех  $t \geq 0$  и  $D_{*i}^+ \geq 0$ ,  $D_{*i}^- \geq 0$ , то

$$D_{*i}d(t-i) - D_{*i}^+ \bar{d} + D_{*i}^- \underline{d} \leq 0 \tag{3.4}$$

при всех  $i = \overline{1, k}$  и  $t \geq k$ . Тогда из (3.3) следует  $\underline{r}(t) \leq 0$  при  $t \geq k$ . Аналогично показывается, что  $D_{*i}d(t-i) + D_{*i}^+ \bar{d} - D_{*i}^- \underline{d} \geq 0$  и  $\bar{r}(t) \geq 0$  при  $t \geq k$ . Неравенства  $\underline{r}(t) \leq 0$  и  $\bar{r}(t) \geq 0$  эквивалентны доказываемому утверждению. Теорема доказана.

**4. Учет нелинейностей.** Метод синтеза модели в нелинейном случае опирается на ранее построенную линейную модель и состоит в том, что для найденной при построении линейной модели матрицы  $\Phi$  выясняется возможность преобразования аргумента нелинейной составляющей  $\Psi(x, u)$ , делается это следующим образом [19].

Вычисляется матрица  $C_* = \Phi C$  и определяются номера  $j_1, j_2, \dots, j_d$  ее ненулевых столбцов. Далее проверяется условие

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \\ A' \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$



где матрица  $A'$  строится из строк матрицы  $A$  с номерами  $j_1, j_2, \dots, j_d$ . Если это условие выполняется, преобразование аргумента возможно. После этого строится нелинейная составляющая в виде:

$$\Psi_*(x_*, y, u) = \begin{pmatrix} \Phi_{j_1}(A_{*j_1}z, u) \\ \dots \\ \Phi_{j_d}(A_{*j_d}z, u) \end{pmatrix},$$

где  $z = \begin{pmatrix} x_* \\ y \end{pmatrix}$ , матрицы-строки  $A_{*j_1}, A_{*j_2}, \dots, A_{*j_d}$  определяются из линейных уравнений:

$$A_j = A_{*j} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}, \quad j = \overline{j_1, j_d},$$

и добавляется к линейной модели (1.2). Если условие (4.1) не выполняется, необходимо найти другое решение уравнения (2.2) при прежней или увеличенной размерности  $k$  и повторить описанную процедуру с новой матрицей  $\Phi$ . В общем случае нелинейная модель описывается уравнением:

$$\begin{aligned} x_*(t+1) &= F_*x_*(t) + J_*y(t) + G_*u(t) + C_*\Psi_*(x_*(t), y(t), u(t)) + L_*p(t) + D_*d(t), \\ y_*(t) &= H_*x_*(t). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Известно, что в линейном случае диагностические наблюдатели и соотношения паритета эквивалентны — имея одно, можно получить другое; наличие нелинейностей существенно усложняет задачу. Общих правил перехода от нелинейной модели к соотношениям паритета не существует, ряд частных случаев, в том числе эвристические подходы, рассмотрены в работах [20, 21]. Изложим один из них при  $k=3$ , когда модель (4.2) описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} x_{*1}^+ &= x_{*2} + \alpha_1(x_{*1}, u), \\ x_{*2}^+ &= x_{*3} + \alpha_2(x_{*1}, x_{*2}, u), \\ x_{*3}^+ &= \alpha_3(x_{*1}, x_{*2}, x_{*3}, u), \\ y_* &= x_{*1}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — произвольные нелинейные функции, для простоты слагаемые  $L_*p(t) + D_*d(t)$  и символ времени  $t$  опущены, через  $x_{*i}^+$  обозначено значение переменной  $x_{*i}$  в момент  $t+1$ . Особенность модели (4.3) состоит в том, что правая часть для каждой переменной содержит нелинейную функцию от этой и предыдущих переменных. Она также может содержать переменную  $y(t)$ , которая для простоты опущена, поскольку не влияет на результат.

Заменим в первом уравнении из (4.3)  $x_{*1}$  на  $y_*$  и выразим из него переменную  $x_{*2}$ :

$$x_{*2} = y_*^+ - \alpha_1(y_*, u), \quad (4.4)$$

выполним в этом же уравнении временной сдвиг, заменим в полученном соотношении переменную  $x_{*2}^+$  правой частью ее уравнения в (4.3) и аргумент нелинейной функции  $\alpha_2$  заменим, согласно (4.4):

$$y_*^{++} = x_{*2}^+ + \alpha_1(y_*^+, u^+) = \alpha_1(y_*^+, u^+) + x_{*3} + \alpha_2(y_*, y_*^+ - \alpha_1(y_*, u), u).$$

Выразим из последнего соотношения переменную  $x_{*3}$ :

$$x_{*3} = y_*^{++} - \alpha_1(y_*^+, u^+) - \alpha_2(y_*, y_*^+ - \alpha_1(y_*, u), u), \quad (4.5)$$

выполним в нем временной сдвиг, заменим в полученном соотношении переменную  $x_{*3}^+$  правой частью ее уравнения в (4.3) и аргумент нелинейной функции  $\alpha_3$  заменим, согласно (4.5):

$$\begin{aligned}
y_*^{+++} &= \alpha_1(y_*^{++}, u^{++}) + x_{*3}^+ + \alpha_2(y_*^+, y_*^{++} - \alpha_1(y_*^+, u^+), u^+) = \\
&= \alpha_1(y_*^{++}, u^{++}) + \alpha_2(y_*^+, y_*^{++} - \alpha_1(y_*^+, u^+), u^+) + \\
&\quad + \alpha_3(y_*, y_*^+ - \alpha_1(y_*, u), y_*^{++} - \alpha_1(y_*^+, u^+) - \alpha_2(y_*, y_*^+ - \alpha_1(y_*, u), u), u).
\end{aligned} \quad (4.6)$$

Как следует из полученного выражения, оно содержит временные сдвиги переменных  $y_*$  и  $u$  и не содержит компоненты вектора  $x_*$ . Таким образом, оно может быть использовано для построения интервальных соотношений паритета, поскольку  $y_* = R_* u$  — известная переменная. В силу громоздкости получаемых выражений они опущены, главное состоит в том, что, как и в линейном случае, эти соотношения отличаются от (4.6) только наличием слагаемых, включающих в себя описание дефектов и возмущений, поэтому финальная часть выражения (3.3) для  $r(t)$  не содержит нелинейных членов. Доказанная в разд. 3 теорема справедлива и в этом случае.

Из модели (4.3) и последующих преобразований нетрудно заключить, что если слагаемое вида  $D_* d(t)$  входит в первое или второе уравнение, то оно войдет в выражения (4.4) или (4.5) и, как результат, в качестве аргумента — в функцию  $\alpha_2$  или  $\alpha_3$ . Последнее означает, что соотношения паритета построить можно, но для доказательства справедливости теоремы эти функции должны удовлетворять определенным ограничениям, в частности они должны быть монотонными по все аргументам [22] или удовлетворять специальным покомпонентным неравенствам [1].

В общем случае, если модель (4.2) с произвольными нелинейностями теми или иными способами удастся привести к вход-выходному виду, описанный подход можно применить тогда, когда дефекты и возмущения входят в правую часть только последнего уравнения, содержащего нелинейность. Это гарантирует, что во вход-выходном описании модели дефекты и возмущения не будут входить в аргументы нелинейных функций, что дает возможность работать с нелинейностями произвольного вида.

**З а м е ч а н и е 2.** Все сказанное выше относится к случаю отсутствия шумов измерений или наличия шумов невысокой интенсивности. Для линейных интервальных соотношений паритета точный их учет не представляет трудностей и может быть реализован по аналогии с [8]. При наличии шумов высокой интенсивности возможно только приближенное решение, точный результат требует наложения на нелинейности ограничений, оговоренных выше.

**5. Робастное решение.** Если условие (2.3) не выполняется при всех  $k < n$ , необходимо искать робастное решение, минимизирующее вклад возмущения в модель. Этот вклад определяется слагаемым  $L_* p(t)$  в (1.2) и оценивается нормой Фробениуса матрицы  $(R_* - J_{*1} \dots - J_{*k})L^{(k)}$  [21]. Поскольку условием построения модели является равенство

$$(R_* - J_{*1} \dots - J_{*k})V^{(k)} = 0, \quad (5.1)$$

то норма  $\|(R_* - J_{*1} \dots - J_{*k})L^{(k)}\|_F$  минимизируется при условии выполнения этого равенства. Так как требование нечувствительности — равенство  $(R_* - J_{*1} \dots - J_{*k})L^{(k)} = 0$  — можно трактовать как условие ортогональности строки  $(R_* - J_{*1} \dots - J_{*k})$  столбцам матрицы  $L^{(k)}$ , то можно сказать, что задача состоит в определении такого решения  $(R_* - J_{*1} \dots - J_{*k})$ , которое «максимально ортогонально» столбцам матрицы  $L^{(k)}$  [23].

Как и в работе [22], из всех линейно независимых решений уравнения (5.1) для некоторой фиксированной размерности  $k$  строится матрица:

$$W = \begin{pmatrix} R_*^{(1)} & -J_{*1}^{(1)} & -J_{*2}^{(1)} & \dots & -J_{*k}^{(1)} \\ & & \dots & & \\ R_*^{(N)} & -J_{*1}^{(N)} & -J_{*2}^{(N)} & \dots & -J_{*k}^{(N)} \end{pmatrix},$$

находится сингулярное разложение  $WL^{(k)} = U_L S_L V_L$ , первый транспонированный столбец матрицы  $U_L$  выбирается в качестве вектора весовых коэффициентов  $w = (w_1, \dots, w_N)$  и принимает-

ся  $(R_* \ -J_{*1} \ \dots \ -J_{*k}) = wW$ . Величина нормы  $\|(R_* \ -J_{*1} \ \dots \ -J_{*k})L^{(k)}\|_F$  равна минимальному сингулярному числу матрицы  $WL^{(k)}$  [23]. Определением матриц  $G_* = \Phi G$  и  $L_* = \Phi L$  завершается синтез модели (1.2), минимально чувствительной к возмущениям.

Из-за появления слагаемого  $L_*\rho(t)$  в модели интервальные соотношения паритета (3.2) принимают вид:

$$\begin{aligned} \underline{y}_*(t) &= \sum_{i=1}^k (J_{*i}y(t-i) + G_{*i}u(t-i) + D_{*i}^+\underline{d} - D_{*i}^-\bar{d} + L_{*i}^+\underline{\rho} - L_{*i}^-\bar{\rho}), \\ \bar{y}_*(t) &= \sum_{i=1}^k (J_{*i}y(t-i) + G_{*i}u(t-i) + D_{*i}^+\bar{d} - D_{*i}^-\underline{d} + L_{*i}^+\bar{\rho} - L_{*i}^-\underline{\rho}), \\ \underline{r}(t) &= y_*(t) - \bar{y}_*(t), \\ \bar{r}(t) &= y_*(t) - \underline{y}_*(t). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что искомым результат следует из доказательства теоремы и дополнительных неравенств  $L_{*i}\rho(t-i) + L_{*i}^+\underline{\rho} - L_{*i}^-\bar{\rho} \leq 0$  и  $L_{*i}\rho(t-i) + L_{*i}^+\bar{\rho} - L_{*i}^-\underline{\rho} \geq 0$ , первое из которых подобно (3.4).

**6. Пример.** Рассмотрим дискретизированную модель электропривода:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= k_1x_2(t) + x_1(t), \\ x_2(t+1) &= k_2x_2(t) + k_3x_3(t) + k_7\text{sign}(x_2(t)) + d(t) + \rho(t), \\ x_3(t+1) &= k_4x_2(t) + k_5x_3(t) + k_6u(t), \\ y(t) &= x_3(t), \end{aligned} \tag{6.1}$$

$x(0) = x_0$ . Здесь  $x_1(t)$  — угол поворота выходного вала редуктора;  $x_2(t)$  — скорость вращения выходного вала двигателя;  $x_3(t)$  — ток цепи якоря; коэффициенты  $k_1 - k_7$  зависят от параметров электропривода и интервала дискретизации; возмущение  $\rho(t)$  обусловлено наличием внешнего нагрузочного момента, приведенного к валу двигателя; дефект, представленный функцией  $d(t)$ , вызван изменением коэффициентов сухого и вязкого трения в двигателе, что выражается в изменении значений коэффициентов  $k_2$ ,  $k_3$  и  $k_7$ ; если значения этих коэффициентов изменились на  $\Delta k_2$ ,  $\Delta k_3$  и  $\Delta k_7$  соответственно, то  $\underline{d} \leq d(t) \leq \bar{d}$ ,  $t < t_d$ , для известных  $\underline{d}$  и  $\bar{d}$  и

$$d(t) = \Delta k_2x_2(t) + \Delta k_3x_3(t) + \Delta k_7\text{sign}(x_2(t)), \quad t \geq t_d, \tag{6.2}$$

где  $t_d$  — момент времени появления дефекта.

Рассматриваемая модель описывается следующим образом:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & k_3 \\ 0 & k_4 & k_5 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_6 \end{pmatrix}, \quad H = (0 \ 0 \ 1), \quad L = D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ k_7 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi(x, u) = \text{sign}(Ax), \quad A = (0 \ 1 \ 0).$$

Поскольку дефект и возмущение входят в уравнения одинаковым образом, модель будет чувствительна к возмущению и в (2.2) следует принять  $L^{(k)} = 0$ ; при  $k = 1$  уравнение решения не имеет, при  $k = 2$  оно принимает вид:

$$(R_* \ -J_{*1} \ \dots \ -J_{*2}) \begin{pmatrix} 0 & k_4(k_2 + k_5) & k_3k_4 + k_5^2 \\ 0 & k_4 & k_5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Его решение дает  $R_* = 1$ ,

$$J_* = \begin{pmatrix} k_2 + k_5 \\ k_3 k_4 - k_2 k_5 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & k_4 & -k_2 \end{pmatrix}, \quad G_* = \begin{pmatrix} k_6 \\ -k_2 k_6 \end{pmatrix},$$

$L_* = D_* = k_4$ ,  $C_* = k_4 k_7$ ,  $A' = A$ . Так как  $k_4 < 0$ ,  $L_*^+ = D_*^+ = 0$ ,  $L_*^- = D_*^- = -k_4$ . Нетрудно проверить, что условие (1.4) выполняется и  $A_* = (0 \ 1 / k_4 \ k_2 / k_4)$ . Искомая модель имеет вид:

$$\begin{aligned} x_{*1}(t+1) &= x_{*2}(t) + (k_2 + k_5)y(t) + k_6 u(t), \\ x_{*2}(t+1) &= (k_3 k_4 - k_2 k_5)y(t) + k_4 k_7 \text{sign}((1/k_4)(x_{*2}(t) + k_2 y(t))) - k_2 k_6 u(t) + k_4 d(t) + k_4 \rho(t), \\ y_*(t) &= x_{*1}(t) = y(t). \end{aligned}$$

На основе этой модели по методу, изложенному в разд. 4, построим соотношения паритета: выразим из первого уравнения переменную  $x_{*2}$ :

$$x_{*2}(t) = x_{*1}(t+1) - (k_2 + k_5)y(t) - k_6 u(t). \quad (6.3)$$

Выполним в этом уравнении временной сдвиг, заменим в полученном соотношении переменную  $x_{*2}(t+1)$  правой частью ее уравнения и заменим аргумент нелинейной функции  $\text{sign}$ , согласно (6.3):

$$\begin{aligned} y(t+2) &= x_{*1}(t+2) = x_{*2}(t+1) + (k_2 + k_5)y(t+1) + k_6 u(t+1) = \\ &= (k_2 + k_5)y(t+1) + (k_3 k_4 - k_2 k_5)y(t) + k_6 u(t+1) + k_4 k_7 \text{sign}((1/k_4)(y(t+1) - \\ &\quad - (k_2 + k_5)y(t) - k_6 u(t) + k_2 y(t))) - k_2 k_6 u(t) + k_4 d(t) + k_4 \rho(t). \end{aligned}$$

Выполним временной сдвиг на  $-2$  и произведем преобразования:

$$\begin{aligned} y(t) &= (k_2 + k_5)y(t-1) + (k_3 k_4 - k_2 k_5)y(t-2) + k_6 u(t-1) + \\ &+ k_4 k_7 \text{sign}((1/k_4)(y(t-1) - k_5 y(t-2) - k_6 u(t-2))) - k_2 k_6 u(t-2) + k_4 d(t-2) + k_4 \rho(t-2). \end{aligned}$$

Интервальные соотношения паритета строятся на основе последнего выражения и имеют вид:

$$\begin{aligned} \underline{y}(t) &= (k_2 + k_5)y(t-1) + (k_3 k_4 - k_2 k_5)y(t-2) + k_6 u(t-1) + \\ &+ k_4 k_7 \text{sign}((1/k_4)(y(t-1) - k_5 y(t-2) - k_6 u(t-2))) - k_2 k_6 u(t-2) + k_4 \underline{d} + k_4 \underline{\rho}, \\ \bar{y}(t) &= (k_2 + k_5)y(t-1) + (k_3 k_4 - k_2 k_5)y(t-2) + k_6 u(t-1) + \\ &+ k_4 k_7 \text{sign}((1/k_4)(y(t-1) - k_5 y(t-2) - k_6 u(t-2))) - k_2 k_6 u(t-2) + k_4 \bar{d} + k_4 \bar{\rho}, \\ \underline{r}(t) &= y(t) - \bar{y}(t), \quad \bar{r}(t) = y(t) - \underline{y}(t). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Для моделирования рассмотрим систему (6.1) и соотношения паритета (6.4) при  $u(t) = 2 + \sin(t)$ . Возмущение  $\rho(t)$  представлено случайной величиной, равномерно распределенной на интервале  $[-0.05; 0.05]$ , принято  $\rho = -0.05$ ,  $\bar{\rho} = 0.05$ . Интервал  $[\underline{d}, \bar{d}]$  допустимых вариаций функции  $d(t)$  задан в виде  $[-0.1; 0.1]$ ; коэффициенты  $k_1 + k_7$  приняты следующими:  $k_1 = k_3 = k_6 = k_7 = 1$ ,  $k_2 = k_4 = k_5 = -1$ . На рис. 1 и 2 представлены результаты моделирования наблюдателя с начальным состоянием  $x(0) = x_0 = (0 \ 0 \ 5)^T$ , где показано поведение невязок  $\underline{r}(t)$  и  $\bar{r}(t)$ .

Согласно (6.2),  $d(t)$  при  $t \geq t_d$  зависит от переменных  $x_2(t)$  и  $x_3(t)$  и  $\Delta k_2, \Delta k_3, \Delta k_7$ , но значения  $x_2(t)$  не измеряются и на практике величины  $\Delta k_2, \Delta k_3, \Delta k_7$  также неизвестны, поэтому при моделировании  $d(t)$  может быть выбрано произвольным. Для простоты значение  $d(t)$  при  $t \geq 40$  с принято постоянным.

На рис. 1  $d(t) = 0$ ,  $t < 40$  с,  $d(t) = 0.07$ ,  $t \geq 40$  с; поскольку значение  $d(t) = 0.07$  остается в пределах допустимого интервала, то  $0 \in [\underline{r}(t), \bar{r}(t)]$ , что квалифицируется как отсутствие дефектов. На рис. 2  $d(t) = 0$ ,  $t < 40$  с,  $d(t) = 0.3$ ,  $t \geq 40$  с. Поскольку теперь  $0 \notin [\underline{r}(t), \bar{r}(t)]$ , делается заключение о появлении дефекта. Произвольное поведение невязок в первые несколько тактов является характерным для соотношений паритета.

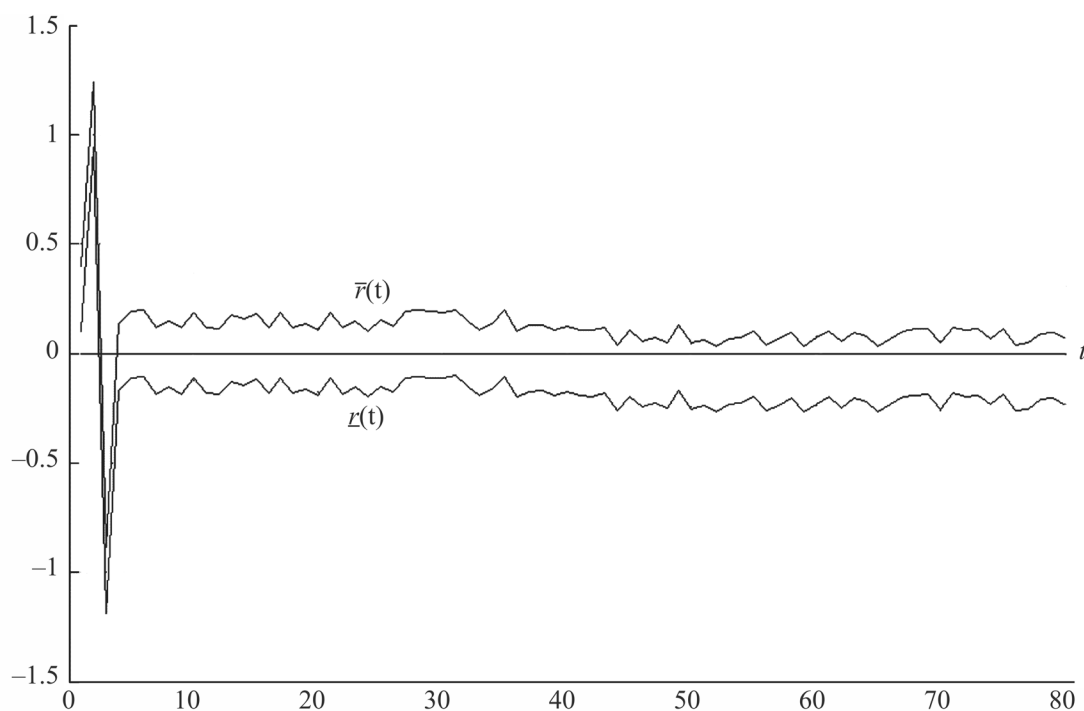


Рис. 1. Поведение невязок  $r(t)$  и  $\bar{r}(t)$  для случая отсутствия дефектов.

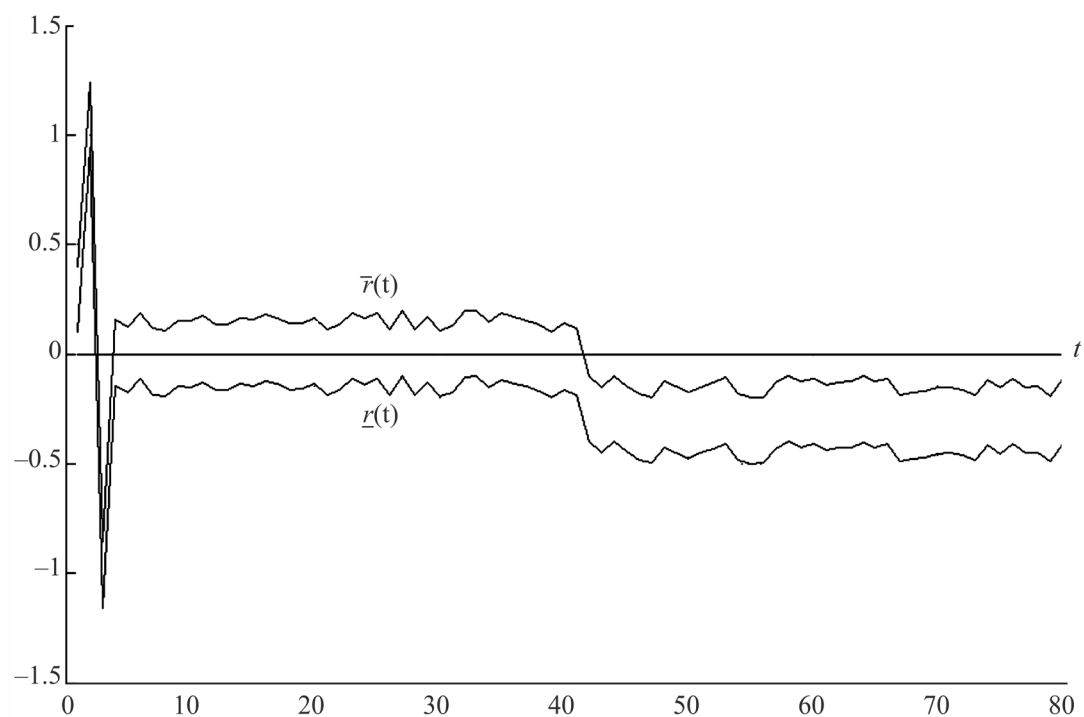


Рис. 2. Поведение невязок  $r(t)$  и  $\bar{r}(t)$  при появлении дефекта.

**Заключение.** Рассмотрена задача построения интервальных соотношений паритета для стационарных дискретных систем, описываемых линейными и нелинейными динамическими моделями, при наличии внешних возмущений с целью решения одной из задач функционального диагностирования – обнаружения дефектов. Решение основано на линейной модели, не чувствительной или минимально чувствительной к возмущению, на базе идентификационной канонической формы. Показано, как полученная модель может быть использована для учета нелинейных членов системы и построения интервальных соотношений паритета. Приво-

дятся формулы, позволяющие построить соотношения паритета минимальной сложности, не чувствительные или малочувствительные к возмущению, на основе которых решается задача обнаружения дефектов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ефимов Д.В. Построение интервальных наблюдателей для динамических систем с неопределенностями // *АиТ*. 2016. № 2. С. 5–49.
2. Khan A., Xie W., Zhang L., Liu L. Design and Applications of Interval Observers for Uncertain Dynamical Systems // *IET Circuits Devices Syst.* 2020. V. 14. P. 721–740.
3. Кремлев А.С., Чеботарев С.Г. Синтез интервального наблюдателя для линейной системы с переменными параметрами // *Изв. вузов. Приборостроение*. 2013. Т. 56. № 4. С. 42–46.
4. Chebotarev S., Efimov D., Raissi T., Zolghadri A. Interval Observers for Continuous-Time LPV Systems with  $L_1/L_2$  Performance // *Automatica*. 2015. V. 51. P. 82–89.
5. Mazenc F., Bernard O. Asymptotically Stable Interval Observers for Planar Systems with Complex Poles // *IEEE Trans. Automatic Control*. 2010. V. 55. № 2. P. 523–527.
6. Zheng G., Efimov D., Perruquetti W. Interval State Estimation for Uncertain Nonlinear Systems // *IFAC NOLCOS 2013*. Toulouse, France, 2013.
7. Zhang K., Jiang B., Yan X., Edwards C. Interval Sliding Mode Based Fault Accommodation for Non-Minimal Phase LPV Systems with Online Control Application // *Int. J. Control*. 2019. № 2. <https://doi.org/10.1080/00207179.2019.1687932>
8. Жирабок А.Н., Зуев А.В., Ким Чхун Ир. Метод построения интервальных наблюдателей для стационарных линейных систем // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2022. № 5. С. 3–13.
9. Rotondo D., Fernandez-Cantia R., Tornil-Sina S., Blesa J., Puig V. Robust Fault Diagnosis of Proton Exchange Membrane Fuel Cells Using a Takagi-Sugeno Interval Observer Approach // *Int. J. Hydrogen Energy*. №1. 2016.
10. Zhang Z., Yang G. Interval Observer-Based Fault Isolation for Discrete-Time Fuzzy Interconnected Systems With Unknown Interconnections // *IEEE Trans. on Cybernetics*. № 5. 2017. <https://doi.org/10.1109/TCYB.2017.2707462>
11. Kravaris C., Venkateswaran S. Functional Observers with Linear Error Dynamics for Nonlinear Systems // *Systems Control Lett.* 2021. V. 157. P. 105021.
12. Liu L., Xie W., Khan A., Zhang L. Finite-Time Functional Interval Observer for Linear Systems with Uncertainties // *IET Control Theory and Applications*. 2020. V. 14. № 18. P. 2868–2878.
13. Meyer L. Robust Functional Interval Observer for Multivariable Linear Systems // *J. Dynamic Systems, Measurement, and Control*. 2019. V. 141. № 9. Art. no. 094502.
14. Venkateswaran S., Liu Q., Kravaris C. Design of linear Residual Generators for Fault Detection and Isolation in Nonlinear Systems // *Int. J. Control*. 2022. V. 95. P. 804–820.
15. Venkateswaran S., Wilhite B., Kravaris C. Functional Observers with Linear Error Dynamics for Discrete-Time Nonlinear Systems, with Application to Fault Diagnosis // *Preprint 2021*. <https://www.researchgate.net/publication/352177782>
16. Blanke M., Kinnaert M., Lunze J., Staroswiecki M. *Diagnosis and Fault Tolerant Control*. Berlin: Springer-Verlag, 2016.
17. Жирабок А.Н. Диагностические наблюдатели и соотношения паритета: сравнительный анализ // *АиТ*. 2012. № 5. С. 141–160.
18. Квасернаак Х., Сиван Р. *Линейные оптимальные системы управления*. М.: Мир, 1977.
19. Жирабок А.Н., Шумский А.Е., Соляник С.П., Суворов А.Ю. Метод построения нелинейных робастных диагностических наблюдателей // *АиТ*. 2017. № 9. С. 34–48.
20. Zhirabok A., Shumsky A., Scherbatyuk A. Nonparametric Methods for Fault Diagnosis in Dynamic Systems // *Int. J. Robust and Nonlinear Control*. 2018. V. 28. № 17. P. 5424–5436.
21. Жирабок А.Н., Шумский А.Е. Непараметрический метод диагностирования нелинейных динамических систем // *АиТ*. 2019. № 2. С. 24–45.
22. Жирабок А.Н., Зуев А.В., Шумский А.Е., Бобко Е.Ю. Построение интервальных наблюдателей для дискретных нелинейных динамических систем // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2023. Т. 24. № 6. С. 283–291.
23. Low X., Willsky A., Verghese G. Optimally Robust Redundancy Relations for Failure Detection in Uncertain Systems // *Automatica*. 1996. V. 22. P. 333–344.



## ВЫБОР МЕТОДОВ КЛАСТЕРИЗАЦИИ ПРИ МАШИННОМ ОБУЧЕНИИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ПО СПУТНИКОВЫМ ДАННЫМ

© 2024 г. В. Е. Воробьев<sup>a, \*</sup>, А. Б. Мурынин<sup>a, b, \*\*</sup>, А. А. Рихтер<sup>a, \*\*\*</sup>

<sup>a</sup>НИИ “АЭРОКОСМОС”, Москва, Россия

<sup>b</sup>ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

\*e-mail: vvorobev.aero@yandex.ru

\*\*e-mail: amurynin@bk.ru

\*\*\*e-mail: urfin17@yandex.ru

Поступила в редакцию 17.05.2024 г.

После доработки 02.08.2024 г.

Принята к публикации 16.10.2024 г.

Представлен способ подготовки данных для машинного обучения для семантической сегментации информативных классов на изображениях, основанный на кластеризации для решения задач космического мониторинга импактных районов. Приведена классификация методов кластеризации по различным критериям. Обоснован выбор иерархических методов кластеризации как наиболее эффективных для работы с кластерами произвольной структуры и формы. Приведена общая схема расчета модели кластеризации, включающая помимо самой кластеризации процедуры тайлирования данных, оценки оптимальных параметров кластеризации, регистрации объектов, оценку качества данных. Показана схема подготовки данных для машинного обучения, включающая построение эталонной разметки, расчет модели кластеризации, коррекцию разметки, тестирование моделей кластеризации для разных информативных классов на новых изображениях.

**Ключевые слова:** кластеризация, модель кластеризации, методы кластеризации, обучающая выборка, машинное обучение, семантическая сегментация, экологические объекты, импактные районы, изображения

DOI: 10.31857/S0002338824050088, EDN: TARMZN

## CHOICE OF CLUSTERING METHODS IN MACHINE LEARNING FOR THE STUDY OF ECOLOGICAL OBJECTS BASED ON SATELLITE DATA

V. E. Vorobyov<sup>a, \*</sup>, A. B. Murynin<sup>a, b, \*\*</sup>, A. A. Richter<sup>a, \*\*\*</sup>

<sup>a</sup>ISR “AEROCOSMOS” Moscow, Russia

<sup>b</sup>FRC CSC RAS, Moscow, Russia

\*e-mail: vvorobev.aero@yandex.ru

\*\*e-mail: amurynin@bk.ru

\*\*\*e-mail: urfin17@yandex.ru

The paper presents a method for preparing data for machine learning for semantic segmentation of informative classes in images based on clustering for solving problems of space monitoring of impact areas. A classification of clustering methods by various criteria is given. The choice of hierarchical clustering methods as the most effective for working with clusters of arbitrary structure and shape is substantiated. A general scheme for calculating a clustering model is given, which includes, in addition to the clustering itself, procedures for data tiling, estimating the optimal clustering parameters, registering objects, and assessing the quality of the obtained data. A scheme for preparing data for machine learning is shown, including the construction of a reference markup, calculation of a clustering model, markup correction, and testing the obtained clustering models for different informative classes on new images.

**Keywords:** clustering, clustering model, clustering methods, training sample, machine learning, semantic segmentation, environmental objects, impact areas, images



**Введение.** Для выделения экологических объектов при космическом мониторинге импактных районов по мультиспектральным или гиперспектральным данным первостепенной задачей является сегментация изображений. Для решения этой задачи с помощью машинного обучения важно выбрать способ подготовки обучающих данных с учетом огромной площади импактных зон и разнообразия экологических классов [1–3]. Поэтому целесообразно разрабатывать способы ускорения подготовки обучающей выборки [4]. Один из таких способов основан на кластеризации областей на изображениях при подготовке обучающих данных [5].

Кластерный анализ — многомерная статистическая процедура, включающая сбор информации о выборке объектов и затем упорядочивающая объекты в сравнительно однородные группы [6]. Кластеризуются пиксели полутонного, мультиспектрального или гиперспектрального изображения (выборки объектов). Задача кластеризации относится к классу задач обучения без учителя.

Результаты кластеризации могут быть использованы как данные для предобучения, которые впоследствии корректируются ручным или автоматизированным способом. Такой подход позволит ускорить построение обучающей выборки и умножить ее размеры многократно. Даже при наличии ошибок в предобученных данных объем этих данных может нивелировать наличие в них ошибок первого и второго рода.

**1. Особенности объекта исследований.** В качестве объекта исследования будем рассматривать экологические объекты, расположенные в труднодоступных импактных районах, относящиеся, в частности, к Арктическому региону. Импактные районы — это территории и акватории, подверженные интенсивному антропогенному воздействию и как следствие — сильному загрязнению окружающей среды. Поля загрязнений, обусловленные промышленными объектами, распространяются, захватывая все новые и новые пространства. В результате формируются измененные под воздействием загрязнений импактные экосистемы разного пространственно-временного масштаба, расположенные возле точечного источника эмиссии поллютантов и подверженные действию локальной токсической нагрузки от этого источника и сохраняющие устойчивость во времени [7–9].

По сравнению со многими районами нашей страны, считающимися относительно чистыми, есть «горячие точки», в которых масштабы деградации окружающей среды достигают опасных значений, а уровни загрязнения значительно превышают допустимые нормы. Особенно это заметно в Арктической зоне Российской Федерации, где выявлено более сотни таких точек [10, 11].

Горячие точки образуют крупные импактные районы с сильными техногенными нарушениями природной среды, пагубно сказывающимися не только на перспективах сохранения природно-ресурсного потенциала, но и на здоровье и благополучии населения России и в первую очередь — Арктического региона [7–9]. Импактные районы пролегают в местах, богатых природными ресурсами, т.е. где происходит их интенсивная добыча и переработка.

Ключевое отличие данного объекта от других (например, от участков с площадным загрязнением) заключается в градиентной природе загрязнения. С удалением от источника выбросов происходит постепенное (но не всегда гладкое) уменьшение поступления поллютантов. Соответственно экосистемы получают все меньшие дозы токсических нагрузок. Из-за этого импактные районы представляют собой специфическую пространственную структуру из концентрически расположенных зон с разной степенью загрязнения и, различным уровнем трансформации экосистем. Обычно выделяют три-четыре зоны трансформации: техногенную пустыню, импактную, буферную и фоновую. Пространственная граница импактного региона проходит там, где с помощью современных методов уже не удается выделить локальное действие токсической нагрузки от естественно-обусловленных изменений [7].

Постоянное развитие космических многоспутниковых систем, осуществляющих высокочастотное зондирование поверхности Земли, позволяет выполнить как оперативную съемку, так и накопление обширных архивов данных дистанционного зондирования. Возросшая доступность и полнота данных дистанционного зондирования, а также современные вычислительные и информационные технологии открывают новые возможности для проведения мониторинговых исследований территорий. Это касается также создания геоинформационного обеспечения мониторинговых исследований, позволяющего осуществлять построение оценочных и прогностических пространственных моделей территорий на основе математического аппарата пространственного анализа данных и геопространственного моделирования.

В контексте анализа состояния импактных районов следует отметить, что полярноорбитальные средства дистанционного зондирования из космоса имеют большие потенциальные возможности для изучения природы высокоширотных импактных районов, включая и самые

труднодоступные. Большое значение в этой связи приобретает теоретическое обоснование, разработка и совершенствование методов сбора и обработки высокочастотной информации и больших массивов данных о состоянии и изменениях объектов в импактных районах, в том числе Арктического региона. Однако имеются некоторые принципиальные проблемы для космического дистанционного зондирования в зонах внутри пояса 75–90° с.ш. [12].

Нерегулярность освещенности северного полярного региона создает дополнительные трудности для оптического дистанционного зондирования, которое практически бесполезно в течение долгой полярной ночи. Кроме того, оптические сенсоры, особенно сканеры, перенапрягаются над арктическими территориями с высоким альбедо и часто изображают ледники со слишком малым контрастом. Интенсивные тени на космических изображениях, возникающие при сочетании низкого положения Солнца и горного рельефа, затрудняют их обработку. На широте 81° 20' с.ш. ежедневные вариации в высоте Солнца над горизонтом, которые могли бы улучшить контраст, не превышают 17°, что не позволяет эффективно использовать их для получения изображений лучшей контрастности. Тепловые инфракрасные или тепловые микроволновые изображения свободны от этих недостатков, но обладают обычно более низким пространственным разрешением [13].

Главной проблемой для пассивного дистанционного зондирования импактных районов Арктики является, очевидно, своеобразный климат этого региона с ненадежными и неблагоприятными погодными условиями, частой сплошной облачностью и снегопадами, которые маскируют детали поверхности.

**2. Выбор методов кластеризации.** С учетом описанных особенностей объекта исследования проведем краткий анализ методов кластеризации для решения поставленной задачи (см. табл. 1) [14, 15].

**Таблица 1.** Классы методов кластеризации по разным критериям

| Методы | Критерий                      | Класс методов                  | Пример метода                   |
|--------|-------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| 1      | Способ формирования кластеров | Разделительные                 | k-means                         |
| 2      |                               | Основанные на плотности        | DBSCAN                          |
| 3      |                               | Основанные на сетке            | STING                           |
| 4      |                               | Основанные на модели           | Смеси Гауссианов                |
| 5      |                               | Основанные на графах           | Спектральная кластеризация      |
| 6      |                               | Основанные на подпространствах | CLIQUE                          |
| 7      |                               | Основанные на ансамбле         | CSPA                            |
| 8      | Степень вложенности           | Неиерархические (плоские)      | ISODATA                         |
| 9      |                               | Иерархические                  | HDBSCAN                         |
| 10     | Степень пересечения кластеров | Исключение                     | k-means                         |
| 11     |                               | Перекрытие                     | MCOKE                           |
| 12     |                               | Вложенность                    | HiSC                            |
| 13     |                               | Нечеткость (стохастичность)    | fuzzy k-means                   |
| 14     | Методический подход           | Вероятностный подход           | k-median                        |
| 15     |                               | Дискриминантный анализ         | На базе логистической регрессии |
| 16     |                               | Генетический алгоритм          | На базе фитнес-функции          |
| 17     |                               | Нейросетевой подход            | Сеть Кохонена                   |
| 18     | Иерархическая кластеризация   | Агломеративные методы          | Single-link                     |
| 19     |                               | Дивизионные методы             | MST                             |
| 20     | Неиерархическая кластеризация | Четкие                         | Expectation-Maximization        |
| 21     |                               | Нечеткие                       | fuzzy k-means                   |

Методы 1 разделяют данные по минимизации внутрикластерного расстояния и максимизации межкластерного. Методы 2 группируют данные и отделяют группы высокой плотности от групп низкой. Методы 3 разделяют пространство на ячейки и анализируют плотность в каждой из них. В методах 4 предполагается поражающая статистическая модель, на базе которой подбираются параметры кластеризации. Методы 5 базируются на теоретико-графовом представлении данных. В методах 6 данные кластеризуются в подпространствах признаков, найденных методами понижения размерности [16]. В методах 7 комбинируются (гибридизируются) различные методы кластеризации для получения надежного и стабильного разбиения.

В исключаяющих методах 10 элемент данных принадлежит строго одному кластеру, в перекрывающихся методах 11 — может принадлежать более, чем одному кластеру. В случае вложенности методов 12 каждый элемент относится как к определенному кластеру, так и ко всем его «предкам», в нечетких методах 13 — к разным кластерам с разной вероятностью.

В вероятностных методах 14 используются статистические распределения и эмпирические вероятности принадлежности точек кластерам. В методах 15, основанных на дискриминантном анализе, известны характеристики самих кластеров, к которым нужно отнести элементы данных. В методах 16 количество кластеризуемых объектов, образующих популяцию, соотносится с количеством компонентов вектора хромосом, каждая из которых отображает один из возможных вариантов кластеризации. В методах 17 результаты кластеризации, полученные другими методами, могут быть использованы для предобучения нейросетевой модели. Помимо перечисленных методических подходов 14–17 существуют и другие подходы.

Каждый метод кластеризации имеет свои достоинства и недостатки, задается набором параметров кластеризации. Также методы могут иметь разные модификации, меняющие шаги базового алгоритма, уменьшающие функцию потерь, применимые к разным типам данных и др.

Одним из наиболее популярных методов кластеризации является k-means.

Преимущества метода: 1) прост в реализации и понимании; 2) высокая скорость работы и точность на данных сферической формы; 3) наличие большого числа модификаций [14].

Недостатки метода: 1) задание числа кластеров / их начальных точек кластеров; 2) сходится к локальным максимумам, что дает несколько разные результаты кластеризации каждый раз при постоянном числе кластеров; 3) кластеризуются сфероподобные области (т.е. эллипсоиды или линейно подобные области кластеризуются значительно хуже); 4) в целом не учитывает плотность данных и неоднородность кластера [17].

Метод имеет модификации [14]: 1) вариации метода (Lloyd's algorithm, elkan algorithm, mini-batch k-means, k-medoids, k-modes); 2) способ выбора начальных центроидов (случайный выбор, k-means++, greedy k-means++ и др.); 3) способ подбора оптимального числа кластеров (метод локтя, метод силуэта, метод комплексной оценки); 4) «родственные» методы (c-means, k-median и др.).

Неиерархические методы 8 не учитывают иерархию кластеров (имеют один иерархический уровень). При этом неиерархические методы могут давать однозначную (методы 20) или стохастическую (методы 21) кластеризацию.

При кластеризации экологических объектов на аэрокосмических изображениях учет их структуры является одним из наиболее важных условий выбора метода кластеризации. Большинство неиерархических методов либо ограничены в кластеризуемых структурных паттернах, либо имеют сложный алгоритм реализации. В частности, k-means работает лучше всего, когда кластеры: «круглые» или сферические; одинакового размера; одинаковой плотности; имеют самую высокую плотность в центре сферы; не загрязнены шумом/выбросами.

Иерархические методы 9 практически лишены данных недостатков. В основе иерархической кластеризации лежит построение кластерного дерева, представляемого обычно в виде дендрограммы. Данное дерево посредством связности точек, кластеров хранит практически полную информацию о структуре изображенных объектов. Однако с ростом размера кластеризуемых данных экспоненциально растет размер кластерного дерева, что не позволяет «напрямую» использовать данные методы при обработке данных больших размеров. В этом случае целесообразно подобрать способы тайлирования данных для их параллельной обработки. Иерархические методы 9 имеют более одного иерархического уровня. Они разделяются на алгомеративные 18 (новые кластеры создаются объединением более мелких в более крупные) и дивизионные 19 (новые кластеры создаются делением более крупных на более мелкие).

Разные методы кластеризации могут иметь иерархические расширения (в том числе k-means при иерархическом разложении данных на определенное количество кластеров). Основными параметрами иерархических методов являются метод вычисления связи (метод одиночной, полной, средней связи, метод Уорда) и метрика связи (дисперсия соединяемых / разделяемых кластеров, среднеарифметическое расстояний, максимальное / минимальное расстояние и др.) [14].

Преимущества иерархических методов: 1) способность обнаружения кластеров произвольной формы; 2) работоспособность с различными паттернами данных; 3) возможность формирования информативной иерархии кластеров для лучшего понимания структуры данных; 4) возможность получения оптимальной кластеризации; 5) производит значительно меньше шума.

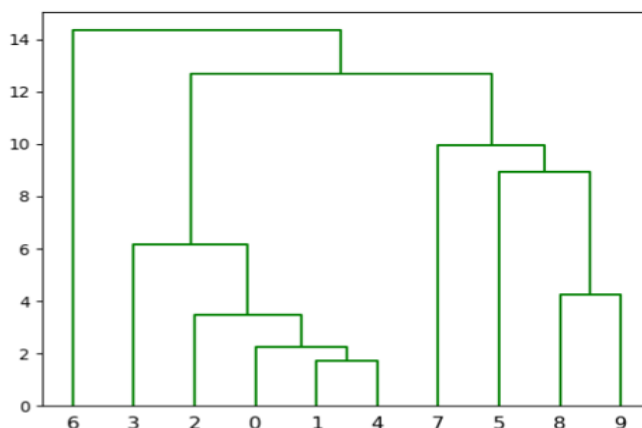
Недостатки иерархических методов: 1) использование большого количества вычислительных ресурсов и памяти из-за работы со всей матрицей расстояний между объектами; 2) чувствительность к выбору критерия объединения кластеров и неустойчивость к шуму и выбросам, что может сильно исказить иерархию кластеров.

В табл. 2 рассмотрен пример выборки  $w = 10$  точек для иерархической кластеризации.

**Таблица 2.** Выборка точек

| $n$ | Яркости |      |      | Координаты |     |
|-----|---------|------|------|------------|-----|
|     | $q1$    | $q2$ | $q3$ | $x$        | $y$ |
| 0   | 67      | 68   | 63   | 0          | 0   |
| 1   | 70      | 69   | 65   | 0          | 1   |
| 2   | 72      | 71   | 67   | 0          | 2   |
| 3   | 77      | 73   | 70   | 0          | 3   |
| 4   | 69      | 68   | 64   | 0          | 4   |
| 5   | 53      | 55   | 52   | 0          | 5   |
| 6   | 38      | 43   | 39   | 0          | 6   |
| 7   | 58      | 60   | 59   | 0          | 7   |
| 8   | 48      | 48   | 48   | 0          | 8   |
| 9   | 49      | 47   | 52   | 0          | 9   |

На рис. 1 показана дендрограмма (кластерное дерево) для данной выборки. Матрица связи для нее отражена в табл. 3 [18]. В качестве метрики расстояния взята евклидова метрика, тип связи – по ближайшей точке. Здесь  $n$  – номер точки;  $L = w - 1$  – наибольший номер точки;  $q1, q2, q3$  – яркости на R-, G-, B- каналах соответственно;  $x$  и  $y$  – абсцисса и ордината точки на изображении;  $N$  – номер связи (иерархического кластера);  $n1$  и  $n2$  – номера связанных иерархических кластеров (точек);  $d$  – расстояние между иерархическими кластерами;  $m$  – число точек в составе иерархического кластера.



**Рис. 1.** Дендрограмма выборки точек.

Таблица 3. Матрица связи выборки точек

| $N$ | Матрица связи |      |       |     | Описание связи                                      |
|-----|---------------|------|-------|-----|-----------------------------------------------------|
|     | $n1$          | $n2$ | $d$   | $m$ |                                                     |
| 1   | 1             | 4    | 1.73  | 2   | Связь между точками $n = 1$ и $n = 4$               |
| 2   | 0             | 10   | 2.96  | 3   | Связь точки $n = 0$ и кластера $N = 10 - L = 1$     |
| 3   | 8             | 9    | 4.24  | 2   | Связь между точками $n = 8$ и $n = 9$               |
| 4   | 2             | 11   | 5.67  | 4   | Связь точки $n = 2$ и кластера $N = 11 - L = 2$     |
| 5   | 3             | 13   | 8.95  | 5   | Связь точки $n = 3$ и кластера $N = 13 - L = 4$     |
| 6   | 5             | 12   | 8.97  | 3   | Связь точки $n = 5$ и кластера $N = 12 - L = 3$     |
| 7   | 7             | 15   | 13.9  | 4   | Связь точки $n = 7$ и кластера $N = 15 - L = 6$     |
| 8   | 6             | 16   | 26.14 | 5   | Связь точки $n = 6$ и кластера $N = 16 - L = 7$     |
| 9   | 14            | 17   | 40.76 | 10  | Связь кластеров $N = 14 - L = 5$ и $N = 17 - L = 8$ |

На рис. 2, *а* показано входное изображение. Сопоставлены результаты кластеризации (предобученной разметки) методами k-means (рис. 2, *б*) и агломеративной кластеризации (рис. 2, *в*) для данного изображения. Как видно, иерархическая кластеризация образует значительно меньше шума, чем кластеризация методом k-means, что дает ощутимые преимущества при построении обучающей выборки.

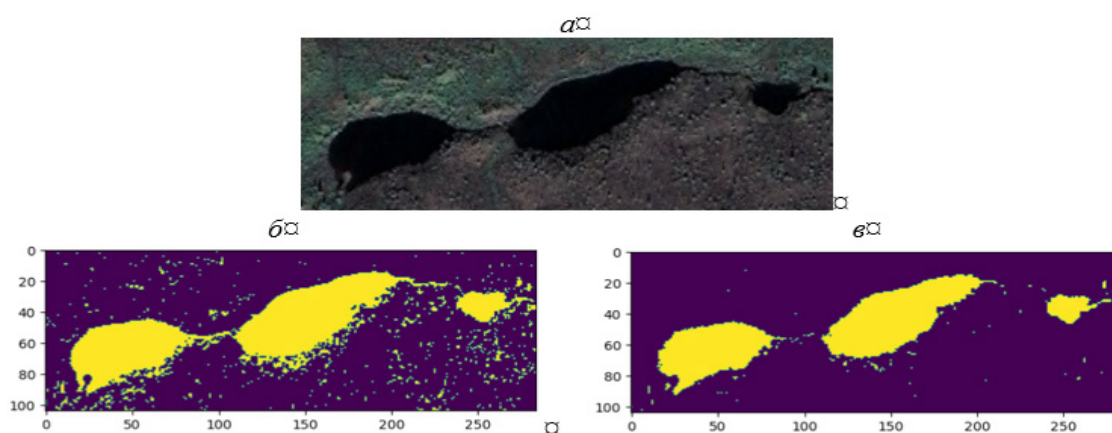


Рис. 2. Сопоставление для изображения (*а*) метода k-means (*б*) и метода агломеративной кластеризации (*в*).

**3. Подготовка данных для обучения.** На рис. 3 приведена общая схема кластеризации изображений.

Кластеризацию можно представить отображением  $f(p, I) \rightarrow K$ , где  $I$  – изображение для кластеризации,  $p$  – параметры кластеризации,  $f$  – метод и алгоритм кластеризации,  $K$  – оцененная маска кластеров (бинарная, пообъектная или маска полей энергии), размер которой равен размеру  $I$ . Итерируемые параметры  $p' \subset p$  – параметры кластеризации, значения которых меняются для обеспечения оптимизации некоторой целевой функции. Основными параметрами кластеризации, которые также относятся к итерируемым параметрам, являются: количество  $m$  кластеров  $\{k_i\}$ , метрика схожести / разделимости кластеров. В качестве метрик могут быть метрики расстояний, угловые метрики, метрики на основе корреляций и др. [19, 20].

Для оптимизации может быть подана эталонная маска кластеров  $K_j$  (эталонные объекты) изображения  $I$ . Оптимизация производится на базе целевой функции  $F(p', \mu, K, K_j)$  или ее частного случая  $F(p', \mu, K)$  при отсутствии эталонной кластеризации. Значение  $p'$ , при ко-





Рис. 3. Схема получения модели кластеризации.

тором  $F$  достигает экстремума (минимального или максимального), считается оптимальным значением при всех неизменных других  $p \setminus p'$  параметрах кластеризации.

Тайлирование (тайлинг) – разделение данных на части (тайлы), каждая из которых обрабатывается некоторым алгоритмом в отдельности. Как правило, необходимость в тайлировании обусловлена наличием больших размеров данных. При этом обработка алгоритмом данных целиком выражается через обработку алгоритмом тайлов данных в отдельности. Для обеспечения эквивалентности такой обработки необходимо провести обратную процедуру, т.е. слияние обработанных тайлов. Формально тайлирование можно записать в виде:

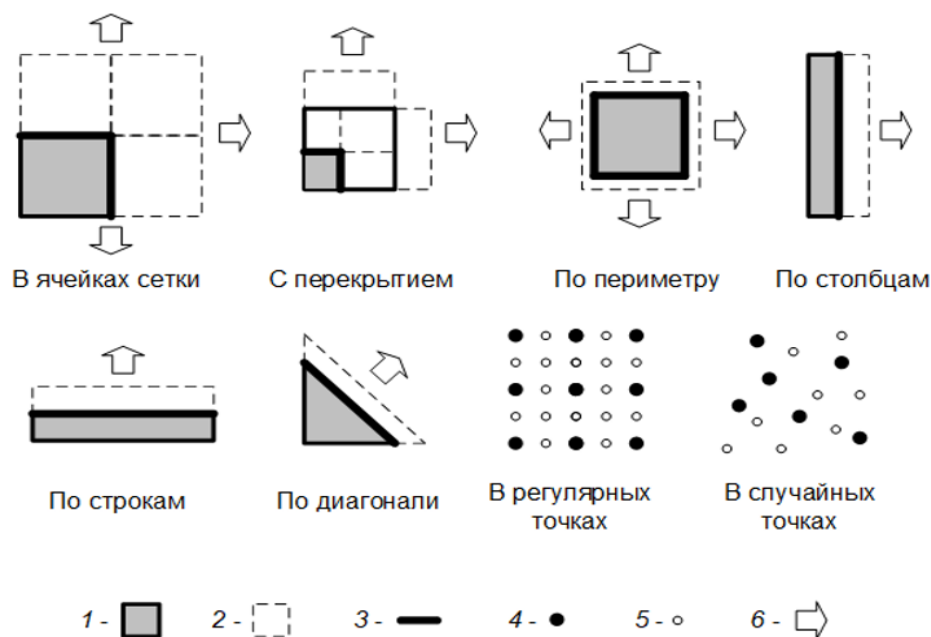
$$f(I) = \left\{ \bigcup_{j=1}^l f(I_j), \bar{f}(\{I_j\}) \right\}, I = \bigcup_{j=1}^l I_j,$$

где  $f$  – алгоритм обработки;  $I$  – данные целиком;  $I_j, j = 1 \dots l$ , – тайлы разбиения данных;  $l$  – количество тайлов разбиения;  $\bar{f}$  – алгоритм слияния тайлов, порожаемый алгоритмом  $f$ . Над разбиением  $\{I_j\}$  данных производится  $\bar{f}$  такой, чтобы совместно с процедурами  $f(X_1), \dots, f(I_j)$  результат обработки был равен или приближенно равен результату обработки процедуры  $f(I)$ .

На рис. 4 показаны некоторые способы тайлирования при кластеризации изображений. При слиянии в местах «сшития» тайлов  $I'$  и  $I''$  производится соотнесение кластеров в соответствующих точках масок  $K' = f(I')$  и  $K'' = f(I'')$ . Это необходимо для одинаковой интерпретации рассчитанных кластеров на разных тайлах.

Пообъектная регистрация – выделение связанных компонент (объектов), их фильтрация по структуре и размеру растров, расчет для каждого отфильтрованного объекта его геометрических параметров, а также представление объекта в виде кортежа координат и яркостей его точек. На выходе образуется модель кластеризации, включающая: пообъектную регистрацию, маску кластеров, оптимальные параметры кластеризации, значения целевой функции, структуру входных данных (изображений) для обучения.

На рис. 5 – схема подготовки данных для машинного обучения с применением полученной модели кластеризации. Эталонная разметка (датасет) формируется для каждого информативного класса «ручным» и интерактивным способом, предобученная разметка – в результате



**Рис. 4.** Примеры способов тайлирования при кластеризации.  
 Обозначения на рисунке: 1 – текущий тайл; 2 – следующий тайл;  
 3 – места сшивания тайлов; 4 – элемент текущего тайла; 5 – элемент  
 следующего тайла; 6 – направление тайлирования.



**Рис. 5.** Схема подготовки данных для машинного обучения (ИНС – искусственная нейронная сеть).

расчета модели кластеризации, дообученная – по результатам коррекции и аугментации предобученной, обе выполняемые на кластеризованных областях.

Коррекция разметки состоит в изменении кластеров в рассчитанной оптимизированной модели кластеризации. В табл. 4 отражены основные эмпирические правила построения обучающей выборки, т.е. разметки объектов определенного информативного класса с установленными дешифровочными признаками [4].



Таблица 4. Типы правил построения обучающей выборки

| Тип правила           | Описание                                                                                                | Пример правила для информативного класса                                                                                                            |
|-----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Локализация           | Обнаружение рабочей области поиска объектов                                                             | Свалки сосредотачиваются с большей вероятностью на периферии города, чем в его центре                                                               |
| Обнаружение           | Обнаружение объектов в рабочей области на базе геометрических, текстурных, яркостных и других признаков | Одним из геометрических признаков окон на стене здания является регулярность их распределения                                                       |
| Выделение             | Разграничение объекта от фона                                                                           | Граница между мусорным захлаплением и фоном лежит в местах максимальных перепадов зернистости текстуры захлапления                                  |
| Векторный тип         | Особенности использования векторов при разметке                                                         | Ребро здания выделяется линейным вектором некоторой «толщины» (линейный вектор автоматически модифицируется в площадной с данной толщиной)          |
| Предположение         | Как размечать в условиях невидимости части объекта                                                      | В местах небольшой протяженности заслонения дороги деревьями или тенями предполагается такая же дорога                                              |
| Разделимость          | Как размечать в условиях наложения одних объектов на другие                                             | Вагоны подвижного состава размечаются непересекающимися областями                                                                                   |
| Артефакты             | Как размечать в условиях артефактов съемки                                                              | При наличии геометрических искажений крыши здания данная область исключается из обучающей выборки                                                   |
| Интерпретация объекта | Разметка в условиях неоднозначности или сложности в интерпретации                                       | При схожести крыши здания с объектом из другого класса данная область исключается из обучающей выборки                                              |
| Унификация объекта    | Разметка в условиях типизации объектов                                                                  | Если здание имеет одинаковую форму крыши, но с разными уровнями высоты, каждая часть здания с одним уровнем высоты размечается как отдельное здание |
| Исключение разметки   | Как исключается область из обучения                                                                     | Возможность построения исключаемых областей полигонами                                                                                              |
| Коррекция разметки    | Как дотраивать, удалять, перемещать разметку / часть разметки объекта                                   | В местах наличия ложной разметки на части объекта (ошибки первого рода) построение стираемых областей полигонами                                    |

Аугментация обучаемых данных позволяет дополнительно «умножить» разметку с применением различных видов аугментации для размеченных областей: 1) изменение оттенка, насыщенности или яркости; 2) повороты, масштабирования или сдвиги; 3) преобразования перспективы; 4) копирование областей для стационарных объектов (имеющих постоянную локацию на земной поверхности) на изображения этих объектов в другие моменты времени с тем же ракурсом съемки.

В хранилище данных содержится: 1) изображения и их метаданные (для эталонной разметки, обучаемые, валидируемые и тестируемые при кластеризации); 2) модели кластеризации каждого информативного класса; 3) маски эталонной разметки и обучающей выборки информативных классов [21–23].

На вход модели нейронной сети подается обучающая выборка для эталонной разметки, а также разметки, рассчитанной посредством кластеризации и прошедшей процедуры коррекции и аугментации.

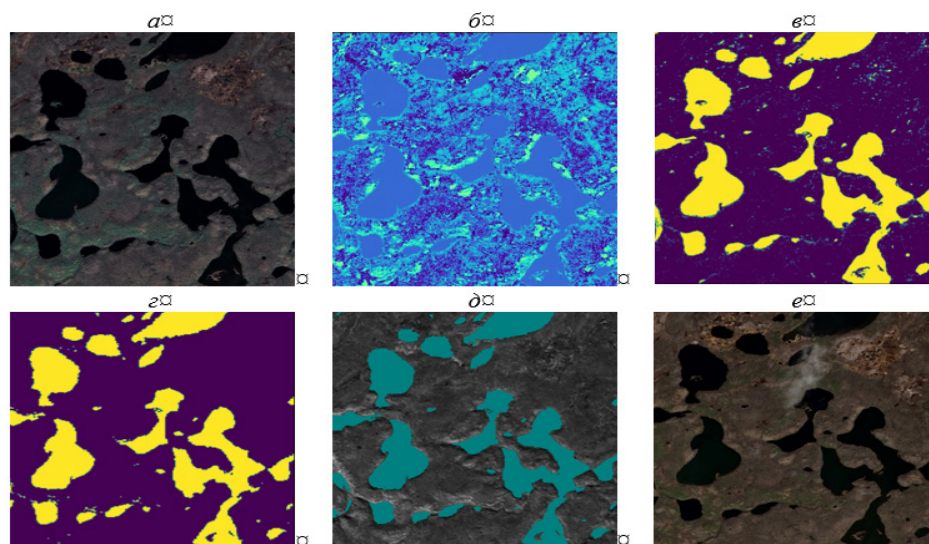
В качестве модели сети берется одна из ранее разработанных моделей сверточных сетей для сегментации экологических объектов [22–24]. Это многоклассовые и бинарные модели для сегментации различных экологических классов – мусорных свалок, разных типов жидкостей, объектов жидкостной и трубопроводной инфраструктуры, объектов автодорожной и железнодорожной инфраструктуры, зданий (в том числе производственных). Модели обучены на полутонных и мультиспектральных изображениях импактных районов Арктики и Московского региона. Данные аугментированы с применением процедуры ROI Cover. В качестве функции потерь используется функция потерь Жаккарда (Jaccard loss), а также данная функция в комбинации с бинарной перекрестной энтропией.

**4. Результаты эксперимента.** Покажем на примере г. Норильск результаты построения обучающей выборки объектов класса «водоемы» с применением кластеризации методом k-means.

На рис. 6, а приведен пример входного изображения. Средние координаты территории: широта – 69.417°, долгота – 87.907°; расположена в 12 км к северо-западу от жилой части города. Выбор данной территории обусловлен тем, что ее водные объекты являются объектами «непрямого» экологического загрязнения. Она расположена, с одной стороны, поблизости к новой очереди хвостохранилища Лебяжье, с другой стороны, «в стороне» от реки Амбарная – переносчика и распространителя экологического загрязнения от Норильского металлургического завода.

Для данного изображения произведена кластеризация со следующими основными параметрами кластеризации: количество кластеров – 5; количество запусков алгоритма с разными начальными центроидами – 10; максимальное количество итераций алгоритма для одиночного прогона – 300. На рис. 6, б представлена пообъектная маска кластеров. В маске выделен кластер, характеризующий водоемы (рис. 6, в). Произведена коррекция данного кластера (рис. 6, г) по установленным эмпирическим правилам для класса «водоемы». В частности, удалены шумовые составляющие – связанные компоненты небольших размеров, описывающие в основном тени деревьев и резкие перепады поверхности. На рис. 6, д показано наложение скорректированного кластера на изображение. Водоемы в малых масштабах времени являются стационарными объектами. Поэтому можно произвести аугментацию копирования областей, т.е. взять размеченные области водоемов, но на других изображениях той же территории при условии, что они имеют тот же ракурс съемки. Например, ракурс изображения (на рис. 6, е) тот же, что и на рис. 6, а, но снято оно в других условиях погоды (появилась небольшая облачность) и времени (хронологическом и сезонном).

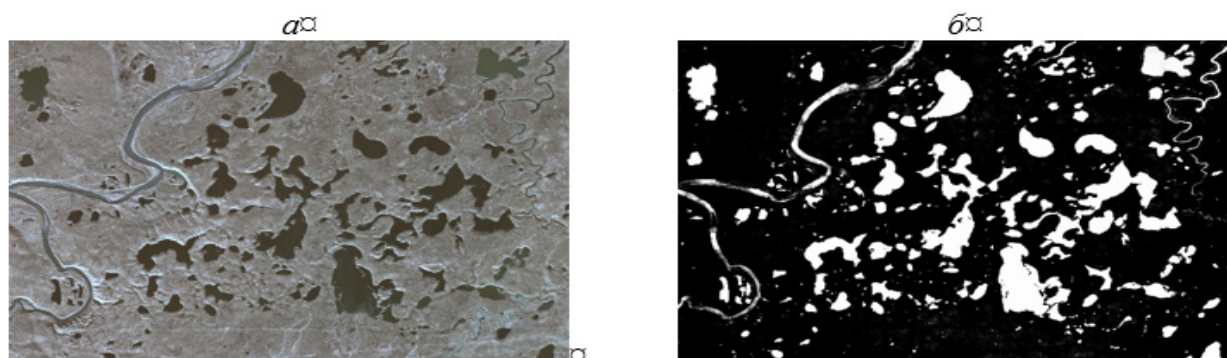
Как видно, обучающая выборка построена в полуавтоматическом режиме с применением кластеризации и коррекции, что значительно проще построения обучающей выборки в ручном режиме. Наблюдается хорошая точность полученной разметки по наложению областей на



**Рис. 6.** Получение дообученной разметки с применением кластеризации: а – входное изображение; б – пообъектная маска кластеров; в – выделение кластера водоемов; г – коррекция кластера; д – наложение скорректированного кластера на изображение; е – другое изображение того же ракурса.

изображение. Автоматически выделены границы водоемов в местах максимальных перепадов яркости. При наличии в водоемах «островов» последние исключены из выборки. Значительно труднее сделать такое исключение в ручном режиме, так как «острова» относятся к трудноразмечаемым объектам. К другим трудноразмечаемым объектам принадлежат мелкие водоемы, поскольку их количество больше, чем крупных, и обнаружить их сложнее.

На примере изображения, приведенного на рис. 7, показан результат работы сверточной сети по сегментации водоемов, построенной на базе дообученной разметки. Дообучение проведено в окрестности фрагмента изображения, выделенного на рис. 7, *а*. В результате сегментации выделены крупные и мелкие водоемы и реки (слева — широкая река Амбарная, справа — узкая река Снежная). Разрывы, образованные в сегментации реки Амбарная, обусловлены в основном сужением водотока в излучине реки и пересыханием части прибрежной полосы, вероятно ввиду переноса поллютантов водным течением.



**Рис. 7.** Результат семантической сегментации водоемов (г. Норильск): *а* — входное изображение; *б* — выделение водоемов с помощью сверточной сети, дообученной на скорректированном кластере.

**Заключение.** Предложен подход к кластеризации для построения предобученной выборки для машинного обучения, которая «доучивается» оператором-разметчиком. Строится модель кластеризации, включающая пообъектную регистрацию, маски кластеров, полученные по набору обучаемых изображений, оптимальные параметры кластеризации. Данная процедура является составной частью процедуры подготовки данных для машинного обучения. В хранилище содержатся изображения и их метаданные, модели кластеризации каждого информативного класса, маски эталонной и обучающей разметки.

Достоинствами применения кластеризации для машинного обучения является автоматизация и ускорение построения разметки, а также допустимость ошибок первого и второго рода при наличии большого объема данных для обучения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Визильтер Ю.В., Выголов О.В., Желтов С.Ю., Рубис А.Ю. Комплексирование многоспектральных изображений для систем улучшенного видения на основе методов диффузной морфологии // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 4. С. 103–114.
2. Желтов С.Ю., Себряков Г.Г., Татарников И.Б. Компьютерные технологии создания геопространственных трехмерных сцен, использующих комплексирование географической информации и синтезированных пользовательских данных // Авиакосмическое приборостроение. 2003. № 8. С. 2–10.
3. Ишутин А.А., Кикин И.С., Себряков Г.Г., Сошников В.Н. Алгоритмы обнаружения, локализации и распознавания оптико-электронных изображений группы изолированных наземных объектов для инерциально-визирных систем навигации и наведения летательных аппаратов // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 2. С. 85.
4. Гвоздев О.Г., Козуб В.А., Кошелева Н.В., Мурынин А.Б., Рихтер А.А. Построение трехмерных моделей ригидных объектов по спутниковым изображениям высокого пространственного разрешения с использованием сверточных нейронных сетей // Исследования Земли из космоса. 2020. № 5. С. 78–96.
5. Мандель И.Д. Кластерный анализ. М.: Финансы и статистика, 1988. 176 с. ISBN5–279–00050–7
6. Shuyue G., Murray L. An Internal Cluster Validity Index Using a Distance based Separability Measure // IEEE32nd Intern. Conf. on Tools with Artificial Intelligence (ICTAI)At: Baltimore, MD, USA, 2020. URL: <https://arxiv.org/pdf/2009.01328>

7. Евсеев А.В., Красовская Т.М. Закономерности формирования импактных зон в Арктике и Субарктике России // География и природные ресурсы. 1997. № 4.
8. Евсеев А.В., Красовская Т.М. «Горячие точки» Российской Арктики. Экологические проблемы российской Арктики // Вестн. МГУ. 2010. № 5.
9. Душкова Д.О., Евсеев А.В. Анализ техногенного воздействия на геосистемы Европейского Севера России // Арктика и Север. 2011. № 4. С. 1–34.
10. Лукин Ю.Ф. «Горячие точки» Российской Арктики // Арктика и Север. 2013. № 11. С.19, 20.
11. Программа ООН по окружающей среде. Диагностический анализ состояния окружающей среды арктической и1079 зоны Российской Федерации: Расширенное резюме. М.: Науч. мир, 2011.
12. Бондур В.Г. Основы аэрокосмического мониторинга окружающей среды. Курс лекций. М.: Московский государственный университет геодезии и картографии, 2008. 546 с.
13. Савиных В.П. Соломатин В.А. Оптико-электронные системы дистанционного зондирования. М.: Машиностроение, 2014. 431 с.
14. Хабр. Кластеризация в ML: от теоретических основ популярных алгоритмов к их реализации с нуля на Python. URL: <https://habr.com/ru/articles/798331/#dbscan>
15. Scikit-learn. Руководство пользователя URL: [https://scikit-learn.ru/user\\_guide](https://scikit-learn.ru/user_guide)
16. Рихтер А.А., Мурынин А.Б., Козуб В.А., Гвоздев О.Г. Модели представления экологических объектов по данным гиперспектральной съемки // Матер. 21-й Всероссийск. конф. с междунар. участием: Математические методы распознавания образов (ММРО). М.: Российская академия наук, 2023.
17. Гвоздев О.Г., Козуб В.А., Мурынин А.Б., Рихтер А.А. Представление и обработка спектральных моделей по данным гиперспектральной съемки // Сб. тез. докл. 16-й Всероссийск. конф. «Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса». М.: ИКИ РАН, 2023. С. 19. URL: [http:// http://conf.rse.geosmis.ru/files/books/2023/9992.htm](http://http://conf.rse.geosmis.ru/files/books/2023/9992.htm)
18. Scipy. Руководство пользователя. Метод linkage. URL: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/tutorial/index.html>
19. Shanmugam S., Srinivasaperumal P. Spectral Matching Approaches in Hyperspectral Image Processing // Intern. J. Remote Sensing, 2014. V. 35. No. 24. P. 8217–8251. <https://doi.org/10.1080/01431161.2014.980922>. URL: [https://www.researchgate.net/publication/270805406\\_Spectral\\_matching\\_approaches\\_in\\_hyperspectral\\_image\\_processing](https://www.researchgate.net/publication/270805406_Spectral_matching_approaches_in_hyperspectral_image_processing)
20. Jain A.K., Murty M.N., Flynn P.J. Data clustering: a review // Association for Computing Machinery, 1999. URL: <https://www.sci-hub.ru/10.1145/331499.331504?ysclid=lzwsslaw3q662345026>
21. Ultralytics. Руководство пользователя. URL: <https://docs.ultralytics.com/ru>
22. Гвоздев О.Г., Козуб В.А., Кошелева Н.В., Мурынин А.Б., Рихтер А.А. Нейросетевой метод построения трехмерных моделей ригидных объектов по спутниковым изображениям // Мехатроника, автоматизация, управление. 2021. Т. 22. № 1. С. 48–55.
23. Игнатьев В.Ю., Матвеев И.А., Мурынин А.Б., Усманова А.А., Цурков В.И. Повышение пространственного разрешения панхроматических спутниковых изображений на основе генеративных нейросетей // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 2. С.64–72. <https://doi.org/10.31857/S0002338821020074>
24. Гвоздев О.Г., Мурынин А.Б., Козуб В.А., Пуховский Д.Ю., Рихтер А.А. Семантическая сегментация спутниковых изображений с использованием нейросетей для выявления антропогенных объектов в импактных районах Арктики // Матер. 20-й Междунар. конф. «Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса». М., 2022. С. 60. <https://doi.org/10.21046/20DZZconf-2022a>



УДК 004.932.2

## ПОЗИЦИОНИРОВАНИЕ КРУПНОГАБАРИТНЫХ ОБЪЕКТОВ МЕТОДАМИ КОМПЬЮТЕРНОГО ЗРЕНИЯ

© 2024 г. В. В. Лопатина<sup>a, \*</sup>

<sup>a</sup>ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

\*e-mail: int00h@mail.ru

Поступила в редакцию 12.07.2024 г.

После доработки 15.07.2024 г.

Принята к публикации 16.10.2024 г.

Приведена структура измерительного комплекса, позволяющего выполнять высокоточные измерения положения объектов относительно стационарной базы методами компьютерного зрения, построенного на базе оптических измерителей. Описан принцип действия измерительного комплекса, определен порядок использования и особенности юстировки элементов. Работа измерительного комплекса иллюстрируется на примере из морской транспортной отрасли, в задаче контроля положения автономного морского крупнотоннажного судна относительно причала при выполнении погрузо-разгрузочных работ и швартовных операций. Также рассматриваются способы применения измерительного комплекса в автодорожном, воздушном и железнодорожном транспорте.

*Ключевые слова:* компьютерное зрение, анализ изображений, оптические измерители, автономный транспорт, морские автономные надводные суда

DOI: 10.31857/S0002338824050095, EDN: TDYUQK

## POSITIONING OF LARGE OBJECTS BY COMPUTER VISION METHODS

V. V. Lopatina<sup>a, \*</sup>

<sup>a</sup>Federal Research Center “Computer Science and Control,”

Russian Academy of Sciences, Moscow, 119333 Russia

\*e-mail: int00h@mail.ru

The article presents the structure of a measuring complex that allows high-precision measurements of the position of objects relative to a stationary base using computer vision methods based on optical meters data. The principle of operation of the measuring complex is described. The procedure for using and the features of adjusting the elements is determined. The operation of the measuring complex is illustrated by an example from the maritime transport industry i.e. by the solution of the problem of monitoring the position of an autonomous marine large-tonnage vessel relative to the berth when performing loading and unloading operations and mooring operations. Methods of using the measuring complex in road, air and rail transport are also described.

*Keywords:* computer vision, image analysis, optical meters, autonomous transport, maritime autonomous surface ships

**Введение.** При внедрении автономного транспорта автоматизацию сбора данных об окружающей транспортное средство среде выполняют, используя принцип функциональной эквивалентности: сенсорная система автономного транспортного комплекса не должна уступать по своим возможностям сенсорным системам человека.

Важнейшая сенсорная система человека – зрительная. С помощью зрительной системы человек получает большую часть информации об окружающем мире. Зрение позволяет воспринимать свет, различать его яркость, адаптироваться к различным уровням освещенности, различать цвета и их оттенки, отличать объекты от фона и распознавать их, определять расположение объектов в пространстве и следить за их перемещением.

Система компьютерного зрения позволяет воспроизводить часть функций зрительной системы человека: сегментации изображений, обнаружения объектов, слежения за объектами, восстановления и дополнения изображений, определения движения. В некоторых случаях компьютерное зрение превосходит человеческое, например работа в спектральных диапазонах, которые не воспринимаются человеческим глазом (инфракрасный, ультрафиолетовый диапазоны). Использование компьютерного зрения для анализа окружающей обстановки обеспечивает автономную транспортную систему данными для автоматического принятия решений и выполнения действий без участия человека или с его минимальным участием.

Автономная транспортная система может предполагать различные уровни участия человека:

- 1) система анализирует окружающую обстановку, принимает решение и предлагает действие, которое выполняет человек;
- 2) система анализирует окружающую обстановку, принимает решение и выполняет действие, которое контролирует человек в непосредственной близости;
- 3) система анализирует окружающую обстановку, принимает решение и выполняет действие, которое удаленно контролирует человек;
- 4) система анализирует окружающую обстановку, принимает решение и выполняет действие без контроля человека.

Для безопасной эксплуатации автономной транспортной системы необходимо оперативно и с высокой точностью определять положение транспортного средства в пространстве, анализировать информацию о текущей обстановке и наличие других транспортных средств или крупногабаритных объектов поблизости. Высокоточные системы позиционирования используются для стабилизации положения подвижных объектов в различных транспортных системах, для обеспечения контроля положения и, как следствие, повышения безопасности. Повышение безопасности эксплуатации транспортной системы позволяет увеличить интенсивность транспортного потока и пропускную способность транспортной сети, что повышает экономическую эффективность транспортной отрасли.

Высокоточные системы позиционирования пространственно-распределенных объектов применимы не только на транспорте, но и в промышленности, например при сцепке деталей, когда точность совмещения деталей влияет на прочность, герметичность и надежность функционирования промышленного изделия. Одна деталь – база, другая – распределенный пространственный объект, который нужно расположить относительно базы, обеспечив минимальное усилие или минимальную нагрузку на элементы конструкции в процессе совмещения деталей.

В статье приводится структура и описывается принцип действия измерительного комплекса, позволяющего выполнять высокоточные измерения положения объектов относительно стационарной базы методами компьютерного зрения, определяется порядок использования и особенности юстировки элементов. Работа измерительного комплекса иллюстрируется на примере из морской транспортной отрасли, в задаче контроля положения автономного морского крупнотоннажного судна относительно причала при выполнении погрузо-разгрузочных работ и швартовных операций.

Также описываются способы применения измерительного комплекса в автодорожном, воздушном и железнодорожном транспорте.

**1. Постановка задачи.** Примерами задач высокоточного определения положения объектов относительно стационарной базы (высокоточного позиционирования) являются: позиционирование морского судна относительно причала при выполнении погрузо-разгрузочных работ и швартовных операций; позиционирование железнодорожного вагона при взвешивании на весах, при наливе цистерн, при загрузке сыпучим грузом; позиционирование корпуса воздушного судна в ангаре для выполнения ремонтно-профилактических работ, при стыковке с телескопическим трапом; позиционирование грузового автомобиля при загрузке и выгрузке, при взвешивании на весах относительно пакгауза.

При решении задачи высокоточного определения положения объектов относительно стационарной базы необходимо бесконтактно с высокой точностью выполнять измерения продольного, поперечного и вертикального смещения подвижного объекта, учитывая особенности его размера, формы, скорости маневрирования, скорости движения. Задача высокоточного определения положения объектов относительно стационарной базы должна решаться независимо от уровня освещенности, погодных условий, изменения взаимного расположения объектов (частичное или полное перекрытие отслеживаемого объекта), с оценкой текущих и прогнозированием будущих пространственно-скоростных параметров отслеживаемого объекта.

Для решения задачи объекты должны непрерывно отслеживаться на всех этапах измерений. Этапы измерений на примере морского крупнотоннажного судна включают: подход судна, швартовку судна, погрузо-разгрузочные работы и отход судна от причала. Под круп-

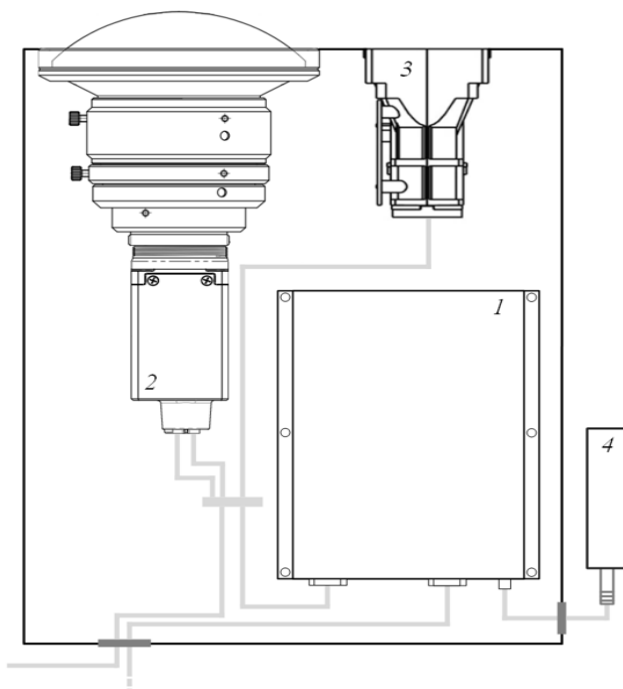
нотоннажным судном в данной работе подразумевается судно дедвейтом свыше 1.5 тыс. т и длиной свыше 60 м.

**2. Предлагаемый подход.** Для решения задачи позиционирования крупногабаритных объектов, таких, как морские крупнотоннажные суда, а также железнодорожные вагоны, корпуса воздушных судов, грузовые автомобили, предлагается использовать высокоточный измерительный комплекс, построенный на базе оптических измерителей.

**2.1. Модель измерительного комплекса на базе оптических измерителей.** Программно-аппаратный комплекс высокоточного определения положения объектов относительно стационарной базы включает оптические измерители, каждый из которых состоит из камеры компьютерного зрения и лазерного дальномера. Если в комплексе задействуется два и более измерителя, то компьютер с модемом в составе находится только в управляющем измерителе (рис. 1), оборудование управляемого измерителя подключается к компьютеру управляющего. По аналогичной схеме подключаются три и более измерителей: один управляющий измеритель и несколько управляемых измерителей. Обмен данными между компьютером и компонентами оптических измерителей происходит по технологии Ethernet.

Назначение измерителей — это высокоточные измерения продольного, поперечного и вертикального смещения объектов, измерения скоростей движения, определение типа движения (например, смещение, поворот), прогнозирование будущих пространственно-скоростных параметров измеряемого объекта. Измерители устанавливаются на неподвижное основание, в прямой видимости измерителей находится объект измерений. Измерение поперечного смещения выполняет лазерный дальномер, установленный в оптический измеритель. Метод измерения основан на сравнении фаз сигнала лазера и сигнала, отраженного от объекта. Задержка при распространении волны создает сдвиг фаз, который измеряется. Лазер работает постоянно, его излучение амплитудно модулируется сигналом определенной частоты [1–3]. Фаза отраженного сигнала сравнивается с фазой опорного сигнала [4, 5].

Измерения вертикального и горизонтального смещения выполняются методами компьютерного зрения с учетом данных о поперечном смещении объекта. Метод измерения включает анализ кадров видеоряда с камеры оптического измерителя для определения подвижных областей изображения, оценки их характеристик, выявления характера движения и выбора объектов (участков изображения), которые потенциально принадлежат корпусу морского судна или его



**Рис. 1.** Схема управляющего оптического измерителя: компьютер (1), камера компьютерного зрения с объективом (2), лазерный дальномер (3), антенна 3G/4G (LTE) (4).



палубных конструкциям. Выбранные объекты отслеживаются в реальном времени [6], рассчитывается скорость и разность их смещения, определяются траектории движения. По разности сдвига объектов на изображениях рассчитываются вертикальные и горизонтальные величины смещения объекта в пространстве, т.е. величина смещения в пикселах на изображении соотносится с величиной смещения в метрах. По смещению объектов на изображении (отслеживаемых участков изображения) вычисляются пространственно-скоростные параметры отслеживаемого крупногабаритного площадного объекта — морского крупнотоннажного судна.

2.2. Высокоточное позиционирование морского крупнотоннажного судна относительно причала. В задаче контроля положения автономного морского судна относительно причала измерители устанавливаются на причале на неподвижном основании в непосредственной близости от края причала (рис. 2), чтобы не допустить перекрытия луча лазера и объектива камеры работниками порта, транспортными средствами и причальными сооружениями. В прямой видимости находится измеряемый объект — морское крупнотоннажное судно.

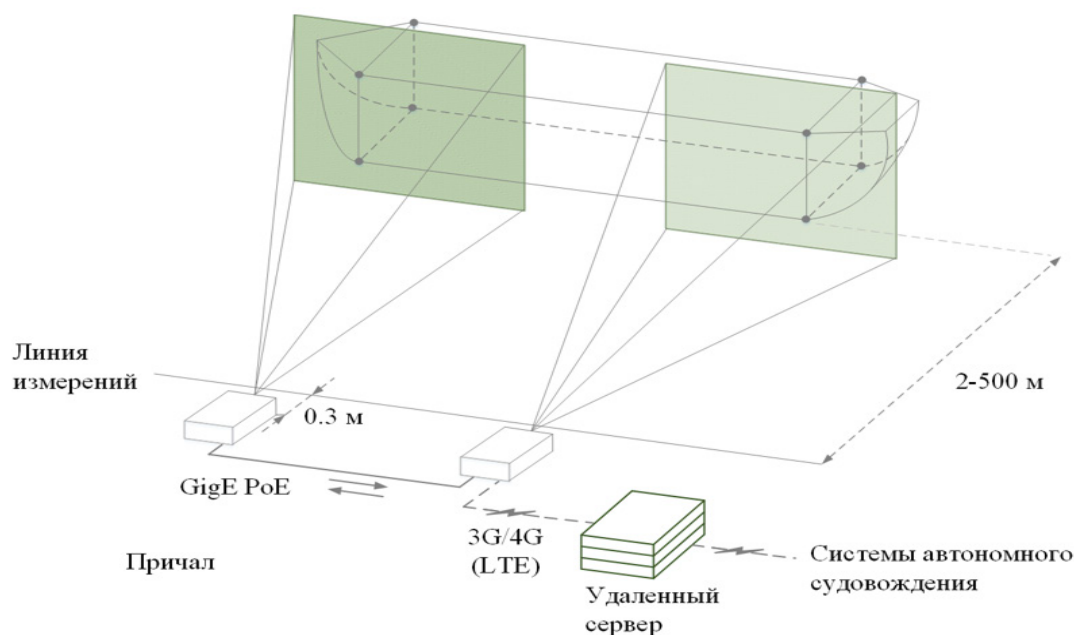


Рис. 2. Схема установки комплекса из двух оптических измерителей на причале.

Измерения начинаются при подходе судна к причалу, продолжают во время швартовки судна и выполнении погрузо-разгрузочных работ. Границы области отслеживания судна относительно причала составляют от 2 до 500 м в продольном, поперечном и вертикальном направлениях, что обусловлено требованиями к дистанции последнего маневра морского судна.

Согласно постановлениям по морским портам России на 2024 г. скорость движения судна во время швартовных операций не превышает 3 узлов (5.556 км/ч). Комплекс начинает работать еще на этапе подхода судна к причалу, когда судно находится на расстоянии 300–500 м, на этом этапе скорость судна может достигать 5 узлов.

Оптические измерители, как и все оборудование, устанавливаемое на причале, должно быть промышленного исполнения. Измерители размещаются на причале и при сильном волнении моря кратковременно могут оказаться под водой. Поэтому класс защиты оборудования должен быть не ниже IP67 (6 — пыленепроницаемое (полная защита от пыли), 7 — водонепроницаемое (кратковременное погружение на глубину до 1 м)). Оборудование, которое находится внутри корпуса оптических измерителей, может иметь класс защиты IP00 (0 — нет защиты, 0 — нет защиты).

Дальномеры, включенные в состав измерителей должны быть безопасны для человеческого глаза, что подразумевает работу в ближнем инфракрасном диапазоне, длина волны должна быть от 900 до 1100 нм. Требования к характеристикам лазерных дальномеров приведены в табл. 1.

**Таблица 1.** Требования к характеристикам лазерного дальномера

| Наименования          | Характеристики                               | Примечания                                                                                                                                     |
|-----------------------|----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Метод измерений       | Фазовый                                      |                                                                                                                                                |
| Дистанция             | От 2 до 500 м                                |                                                                                                                                                |
| Погрешность измерения | Не более $\pm 1$ мм на каждый метр дистанции | Зависимость точности от расстояния линейная:<br>$\pm 20$ мм на дистанции в 20 м,<br>$\pm 50$ мм на дистанции в 50 м<br>и далее по возрастающей |
| Температурный режим   | $-20...+50^{\circ}\text{C}$                  |                                                                                                                                                |
| Частота данных        | Не менее 20 Гц                               |                                                                                                                                                |
| Класс защиты          | От IP00 (модуль без корпуса)                 | Дальномер устанавливается внутри корпуса оптического измерителя                                                                                |
| Безопасность          | Класс 1                                      | Безопасный для человеческого глаза ближний инфракрасный диапазон, от 900 до 1100 нм                                                            |

Требования к характеристикам к камерам компьютерного зрения и объективам представлены в табл. 2, 3. Камера в оптическом измерителе нужна для оптического контроля и измерений, следовательно, необходима промышленная камера компьютерного зрения, которая обладает устойчивостью к механическим, вибрационным, электромагнитным воздействиям, что позволяет использовать ее в различных погодных условиях. Должна быть обеспечена защита от воды и пыли, виброустойчивость, возможность работы в широком температурном диапазоне.

Характеристики компьютера, рассмотренные в табл. 4, выбраны на основе требований по совместимости с камерами компьютерного зрения и лазерными дальномерами, необходимостью обработки нескольких потоков данных, поступающих с лазерных дальномеров и камер компьютерного зрения, требований к вычислительной среде исполнения алгоритмов компьютерного зрения. Камера и лазерный дальномер в корпусе оптического измерителя располагаются на одном уровне (ось направлена по касательной в точке установки оптического измерителя параллельно земле) с соблюдением сонаправленности оптических осей. Регулирование взаимного расположения выполняется при помощи поворотных кронштейнов, винтов или других конструктивных элементов. Юстировка необходима для устранения погрешностей, выявленных в результате контроля или поверки камер и лазерных дальномеров, уменьшения влияния статических ошибок на вычисления. На причале оптические измерители устанавливаются перпендикулярно линии измерений, которая может не совпадать с линией причала ввиду его конструктивных особенностей.

**Таблица 2.** Требования к характеристикам камеры компьютерного зрения

| Наименования              | Характеристики              | Примечания                                                                                                                                   |
|---------------------------|-----------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Разрешение                | Не менее $640 \times 480$   | Чем выше разрешение, тем больше данных об объекте съемки                                                                                     |
| Тип изображения           | Монохромное                 | Работа с цветными, мульти- и гиперспектральными изображениями в алгоритмах, на базе которых работает оптический измеритель, не предусмотрена |
| Частота кадров            | Не менее 40 кадр/с          | Необходимо для корректной работы алгоритмов компьютерного зрения для оптического контроля и измерений                                        |
| Температурный режим       | $-10...+50^{\circ}\text{C}$ |                                                                                                                                              |
| Интерфейс передачи данных | GigE                        | Gigabit Ethernet позволяет передавать данные на расстояние до 100 м с высокой скоростью и без потерь                                         |
| Тип исполнения            | Промышленный                |                                                                                                                                              |

Таблица 3. Требования к характеристикам объектива

| Наименования        |                | Характеристики | Примечания                                                                                                                           |
|---------------------|----------------|----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Фокусное расстояние |                | ~ 5 мм         | Для задач оптического контроля и измерений, для таких крупногабаритных объектов, как морские суда, необходим широкофокусный объектив |
| Диапазон диафрагмы  |                | F2.4-F11       | Регулировка размера диафрагмы в зависимости от условий окружающей среды позволит получить желаемый уровень экспозиции                |
| Угол обзора         | по диагонали   | > 100°         | Минимально необходимые значения                                                                                                      |
|                     | по горизонтали | > 80°          |                                                                                                                                      |
|                     | по вертикали   | > 60°          |                                                                                                                                      |
| Температурный режим |                | –10...+50°C    |                                                                                                                                      |
| Тип исполнения      |                | Промышленный   |                                                                                                                                      |

Время рабочего цикла измерителя зависит от длительности подхода судна к причалу, швартовных операций и необходимости в позиционировании судна относительно причала на протяжении стоянки или погрузо-разгрузочных работ. Среднее время рабочего цикла измерителя составляет 1 ч. Рабочий цикл измерителя начинается с момента, когда судно появляется в прямой видимости измерителя. В зависимости от типа причала (например, пирс или набережная стенка), от близости других причалов к целевому (причал, на который устанавливается измерительный комплекс) дистанция до судна может достигать 500 м.

При подаче питания измерительный комплекс входит в режим самотестирования, если все компоненты измерителей функционируют, измерительный комплекс переходит в режим измерений и начинает транслировать данные с заданной частотой. Данные измерений и расчетов передаются на удаленный сервер, в свою очередь с удаленного сервера данные переходят потребителям

Таблица 4. Требования к характеристикам компьютера оптического измерителя

| Наименования                                                                                 |                | Характеристики    | Примечания                                                    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|-------------------|---------------------------------------------------------------|
| Производительность ЦПУ                                                                       |                | ≥ 260 GFLOPS      |                                                               |
| Разрядность ЦПУ                                                                              |                | ≥ 64-bit          |                                                               |
| Тип оперативной памяти                                                                       |                | ≥ DDR4            |                                                               |
| Объем оперативной памяти                                                                     |                | ≥ 16 Gb           |                                                               |
| Объем ПЗУ                                                                                    |                | ≥ 120 Gb          | Для кратковременного хранения данных с целью их оценки        |
| Разрядность операционной системы                                                             |                | ≥ 64-bit          |                                                               |
| Производительность графического процессора в операциях с плавающей точкой одинарной точности |                | ≥ 115 GFLOPS      |                                                               |
| Количество портов                                                                            | RJ-45          | ≥ 2 x 10/100/1000 | Необходимые интерфейсы для подключения периферийных устройств |
|                                                                                              | RS-232/422/485 | ≥ 2               |                                                               |
|                                                                                              | USB 3.x        | ≥ 4               |                                                               |
| Температурный режим                                                                          |                | –10...+50°C       |                                                               |

информации. В контексте позиционирования морского крупнотоннажного судна относительно причала потребителями информации являются системы автономного судовождения.

На причале устанавливается пара оптических измерителей для независимых измерений для носа и кормы судна. Поэтому потребители информации получают величины смещения (продольного, поперечного и вертикального) для каждой из оконечностей судна, а также скорости сближения носа и кормы судна с причалом, скорости смещения по вертикали и горизонтали и величины, которые относятся к корпусу судна, а не к его частям: угол между причалом и диаметральной плоскостью судна, прогнозируемая траектория движения судна.

Величины поперечного смещения носа и кормы судна относительно причала измеряются лазерным дальнометром. На основе поперечного смещения с применением алгоритмов компьютерного зрения рассчитываются величины смещения носа и кормы судна по вертикали и горизонтали.

Алгоритмы компьютерного зрения, составляющие основу оптических измерителей, перечислены ниже.

1. Алгоритм идентификации крупногабаритного площадного объекта в кадре, состоящий из двух этапов. На первом этапе определяется движение в кадре путем оценки разницы между соседними кадрами. Вторым этапом является выделение связанных компонент (контуров), их анализ и составление карты движущихся участков изображения. Алгоритм позволяет определить области изображения с постоянным движением и исключить случайно попавшие в кадр подвижные объекты.

2. Алгоритм выбора объектов отслеживания. Он позволяет определить объекты с характеристиками, которые прослеживаются в амплитудно-частотном спектре: контуры идентификационных знаков и конструктивных особенностей, контрастные области и видимые границы коррозионного рисунка. Это важно для алгоритма отслеживания объектов, который работает в частотной области.

3. Алгоритм отслеживания крупногабаритного площадного объекта по его наблюдаемому фрагменту работает с учетом возможности частичного перекрытия объекта и выхода объекта за границы изображения, поворота и изменения масштаба объекта.

В основе алгоритма отслеживания крупногабаритного площадного объекта по его наблюдаемому фрагменту лежит работа в частотной области. Одновременно отслеживается несколько объектов — подвижных участков изображения. Для каждого отслеживаемого объекта создается фильтр-функция:

$$U = \frac{A}{B},$$

где  $A$ ,  $B$  — компоненты фильтр-функции, деление поэлементное.

Фильтр-функция (также называемая фильтром или передаточной функцией фильтра), представляет собой матрицу коэффициентов характерных особенностей объекта (участка изображения) в частотной области. Под характерными особенностями объекта понимаются особенности изображения, которые прослеживаются в амплитудно-частотном спектре (контрастные области, видимые границы). Все операции над матрицами выполняются поэлементно.

Компоненты фильтр-функции представляют собой набор данных усредненных определенным образом:

$$A = \sum_{i=1}^n F(g) \times \bar{F}_i(u, v), B = \sum_{i=1}^n N \times F_i(u, v) \times \bar{F}_i(u, v),$$

где  $\times$  — операция поэлементного умножения матриц,  $F(g)$  — матрица частот двумерной гауссианы,  $F_i(u, v)$  — матрица частот изображения объекта. Здесь  $u$ ,  $v$  — частоты изображения по осям  $x$  и  $y$ ,  $\bar{F}_i(u, v)$  — комплексно-сопряженная матрица частот изображения объекта (поворот изображения на  $180^\circ$ ),  $N$  — матрица 3%-ного случайного импульсного шума,  $n$  — целое число, обозначающее количество изображений выборки для создания первоначальной фильтр-функции (например, 125).

Гауссиана строится на координатной сетке по размерам отслеживаемого участка изображения (объекта), пик гауссианы приходится на центр отслеживаемого объекта:

$$g(X, Y) = \exp \left( -\frac{(X - i)^2}{\sigma_x^2} - \frac{(Y - j)^2}{\sigma_y^2} \right),$$

где  $g = g(X, Y)$  — гауссиана в матричной форме (таблично заданная функция),  $X, Y$  — координаты пикселей по размерам участка изображения,  $i, j$  — координаты центра отслеживаемого объекта,  $\sigma_x^2, \sigma_y^2$  — величины дисперсии по  $x, y$ . Например,

$$X = \uparrow 480 \begin{cases} 01234\dots 639, \\ 01234\dots 639, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

$$Y = \begin{matrix} \leftarrow 640 \rightarrow \\ \begin{cases} 0\ 00, \\ 111, \\ 222, \\ \dots \\ \dots \\ 479. \end{cases} \end{matrix}$$

На каждой итерации алгоритма, по мере накопления данных, фильтр-функция  $U$  дополняется. Для оценки степени корреляции значений матриц  $U$  и  $F(u, v)$  используется свертка функций:

$$\hat{F}(u, v) = U \times F(u, v),$$

где  $\hat{F}(u, v)$  — результат свертки функций,  $U = U(u, v)$  — фильтр-функция,  $F(u, v)$  — матрица частот изображения, где предположительно находится сместившийся объект.

Метод составляющий основу алгоритма отслеживания крупногабаритного площадного объекта по его наблюдаемому фрагменту является адаптивным методом машинного обучения, в основе которого лежит обучение в реальном времени путем изменения параметров и накопления данных в условиях постоянно изменяющейся среды. Все этапы процесса обработки и накопления данных верифицируемы, что позволяет гарантировать значение точности измерений в определенном диапазоне.

Выполняется мониторинг движения морского крупнотоннажного судна.

1. Координаты отслеживаемых объектов (участков изображения) фильтруются. Алгоритм фильтрации состоит из двух циклических фаз: предсказание и корректировка. Целью алгоритма является вычисление апостериорной оценки состояния системы как линейной комбинации априорной оценки и взвешенной разницы между фактическим измерением и экстраполированным. Под системой понимается система контроля, состоящая из объекта наблюдения и измерителя. В основе алгоритма фильтрации — дискретный фильтр Калмана [7–9]. 2. Анализируются траектории отслеживаемых объектов (участков изображения). Определяется характер движения и сопоставляется разность величин.

3. По разности сдвига объектов на изображениях рассчитываются вертикальные и горизонтальные величины смещения объекта в пространстве, т.е. величина смещения в пикселях на изображениях соотносится с величиной смещения в метрах.

4. Рассчитываются скорости смещения.

5. Строится трехмерная траектория смещения объекта — морского крупнотоннажного судна. В основе алгоритма лежит регрессионный анализ — метод наименьших квадратов [10, 11].

В течение рабочих циклов оптических измерителей вывод данных на изображение не осуществляется. Также не ведется запись с камер, входящих в состав оптических измерителей. Камеры предназначены исключительно для расчета величин продольного и вертикального смещения методами компьютерного зрения.

Конечную информацию с измерительного комплекса потребители информации получают в виде полей информационного сообщения. Для двух измерителей (для носа и кормы судна) конечная информация — это продольные, вертикальные и горизонтальные величины смещения,



скорости смещения по вертикали и горизонтали, скорость сближения с причалом, угол между диаметральной плоскостью судна и причалом, тип движения, прогнозируемая траектория.

**2.3. Высокоточное позиционирование автодорожных транспортных средств.** Примерами задач позиционирования автодорожных транспортных средств являются: позиционирование грузового автомобиля при загрузке и выгрузке относительно пакгауза; позиционирование автоцистерны на сливноналивной эстакаде; позиционирование автодорожного транспортного средства при взвешивании на весах.

Контроль положения грузового автомобиля при взвешивании на весах с помощью оптического измерителя (рис. 3) позволит регулировать грузопоток, проходящий через автомобильные весы, автоматизировать процесс взвешивания и исключить неверный результат взвешивания при неполном заезде или съезде автомобиля с платформы весов. При взвешивании автодорожного грузового автомобиля на весах грузовой автомобиль заезжает на платформу весов, платформа стабилизируется, фиксируется взвешивание. Использование оптических измерителей в задачах позиционирования транспортных средств с целью регулирования и автоматизации процессов парковки, погрузки/разгрузки позволит увеличить грузооборот, повысить безопасность транспортных процессов, интенсивность транспортного потока и пропускную способность транспортной системы.

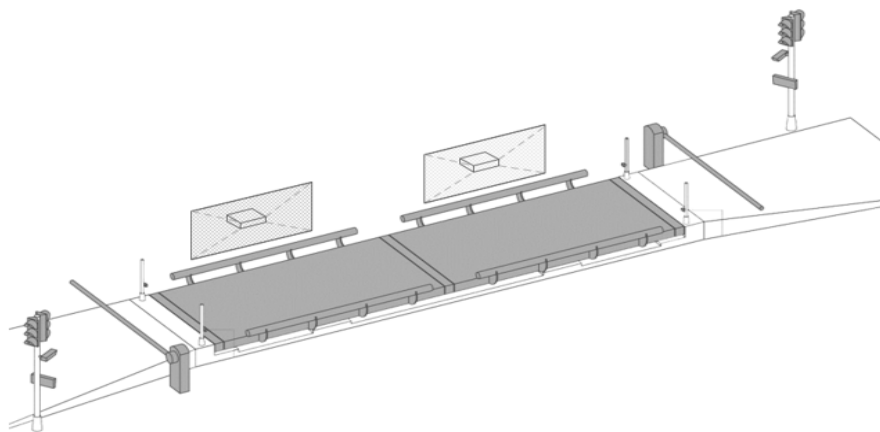


Рис. 3. Схема установки оптических измерителей на автомобильных весах.

**2.4. Высокоточное позиционирование воздушных транспортных средств.** Позиционирование корпусов воздушных судов требуется при постановке в ангар для выполнения ремонтно-профилактических работ, стыковке с телескопическим трапом и размещении в ангарах.

Для выполнения ремонтно-профилактических работ воздушное судно заводится в ангар и размещается на отведенном для него месте. Относительно судна в рабочей зоне ориентируется и подводится док.

Задачу автоматизации позиционирования судна в ангаре можно решить с помощью оптических измерителей (рис. 4), использование которых позволит ускорить процесс парковки воздушного судна.

**2.5. Высокоточное позиционирование железнодорожных транспортных средств.** Примерами задач решаемых для железнодорожных транспортных средств являются: размещение вагонов на путях необщего пользования (например, на территории порта) при наливе цистерн, загрузке сыпучим грузом, выгрузке груза; замена тележек под вагонами для обеспечения бесперегрузочного железнодорожного сообщения в случаях, когда перегрузку проводить опасно или экономически невыгодно; токарная обработка поверхностей катания колесных пар вагонов или паровозов без выкатки тележек на специальных токарных станках [12]; установка в определенном положении железнодорожного вагона при взвешивании на весах с расцепкой и без расцепки железнодорожного состава; размещение железнодорожных цистерн на сливноналивной эстакаде.

При позиционировании железнодорожных цистерн на сливноналивной эстакаде цистерны заводятся на эстакаду лебедкой с тросом, установленным в тупиковой части железнодорож-



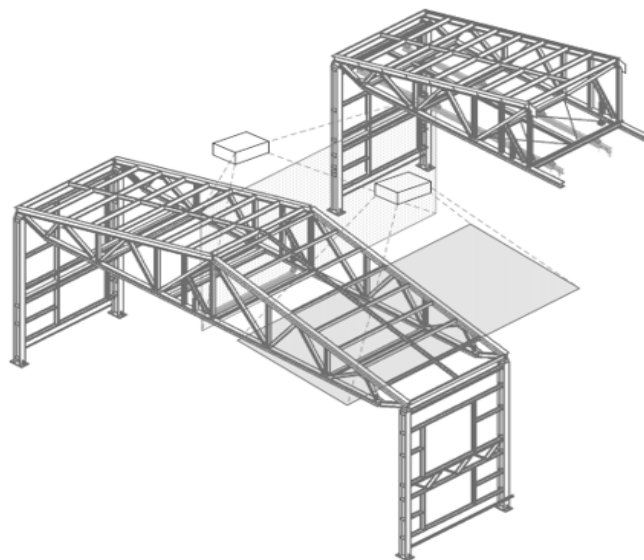


Рис. 4. Схема установки оптических измерителей в ангаре ремонтно-профилактического обслуживания.

ного пути. Колеса цистерн блокируются, проводится заземление цистерн, подсоединяются патрубки налива и перекачивается нефтепродукт или другой наливной груз. Либо при сливе груза сливоналивные устройства заводят под цистерны и подсоединяют к патрубкам, слив осуществляется с помощью насосов.

Задача высокоточного определения положения железнодорожных цистерн относительно патрубков на сливоналивной эстакаде может быть решена с применением оптических измерителей. Использование оптических измерителей на сливоналивных эстакадах способно (рис. 5): повысить точность ориентирования цистерн относительно патрубков налива, тем самым повысить безопасность их эксплуатации путем информирования об аварийной ситуации; автоматизировать процесс перемещения цистерны, сообщая о скорости движения, дальности перемещения, времени остановок.

С помощью оптических измерителей можно получить параметры смещения вагонов, учитывая особенности их размеров и скорости движения, ускорить процесс загрузки/выгрузки вагонов, контролировать сдвиг вагонов во время погрузки или разгрузки, повысить точность позиционирования вагонов при обслуживании и избежать ошибок взвешивания, вызванных неправильным положением вагонов на весах.

**Заключение.** В алгоритм работы измерительного комплекса включены условия, диктуемые планами швартовных операций и сборником обязательных постановлений по порту, на причал которого устанавливаются измерители. Это необходимо для алгоритмов отслеживания и идентификации судна в кадре, так как необходимо заранее знать:

- 1) какой разворот может выполнить судно и на каком расстоянии от причала;
- 2) под каким углом судно подходит к причалу;
- 3) скорость сближения судна с причалом;
- 4) сколько буксиров может кантовать судно и возможность того, что буксир будет в кадре непосредственно перед судном в прямой видимости измерителей.

Принимаются во внимание факторы рабочей среды и характеристики причала, на котором устанавливаются измерители, что влияет на:

- 1) необходимость учета присутствия в кадре объектов с похожими свойствами (другое судно) и иных подвижных объектов (плавающих знаков или порталных кранов);
- 2) дистанцию между установленными оптическими измерителями, которая зависит от размеров и типов судов, швартуемых к причалу, дистанция между измерителями должна быть меньше предполагаемого размера судна.

Для использования измерительного комплекса на других причалах он должен пройти калибровку с учетом особенностей целевого причала, типов судов и прочих условий, перечисленных выше. С помощью измерительного комплекса в целях отличных от задач морской транс-

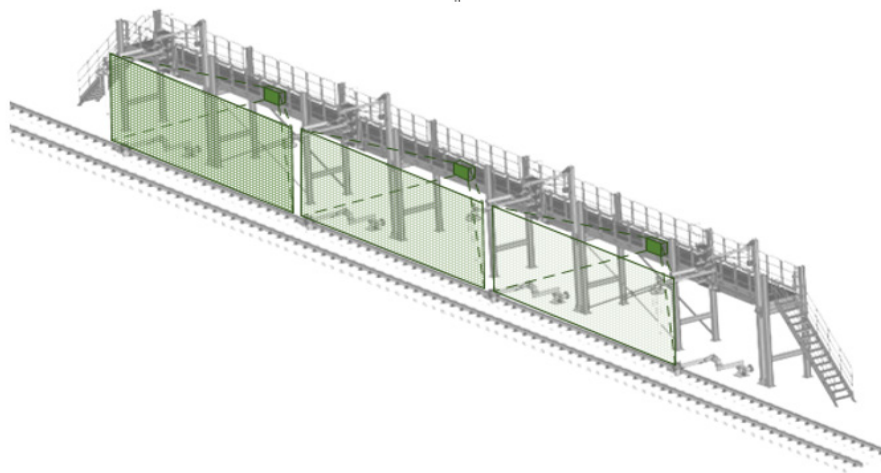


Рис. 5. Схема установки оптических измерителей на сливноналивной эстакаде.

портной отрасли, например размещение железнодорожного вагона при загрузке сыпучим грузом или грузового автомобиля относительно пакгауза, при реализации алгоритма должны быть учтены характеристики рабочей среды измерителей, а также особенности наблюдаемого транспортного средства.

Программно-аппаратный комплекс высокоточного определения положения объектов относительно стационарной базы предназначен для работы в составе систем автономного транспорта и решения задач контроля положения крупногабаритных объектов в режиме реального времени. Конечные потребители (системы автономного транспорта) актуальную информацию о смещении наблюдаемого объекта, скоростях движения, траекториях движения, а также прогнозируемые данные получают в виде полей информационного сообщения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Poujouly S., Journet B.* A Twofold Modulation Frequency Laser Range Finder // *J. Optics A: Pure and Applied Optics*. 2002. № 4. P. 356–363.
2. *Zheng X.Y., Zhao C., Zhang H.Y., Zheng Z., Yang H.Z.* Coherent Dual-frequency Lidar System Design for Distance and Speed Measurements // *Intern. Conf. on Optical Instruments and Technology: Advanced Laser Technology and Applications*. International Society for Optics and Photonics. Beijing, China, 2018. V. 10619.
3. *Jia F.X., Yu J.Y., Ding Z.L., Yuan F.* Research on Real-time Laser Range Finding System // *Applied Mechanics and Materials*. 2013. V. 347.
4. *Beraldin J.A., Steenaart W.* Overflow Analysis of a Fixed-Point Implementation of the Goertzel Algorithm // *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. 1989. V. 36. № 2. P. 322–324.
5. *Finlayson D.M., Sinclair B.* *Advances in Lasers and Applications* // Boca Raton. Florida, USA. CRC Press, 1998. P. 346.
6. *Lopatina V.V.* Method of Fragment Based Tracking of Displacement of a Large Areal Object in Images // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021. V. 2061. P. 012113.  
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/2061/1/012113>.
7. *Kalman R.E.* A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // *J. Basic Eng.* 1960. V. 82(1). P. 35–45.
8. *Welch G., Bishop G.* An Introduction to the Kalman Filter // *Technical Report*. University of North Carolina at Chapel Hill, USA. 1995. V. 95–041.
9. *Grewal M.S., Andrews A.P.* *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB*. N. Y., USA: John Wiley and Sons, 2001.  
<https://doi.org/10.1002/9780470377819>.
10. *Линник Ю.В.* Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. Изд. 2-е, исправ. и доп. М.: Физматгиз, 1962. 349 с.
11. *Митин И.В., Русаков В.С.* Анализ и обработка экспериментальных данных. Учебно-методическое пособие для студентов младших курсов. М.: Изд-во НЭВЦ ФИПТ, 1998. 48 с. ISBN5–8279–0022–2.
12. *Богданов А.Ф., Иванов И.А., Терехов П.М.* Восстановление профиля поверхности катания колесных пар без выкатки // *Бюллетень результатов научных исследований*. С.-Петербург: Изд. Петербургского государственного университета путей сообщения. 2014. № 1. С. 58–68.

УДК 621.45.02

## УПРАВЛЕНИЕ ЧАСТОТАМИ ВРАЩЕНИЯ РОТОРОВ ТУРБОРЕАКТИВНЫХ ДВУХКОНТУРНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ДВУХДВИГАТЕЛЬНОГО САМОЛЕТА С ЦЕЛЬЮ ОБЕСПЕЧЕНИЯ БАЛАНСИРОВКИ ИХ ТЯГИ В ПОЛЕТЕ

© 2024 г. А. Ю. Бурова<sup>b, \*</sup>, Н. Ю. Кочетков<sup>b, \*\*</sup>, В. А. Нестеров<sup>b</sup>, К. И. Сыпало<sup>a, \*</sup>

<sup>a</sup>Центральный аэрогидродинамический институт, г. Жуковский, Россия

<sup>b</sup>Московский авиационный институт

(национальный исследовательский университет), Москва, Россия

\*e-mail: frambe@mail.ru

\*\*e-mail: kolabuy@gmail.com

Поступила в редакцию 19.02.2024 г.

После доработки 12.07.2024 г.

Принята к публикации 16.10.2024 г.

Рассмотрены вопросы, связанные с исследованием модели функциональной зависимости тяги двигателей от их рабочих параметров в интересах снижения асимметрии тяги самолета вследствие разнотяговости его двигателей. Цель исследования — управление частотами вращения роторов двигателей самолета на основе трехмерной модели зависимости тяги двигателей от их частот вращения роторов турбин компрессоров низкого и высокого давления. Использованы методы математической статистики и программно-аппаратного моделирования. Результаты исследования показали и подтвердили возможность балансировки тяги двигателей самолета при управлении частотами вращения роторов его двигателей в полете. Разработана трехмерная модель зависимости тяги двигателя от значений частот вращения двух его роторов. Эта модель позволяет обеспечивать управление частотами вращения обоих роторов двигателя путем дополнительной подачи в них топлива для формирования новых значений этих частот по результатам сравнительной оценки их значений с учетом величин их первых производных как знакопеременных специальных поправок, обеспечивающих автоматическое контролирование скорости и направленности изменения контролируемых значений частот.

**Ключевые слова:** асимметрия тяги, двухдвигательный самолет, программа управления, сила тяги, турбореактивный двухконтурный двигатель, частота вращения ротора

DOI: 10.31857/S0002338824050102, EDN: TDYRRZ

## CONTROL OF ROTOR SPEEDS OF TURBOJET TWIN-CIRCUIT ENGINES OF A TWIN-ENGINE AIRPLANE IN ORDER TO BALANCE THEIR THRUST IN FLIGHT

A. Yu. Burova<sup>b, \*</sup>, N. Yu Kochetkov<sup>b, \*\*</sup>, V. A. Nesterov<sup>b</sup>, K. I. Sypalo<sup>a, \*</sup>

<sup>a</sup>Central Aerohydrodynamic Institute. Zhukovsky, Russia

<sup>b</sup>Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

\*e-mail: frambe@mail.ru

\*\*e-mail: kolabuy@gmail.com

The questions related to the research of the model of functional dependence of the engines thrust on their operating parameters in the interests of reducing the asymmetry of the aircraft thrust due to the different thrust of its engines are considered. The purpose of the study is to control the rotor speeds of aircraft engines on the basis of a three-dimensional model of the dependence of engine thrust on their rotor speeds of turbine rotors of low-pressure compressors and high-pressure compressors. Methods of mathematical statistics and hardware-software modeling were used in the study. The results of the study showed and confirmed the possibility of balancing the thrust of aircraft engines when controlling the rotor speeds of its engines in flight. A three-dimensional model of engine thrust dependence on the values of rotational frequencies of its two rotors has been developed. This model allows to provide control of rotation frequencies of both rotors of the

engine by means of additional fuel supply to them for formation of new values of these frequencies according to the results of comparative estimation of their values taking into account the values of their first derivatives as sign-variable special corrections providing automatic control of speed and direction of change of controlled values of frequencies.

*Keywords:* thrust asymmetry, twin-engine aircraft, control program, thrust force, turbojet twin-circuit engine, rotor speed

**Введение.** Тягой турбореактивных двухконтурных двигателей (далее ТРДД) можно управлять путем изменения контролируемых значений частот вращения роторов турбин компрессоров низкого и высокого давления ТРДД [1]. Постоянный и непрерывный автоматический контроль значений этих частот обуславливает возможность использования их в качестве параметров тяги [1, 2]. Для исследования зависимости тяги ТРДД  $R$  от частот вращения роторов его турбин, так называемых ротора низкого давления (РНД)  $n_1$  и ротора высокого давления (РВД)  $n_2$ , применяются различные модели этой зависимости [3]. Их теоретической основой являются методы математической статистики, позволяющей оценивать тягу двигателей в зависимости от частот вращения их роторов по результатам стендовых испытаний этих двигателей в условиях их серийного производства.

Потеря тяги одного из ТРДД силовой установки самолета в полете может начаться при перегреве двигателя из-за чрезмерно длительных или частых включений режима повышенной тяги в условиях высоких температур воздуха, а также при механическом повреждении турбины компрессора и (или) механическом разрушении ее рабочих лопаток вследствие таких неконтролируемых факторов, как коррозионное и эрозионное действие газов и эрозия мелкими посторонними частицами (песком). Потеря тяги будет зафиксирована и скомпенсирована системой управления силовой установкой, но только в случае, когда это приведет к снижению значений частот вращения РНД и РВД ниже минимального значения их рабочих диапазонов [2]. Поэтому потерю тяги ТРДД силовой установки самолета в полете следует определять по уменьшению значений частот вращения РНД или РВД одного ТРДД ниже значений частот вращения соответствующего ротора другого ТРДД с учетом уровня разнотяговости двигателей. Такое сравнение частот вращения роторов позволяет оценивать необходимость повышения тяги двигателя в полете. Для того, чтобы свести к минимуму регулирование тяги в полете, при отборе пары ТРДД для самолета условие минимальной разнотяговости двигателей одной серии должно стать важнейшим критерием отбора после прохождения двигателями глубокого тестирования технического состояния в условиях серийного производства [3].

Программы управления только по частоте вращения РНД  $n_1 + \delta n_1 = \text{const}$  или только по частоте вращения РВД  $n_2 + \delta n_2 = \text{const}$  при знакопеременности специальных поправок  $\delta n_1$  и  $\delta n_2$  этих частот используются в системах управления силовыми установками среднемагистральных и дальнемагистральных двухдвигательных самолетов для контроля и управления тягой ТРДД. Поэтому частоты вращения их РНД и РВД можно считать равноправными и равнозначными параметрами тяги с точки зрения контроля и управления тягой этих двигателей. Постепенное ужесточение требований к их надежности и качеству способствует усилению контроля взаимного соответствия параметров тяги таких двигателей. Контролировать взаимное соответствие их качества можно с помощью программно-аппаратного моделирования.

При автоматизированном контроле технического состояния ТРДД на основе глубокого тестирования после стендовых испытаний актуальность разработки модели зависимости тяги двигателя от частот вращения роторов турбин его компрессоров низкого и высокого давления обусловлена возможностью компьютерного моделирования работы двигателя для оценки качества ее работы. Применение этой модели взаимозависимости параметров тяги ТРДД позволяет реализовать два условия ужесточения контроля взаимного соответствия качества двигателей одной серии. Одно из условий – допустимость одновременного контроля качества серийных ТРДД по  $K$  их рабочим параметрам  $x_k$ ,  $K = \overline{1, K}$ , например по частотам вращения РНД и РВД при  $K = 2$ . Другое условие – допустимость минимального сужения диапазонов распределения величин отклонений замеряемых значений тех же рабочих параметров от их ожидаемых значений при глубоком тестировании технического состояния ТРДД одной серии после их стендовых испытаний в условиях их серийного производства [3]. Такую модель можно реализовывать на практике программными средствами компьютерного моделирования или программно-аппаратными средствами имитационного моделирования на цифровых сигнальных процессорах и программируемых логических интегральных схемах.



Предложенная и разработанная модель позволит и поможет создавать компьютерные модели контроля надежности и качества ТРДД силовой установки самолета сразу по нескольким рабочим параметрам в реальном масштабе времени с учетом нежелательных воздействий дестабилизирующих факторов в полете. Результаты разработки этой модели могут обеспечить автоматизацию управления тягой двигателей сразу по двум таким косвенным параметрам их тяги, как частоты вращения РНД и РВД, путем постоянного измерения и постепенного изменения значений этих частот. Это представляет практическую полезность для снижения разнотяговости ТРДД силовой установки самолета за счет повышения тяги  $R_{low}$  двигателя с недостаточной тягой до уровня тяги  $R_{norm}$  другого двигателя в заданных пределах изменения их тяги  $R_{min} \leq R_{low} < R_{norm} \leq R_{max}$  при минимально допустимом уровне тяги  $R_{min}$  и максимально достижимом уровне тяги  $R_{max}$ . Благодаря предложенной и разработанной модели такая коррекция тяги двигателей может быть реализована путем изменения частот вращения их роторов в заданных диапазонах их значений. Трехмерная модель взаимозависимости параметров тяги ТРДД позволяет при компьютерном моделировании работы таких двигателей обеспечивать возможность уменьшения их разнотяговости по результатам сравнительной оценки значений частот вращения РНД и РВД с учетом величин первых производных этих частот как знакопеременных специальных поправок, обеспечивающих автоматическое контролирование скорости и направленности изменения контролируемых значений частот.

Снижение асимметрии тяги ТРДД силовой установки самолета в полете необходимо для обеспечения безопасности полета по одному из ее качественных критериев, которые позволяют намечать мероприятия по повышению ее уровня за счет снижения потенциальной опасности появления особых ситуаций при возникновении неконтролируемых факторов. В соответствии с требованиями Авиационных правил Межгосударственного авиационного комитета АП-25 особые ситуации могут быть: катастрофические, аварийные и сложные, а также ситуации усложнения условий полета. Во избежание таких ситуаций предлагается в качестве критерия обеспечения безопасности полета использовать требование отсутствия асимметрии тяги их двигателей в полете, поскольку безопасность полета самолета — это состояние авиационной техники, при котором риски, связанные с его эксплуатацией снижены до приемлемых уровней и контролируются. Одним из приемлемых уровней можно считать баланс тяги левого ТРДД и правого ТРДД силовой установки самолета в полете.

Для условного обозначения параметров левого и правого ТРДД силовой установки самолета используем аббревиатуры словосочетаний *LEFT ENGINE (LE)* и *RIGHT ENGINE (RE)* соответственно. Тогда применяемый критерий обеспечения безопасности полета можно формализовать в виде соотношения уровня тяги  $R^{LE}$  левого ТРДД и уровня тяги  $R^{RE}$  правого ТРДД в заданных пределах изменения этих значений в полете  $R_{min} \leq R^{LE} = R^{RE} \leq R_{max}$  при минимально допустимом уровне тяги  $R_{min}$  и максимально достижимом уровне тяги  $R_{max}$ .

При асимметрии тяги в полете появляется момент рысканья самолета, который возникает из-за разнотяговости его ТРДД. Величина этого начального момента рысканья зависит от тяги каждого ТРДД и от путевой устойчивости самолета, которая стремится противостоять возникшему моменту рысканья, приводящего к крену самолета. Если рысканье и крен не исправлять за счет снижения асимметрии тяги ТРДД, то может возникнуть разворачивающий момент сил, действующих на самолет, что чревато аварией.

Цель исследования — управление частотами вращения роторов двигателей самолета на основе трехмерной модели зависимости тяги таких двигателей от их частот вращения роторов турбин компрессоров низкого и высокого давления. Исследование проводилось с помощью методов математической статистики и программно-аппаратного моделирования.

**1. Постановка задачи.** Полагаем, что в системе автоматического управления силовой установкой самолета с ТРДД заложено или предусмотрено использование программы управления по частоте вращения РНД  $n_1 + \delta n_1 = \text{const}$  и программы управления  $n_2 + \delta n_2 = \text{const}$  с применением знакопеременных поправок  $\delta n_1$  и  $\delta n_2$  этих частот соответственно.

Как известно, зависимости значений тяги ТРДД  $R$  от значений частоты вращения его РНД  $n_1$  и тех же значений тяги ТРДД  $R$  от значений частоты вращения его РВД  $n_2$  можно формализовать в виде параболических уравнений с коэффициентами  $I_1$  и  $I_2$  по типу канонического уравнения параболы  $y = i x^2$  с коэффициентом  $i$ :  $R = I_1 (n_1)^2$  и  $R = I_2 (n_2)^2$ , если  $I_1$  и  $I_2$  — коэффициенты влияния скоростей вращения РНД и РВД соответственно.

На рис. 1 приведено графическое отображение этих зависимостей, где каждому значению тяги  $R$  соответствуют только одна точка с координатами  $(R, n_1)$  и только одна точка с координатами  $(R, n_2)$ .

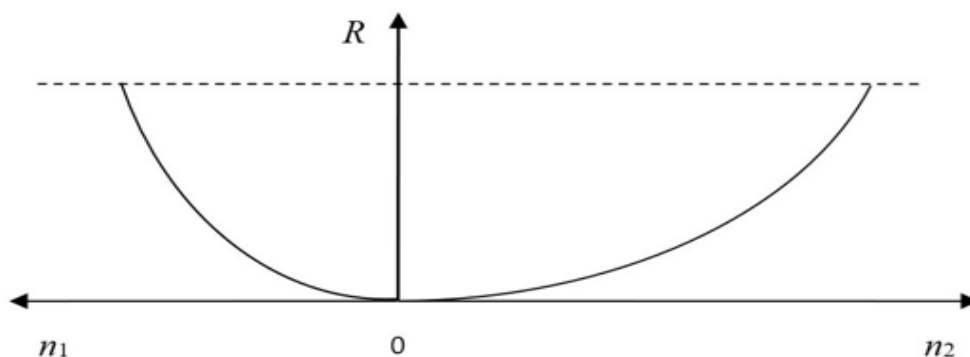


Рис. 1. Зависимость тяги  $R$  двигателя от частот вращения его РНД и РВД.

Будем учитывать динамические свойства РНД и РВД ТРДД по результатам глубокого тестирования их технического состояния после стендовых испытаний в условиях серийного производства. На практике для каждого двигателя в условиях серийного производства в испытательных цехах определяют эту зависимость экспериментально. Ею пользуются для определения прямых значений тяги в зависимости от числа оборотов ротора турбины компрессора.

Требуется разработать трехмерную модель зависимости тяги ТРДД от частот вращения его РНД и РВД, позволяющую учитывать совокупное влияние частот вращения обоих роторов на тягу двигателя с учетом их динамических свойств в виде коэффициентов  $j_x$  и  $j_y$  уравнения эллиптического параболоида  $z_{x,y} = j_x x^2 + j_y y^2$  [4]. На рис. 2 приведено графическое изображение одной из линий уровня такого эллипсоида с фокусами  $F_1(-c, 0)$ ,  $F_2(c, 0)$ , где числовые значения координат  $c$  и  $-c$  зависят от соотношения числовых значений коэффициентов  $j_x$  и  $j_y$ .

Требуется разработать алгоритм управления частотами вращения роторов двигателей самолета на основе трехмерной модели зависимости тяги ТРДД от частот вращения его РНД и РВД.

**2. Решение поставленной задачи.** Результаты исследования показали и подтвердили возможность балансировки тяги двигателей самолета в полете при управлении частотами вращения роторов его двигателей на основе трехмерной модели зависимости тяги ТРДД от частот вращения его РНД и РВД.

Разработана трехмерная модель зависимости тяги двигателя от значений частот вращения двух его роторов. В ней эти частоты используются в качестве косвенных параметров тяги. Соотношение их измеренных и вычисляемых значений тяги определялись по результатам стендовых испытаний ТРДД одной серии и глубокого тестирования их технического состояния сразу по двум таким параметрам тяги в условиях серийного производства.

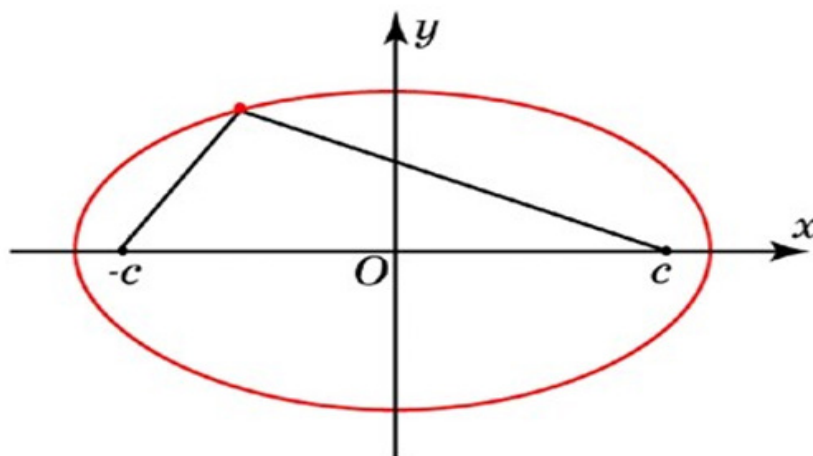


Рис. 2. Графическое изображение эллипса с фокусами  $F_1(-c, 0)$  и  $F_2(c, 0)$ .



Эта модель представляет собой алгебраическое уравнение второго порядка с тремя переменными, которое описывает зависимость значения силы тяги ТРДД от значений частот вращения двух его роторов. В этой модели переменными являются: значение силы тяги  $R$ , значение частоты вращения РНД  $n_1$  и значение частоты вращения РВД  $n_2$ . Такая трехмерная модель позволяет обеспечивать управление частотами вращения обоих роторов двигателя путем дополнительной подачи в них топлива для формирования новых значений этих частот по результатам сравнительной оценки их значений с учетом величин их первых производных как знакопеременных специальных поправок, обеспечивающих автоматическое контролирование скорости и направленности изменения контролируемых значений частот.

Разработанная модель представлена выражением, приведенным ниже, где  $R$  – тяги ТРДД,  $n_1$  – частота вращения РНД,  $n_2$  – частота вращения РВД, а  $J_1$  и  $J_2$  – коэффициенты совокупного влияния скорости вращения роторов РНД и РВД на тягу соответственно. Величина скоростей определяется измеряемыми значениями частот вращения РНД  $n_1$  и РВД  $n_2$ . Знак “+” в формуле обозначает, что каждая из частот вращения способствует усилению тяги и их влияние на уровень тяги суммируется, а не противоречит друг другу:

$$R = J_1(n_1)^2 + J_2(n_2)^2. \quad (2.1)$$

Графическое представление этой модели рассмотрено на рис. 3. Для условного обозначения параметров ТРДД одной серии при глубоком тестировании технического состояния таких двигателей используем аббревиатуру словосочетания *TESTED ENGINE (TE)*. Для условного обозначения параметров ТРДД силовой установки самолета с учетом величин их первых производных при балансировке полета применяем аббревиатуру словосочетания *BALANCED LEVEL (BL)*. На этом рисунке показана зависимость значений частот вращения РНД  $n_1^{BL}$  и РВД  $n_2^{BL}$  ТРДД силовой установки самолета в полете от значений частот их вращения  $n_1^{TE}$  и  $n_2^{TE}$  по результатам глубокого тестирования технического состояния ТРДД одной серии после стендовых испытаний при уровне тяги  $R^{TE}$  в условиях серийного производства.

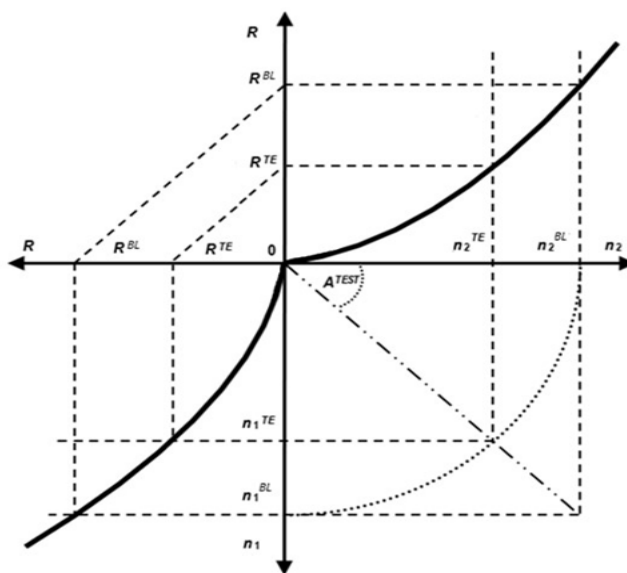


Рис. 3. Зависимость значений балансирующих частот вращения РНД  $n_1^{BL}$  и РВД  $n_2^{BL}$  двигателя самолета от значений тестовых частот их вращения  $n_1^{TE}$  и  $n_2^{TE}$ .

На рис. 4 приведено графическое отображение этой зависимости только для одного фиксированного значения тяги  $R$ , где ему соответствует совокупность всех точек  $n_1$  и  $n_2$ , т.е. четверть эллипса.

На рис. 5 представлено графическое изображение параболоида, где на четверти его поверхности расположены точки с координатами  $(R, n_1, n_2)$ , соответствующие значениям тяги ТРДД, а в горизонтальном сечении этой четверти параболоида расположена четверть эллипса, совокупность точек которого соответствует конкретным фиксированным значениям тяги  $R$ , как показано на рис. 5.

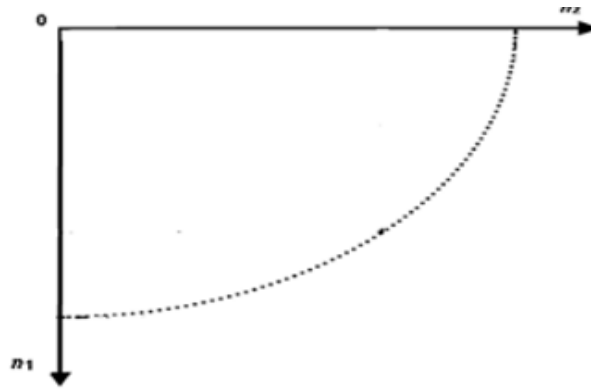


Рис. 4. Графическое отображение взаимосвязи значений частот вращения РНД  $n_1$  и РВД  $n_2$  двигателя силовой установки самолета при одном фиксированном значении тяги  $R$ .

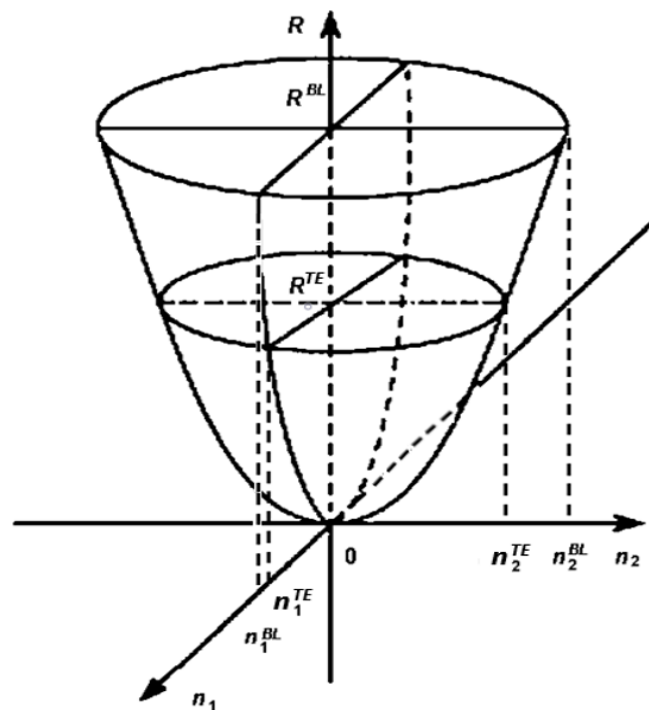


Рис. 5. Зависимость уровня  $R^{BL}$  тяги двигателя силовой установки самолета в полете от значений частот вращения РНД  $n_1^{BL}$  и РВД  $n_2^{BL}$ .

Результаты применения методов математической статистики и программного моделирования при построении экспериментальной модели двумерного случайного распределения контролируемых значений частот вращения РНД и РВД ТРДД одной серии в заданном и вдвое суженном диапазонах вероятностного распределения значений этих частот по нормальному закону Гаусса-Лапласа приведены на рис. 6, 7.

На этих рисунках рассмотрены графики вероятностного распределения контролируемых значений частот вращения РНД и РВД ТРДД одной серии относительно их математических ожиданий  $n_1^{mid}$  и  $n_2^{mid}$  в заданных диапазонах  $[n_1^{min}, n_1^{max}]$  и  $[n_2^{min}, n_2^{max}]$ , согласно “правилу трех сигм” и во вдвое суженных диапазонах  $[n_1^{less}, n_1^{more}]$ ,  $[n_2^{less}, n_2^{more}]$ . На этих графиках использованы следующие условные обозначения:  $n_1^{max}$  и  $n_1^{min}$  — максимальная и минимальная частоты вращения РНД в заданном диапазоне случайного распределения значений частот вращения РНД по “правилу трех сигм”;  $n_2^{max}$  и  $n_2^{min}$  — максимальная и минимальная частоты

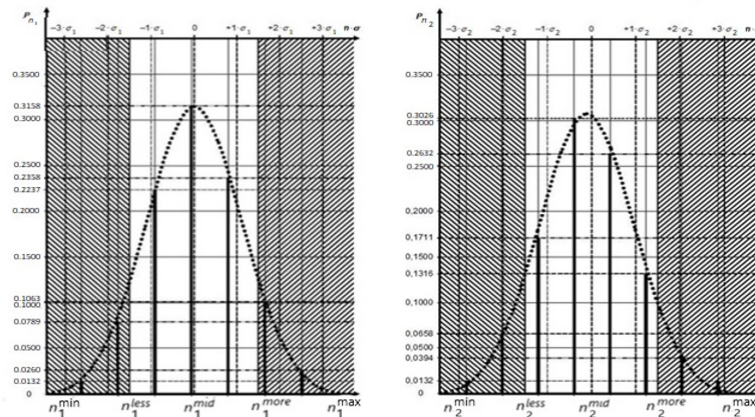


Рис. 6. Графики вероятностного распределения контролируемых значений частот вращения РНД и РВД ТРДД одной серии относительно их математических ожиданий  $n_1^{mid}$  и  $n_2^{mid}$ .

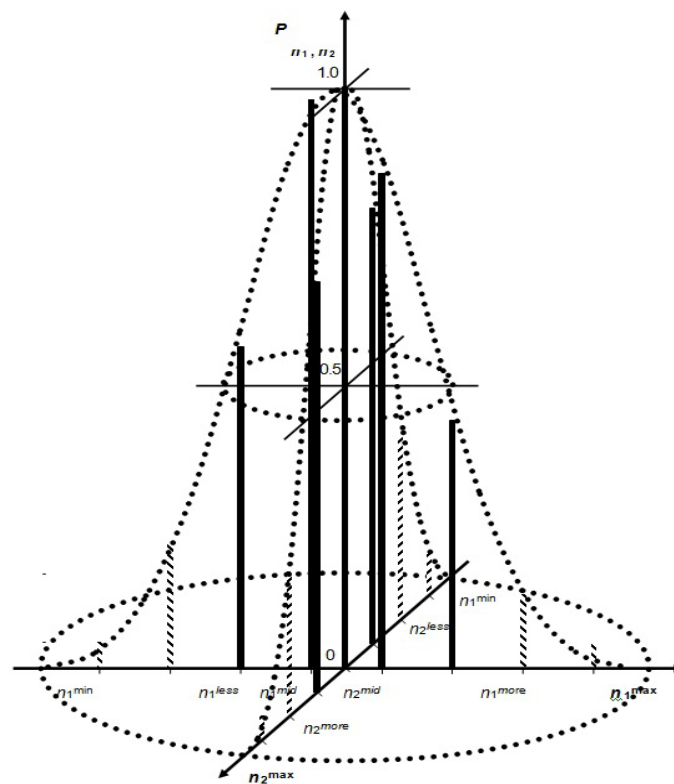


Рис. 7. Трехмерный график вероятностного распределения контролируемых значений частот вращения РНД и РВД ТРДД одной серии относительно их математических ожиданий  $n_1^{mid}$  и  $n_2^{mid}$ .

вращения РВД в определенном диапазоне случайного распределения значений частот вращения РВД по “правилу трех сигм”;  $n_1^{more}$  и  $n_1^{less}$  — максимальная и минимальная частоты вращения РНД во вдвое суженном диапазоне случайного распределения значений частот вращения РНД по “правилу трех сигм”;  $n_2^{more}$  и  $n_2^{less}$  — максимальная и минимальная частоты вращения РВД во вдвое суженном диапазоне случайного распределения значений частот вращения РВД по “правилу трех сигм”.

В результате модельного эксперимента установлено, что достичь заявленной цели можно и должно сравнительным анализом совокупности соотношений предельно допустимого значения  $n_1^{SOS}$ , минимально допустимого значения  $n_1^{SET}$ , максимально возможного  $n_1^{LIMIT}$  и измеряемых значений  $n_1^{LE}$  и  $n_1^{RE}$  частоты вращения РНД и соотношений предельно допустимого значения  $n_2^{SOS}$ , минимально допустимого значения  $n_2^{SET}$ , максимально возможного  $n_2^{LIMIT}$  и измеряемых значений  $n_2^{LE}$  и  $n_2^{RE}$  частоты вращения РВД с учетом величин первых производных этих частот  $C_1 dn_1^{LE}/dt$ ,  $C_2 dn_2^{LE}/dt$ ,  $C_1^{RE} dn_1^{RE}/dt$ ,  $C_2^{RE} dn_2^{RE}/dt$ , если коэффициенты  $C_1^{LE}$ ,  $C_2^{LE}$ ,  $C_1^{RE}$ ,  $C_2^{RE}$  зависят от динамических свойств роторов [3].

Предлагается снижать погрешность управления частотами вращения роторов ТРДД силовой установки самолета в полете путем пошагового формирования новых значений этих частот по результатам пошаговой сравнительной оценки их значений с учетом величин их первых производных как знакопеременных специальных поправок, обеспечивающих автоматическое контролирование скорости и направленности изменения контролируемых значений частот.

Применение такого подхода к управлению частотами вращения роторов ТРДД силовой установки самолета в полете обеспечивает снижение асимметрии их тяги. Пошаговую сравнительную оценку и пошаговое формирование контролируемых значений косвенных параметров тяги левого ТРДД с частотами вращения его роторов  $n_1^{LE}$  и  $n_2^{LE}$ , а также соответствующих косвенных параметров тяги правого ТРДД с частотами вращения его роторов  $n_1^{RE}$  и  $n_2^{RE}$  на каждом  $i$ -м шаге управления частотами вращения роторов двигателей в полете ("крейсерский режим") можно формализовать в виде систем рекуррентных уравнений.

Если измеряемые значения косвенных параметров тяги  $(n_1^{LE})_{i+1}$  и  $(n_1^{LE})_i$  или  $(n_1^{RE})_{i+1}$  и  $(n_1^{RE})_i$ , или  $(n_2^{LE})_{i+1}$  и  $(n_2^{LE})_i$ , или  $(n_2^{RE})_{i+1}$  и  $(n_2^{RE})_i$ , а прогнозируемые значения косвенных параметров тяги  $(n_1^{LE})_{i+1}^{PRO}$  и  $(n_1^{LE})_i^{PRO}$  или  $(n_1^{RE})_{i+1}^{PRO}$  и  $(n_1^{RE})_i^{PRO}$ , или  $(n_2^{LE})_{i+1}^{PRO}$  и  $(n_2^{LE})_i^{PRO}$ , или  $(n_2^{RE})_{i+1}^{PRO}$  и  $(n_2^{RE})_i^{PRO}$  при программах управления параметрами тяги  $(n_1^{LE})_i - (n_1^{RE})_i \approx 0$  и  $(n_1^{LE})_i^{PRO} - (n_1^{RE})_i^{PRO} \approx 0$  или  $(n_1^{RE})_i - (n_1^{LE})_i \approx 0$  и  $(n_1^{RE})_i^{PRO} - (n_1^{LE})_i^{PRO} \approx 0$ , или  $(n_2^{LE})_i - (n_2^{RE})_i \approx 0$  и  $(n_2^{LE})_i^{PRO} - (n_2^{RE})_i^{PRO} \approx 0$ , или  $(n_2^{RE})_i - (n_2^{LE})_i \approx 0$  и  $(n_2^{RE})_i^{PRO} - (n_2^{LE})_i^{PRO} \approx 0$  с погрешностями сравнительной оценки и формирования косвенного параметра тяги  $(n_1^{LE})_{i+1}$  или  $(n_1^{RE})_{i+1}$ , или  $(n_2^{LE})_{i+1}$ , или  $(n_2^{RE})_{i+1}$ , то получим следующие системы рекуррентных уравнений при  $n_1^{SOS} < (n_1^{RE})_i + C_1^{RE} \left( \frac{dn_1^{RE}}{dt} \right)_i \leq n_1^{SET} < (n_1^{LE})_i \leq n_1^{LIMIT}$ ,  $(n_1^{LE})_i^{PRO} = (n_1^{LE})_i$ ,  $(n_1^{RE})_i^{PRO} = (n_1^{RE})_i$ ,  $1 \leq i < I_{\max}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} (n_1^{LE})_{i+1} = n_1^{SET} + (n_1^{LE})_i - (n_1^{RE})_i - C_1^{RE} \left( \frac{dn_1^{RE}}{dt} \right)_i, \\ (n_1^{LE})_{i+1}^{PRO} = n_1^{SET} + (n_1^{LE})_i^{PRO} - (n_1^{RE})_i^{PRO}, \\ (\Delta n_1)_{i+1}^{PRO} = C_1^{RE} \left( \frac{dn_1^{RE}}{dt} \right)_i; \end{array} \right. \quad (2.2)$$

при  $n_1^{SOS} < (n_1^{LE})_i + C_1^{LE} \left( \frac{dn_1^{LE}}{dt} \right)_i \leq n_1^{SET} < (n_1^{RE})_i \leq n_1^{LIMIT}$ ,  $(n_1^{RE})_i^{PRO} = (n_1^{RE})_i$ ,  $(n_1^{LE})_i^{PRO} = (n_1^{LE})_i$ ,  $1 \leq i < I_{\max}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} (n_1^{RE})_{i+1} = n_1^{SET} + (n_1^{RE})_i - (n_1^{LE})_i - C_1^{LE} \left( \frac{dn_1^{LE}}{dt} \right)_i, \\ (n_1^{RE})_{i+1}^{PRO} = n_1^{SET} + (n_1^{RE})_i^{PRO} - (n_1^{LE})_i^{PRO}, \\ (\Delta n_1^{RE})_{i+1}^{PRO} = C_1^{LE} \left( \frac{dn_1^{LE}}{dt} \right)_i; \end{array} \right. \quad (2.3)$$

при  $n_2^{SOS} < (n_2^*)_i + C_2^* \left( \frac{dn_2^*}{dt} \right)_i \leq n_2^{SET} < (n_2)_i \leq n_2^{LIMIT}$ ,  $(n_2)_i^{PRO} = (n_2)_i$ ,  $(n_2^*)_i^{PRO} = (n_2^*)_i$ ,  $1 \leq i < I^{max}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} (n_2^{LE})_{i+1} = n_2^{SET} + (n_2^{LE})_i - (n_2^{RE})_i - C_2^{RE} \left( \frac{dn_2^{RE}}{dt} \right)_i, \\ (n_2^{LE})_{i+1}^{PRO} = n_2^{SET} + (n_2^{LE})_i^{PRO} - (n_2^{RE})_i^{PRO}, \\ (\Delta n_2^{LE})_{i+1}^{PRO} = C_2^{RE} \left( \frac{dn_2^{RE}}{dt} \right)_i; \end{array} \right. \quad (2.4)$$

при  $n_2^{SOS} < (n_2^{LE})_i + C_2^{LE} \left( \frac{dn_2^{LE}}{dt} \right)_i \leq n_2^{SET} < (n_2^{RE})_i \leq n_2^{LIMIT}$ ,  $(n_2^{RE})_i^{PRO} = (n_2^{RE})_i$ ,  $(n_2^{LE})_i^{PRO} = (n_2^{LE})_i$ ,  $1 \leq i < I^{max}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} (n_2^{RE})_{i+1} = n_2^{SET} + (n_2^{RE})_i - (n_2^{LE})_i - C_2^{LE} \left( \frac{dn_2^{LE}}{dt} \right)_i, \\ (n_2^{RE})_{i+1}^{PRO} = n_2^{SET} + (n_2^{RE})_i^{PRO} - (n_2^{LE})_i^{PRO}, \\ (\Delta n_2^{RE})_{i+1}^{PRO} = C_2^{LE} \left( \frac{dn_2^{LE}}{dt} \right)_i. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

На рис. 8 приведены временные графики изменения тяги разнотяговых ТРДД силовой установки самолета в зависимости от границ диапазонов распределения значений таких косвенных параметров тяги, как частоты вращения РНД и РВД. Эти графики построены при экспериментальном моделировании алгоритмов управления частотами вращения роторов левого ТРДД с уровнем тяги  $R^{LE}$  и правого ТРДД с уровнем тяги  $R^{RE}$  с целью обеспечения балансировки их тяги в полете на основе разработанной модели в случаях  $R^{min} \leq R^{LE} < R^{RE} \leq R^{max}$  и  $R^{min} \leq R^{LE} < R^{RE} \leq R^{max}$  при минимально допустимом уровне тяги  $R^{min}$  и максимально достижимом уровне тяги  $R^{max}$ . На этих графиках использованы следующие условные обозначения:  $R_{max}^{LE}$  и  $R_{min}^{LE}$  – максимальный и минимальный уровни тяги левого ТРДД, значения частот вращения роторов которого находятся в заданных диапазонах случайного распределения значений частот по нормальному закону;  $R_{max}^{RE}$  и  $R_{min}^{RE}$  – максимальный и минимальный уровни тяги правого ТРДД, значения частот вращения роторов которого находятся в заданных диапазонах случайного распределения значений частот по нормальному закону;  $R_{more}^{LE}$  и  $R_{less}^{LE}$  – максимальный и минимальный уровни тяги левого ТРДД, значения частот вращения роторов которого находятся во вдвое суженных диапазонах случайного распределения значений частот по нормальному закону;  $R_{more}^{RE}$  и  $R_{less}^{RE}$  – максимальный и минимальный уровни тяги правого ТРДД, значения частот вращения роторов которого находятся во вдвое суженных диапазонах случайного распределения значений частот по нормальному закону.

**3. Анализ полученных результатов.** Согласно каноническому уравнению параболоида по формуле (2.1), параметры тяги ТРДД в полете должны иметь соотношения: при  $n_2 = 0$  требуется, чтобы  $R^{BL} = J_1 \cdot (n_1^{BL})^2$ , где  $J_1 = R^{BL} / (n_1^{BL})^2$ ; при  $n_1 = 0$  требуется, чтобы  $R^{BL} = J_2 \cdot (n_2^{BL})^2$ , где  $J_2 = R^{BL} / (n_2^{BL})^2$ . Причем  $n_1^{BL}$  и  $n_2^{BL}$  – это координаты точек на полуосях эллипса при  $n_1 = n_1^{BL}$  и  $n_2 = n_2^{BL}$ , а  $R = J_1(n_1^{BL})^2 + J_2(n_2^{BL})^2$ , что соответствует точке с координатами  $(n_1^{BL}, n_2^{BL})$  на плоскости  $(n_1 - 0 - n_2)$ , как показано на рис. 2 и 4 при  $n_1 = n_1^{BL}$  и  $n_2 = n_2^{BL}$ .



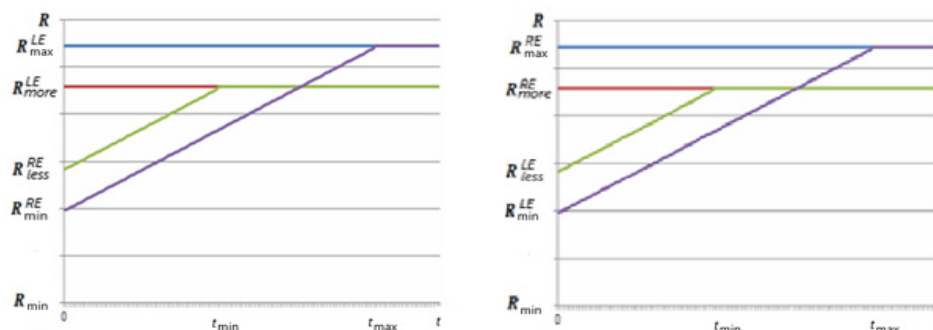


Рис. 8. Временные графики изменения тяги разнотяговых ТРДД силовой установки самолета в зависимости от границ диапазонов распределения значений частот вращения РНД и РВД.

Числовые значения  $J_1$  и  $J_2$  коэффициентов совокупного влияния скорости вращения роторов РНД и РВД на тягу ТРДД одной серии можно определить по совокупности измеренных значений тяги  $R^{TE}$  и частот вращения РНД  $n_1^{TE}$  и РВД  $n_2^{TE}$  в результате глубокого тестирования их технического состояния в условиях серийного производства. Значения  $R^{TE}$ ,  $n_1^{TE}$ ,  $n_2^{TE}$  рабочих параметров ТРДД известны по результатам стендовых испытаний статистической выборки таких двигателей одной серии.

Усредненные значения коэффициентов  $J_1^{TE}$  и  $J_2^{TE}$  зависят от динамических свойств роторов двигателей и определяются опытным путем по результатам их стендовых испытаний в условиях серийного производства как значения коэффициентов в уравнении (2.1) для зависимости ожидаемого значения (математического ожидания) тяги от ожидаемых значений (математических ожиданий) частот вращения роторов:

$$\text{если } n_2 = 0 \text{ при } n_1 \neq 0, \text{ то } R^{TE} = J_1^{TE} (n_1^{TE})^2, \text{ поэтому } J_1^{TE} = R^{TE} / (n_1^{TE})^2. \quad (3.1)$$

$$\text{если } n_2 = 0 \text{ при } n_1 \neq 0, \text{ то } R^{TE} = J_2^{TE} (n_2^{TE})^2, \text{ поэтому } J_2^{TE} = R^{TE} / (n_2^{TE})^2. \quad (3.2)$$

При этом  $n_1^{TE} / n_2^{TE} = \text{tg}(A^{TEST}) = n_1^{BL} / n_2^{BL}$ , т.е.  $n_2^{BL} = n_1^{BL} / \text{tg}(A^{TEST})$ , поскольку  $A^{TEST}$  – это угол между осью координат  $[0, n_1]$  и проекциями векторов с координатами  $[n_1, R, n_2]$  на плоскость  $(n_1, 0, n_2)$  в трехмерной системе координат “ $n_1-R-n_2$ ”, значения которого зависят от значения частот вращения роторов:

$$A^{TEST} = \text{arctg}(n_1^{TE} / n_2^{TE}). \quad (3.3)$$

Асимметрия тяги ТРДД силовой установки самолета в полете может возникнуть из-за различных причин. Для анализа и выработки последовательных действий автоматической системы управления в полете с несимметричной тягой необходимо иметь информацию о разнотяговости этих двигателей по результатам глубокого тестирования их технического состояния после стендовых испытаний в условиях серийного производства. Усиление контроля взаимного соответствия параметров тяги ТРДД глубоким тестированием технического состояния двигателей представляет собой выполнение процедур направленного перебора и сравнительного анализа значений их рабочих параметров. Это осуществляется за счет применения “правила трех сигм” в приложении к случайному распределению результатов измерения значений рабочих параметров  $l$ -х ТРДД одной серии [3].

Асимметрию тяги ТРДД силовой установки самолета можно уменьшать повышением тяги одного из этих двигателей в заданном диапазоне ее допустимых значений. Асимметрию тяги контролирует и компенсирует система автоматического управления. При этом фиксируется двигатель с недостающей тягой, а в камеру сгорания этого двигателя подается больше топлива и вращение обеих турбин его компрессоров ускоряется.

На практике удобнее отслеживать изменение именно угловых скоростей, а точнее чисел оборотов вращения роторов ТРДД  $n_1$  и  $n_2$ . Дополнительный расход топлива для повышения числа оборотов измерять сложно, тем более контролировать его в процессе полета. Хотя пилоту комфортнее смотреть на датчики оборотов, которые дают показания с высокой точностью, но система автоматического управления получает более точные значения именно от датчиков оборотов, с которыми удобно работать в автоматическом режиме. Таким образом, решение



поставленной задачи сводится к определению числовых значений оборотов и пересчету их на тяговые усилия.

Уровень разнотяговости  $R$  ТРДД одной серии по результатам стендовых испытаний при уровне тяги  $R^{TE}$  в условиях серийного производства можно определить, как разность максимального измеренного значения  $R_{TESTmax}$  и минимального измеренного значения  $R_{TESTmin}$ :

$$R = R_{TESTmax} - R_{TESTmin}. \quad (3.4)$$

Глубокое тестирование технического состояния этих двигателей позволяет снизить их разнотяговость почти в 1.5 раза за счет применения разработанной трехмерной модели зависимости тяги двигателя от значений частот вращения его РНД и РВД. Такое снижение разнотяговости ТРДД одной серии в условиях серийного производства обеспечивает возможность уменьшения расхода топлива на балансировку тяги ТРДД силовой установки самолета в полете, успешно прошедших тестирование после стендовых испытаний, по сравнению с расходом топлива на балансировку тяги ТРДД силовых установок самолетов с двигателями, не проходившими глубокое тестирование, если снижение асимметрии тяги выполнять путем управления частотами вращения роторов этих ТРДД. Формулу (2.1) можно применять в следующем виде:

$$R = J_1^{TE} (n_1)^2 + J_2^{TE} (n_2)^2. \quad (3.5)$$

Достоверность результатов исследования подтверждается их соответствием результатам известных разработок [5–7].

**Заключение.** Основными результатами проведенного исследования стали модель функциональной зависимости тяги ТРДД от его рабочих параметров в интересах снижения асимметрии тяги самолета вследствие разнотяговости его ТРДД и алгоритмы пошаговой сравнительной оценки и пошагового формирования контролируемых значений частот вращения РНД и РВД разнотяговых ТРДД силовой установки самолета для управления этими частотами в полете в соответствии с разработанной моделью.

Проведенные исследования взаимосвязей параметров тяги ТРДД способствовало созданию модели зависимости тяги двигателя от частот вращения роторов турбин его компрессора низкого и высокого давления по результатам стендовых испытаний таких двигателей одной серии и глубокого тестирования их технического состояния в условиях серийного производства. При разработке моделей эти частоты рассматриваются как параметры тяги ТРДД. Допустимость соотношения измеренных и вычисленных значений тяги двигателей определялись по результатам стендовых испытаний.

Применение данной модели стало дальнейшим развитием идеи автоматизации глубокого тестирования технического состояния ТРДД одной серии [3]. Это может обеспечить автоматизацию контроля и уменьшения разнотяговости ТРДД одной серии путем глубокого тестирования их технического состояния сразу по двум параметрам их тяги в условиях серийного производства, а также автоматизацию контроля и уменьшения асимметрии тяги разнотяговых ТРДД силовых установок самолетов путем изменения значений частот вращения их роторов при полете. Изменять значения частот можно повышением или понижением расхода топлива по результатам контроля асимметрии тяги ТРДД.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gunston B.* World Encyclopedia of Aero Engines: From the Pioneers to the Present Day. Stroud, Gloucestershire: Sutton Publishing Limited, 2006. 260 p.
2. *Giampaolo T.* Gas Turbine Handbook: Principles and Practice. 4th Edition, Lilburn, CRC Press, 2009. 450 p.
3. *Бурова А.Ю.* Сертификация авиационной техники. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: ЛЕНАНД, 2019. 300 с.
4. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1973. 832 с.
5. *Прокудин Ю.В., Рябченко Л.П., Донцов В.А.* Способ контроля разнотяговости двигателей многодвигательной силовой установки самолета: описание изобретения к патенту SU1838182A3. М.: ВНИИПИ, 1989. 4 с.
6. *Дворниченко В.В.* «Разнотяговость» (асимметрия тяги) ТРДД на дальнемагистральных и среднемагистральных самолетах ГА и способы ее минимизации «на крыле» // Современные проблемы науки и образования. 2008. № 5. С. 45–46.
7. *Gurevich O., Smetanin S., Trifonov M.* Automatic Control to Reduce the Effect of Deterioration of Gas Turbine Engine Components on its Performance Characteristics // AIAA Propulsion and Energy 2021, Forum, Virtual Conf. 2021. URL: <https://www.sciencegate.app/document/10.2514/6.2021-3734>

УДК 519.71:517.938

## ИССЛЕДОВАНИЯ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЭТАПА СНИЖЕНИЯ САМОЛЕТОВ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ В ЗАДАЧЕ ВЕРТИКАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ

© 2024 г. А. А. Голубева<sup>a, \*</sup>, Н. В. Куланов<sup>a, \*\*</sup>

<sup>a</sup>ФАУ ГосНИИАС, Москва, Россия

\*e-mail: aagolubeva@gosniias.ru

\*\*e-mail: kulanov\_nv@gosniias.ru

Поступила в редакцию 17.08.2023 г.

После доработки 08.02.24 г.

Принята к публикации 13.05.24 г.

Решение задачи формирования высотно-скоростного профиля полета самолетов гражданской и военно-транспортной авиации на этапе снижения и оптимизации по экономическому критерию проводится с использованием динамической модели движения центра масс в вертикальной плоскости. В модели учитывается изменение массы самолета и систематическая составляющая скорости ветра. Аэродинамические характеристики самолета, его вес, а также высотно-скоростные и дроссельные характеристики двигателей приближены к современному типовому среднемагистральному самолету. Предложена классификация траекторий снижения. Для каждого типа таких траекторий определено множество параметров, однозначно характеризующих их свойства, и значения критериев качества, в которых рассматривается стоимость и затраты топлива. Проведена оценка влияния (релевантности) этих параметров на критерии и свойства траекторий. Сформулирована задача оптимизации этапа снижения с обеспечением заданного времени его выполнения. Получено необходимое и достаточное условия ее реализуемости. Рассмотрен пример решения этой задачи для типового среднемагистрального самолета.

*Ключевые слова:* оптимизация, этап снижение, система самолетовождения, вертикальная навигация

DOI: 10.31857/S0002338824050115, EDN: TDSJRY

## RESEARCH AND OPTIMIZATION OF THE DESCENT PHASE OF CIVIL AVIATION AIRCRAFT IN THE VERTICAL NAVIGATION PROBLEM

A.A. Golubeva<sup>a, \*</sup>, N.V. Kulanov<sup>a, \*\*</sup>

<sup>a</sup>Moscow, FAI GosNIIAS,

\*e-mail: aagolubeva@gosniias.ru,

\*\*e-mail: kulanov\_nv@gosniias.ru

The solution of the problem of forming the high-altitude and high-speed flight profile of civil and military transport aircraft at the phase of descent and optimization according to the economic criterion is carried out using a dynamic model of the movement of the center of mass in the vertical plane. The model takes into account the change in the mass of the aircraft and the systematic component of wind speed. The aerodynamic characteristics of the aircraft, its weight, as well as the altitude-speed and throttle characteristics of the engines are close to a modern standard medium-haul aircraft. A classification of decline trajectories is proposed. For each type of such trajectories, many parameters have been defined that uniquely characterize their properties, and the values of quality criteria that consider the cost and cost of fuel. The influence (relevance) of these parameters on the criteria and properties of trajectories has been assessed. The task of optimizing the phase of descent with the provision of a given time for its execution is formulated. The necessary and sufficient conditions for its feasibility have been obtained. An example of solving this problem for a typical medium-haul aircraft is considered.

*Keywords:* optimization, descent, flight management system, vertical navigation

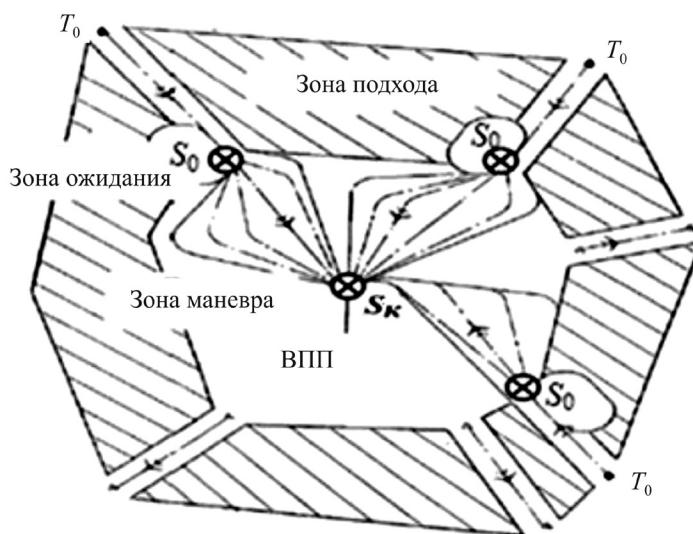


Рис. 1. Зона воздушного пространства аэропорта прибытия.

**Введение.** Будем считать, что этап снижения начинается в некоторый момент этапа крейсерского полета и заканчивается в точке начала встраивания траектории полета воздушного судна (ВС) в схему посадки на заданный аэродром, определяемую диспетчером системы управления воздушным движением (СУВД). Начальные условия этапа по значениям высоты  $H$ , скорости  $V$  или числа Маха ( $M$ ) и веса ВС равны соответствующим значениям этапа крейсерирования. Конечные условия этапа задаются значениями конечной высоты  $H_0$  и скорости  $V_{cas}^0$ , определяемые начальными условиями точки встраивания в схему посадки.

На траекторию снижения, так же как и на траектории других этапов полета ВС, налагается ряд ограничений. Так, в соответствии с руководством по летной эксплуатации (РЛЭ) для каждого типа ВС предписана определенная последовательность снижения скорости в процессе уменьшения высоты. Кроме того, в ряде случаев требуется выдерживание отдельных геометрических свойств траектории снижения. Определенные ограничения накладывает рельеф местности, а также требования по воздействию на окружающую среду. Одним из важнейших требований к этапу снижения является требование диспетчера СУВД по времени прибытия в конечный пункт этапа снижения, каким выступает точка  $S_0$  встраивания в схему захода на посадку (рис. 1).

Этот рисунок заимствован из работы [1] и схематично отражает основные зоны воздушного пространства аэропорта прибытия и характерные точки в них.

Как видно из рис. 1, в зоне аэропорта имеются три типа самостоятельных зон: подхода, ожидания с точкой  $S_0$  и маневра. Здесь же отмечены коридоры прилета и вылета, а также некоторые виды траекторий маневрирования, обеспечивающие заданное время прилета ВС в начало взлетно-посадочной полосы (ВПП).

Рассматриваемый далее этап снижения, показанный на рис. 1 между точками  $T_0$ ,  $S_0$ , называется этапом следования по маршруту прибытия или этапом снижения с эшелона. В общем случае полет здесь проходит под управлением диспетчера не по прямой линии, а через заданные поворотные пункты маршрута (ППМ). Диспетчер, в частности, задает время прибытия в точку  $S_0$ . Это время может определяться по критерию минимального расхода топлива либо минимального воздействия на окружающую среду как со стороны конкретного самолета, так и всего множества порученных ему ВС.

Исследованию этапа снижения в последние 20 лет в связи с повышенным вниманием к проблемам экологии уделялось большое внимание в зарубежной и отечественной научно-технической литературе. Обсуждение и анализ предлагаемых там подходов к оптимизации этапа снижения и путей практической реализации их с учетом требований СУВД и РЛЭ заслуживают отдельного рассмотрения.

Здесь же отметим, что все множество приведенных в этих работах подходов к решению задачи можно разбить на три группы. Первая из них базируется на использовании принципа

максимума Понтрягина с традиционным [2, 3] или энергетическим подходом [4, 5] к построению модели движения ВС. Трудности в практической реализации такого подхода потребовали достаточно радикального упрощения моделей движения ВС с рассмотрением в качестве управляющих параметров угла наклона траектории, скорости полета или тяги двигателей. В силу этого такой подход обеспечивает выявление только достаточно общих свойств траекторий ВС, но не позволяет учитывать требования к ним со стороны РЛЭ и СУВД. Поэтому получаемые в этой группе работ результаты часто не находят применение в задачах разработки бортовых алгоритмов систем самолетовождения (ССВ).

Все множество таких требований позволяет учесть использование псевдоспектральных методов решения задач оптимизации полета ВС. Эти методы образуют вторую группу, к которой относятся работы [6, 7]. Являясь разновидностью прямых методов оптимизации, псевдоспектральные методы сводят задачу оптимизации к математическому программированию с достаточно большим количеством неизвестных, что потребовало разработки специального программного обеспечения для решения подобных задач [8]. Сравнение псевдоспектральных методов с другими прямыми методами показывает, что при той же численной точности они обеспечивают время вычислений по крайней мере на два порядка меньше, чем другие методы коллокации. Кроме того, для этих методов не является проблемой повышение размерности модели движения и наложение дополнительных ограничений на фазовый вектор состояния и управления. Конечно, неопределенность задания начального приближения для получения решения этими методами все равно имеет место.

Проблема их практического использования состоит в том, что авионика современных ВС не обладает вычислительными мощностями для реализации необходимого программного обеспечения, а электронные полетные планшеты, имеющие нужный вычислительный потенциал, не допускаются к подключению к бортовым системам управления. Однако в работах по воздушно-космической тематике методы псевдоспектрального оптимального управления находят практическое применение в ряде конкретных разработок организаций NASA и Роскосмос [9, 10]. Формально проблема использования псевдоспектрального оптимального управления в авиационных задачах может быть решена путем включения пилота в контур управления между планшетом и бортовой системой управления, но этот вопрос должен согласовываться с разработчиками РЛЭ, авиакомпаниями и организациями СУВД.

К третьей группе работ, связанных с построением вертикального профиля траекторий ВС, отнесем работы, в которых в качестве обязательного выступает безусловное выполнение требований РЛЭ и СУВД к реализуемым траекториям, а оптимизация по заданным критериям проводится только при выполнении этого требования. Это обстоятельство делает данную группу наиболее многочисленной по использованию результатов в практических разработках. В эту группу, в частности, входят публикации [11, 12]. В первой из них представлено исследование оптимизации траекторий летательных аппаратов на основе теории параметрической оптимизации и применение заранее заданных шаблонов траекторий. Шаблоны позволяют описывать траекторию с помощью небольшого числа непрерывных или дискретных параметров, значения которых могут быть выбраны для оптимизации заданного свойства траектории. В работе [12] показано, что использование стандартных процедур дает результаты, очень близкие к оптимальным по значениям критериев, что оправдывает их применение в реальной практике. При этом сами траектории, вообще говоря, могут значительно отличаться от оптимальных.

Данная статья является продолжением работ [13–15] и относится к третьей группе. Однако в ней нет цели получения какой-либо одной оптимальной траектории, а проводится исследование некоторой совокупности траекторий снижения и предлагаются методы их оптимизации с учетом более полной математической модели движения ВС.

Задача этих исследований — создание методической основы для разработки бортовых алгоритмов вертикальной навигации гражданской и транспортной авиации, обеспечивающих импортозамещение программного обеспечения создаваемых и перспективных ССВ. Такой подход предполагает максимальное использование в исследованиях реальных характеристик ВС и их двигателей, а также требований РЛЭ. Что касается требований СУВД, то они ввиду существенной зависимости от возможностей конкретных аэропортов будут учитываться только в общих чертах.



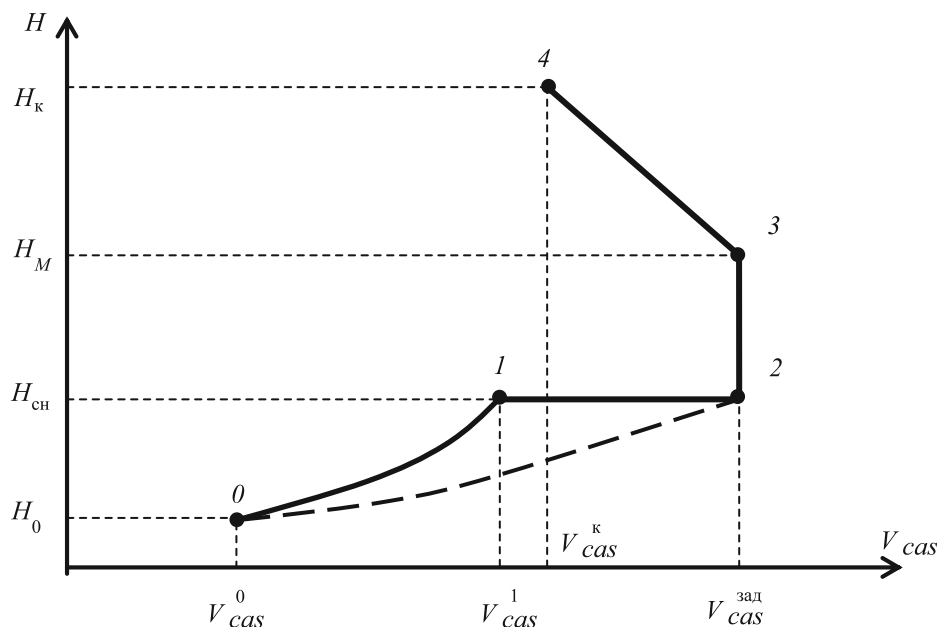


Рис. 2. Высотно-скоростной профиль полета ВС на этапе снижения.

**1. Модель этапа снижения.** Траектории снижения в РЛЭ различных ВС и в работах [2–9, 11, 12] обычно рассматриваются в координатах высоты  $H$  и дальности до конечной точки снижения  $S_0$ . Однако более информативным является их отображение в координатах высоты  $H$  и калиброванной воздушной скорости  $V_{cas}$ , которую для сокращения будем называть приборной скоростью. Наибольший эффект такого подхода получается при построении траекторий снижения с применением заранее заданных шаблонов траекторий. В настоящее время в качестве таких шаблонов в ряде работ используются участки полета ВС с постоянными значениями высоты  $H$ , приборной скорости  $V_{cas}$ , воздушной скорости  $V$ , числа Маха  $M$ , угла наклона  $\theta$  вектора воздушной скорости к плоскости горизонта, скорости снижения  $V_y$  и продольного ускорения  $a_x$ . При этом каждая конкретная траектория определяется набором заданных значений этих параметров.

Типичный вид высотно-скоростного профиля траектории снижения построенной с помощью шаблонов в координатах  $H$ - $V_{cas}$  показан на рис. 2.

Здесь цифрами 0–4 обозначены характерные точки высотно-скоростного профиля полета: 4, 0 – начальная и конечная точки этапа; 3 – точка перехода с режима полета по числу Маха  $M = M_{зад}$  на режим полета со скоростью  $V_{cas} = V_{cas}^{зад}$ ; 2 – точка перехода на участок горизонтального полета; 1 – точка достижения заданной скорости  $V_{cas} = V_{cas}^1$ . Пунктиром показан вариант без горизонтального участка полета.

В соответствии с этой схемой снижение ВС начинается в точке 4 (с координатами высоты крейсерования  $H_k$  и числа Маха  $M = M_{зад}$ ) и продолжается до точки 3, где достигается значение приборной скорости, равное заданному значению  $V_{cas} = V_{cas}^{зад}$ . Далее происходит полет с постоянной приборной скоростью  $V_{cas}^{зад}$  до заданной высоты  $H_{сн}$  (точки 2). Здесь, в зависимости от того, производится непрерывное снижение или с участком горизонтального полета, реализуется полет ВС в конечные условия, определяемые точкой 0, или горизонтальный полет до значения  $V_{cas} = V_{cas}^1$ . Далее, в последнем случае, обеспечивается полет ВС в конечные условия.

Как можно видеть, весь этап снижения состоит из нескольких участков, какими в общем случае являются: участок снижения (4-3-2), участок торможения (2-1) и участок наведения (1-0). В варианте непрерывного снижения торможение и наведение на участке (2-0) могут реализовываться с последовательным использованием заданных значений  $V_y^{зад}$  и  $\theta^{зад}$  либо одного из них.

Назначение участков снижения и торможения понятно из их названий, а назначение участка наведения требует некоторого пояснения. Дело в том, что в конце этапа снижения

ВС должно оказаться в заданной точке  $S_0$  и иметь заданные значения высоты  $H_0$  и приборной скорости  $V_{cas}^0$ . Выполнение этих условий должно обеспечиваться построением соответствующего управления на участках (1-0) или (2-0), поэтому они называются участками наведения.

Таким образом, предлагаемый способ отображения этапа снижения в координатах  $H-V_{cas}$  позволил построить модель этапа в виде последовательного соединения участков снижения, торможения и наведения.

**2. Сценарии этапа снижения.** Как можно понять, показанная на рис. 1 схема этапа снижения не определяет полностью траектории снижения, так как не содержит информацию о высотном профиле полета на участке снижения и скоростном профиле на участках торможения и наведения. Простейшим способом описания высотного профиля является задание некоторых шаблонов его построения. В качестве таких шаблонов на участке снижения можно использовать значения угла наклона траектории  $\theta$  либо вертикальной скорости  $V_y$ . На участках торможения и наведения в качестве шаблона скоростного профиля целесообразно применять значение продольного ускорения (торможения)  $a_r$ . Обоснованием такого выбора может служить достаточная простота измерения и обработки этого параметра системой управления ВС.

Заметим, что задание угла наклона траектории  $\theta$  или вертикальной скорости  $V_y$  фактически служат ограничениями на высотный профиль полета ВС и могут определяться требованиями СУВД или рельефом местности. Выполнение этих требований, если они заданы, является безусловным и определяет тип траектории снижения, т.е. снижение с ограничением на высотный профиль или без ограничений. В то же время задание  $a_r$  не влияет на характер изменения высоты и диктуется выполнением соответствующих требований на условия комфортности для пассажиров ВС во время полета.

Анализируя все множество траекторий, порожаемых рассмотренными шаблонами, можно прийти к выводу, что оно разбивается на четыре подмножества, которые описываются диграфом  $(i, j)$ , где  $i, j = 0, 1$ . Здесь первый индекс определяет наличие ограничения высотного профиля на участке снижения, а второй — на участках торможения-наведения. Например: подмножество  $(0, 0)$  — траектории с отсутствием ограничений по высотному профилю на всех участках снижения, т.е. траектории с непрерывным снижением (4-3-2-0);  $(1, 1)$  — траектории с заданным значением  $\theta = \theta_{зад}$  или  $V_y = V_y^{зад}$  на участке снижения и участком торможения-наведения (2-1-0).

Последовательность выполнения режимов высотно-скоростного профиля полета с учетом обеспечения заданных ограничений на его составляющие будем называть *сценарием этапа снижения*.

При реализации любого сценария предполагается, что ВС перед началом снижения находится в установившемся горизонтальном полете, где вес ВС уравновешен аэродинамической подъемной силой, и сила тяги двигателей уравновешивает силу аэродинамического сопротивления. При сходе с траектории крейсерования на этап снижения происходит перевод двигателей на режим минимально допустимой тяги и система управления обеспечивает выполнение заданного сценария этапа снижения. Кроме того, полагаем, что интерцепторы (спойлеры) вводятся в действие только в том случае, если требуемый режим полета не реализуется при установленном минимальном значении тяги двигателей. А также что работа двигателей на режиме больше минимального с одновременным отклонением интерцепторов не допускается.

Обозначение (наименование) каждого сценария определяется диграфом  $(i, j)$  и указывает соответствующую последовательность режимов полета ВС.

В частности, в сценарии  $(0, 1)$  реализуется следующая последовательность режимов:

- на участке снижения до высоты  $H = H_{сн}$  обеспечивается отработка сначала числа Маха  $M_{зад}$  и затем приборной скорости  $V_{cas}^{зад}$  без условий на высотный профиль полета;
- на участке торможения (с ускорением торможения  $a_r$ ) при полете на постоянной высоте  $H = H_{сн}$  (т.е. задано условие на высотный профиль полета) происходит сначала уменьшение скорости до  $V_{cas}^1$ , а затем снижение до конечной высоты  $H = H_0$  с уменьшением скорости до значения ...

В сценарии  $(1, 0)$  эта последовательность имеет следующий вид:

- на участке снижения до высоты  $H = H_{сн}$  обеспечивается последовательная отработка сначала  $M_{зад}$  и затем  $V_{cas}^{зад}$  с выдерживанием на каждом из этих участков заданных углов наклона траектории к горизонту  $\theta_M$  и  $\theta_V$  соответственно;



– на участке наведения отсутствует условие на высотный профиль полета, поэтому происходит одновременное снижение скорости с ускорением торможения  $a_r$  и высоты до заданных конечных значений  $V_{cas}^0$  и  $H = H_0$ .

В сценарии (0, 0) последовательность выглядит так:

- участок снижения аналогичен участку снижения сценария (0, 1);
- участок наведения аналогичен участку наведения сценария (1, 0).

Сценарий (1, 1) выглядит так:

- участок снижения аналогичен участку снижения сценария (1, 0);
- участок торможения аналогичен участку торможения сценария (0, 1).

Высотно-скоростные профили сценариев (0, 1) и (1, 1) отображаются на рис. 1 линиями, проходящими через точки 4-3-2-1-0, а сценариев (0, 0) и (1, 0) – через точки 4-3-2-0.

**3. Задачи исследования. Критерии оптимальности.** Необходимость в рассмотрении всей совокупности возможных способов этапа снижения диктуется тем, что различные аэропорты имеют разные загруженности и возможности по приему прибывающих ВС. Поэтому бортовые вычислители каждого ВС должны обеспечивать выполнение этапа снижения по различным траекториям, определяемым диспетчерами управления воздушным движением (УВД) в каждом конкретном случае.

В данной работе не ставится целью создание оптимального алгоритма управления ВС на этапе снижения по какому-либо заданному критерию, а делается попытка некоторой систематизации доступных по открытым источникам типов построения траекторий снижения, их классификации, определения перечня параметров этих траекторий, оценки релевантности параметров (степени влияния на значения выбранных критериев) и разработки методики оптимизации различных траекторий снижения.

Часть поставленной задачи, связанная с классификацией, выполнена выше и охватывает как традиционные способы построения этапа снижения, так и способы, основанные на реализации траекторий непрерывного снижения.

Из сказанного легко понять, что при заданных граничных условиях каждая траектория сценария  $(i, j)$  однозначно определяется некоторым набором параметров:

в сценарии (0, 1) такими параметрами являются:

$$V_{cas}^{зад}, H_{сн}, V_{cas}^1, a_r, \quad (3.1)$$

в сценарии (1, 1) –

$$V_{cas}^{зад}, H_{сн}, \theta_M, \theta_V, V_{cas}^1, a_r, \quad (3.2)$$

где  $\theta_M, \theta_V$  – значения углов наклона к горизонту вектора воздушной скорости на участках полета с заданными значениями числа  $M$  и скорости  $V_{cas}$ ;

в сценарии (0, 0) –

$$V_{cas}^{зад}, H_{сн}, a_r, \quad (3.3)$$

в сценарии (1, 0) –

$$V_{cas}^{зад}, H_{сн}, \theta_M, \theta_V, a_r. \quad (3.4)$$

Соотношения (3.1)–(3.4) дают ответ на вторую поставленную задачу, связанную с определением множества параметров, однозначно определяющих каждую траекторию снижения. В частном случае значения  $\theta_M, \theta_V$  могут совпадать. Отсюда видно, что любая траектория рассматриваемых сценариев задается значениями 3–6 параметров. Для решения задач, связанных с оценкой релевантности параметров и оптимизации траекторий, необходимо определить критерии оптимизации и построить модель движения ВС на этапе снижения.

В качестве критерия оптимальности будем рассматривать стоимость этапа снижения  $C_{сн}$ , которая складывается из стоимости затраченного топлива и стоимости времени этапа снижения, т.е.

$$C_{\text{сн}} = \int_0^{t_{\text{сн}}} (qC_{\text{топ}}^1 + C_{\text{вр}}^1) dt, \quad (3.5)$$

где  $t_{\text{сн}}$  — время снижения;  $q$  — расход топлива в единицу времени;  $C_{\text{топ}}^1$ ,  $C_{\text{вр}}^1$  — стоимость единицы топлива и времени;  $C_{\text{топ}}^1$ ,  $C_{\text{вр}}^1$  рассчитываются в авиакомпаниях по соответствующим методикам и в общем случае зависят от маршрута полета. Если принять, что стоимость единицы топлива постоянна для рассматриваемого полета, то (3.5) можно записать в виде  $C_{\text{сн}} = C_{\text{топ}}^1 \tilde{C}_{\text{сн}}$ , где

$$\tilde{C}_{\text{сн}} = \int_0^{t_{\text{сн}}} (q + CI) dt. \quad (3.6)$$

Здесь  $CI = C_{\text{топ}}^1 / C_{\text{вр}}^1$  называется *CostIndex* и имеет размерность переменной  $q$ , т.е. расхода топлива за единицу времени.

Из (3.6) видно, что правая часть этого соотношения имеет размерность расхода топлива за время полета, поэтому  $\tilde{C}_{\text{сн}}$  может рассматриваться как приведенный (или обобщенный) расход топлива на интервале времени снижения. Учитывая прямую пропорциональность между значениями  $C_{\text{сн}}$  и  $\tilde{C}_{\text{сн}}$ , в качестве критерия оптимальности обычно принимается приведенный расход топлива  $\tilde{C}_{\text{сн}}$ , определяемый соотношением (3.6). В значительной степени это связано с тем, что при  $CI = 0$  критерием оптимальности становятся прямые затраты топлива.

Минимизация критерия (3.6) без дополнительных условий может служить целью реализации этапа снижения в аэропортах с низким трафиком прибытия. В противном случае, когда диспетчер воздушного движения упорядочивает вылеты и прилеты в реальном режиме времени, на первый план выступает требование выполнения снижения в заданный момент времени. Это требование выступает в качестве дополнительного условия при минимизации критерия (3.6).

**4. Модель движения центра масс ВС на этапе снижения.** Как и в работах [13–15], примем, что модель движения ВС на этапе снижения описывается системой уравнений (4.1). Эта модель учитывает изменение массы ВС и горизонтальную составляющую скорости ветра, но не учитывает форму и вращение Земли, что на реальных длительностях этапа снижения представляется несущественным:

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dT} &= T \cos \alpha_T - X_a - \Delta X_a - mg \sin \theta + q_c (V + U_B \cos \theta), \\ mV \frac{d\theta}{dt} &= T \sin \alpha_T + Y_a + \Delta Y_a - mg \cos \theta - q_c U_B \sin \theta, \\ \frac{dH}{dt} &= V \sin \theta, \\ \frac{dL}{dt} &= V \cos \theta + U_B, \\ \frac{dm}{dt} &= -q_c, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $\alpha_T = \alpha - \phi$ ,  $\alpha$ ,  $\phi$  — угол атаки и угол установки двигателя относительно связанной оси ВС;  $V$  — воздушная скорость;  $\theta$  — угол наклона к горизонту вектора воздушной скорости;  $H$  — высота;  $L$  — пройденная дальность;  $m$  — масса ВС;  $T$  — сила тяги двигателей ВС;  $Y_a$ ,  $X_a$  — аэродинамические подъемная сила и сила сопротивления соответственно;  $\Delta R$  — дополнительная сила сопротивления, создаваемая отклонением интерцепторов;  $U_B$  — горизонтальная систематическая составляющая скорости ветра;  $q_c$  — секундный расход топлива;  $g$  — ускорение силы тяжести.

Входящие в систему уравнений (4.1) силы  $X_a$ ,  $\Delta X_a$ ,  $Y_a$ ,  $\Delta Y_a$  определяются соотношениями:

$$X_a = c_{xa} S \frac{\rho V^2}{2}, \quad \Delta X_a = \Delta c_{xa} S \frac{\rho V^2}{2}, \quad Y_a = c_{ya} S \frac{\rho V^2}{2}, \quad \Delta Y_a = \Delta c_{ya} S \frac{\rho V^2}{2}, \quad (4.2)$$

где  $c_{xa}$ ,  $\Delta c_{xa}$ ,  $c_{ya}$ ,  $\Delta c_{ya}$  – коэффициенты соответствующих аэродинамических сил;  $S$  – характерная площадь крыла ВС;  $\rho$  – плотности воздуха на высоте  $H$ .

Аэродинамические коэффициенты  $c_{xa}$ ,  $c_{ya}$  в общем случае являются функциями большого числа переменных, однако в траекторных задачах принято использовать их балансировочные значения в виде функций:

$$c_{xa} = c_{xa}(\alpha, M), \quad c_{ya} = c_{ya}(\alpha, M). \quad (4.3)$$

Входящие в уравнения (4.1) сила тяги  $T$  и секундный расход топлива  $q_c$  обычно задаются таблицами или графиками:

$$\begin{aligned} T &= T(\delta, H_S, M, \Delta T^0), \\ q_c &= q_c(\delta, H_S, M, \Delta T^0) \end{aligned} \quad (4.4)$$

где  $M$  – число Маха;  $\delta$  – эквивалент тяги, в качестве которого могут рассматриваться обороты турбины или компрессора высокого или низкого давления, положение рычагов управления двигателем РУД и др.;  $\Delta T^0$  – отклонение температуры наружного воздуха от стандартного для данной высоты значения;  $H_S$  – барометрическая высота.

В системе уравнений (4.1) фазовыми переменными являются  $V$ ,  $\theta$ ,  $H$ ,  $L$ ,  $m$ , а функциями управления  $\alpha$ ,  $\delta$ , на которые наложены ограничения –

$$\begin{aligned} \alpha_{\min} &\leq \alpha \leq \alpha_{\max}, \\ \delta_{\min} &\leq \delta \leq \delta_{\max}. \end{aligned}$$

Отличием данной модели от модели, используемой в работах [13–15], служит присутствие в (4.1) слагаемого  $\Delta R$ , связанного с отклонениями интерцепторов. Формально интерцепторы – дополнительные органы управления, и их отклонение  $\delta_i$  можно рассматривать как дополнительную управляющую функцию в системе уравнений (4.1). Такая постановка вопроса имела бы место в задачах управления, но в данном случае нас интересуют только характер поведения и необходимый диапазон изменения  $\Delta C_{xa}$ , обеспечивающие выполнение заданных режимов полета ВС на этапе снижения. Поэтому в системе уравнений (4.1) в качестве функций управления оставим только  $\alpha$ ,  $\delta$ , а  $\Delta C_{xa}$  будем рассматривать как некоторый параметр этой системы.

**5. Реализация режимов моделирования сценариев.** Анализируя все множество траекторий в сценариях  $(i, j)$ , где  $i, j = 0, 1$ , видим, что для их реализации необходимо разработать следующую совокупность законов управления моделью (4.1)–(4.4) движения центра масс ВС:

- 1) отработка заданного значения числа Маха  $M = M_{\text{зад}}$ ;
- 2) отработка заданного значения приборной скорости  $V_{\text{cas}} = V_{\text{cas}}^{\text{зад}}$ ;
- 3) отработка заданного значения ускорения торможения воздушной скорости  $dV/dt = -a_r$ ;
- 4) отработка заданного значения высоты полета  $H = H_{\text{зад}}$ ;
- 5) отработка заданного угла наклона вектора воздушной скорости к горизонту  $\theta = \theta_{\text{зад}}$ ;
- 6) отработка числа Маха  $M = M_{\text{зад}}$ , приборной скорости  $V_{\text{cas}} = V_{\text{cas}}^{\text{зад}}$  и ускорения торможения  $-a_r$  с одновременной отработкой  $\theta = \theta_{\text{зад}}$ ;
- 7) одновременная отработка заданного закона изменения воздушной скорости и высоты полета  $H = H_{\text{зад}}$ .

В модели движения ВС для реализации этих законов имеется три управляющие функции: угол атаки  $\alpha$ , отклонение органа управления двигателем  $\delta$  и приращение  $\Delta C_{xa}$  коэффициента силы аэродинамического торможения за счет отклонения интерцепторов. В каждом сценарии  $(i, j)$  должны быть определены законы формирования  $\alpha$ ,  $\delta$  и  $\Delta C_{xa}$ . Рассмотрим методику решения этого вопроса при реализации рассматриваемых сценариев.

5.1. Участки снижения по сценариям  $(0, j), j=0, 1$ . Здесь требуется реализовать законы управления 1), 2) при выполнении ограничений на управляющие функции  $\alpha(t)$  и  $\delta(t)$  при неотрицательном значении  $\Delta C_{xa}$ . В данном случае имеет место ситуация, когда нужно обеспечить заданное изменение одного параметра движения ВС ( $M=M_{\text{зад}}$  либо  $V_{cas}=V_{cas}^{\text{зад}}$ ) при наличии двух управляющих воздействий  $\alpha(t)$ ,  $\delta(t)$  и  $\Delta C_{xa} \geq 0$ . Для выполнения требуемого режима полета можно одну из управляющих функций зафиксировать, а для другой искать соответствующий закон управления.

При таком подходе вопрос заключается в следующем: с помощью какого канала управления, угла атаки или тяги двигателя более целесообразно получать заданный режим движения модели? Очевидно, что следует принять вариант управления углом атаки  $\alpha(t)$  при фиксированном положении  $\delta(t)$ . Таким образом, проблема свелась к случаю, когда имеется одна управляющая функция  $\alpha(t)$  и одна фазовая переменная  $M$  (или  $V_{cas}$ ), которая должна изменяться заданным образом.

При решении подобных задач обычно используют методы пропорционально-интегрально-дифференциальных (ПИД) регуляторов [16] либо методы решения обратных задач динамики [17]. Как показали исследования, ввиду нелинейности модели и значительного изменения высоты и скорости на этапе снижения, использование ПИД-регуляторов приводит к необходимости подстройки соответствующих коэффициентов. Учитывая, что конечной целью исследования служит получение универсальных алгоритмов для бортовых вычислителей, данное обстоятельство не позволяет принять метод ПИД-регуляторов в качестве рабочего для решения рассматриваемой задачи.

Достаточно универсальным является метод решения обратных задач динамики, что показано в работе [17] на примере этапа набора высоты. Этот метод сводит задачу к решению на каждом шаге интегрирования одного нелинейного уравнения, неизвестным в котором будет значение  $\alpha(t)$ . Большое разнообразие существующих итерационных методов решения этой задачи дает возможность выбрать среди них тот, который удовлетворяет требованиям разработчика. Формально в итерационных методах имеется проблема выбора начального приближения. Однако достаточно узкий диапазон возможных значений  $\alpha(t)$  позволяет в каждом конкретном случае определить требуемое начальное приближение и получить решение задачи за 1–3 итерации.

5.2. Участки снижения по сценариям  $(1, j), j=0, 1$ . В этих сценариях на траектории снижения накладываются два условия: выдерживание заданной скорости ( $M$  или  $V_{cas}$ ) и угла  $\theta$  наклона воздушной скорости к горизонту. Метод обратных задач динамики здесь приводит к необходимости совместного решения на каждом шаге интегрирования двух нелинейных уравнений относительно  $\alpha(t)$ ,  $\delta(t)$ , и опять встает проблема получения начального приближения. Его можно найти путем разложения нелинейностей в ряд Тейлора до третьей степени по  $\alpha$  и свести задачу к решению двух алгебраических уравнений. Методической основой для этого служит теория исключений [18], позволяющая сформулировать необходимое и достаточное условие единственности решения этой системы. Как показывают исследования, такое начальное приближение оказывается достаточно близким к решению исходной нелинейной системы, решение которой получается после 1–2 итераций методом Ньютона.

5.3. Участки торможения-наведения по сценариям  $(i, j), i, j=0, 1$ . Как следует из описания сценариев, на этих участках всегда требуется обеспечить управление по двум параметрам:  $a_r=a_r^{\text{зад}}$  и  $H=H_{\text{зад}}$  либо  $\theta=\theta_{\text{зад}}$ . Здесь также использование метода решения обратных задач динамики в сочетании с методами теории исключений позволяет найти необходимые законы управления для угла атаки  $\alpha(t)$  и отклонения РУД  $\delta(t)$  при  $\Delta c_{xa} \geq 0$ .

**6. Анализ релевантности параметров траекторий.** Как отмечалось, под релевантностью параметра будем понимать значимость, существенность, степень влияния его на какие-либо характеристики траектории либо значения критериев. Оценка релевантности конкретного параметра проводится следующим образом.

1. Назначаем интересующие нас характеристики траектории или критерии. В качестве таковых примем значение расхода топлива ( $I_T$ ), время снижения ( $I_T$ ) в конечные условия и дальность ( $I_L$ ), пройденную ВС на этапе снижения.

2. Выбираем один из параметров  $P$  множества (3.1)–(3.4) в качестве испытываемого и задаем-ся интересующим нас диапазоном его изменения  $P_{\min} \leq P \leq P_{\max}$ .

3. Разбиваем этот диапазон точками  $P_i, i = \overline{1, N}$ , на равные интервалы.

4. Принимаем для остальных параметров некоторые «стандартные» значения, которые определены в РЛЭ или являются типичными для рассматриваемого ВС. В качестве таких «стандартных» далее были приняты:  $M_{зад} = 0.8$ ,  $V_{cas}^{зад} = 290 kt$ ,  $H_{сн} = 3$  км,  $V_{cas}^1 = 150 kt$ ,  $\alpha_r = 0.1$  м/с<sup>2</sup> (здесь и далее  $kt$  = узел/ч).

5. При выбранном  $P$  и остальных «стандартных» значениях параметров реализуем (путем интегрирования системы уравнений (4.1)–(4.4)) соответствующую траекторию полета ВС. Для этого на каждом участке этапа снижения в соответствии с п.5 разрабатываются алгоритмы формирования управлений  $\alpha = \alpha(t)$  и  $\delta = \delta(t)$  при  $\Delta C_{\lambda a} \geq 0$ , обеспечивающие выполнение выбранного типа траектории.

6. В результате интегрирования системы (4.1) находим значения расхода топлива  $I_T(P_i)$ , времени  $I_t(P_i)$  и дальности  $I_L(P_i)$  для выбранного параметра  $P$ .

7. Такие расчеты проводим для всех  $P_i, i = \overline{1, N}$ , и получаем массивы значений расхода топлива, времени и дальности.

8. Обработкой этих массивов определяем численные значения отдельных характеристик, таких как:

- средние значения расхода топлива  $\bar{I}_T$ , времени  $\bar{I}_t$  и дальности  $\bar{I}_L$ ;
- диапазон изменения значений расхода топлива  $\Delta I_T$ , времени  $\Delta I_t$  и дальности  $\Delta I_L$ ;
- относительный диапазон изменения (процентное выражение отношения диапазона к среднему значению) расхода топлива  $\delta I_T$ , времени  $\delta I_t$  и дальности  $\delta I_L$ .

Для простоты анализа проведенного исследования результаты его сведены в табл. 1 для траекторий типа  $(0, i)$  и табл. 2 (для траекторий типа  $(i, 0)$ ).

Рассматривая в целом все типы траекторий можно сделать два основных вывода.

В каждом типе траекторий имеется набор некоторых параметров, за счет которых можно изменять длительность этапа снижения на несколько минут и протяженность его в пределах нескольких десятков километров.

Наибольшие возможности по изменению параметров этапа снижения имеют траектории без ограничений высотного профиля на участке снижения, т.е. траектории типа  $(0, j)$ , где вариации по времени достигают значений порядка 10 мин и вариации по протяженности порядка 90 км.

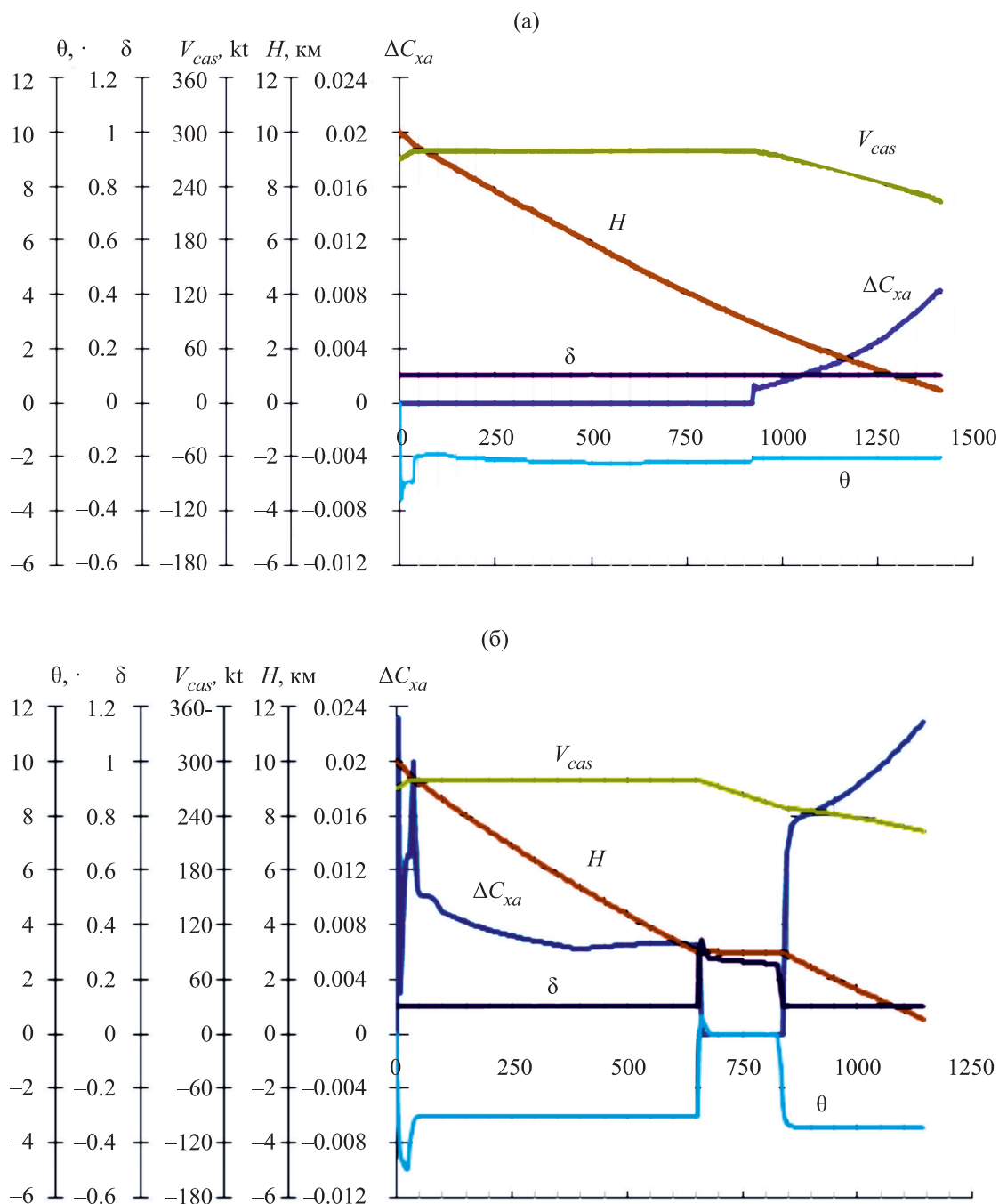
Анализ результатов исследования траекторий типа  $(0, j)$ , приведенных в табл. 1, показывает:

- наиболее релевантными параметрами по значениям дальности и времени снижения являются ускорение торможения  $a_r$  и высота снижения  $H_{сн}$ ;
- выполнение торможения с использованием горизонтального участка увеличивает расход топлива на 20–30 кг;
- вариации значения приборной скорости на участке снижения практически (с точностью 0.2–0.3%) не влияют на длительность этапа снижения и приводят к изменению дальности в пределах 9.5 км;

**Таблица 1.** Сводка результатов исследования релевантности параметров на траекториях типа  $(0, 0)$  и  $(0, 1)$

| Тип траектории |            |                 | (0, 0)    |          |              | (0, 1)    |          |              |
|----------------|------------|-----------------|-----------|----------|--------------|-----------|----------|--------------|
| Параметр       | Диапазон   | Критерий        | $\bar{I}$ | $\Delta$ | $\delta, \%$ | $\bar{I}$ | $\Delta$ | $\delta, \%$ |
| $V_{cas}$      | 271–301 kt | Топливо $I_T$   | 307.23    | 34.29    | 11.16        | 335.99    | 51.76    | 15.41        |
|                |            | Время $I_t$     | 1416.91   | 3.08     | 0.22         | 1412.33   | 3.86     | 0.27         |
|                |            | Дальность $I_L$ | 257.17    | 9.50     | 3.69         | 256.60    | 9.36     | 3.65         |
| $a_r$          | 0.05–0.15  | Топливо $I_T$   | 331.72    | 263.82   | 79.53        | 346.60    | 230.81   | 66.59        |
|                |            | Время $I_t$     | 1478.36   | 670.10   | 45.33        | 1473.66   | 666.80   | 45.25        |
|                |            | Дальность $I_L$ | 264.11    | 95.25    | 36.07        | 263.53    | 94.89    | 36.01        |
| $H_{сн}$       | 1–6 км     | Топливо $I_T$   | 301.50    | 114.53   | 37.99        | 324.21    | 82.13    | 25.33        |
|                |            | Время $I_t$     | 1401.75   | 309.40   | 22.07        | 1397.46   | 312.53   | 22.36        |
|                |            | Дальность $I_L$ | 252.18    | 51.86    | 20.57        | 251.64    | 52.28    | 20.78        |
| $V_{cas}^1$    | 230–270    | Топливо $I_T$   |           |          |              | 324.64    | 29.31    | 9.03         |
|                |            | Время $I_t$     |           |          |              | 1411.32   | 9.03     | 0.64         |
|                |            | Дальность $I_L$ |           |          |              | 254.68    | 1.13     | 0.44         |





**Рис. 3.** Изменения параметров траекторий: а – траектория типа (0, 0), б – траектория типа (0, 1), в – траектория типа (1, 0), г – траектория типа (1, 1).

– вариацией высотой снижения  $H_{\text{сн}}$  в диапазоне 1–6 км обеспечивается изменение времени этапа снижения более чем на 5 мин и дальности – на 50 км;

– при вариации ускорения торможения в диапазоне  $0.05\text{--}0.15\text{ м/с}^2$  время завершения этапа снижения изменяется более чем на 20 мин, а дальность – на 90 км.

Согласно этим выводам, выполнение этапа снижения на траекториях без ограничения высотного профиля на участке снижения (траектории типа (0, 0), (0, 1)) создают хорошие предпосылки для выполнения указаний диспетчера по заданному времени и дальности этапа снижения. Указания диспетчера могут выполняться путем рационального выбора высоты снижения  $H_{\text{сн}}$  и ускорения торможения  $a_r$ . Кроме того, на участке торможения за счет кор-



Таблица 2. Сводка результатов исследования релевантности параметров на траекториях типа (1, 0) и (1, 1)

| Тип траектории |                   |                 | (1,0)     |          |              | (1,1)     |          |              |
|----------------|-------------------|-----------------|-----------|----------|--------------|-----------|----------|--------------|
| Параметр       | Диапазон          | Критерий        | $\bar{I}$ | $\Delta$ | $\delta, \%$ | $\bar{I}$ | $\Delta$ | $\delta, \%$ |
| $V_{cas}$      | 275–305 <i>kt</i> | Топливо $I_T$   | 268.66    | 49.56    | 18.45        | 299.90    | 60.51    | 20.18        |
|                |                   | Время $I_t$     | 1176.75   | 64.14    | 5.45         | 1173.81   | 62.53    | 5.33         |
|                |                   | Дальность $I_L$ | 208.21    | 17.18    | 8.25         | 208.06    | 16.51    | 7.94         |
| $a_r$          | 0.05–0.15         | Топливо $I_T$   | 398.53    | 86.98    | 21.83        | 416.07    | 49.16    | 11.82        |
|                |                   | Время $I_t$     | 1490.73   | 239.11   | 16.04        | 1494.45   | 227.41   | 15.22        |
|                |                   | Дальность $I_L$ | 276.99    | 7.74     | 2.80         | 278.48    | 10.20    | 3.66         |
| $H_{сн}$       | 1–6 км            | Топливо $I_T$   | 275.95    | 39.22    | 14.21        | 300.62    | 8.03     | 2.67         |
|                |                   | Время $I_t$     | 1208.38   | 30.07    | 2.49         | 1210.59   | 27.23    | 2.25         |
|                |                   | Дальность $I_L$ | 214.69    | 1.48     | 0.69         | 215.77    | 2.57     | 1.19         |
| $\theta_V$     | (–5)–(–2)         | Топливо $I_T$   | 282.96    | 72.31    | 25.56        | 307.70    | 72.60    | 23.59        |
|                |                   | Время $I_t$     | 1203.47   | 323.63   | 26.89        | 1196.70   | 327.03   | 27.33        |
|                |                   | Дальность $I_L$ | 215.53    | 59.33    | 27.53        | 214.67    | 59.50    | 27.72        |
| $V_{cas}^1$    | 230–270           | Топливо $I_T$   |           |          |              | 276.58    | 28.58    | 10.33        |
|                |                   | Время $I_t$     |           |          |              | 1145.16   | 10.87    | 0.95         |
|                |                   | Дальность $I_L$ |           |          |              | 200.60    | 1.36     | 0.68         |

рекции значений  $a_r$  и  $V_{cas}^1$  появляется возможность реализации более точного выполнения заданных оператором условий.

Аналогичные выводы можно сделать из табл. 2 для траекторий типа (1,  $j$ ) с тем отличием, что здесь вариации параметров  $a_r$  и  $H_{сн}$  приводят к меньшим диапазонам изменения времени и дальности этапа снижения, чем в предыдущем случае. Для этого типа траекторий наиболее существенное влияние на диапазоны изменения всех критериев оказывает параметр  $\theta$ .

Типичный вид изменения параметров рассматриваемых траекторий снижения по времени показан на рис. 3.

Проведенная оценка влияния отдельных параметров траекторий на диапазоны изменения основных критериев позволяет логически обоснованно подойти к постановке и решению задачи оптимизации траекторий этапа снижения при заданном времени его выполнения.

**7. Задача прибытия в конечные условия в заданное время.** Эта задача решается на последнем участке крейсирования перед этапом снижения. Возможны по крайней мере три постановки задачи.

**7.1. Первая постановка задачи.** Эту задачу, вероятно, более приемлемую для аэропортов с низким трафиком прибытия ВС, можно сформулировать следующим образом. Для принятой модели траектории снижения на борту ВС по критерию (3.6) решается задача оптимизации траектории по некоторой совокупности ее релевантных параметров. В процессе этого решения определяется время снижения и сообщается диспетчеру аэродрома планируемое время начала снижения, точка начала снижения и время прибытия. При согласии диспетчера этот план прибытия выполняется. В данной постановке можно рассчитать не одну, а несколько траекторий и предложить диспетчеру на выбор.

В том случае, если ни один из предложенных вариантов диспетчера не устраивает, он сообщает свой вариант времени прибытия и тип траектории снижения. Это определяет вторую постановку задачи, где задается время прибытия с возможной горизонтированной длиной траектории снижения. Понятно, что существенным здесь является именно задание времени прибытия, а не длины траектории.

Возможна и третья постановка задачи, когда диспетчер определяет не только время прибытия, но и назначает дальность начала снижения.

Первая постановка более простая и сводит задачу к стандартному методу нелинейного программирования, в то время как две другие требуют дополнительного рассмотрения.

**7.2. Вторая постановка задачи.** Пусть в момент времени  $t$  дальность до точки прибытия равна  $L$ , а момент прибытия задан значением времени  $t_0 > t$ . Пусть траектория выбранного типа определяется множеством параметров  $P$ , из которых свободными, т.е. доступ-

ными для выполнения конечных условий, являются  $P_0 \in P$ . Понятно, что так как в задаче имеется два конечных условия (дальность и время), то размерность  $N$  множества параметров  $P_0$  должна быть  $\geq 2$ .

Пусть задача имеет решение и траектория снижения характеризуется временем снижения  $t_{\text{сн}}(P_0)$  и длиной пути  $L_{\text{сн}}(P_0)$ . В этом случае выполняются два соотношения:

$$t_0 - t = \Delta + t_{\text{сн}}(P_0); \quad (7.1)$$

$$L = \Delta W + L_{\text{сн}}(P_0), \quad (7.2)$$

где  $\Delta$  — время полета до начала снижения с путевой скоростью  $W$ .

Соотношение (7.1) отражает тот факт, что оставшееся время до конца полета содержит участок полета длительностью  $\Delta$  до начала снижения и собственно сам этап снижения. При этом соотношение (7.2) следует из того, что значение текущей дальности складывается из участка горизонтального полета длительностью  $\Delta$  со скоростью  $W$  и длиной пути, пройденного на этапе снижения. Исключая из (7.1), (7.2) неизвестное значение  $\Delta$ , получаем:

$$L - L_{\text{сн}}(P_0) = W(\Delta t - t_{\text{сн}}(P_0)), \quad (7.3)$$

где  $\Delta t = t_0 - t$  — время, оставшееся до прибытия в конечные условия.

Таким образом, видим, что если задача имеет решение, то свободные параметры  $P_0$  траектории этапа снижения и путевая скорость  $W$  до начала снижения должны удовлетворять соотношению (7.3), т.е. *выполнение соотношения (7.3) является необходимым условием решения задачи прибытия в заданную точку в заданное время.*

С другой стороны, выполнение соотношения (7.3) означает выполнение на траектории балансов дальности и времени, т.е. завершения траектории на заданной дальности в заданное время, что означает достаточность условий (7.3). Таким образом, доказано, что выполнение соотношения (7.3) является необходимым и достаточным условием решения задачи построения траектории, которая приходит в конечные условия в заданное время. При этом время полета до точки снижения определяется значением  $\Delta = \Delta t - t_{\text{сн}}$ .

Из физического смысла задачи ясно, что рассматриваемая задача не всегда имеет решения, т.е. существует множество значений параметров  $P_0$ , при которых не выполняется соотношение (7.3). Но *если решение существует, то в общем случае оно не единственное.* Это следует из того, что в пространстве параметров  $P_0$  размерности  $N$  соотношение (7.3) определяет подмножество размерности  $N-1$ . А так как по условию задачи  $N \geq 2$ , поэтому решения соотношения (7.3) образуют некоторое множество размерности  $\geq 1$ , т.е. в пространстве параметров  $P_0$  в зависимости от значения  $N$  они образуют многообразия в виде линии, поверхности, объема и т.д. Следствием из этого утверждения является то, что *задачу о прибытии в заданное время можно рассматривать в оптимальной постановке*, т.е. искать оптимальное значение выбранного критерия на множестве решений соотношения (7.3).

**7.3. Третья постановка задачи.** В ней задано время прибытия  $t_0$  в конечную точку и точка начала снижения в виде значения дальности снижения  $L_{\text{сн}}$ .

В этом случае время полета  $\Delta$  до точки снижения определяется соотношением  $\Delta = (L - L_{\text{сн}})/W$ , а требуемое время снижения  $T_{\text{сн}} = \Delta t - \Delta$ . Таким образом, в этой постановке задача сводится к построению траектории снижения с заданными значениями времени  $T_{\text{сн}}$  и дальностью снижения  $L_{\text{сн}}$ . Поэтому можем записать:

$$t_{\text{сн}}(P_0) = T_{\text{сн}}, \quad l_{\text{сн}}(P_0) = L_{\text{сн}}, \quad (7.4)$$

где  $t_{\text{сн}}(P_0)$ ,  $l_{\text{сн}}(P_0)$  — время и дальность снижений, соответствующие значению параметра  $P_0$ .

Отсюда видим, что в третьей постановке задача свелась к решению системы двух нелинейных уравнений (7.4) относительно неизвестных параметров  $P_0$ . Множество решений этих уравнений образует в пространстве параметров  $P_0$  некоторое подмножество размерности  $N-2$ . Отсюда следует, что если число варьируемых параметров равно двум, то если решение существует, оно единственно. Если же  $N \geq 3$ , то множество решений системы образует в пространстве параметров  $P_0$  некоторую линию, поверхность и т.д. Здесь, так же как и в предыдущей постановке,

возможна оптимизация процесса снижения по выбранному критерию на множестве решений системы (7.4). Кроме того, в обеих постановках в число варьируемых параметров можно включать значение скорости  $W$ , что позволит, например, оптимизировать процесс снижения по выбранному критерию на всем участке от момента времени  $t$  до окончания снижения.

Таким образом видим, что решение задачи обеспечения заданного времени прибытия в рассматриваемых постановках сводится к численному решению одного (7.3) или двух (7.4) нелинейных уравнений с несколькими переменными. Особенностью этих уравнений является то, что значения  $t_{\text{сн}}(P_0)$  и  $l_{\text{сн}}(P_0)$  получаются путем интегрирования траектории снижения с заданными значениями параметров  $P_0$ . Далее приведем задачу оптимизации этапа снижения только во второй постановке.

**8. Пример решения задачи оптимизации этапа снижения при заданном времени снижения.** Для простоты рассмотрим вариант использования на этапе снижения траектории типа  $(0, 0)$ . Эта траектория и ее характеристики определяются значениями трех параметров  $P$ :  $V_{\text{cas}}^{\text{зад}}$ ,  $H_{\text{сн}}$ ,  $a_r$ . В качестве варьируемых параметров  $P_0$  для решения основного уравнения (7.3) можно принять любое подмножество из  $P$ . Так, учитывая результаты исследования релевантности, можно при решении задачи обеспечения заданного времени прибытия в качестве множества  $P_0$  выбрать параметры  $H_{\text{сн}}$ ,  $a_r$ , а параметр  $V_{\text{cas}}^{\text{зад}}$  использовать для оптимизации критерия стоимости. Можно в качестве  $P_0$  принять любой из параметров  $H_{\text{сн}}$ ,  $a_r$ , а оптимизацию по критерию стоимости выполнять по оставшимся параметрам. Можно решать уравнение (7.3) сразу по трем параметрам. Каждый из этих способов решения имеет свои преимущества и недостатки.

Заметим, что при любом выборе способа решения уравнения (7.3) прежде всего необходимо определить диапазон возможных значений  $\Delta t = t_0 - t$ , при которых решение уравнения (7.3) существует. Для этого достаточно рассмотреть функцию:

$$Y(P_0) = \frac{L - l_{\text{сн}}(P_0)}{W} + t_{\text{сн}}(P_0). \quad (8.1)$$

Учитывая, что область определения параметров  $P_0$  является замкнутым множеством, всегда существуют минимальное  $Y_{\min}$  и максимальное  $Y_{\max}$  значения функции  $Y(P_0)$ , которые определяют диапазон возможных значений  $\Delta t = t_0 - t$ , а следовательно, и диапазон возможных значений времени прибытия  $t_0$ . Поэтому решение уравнения (7.3) можно проводить только в случае, если заданное диспетчером время прибытия  $t_0$  удовлетворяет условию:

$$Y_{\min} \leq \Delta t \leq Y_{\max}. \quad (8.2)$$

Далее рассмотрим два способа решения уравнения (7.3) при выполнении условия (8.2). В первом из них в качестве множества  $P_0$  выберем параметры  $H_{\text{сн}}$ ,  $a_r$ , а параметр  $V_{\text{cas}}^{\text{зад}}$  будем использовать для оптимизации критерия стоимости. В этом случае соотношение (7.3) в области переменных  $H_{\text{сн}}$ ,  $a_r$  определяет некоторую линию  $F(H_{\text{сн}}, a_r) = 0$ , в каждой точке которой выполняются условия по заданному времени прибытия. Линии  $F(H_{\text{сн}}, a_r) = 0$  для значений  $V_{\text{cas}}^{\text{зад}} = 271 - 280kt$  показаны на рис. 4.

Путем интегрирования системы уравнений (4.1)–(4.4) для каждой точки этих линий можно рассчитать значение критерия стоимости, который ввиду постоянства времени выполнения этапа снижения вырождается в затраты топлива. Вид этих зависимостей показан на рис. 5.

Из представленных на рис. 4, 5 зависимостей можно видеть, что оптимум критерия стоимости достаточно пологий и в качестве оптимальных значений параметров можно принять:

$$V_{\text{cas}}^{\text{опт}} \approx 270kt; \quad H_{\text{сн}}^{\text{опт}} \approx 5000 \text{ м}; \quad a_r^{\text{опт}} \approx 0.06 \text{ м/с}^2. \quad (8.3)$$

При реализации этих результатов в алгоритмах вычислителя ССВ движение ВС от момента времени  $t$  до  $t_0$  будет состоять из двух участков. На первом из них длительностью  $t_W = t_0 - t - t_{\text{сн}}(V_{\text{cas}}^{\text{опт}}, H_{\text{сн}}^{\text{опт}}, a_r^{\text{опт}})$  выполняется горизонтальный полет со скоростью  $W$ , а после него реализуется траектория снижения типа  $(0, 0)$  с параметрами  $V_{\text{cas}}^{\text{опт}}$ ,  $H_{\text{сн}}^{\text{опт}}$ ,  $a_r^{\text{опт}}$ .

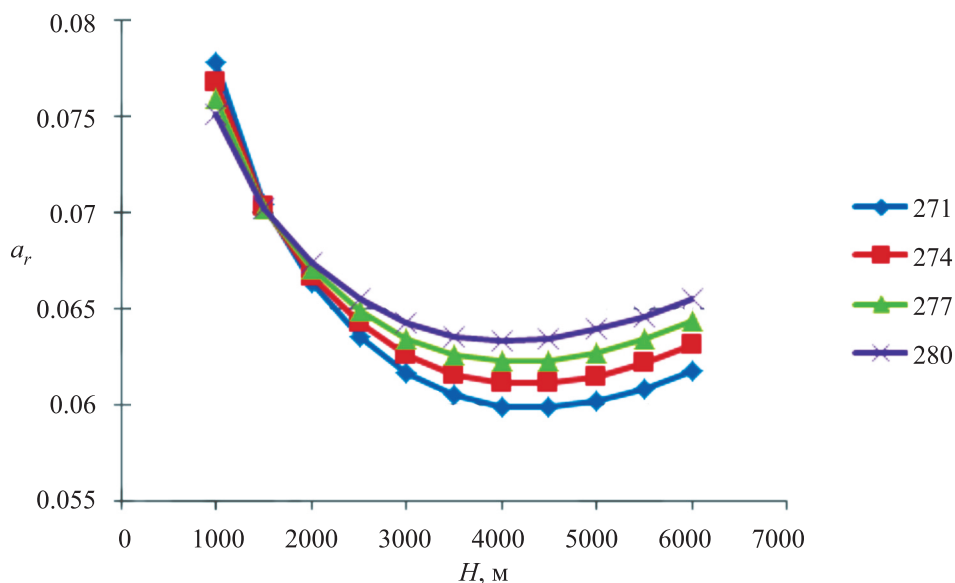


Рис. 4. Сечения поверхности заданного времени прибытия плоскостями  $V_{cas}^{зад} = 271, 274, 277, 280 \text{ kt}$ .

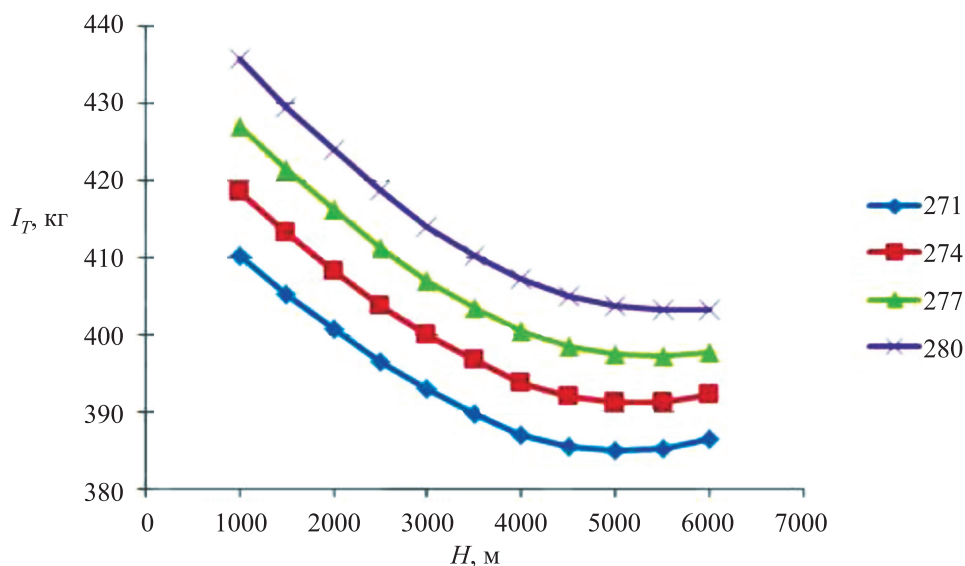


Рис. 5. Сечения поверхности критерия затрат топлива плоскостями  $V_{cas}^{зад} = 271, 274, 277, 280 \text{ kt}$ .

При втором способе решения задачи множество  $P_0$  образовано параметрами  $V_{cas}^{зад}$ ,  $H_{сн}$ ,  $a_r$ . В этом случае подмножество значений этих параметров  $M_0$ , на котором выполняется заданное время прибытия, имеет вид поверхности (рис. 6).

Затраты топлива на траекториях этапа снижения при выполнении участка снижения с параметрами подмножества  $M_0$  имеют вид поверхности (рис. 7).

Анализ рис. 6, 7 показывает, что оптимальные по критерию стоимости значения параметров определяются полученными ранее соотношениями (8.3).

По результатам анализа этого решения можно сделать следующие выводы:

1) функция затрат топлива в районе оптимальных значений достаточно пологая и в пределах отклонения от оптимума в 10–15 кг допускает диапазон изменение высоты снижения 4–5.5 км и скорости 270–274 kt;

2) наибольшее влияние на точность выполнения заданного времени прибытия оказывает обработка заданного значения ускорения  $a_r$  на участке торможения-наведения;

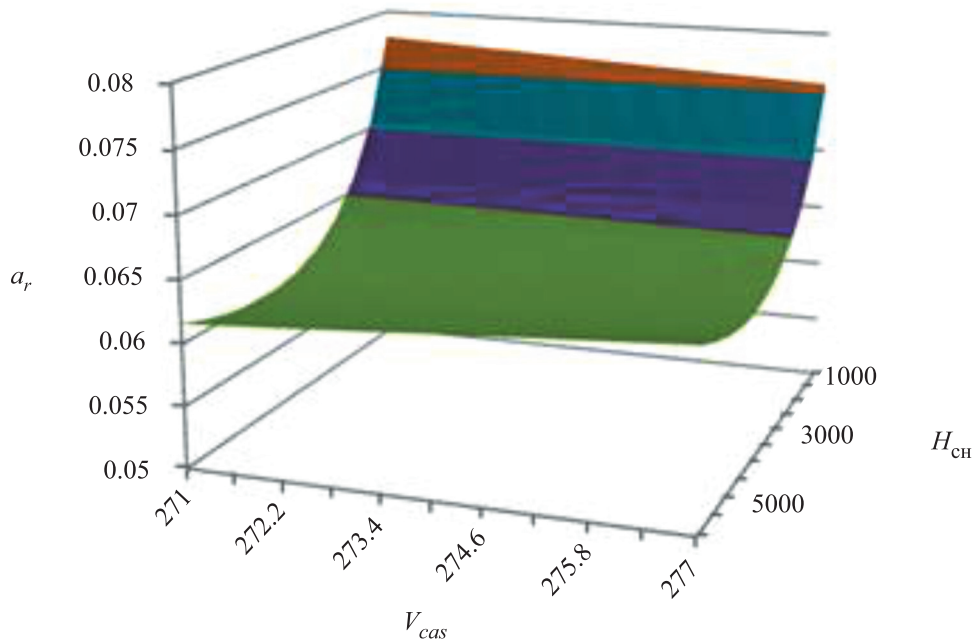


Рис. 6. Поверхность значений параметров  $V_{cas}^{зад}$ ,  $H_{сн}$ ,  $a_r$ , при которых время снижения равно заданному значению.

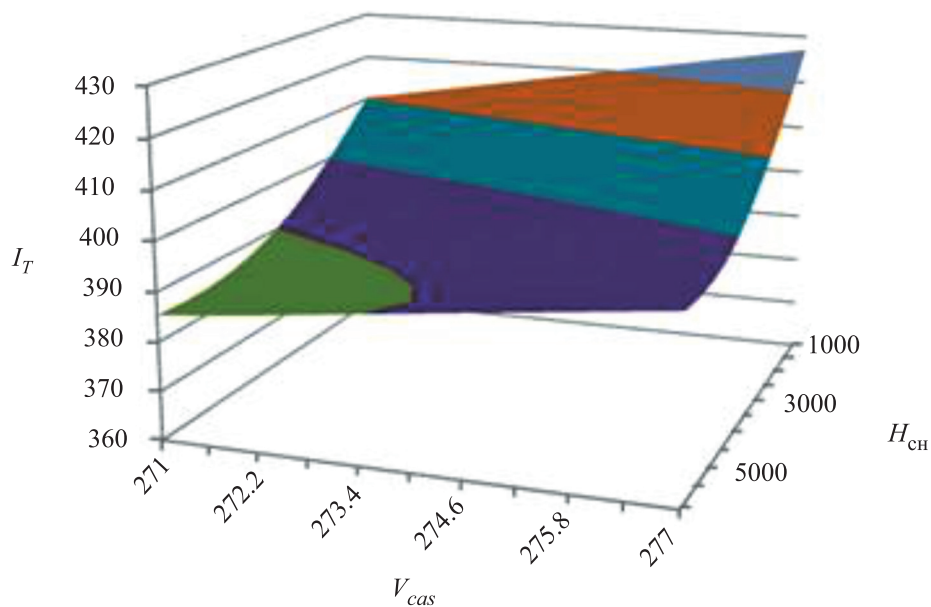


Рис. 7. Поверхность затрат топлива на траекториях этапа снижения.

3) в вычислительном отношении, вероятно, более простым является первый способ решения задачи, где множество  $P_0$  образовано двумя параметрами  $H_{сн}$ ,  $a_r$ ;

4) это множество  $P_0$  целесообразно использовать и при оптимизации этапа снижения по траекториям типа (0, 1).

**Заключение.** Проведенное исследование этапа снижения показало, что он более сложен в реализации по сравнению с этапом набора высоты. Это связано с тем, что при отрицательных углах наклона траектории ускорение силы тяжести стремится увеличить скорость ВС, а для удержания ее в заданных пределах приходится использовать дополнительные органы управления типа тормозных щитков. В результате для отработки двух параметров траектории



(высота, скорость) необходимо построить законы управления для трех управляющих параметров: отклонение РУД, угол атаки и отклонение тормозных щитков.

Предложенная классификация возможных траекторий снижения позволила все множество их сгруппировать в четыре различных группы, каждая из которых обладает присущими только ей свойствами. Для каждой группы определен перечень параметров, однозначно задающий каждую отдельную траекторию. Таким образом, между траекториями и параметрами установлено взаимно однозначное соответствие, что позволяет рассматривать любую траекторию как набор некоторого числа параметров. Проведенное исследование влияния (релевантности) параметров на критерии оптимальности и отдельные свойства траекторий дало возможность выявить среди них наиболее значимые и вычислить количественные характеристики значимости для каждой группы параметров.

Результаты оценки релевантности параметров позволили разработать методику оптимизации этапа снижения при выполнении заданного времени прибытия ВС в конечную точку. Рассмотренный пример решения задачи оптимизации с дополнительным условием показал работоспособность предложенной методики и возможность получения практических результатов. Для повышения точности выполнения заданного времени прибытия целесообразно в конце участка снижения по информации о текущей дальности и скорости  $V_{cas}$  реализовать режим коррекции значения  $a_r$ , обеспечивающий уменьшение ошибки времени прибытия. Оценку достижимой при этом точности и практическую целесообразность разработки такого алгоритма следует выполнить в процессе дальнейших исследований.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркин Н.Н., Чистов М.С. Терминальное управление посадкой пассажирского самолета // Тр. МАИ. 2010. Вып. 41.
2. Sang Gyun Park, John-Paul Clarke. Vertical Trajectory Optimization for Continuous Descent Arrival Procedure // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. Minneapolis, 2012. August.
3. Lim Y., Gardi A., Sabatini R., Ranasinghe K., Ezer N., Rodgers K., Salluce D. Optimal Energy-based 4D Guidance and Control for Terminal Descent Operations // Aerospace Science and Technology. 2019. V. 95.
4. Гревцов Н.М., Тегин А.В. Формирование управления самолетом для отслеживания траектории в задаче четырехмерной навигации // Уч. зап. ЦАГИ. 2000. Т. XXXI. № 1, 2.
5. Grevtsov N., Dymchenko A. Application of Suboptimal 4-D Navigation Algorithms for Flight Planning and Control Considering Weather Conditions // 29 Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences. St. Petersburg, 2014.
6. Betts J.T., Cramer E.J. Application of Direct Transcription to Commercial Aircraft Trajectory Optimization // J. Guidance, Control, and Dynamics. 1995. V. 18. № 1.
7. Benson D.A. A Gauss Pseudospectral Transcription for Optimal Control // Ph.D. Thesis, Department of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology. Cambridge, 2004.
8. Agamawi Y.M., Rao A.V. "CGPOPS: A C++ Software for Solving Multiple-Phase Optimal Control Problems Using Adaptive Gaussian Quadrature Collocation and Sparse Nonlinear Programming" // University of Florida, ACM Trans. Math. Softw. 2020. V. 46. № 3. Article 25.
9. Bedrossian N., Bhatt S., Lammers M., Nguyen L., Zhang Y. First Ever Flight Demonstration of Zero Propellant Maneuver Attitude Control Concept // AIAA GN&C Conference. Hilton Head, 2007.
10. Прутько А.А. Оптимальные по расходу топлива траектории переориентации крупногабаритных космических конструкций: дис. ... канд. техн. наук. Королев, 2021.
11. Valenzuela A. Aircraft Trajectory Optimization Using Parametric Optimization Theory // Doctoral Thesis, Universidad de Sevilla, 2012.
12. Franco A., Valenzuela A., Rivas D. Optimality of Standard Flight Procedures of Commercial Aircraft // 5th European Conf. for Aeronautics and Space Sciences. Munich. Germany, 2013.
13. Голубева А.А., Куланов Н.В. Методика выбора значений параметров этапа взлет самолетов гражданской, военно-транспортной авиации и беспилотных летательных аппаратов // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6.
14. Голубева А.А., Куланов Н.В. Методика и оптимизация этапа набора высоты в задаче вертикальной навигации самолетов гражданской и военно-транспортной авиации // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 4.
15. Голубева А.А., Куланов Н.В. Исследования и оптимизация этапа крейсерского полета самолетов гражданской авиации в задаче вертикальной навигации // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 5.
16. Юревич Е.И. Теория автоматического управления. 3-е изд. СПб.: БХВ-Петербург, 2007.
17. Григоров П.Ю., Куланов Н.В. Применение концепции обратных задач динамики в задачах вертикальной навигации // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 3. С. 141–154.
18. Калинина Е.А., Утешев А.Ю. Теория исключения: учеб. пособие. СПб.: НИИ химии СПбГУ, 2002.