АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2023, том 100, № 7, с. 630–646

ВЕХИ В РАЗВИТИИ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

© 2023 г. Б. П. Кондратьев[1,2,*]

[1] Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

[2] Главная (Пулковская) Астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: work@boris-kondratyev.ru

Поступила в редакцию 20.04.2023 г.
После доработки 17.06.2023 г.
Принята к публикации 20.06.2023 г.

Даны краткий очерк развития идей и обзор некоторых достижений в современной небесной механике. Акцент делается на то, что классическое определение этой науки, данное Лапласом, не полностью отражает содержание современной небесной механики, и более емким является термин динамическая астрономия. Динамическая астрономия изучает почти все, что движется и вращается в Космосе: от пылинок до комет и астероидов, от ИСЗ, планет и их спутников до звезд и галактик. Эта комплексная наука включает не только задачи классической, но и релятивистской небесной механики, в нее входят теория фигур равновесия, разнообразные вычислительные методы и методы компьютерного моделирования. Важное значение имеют качественные методы, вершиной которых явилось создание КАМ-теории. Развитие небесной механики шло через практику разнообразных приложений, и диапазон проблем в ней исключительно широк. Ярким стимулом для развития динамической астрономии стало открытие экзопланет у других звезд. В статье прослеживается цепочка идей от кеплеровских орбит до оскулирующих лагранжевых эллипсов, от задачи двух тел к задачам многих тел, от колец Гаусса до моделей, построенных на основе прецессирующих аналогов этих колец.

Ключевые слова: небесная механика, динамическая астрономия, релятивистская небесная механика, теория фигур равновесия, проблемы и задачи

DOI: 10.31857/S0004629923070046, **EDN:** NCEDWP

1. ВВЕДЕНИЕ

Для любой развивающейся науки характерно следующее: активный поиск новых задач и разработка методов их решения. Но не наоборот! Небесная механика не исключение. Все важные результаты получены в ней "из первых принципов". Небесная механика в полной мере выявила ценность математики в познании Вселенной. В этом обзоре хотелось показать, как в небесной механике зарождалось и формировалось то особое поле мысли, вне которого любое открытие в движении небесных тел не может быть ни совершено, ни правильно понято.

2. О ПРЕДМЕТЕ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

Небесная механика – коллективная наука, в ее развитие внесли вклад многие ученые. Имена Кеплера, Ньютона, Эйлера, Лагранжа, Лапласа говорят сами за себя. В истории этой науки были яркие моменты: переоткрытие "потерянной" Цереры в 1801 г. прославило Гаусса, Леверье "на кончике пера" открыл планету Нептун (Галле 1846). Успехи, конечно, были и потом (эффектное открытие Троянцев на орбите Юпитера), есть они и сейчас (КАМ-теория, точнейшие расчеты гравитационных маневров аппаратов "Вояджер" и "Новые горизонты", нобелевская премия за открытие в 1995 г. планеты вокруг звезды главной последовательности). Но важно и другое – именно небесная механика стала первой наукой и тем пробным камнем для ума человека, где неуспех в решении задачи был равносилен потере веры в человеческий разум. И это не преувеличение. Вот два примера.

1. Задолго до открытия Нептуна отчаянное сопротивление астрономам оказала Луна, ее движение упорно не подчинялось законам Кеплера. Еще (или уже) Ньютон сетовал, что от Луны у него болит голова [1]. Помог здесь не рецепт Эскулапа, а чутье исследователя: сохранив в своих подходах самое ценное – закон обратных квадратов, Эйлер, Даламбер и Лаплас начали учитывать дополнительные возмущения на Луну от Солнца. Так создавалась небесная механика. Сейчас расстояние до Луны известно с точностью до сантиметров, а ряды по долготе Луны насчитывают тысячи членов (гармоник Фурье).

2. В 1859 г. Леверье обнаружил для прецессии перигелия Меркурия небольшие расхождения с наблюдениями: точные наблюдения давали 570″/100 л., а теория с учетом возмущений от всех планет – только 526.7″ за сто лет (одна только Венера давала 260″/100 л.). На основании этого Леверье поначалу утверждал, что близ Солнца есть планета Вулкан [2]. Ситуация обострилась, когда Саймон Ньюком подтвердил наличие аномалии 43″ за сто лет вместо 38″ у Леверье. Назревала сенсация, но призрак новой планеты быстро рассеялся. Итог этих событий был изумляющий: для объяснения едва заметного отклонения в движении Меркурия потребовалась коренная перестройка всей теории гравитации – появилась Общая теория относительности.

Возвращаясь к главной теме, подчеркнем, что небесная механика (более широко – "динамическая астрономия") изучает почти все, что движется и вращается в Космосе: от пылинок до комет и астероидов, от ИСЗ, планет и их спутников до звезд и галактик. Развитие небесной механики шло через практику разнообразных приложений, поэтому диапазон проблем в этой науке исключительно широк.

По традиции небесная механика определяется как область астрономии, где для исследования движения тел применяются ньютоновский закон обратных квадратов и методы классической механики. Но это определение не полностью отражает содержание современной небесной механики.

Во-первых, современная небесная механика хотя и основана на законе всемирного тяготения, во многих задачах учитываются и другие виды сил, например: производные от гравитации приливные силы (они обратны кубу расстояния и связаны с диссипацией энергии и сжатием фазового объема системы), электромагнитные силы, действующие на космические аппараты и частицы заряженной пыли, реактивные силы, давление излучения и солнечный ветер, силы сопротивления и т.д. Но командует парадом, конечно, гравитация.

Во-вторых, более ста лет успешно развивается релятивистская небесная механика [3–5], где применяются законы ОТО. Уже упоминалось, что иследования Леверье выявили аномальный эффект апсидальной прецессии у Меркурия, и объяснила его ОТО. Доказательство реальности расхождения в движении линии апсид 43″ в столетие у Меркурия – тоже успех небесной механики. Переход от ОТО к ньютоновской теории гравитации соответствует области малых значений отношения $\frac{\varphi}{c^2}$ (φ – потенциал, c – скорость света). В наше время релятивистские эффекты изучаются в движении многих небесных тел, включая Луну, планеты и спутники. И это оправдано: например, величина геодезической прецессии для некоторых спутников Юпитера сопоставима с их прецессией в ньютоновском приближении [6].

В-третьих, небесная механика включает в себя теорию фигур равновесия (ТФР) небесных тел, так как закон всемирного тяготения позволяет изучать не только движение планет вокруг Солнца, но и форму самих планет [1, 7–11]. Ныне исследование фигур равновесия и внутренней структуры небесных тел – активно развивающееся направление в небесной механике.

В-четвертых, важную роль в небесной механике играют методы компьютерного моделирования. В их развитии – ключ к новым открытиям в астрономии. Столь же необходимы и численные методы, которые позволяют прогнозировать движение небесного тела практически с неограниченной точностью, однако они не дают качественную картину движения.

В-пятых, в работах Пуанкаре (1854–1912) появились качественные методы исследования дифференциальных уравнений. Отметим вклад Пуанкаре [12–14]:

– в проблему расходимости рядов в небесной механике. Сейчас шум вокруг расходимости рядов поутих, но в свое время это была большая ложка дегтя. Губят ряды члены с малыми знаменателями, и Пуанкаре показал, как интегрировать дифференциальные уравнения расходящимися рядами!

– в изучение периодических и почти периодических решений. Не имея возможности проинтегрировать дифференциальное уравнение (а таких уравнений в небесной механике большинство), Пуанкаре предложил метод малого параметра для нахождения периодических решений. Его идея: если замкнутых периодических орбит много, можно установить, как расположатся между ними кривые, соответствующие реальным *непериодическим* движениям.

– Пуанкаре открыл интегральные инварианты и применил их для доказательства теоремы о возвращении; сейчас инварианты применяются и в теории атома, и в звездной динамике.

Новые яркие краски в исследование динамических систем внес Джордж Биркгоф, доказавший эргодическую теорему и существование двух неподвижных точек кольца, соответствующих периодическим решениям. Ныне эргодичность стала базовым понятием в теории динамических систем. Однако теорема Пуанкаре о возвращении еще не гарантирует эргодичность, если фазовое пространство системы не едино.

Пуанкаре и Ляпунов построили теорию периодических, а Колмогоров, Арнольд и Мозер – почти периодических решений. Качественные методы привели к созданию КАМ теории [15]. Ее суть: если гамильтониан системы представить в виде $H = H_0 + \Delta H$ (ΔH — малое возмущение и частоты ω_i в H_0 несоизмеримы), то возмущенное движение почти всегда будет ограничено N-тором, т.е. устойчиво.

3. ОТ КИНЕМАТИКИ К ДИНАМИКЕ

Наука о движении планет прошла длинный путь от астрологических манипуляций жрецов, до остроумного (и наглядного!) кинематического метода (вспомним эксцентрики и эпициклы Гиппарха, Евдокса и Птолемея). Три закона Кеплера изменили картину движения планет, на смену сложным умозрительным схемам, основанным на комбинациях равномерных движений по кругам, пришла простая и красивая кинематика движения планет по эллипсам с Солнцем в одном из фокусов. И хотя переворот в астрономии, совершенный Коперником и его последователями (Бруно, Галилей, Кеплер), еще не выводил за рамки кинематического подхода, фундамент был заложен: эллипсы Кеплера и сегодня — тест на звание *Homo sapiens*!

Законы Кеплера вскрыли новый пласт знаний и были сформулированы столь ясно и четко, что задали в астрономии новый вектор развития. И хотя физические причины, лежащие в основе этих законов, оставались пока неясными, под напором мысли неизведанное отступало. Кеплер вплотную подошел к понятию неравномерного движения планет, и его усилия подхватили другие ученые: Галилей (1564—1642) ввел понятия мгновенной скорости и ускорения для прямолинейного движения, для круговых движений это сделал Гюйгенс (1629—1695). Зарождалась новая наука — *динамика*. В 1687 г. Ньютон доказал, что движение по законам Кеплера прямо следует из основных законов механики и закона Всемирного тяготения. Эти открытия оказали глубокое влияние на дальнейшее развитие небесной механики.

С появлением в трудах Ньютона и Эйлера общего *динамического метода*, в небесной механике появилось и стало оттачиваться искусство создания моделей на базе дифференциальных уравнений движения. Небесная механика оказалась в фокусе внимания ученых, новые задачи стимулировали интерес к постижению Мира.

4. НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

Интересная картина: закон обратных квадратов, лежащий в фундаменте динамической астрономии, красив, элегантен и позволяет легко формулировать много задач, однако в ходе их решения эта легкость куда-то испаряется. Факт тот, что задач с аналитическим решением в небесной механике и сейчас очень немного. Кратко остановимся на них.

4.1. Задача двух тел и кеплеровские эллипсы

Фундаментом классической небесной механики является *задача двух тел* [12, 13, 16], в ней изучается движение двух точечных (или сферически симметричных) масс под взаимным притяжением по закону обратных квадратов. Здесь пять независимых первых интегралов движения: три интеграла площадей, интеграл энергии и дополнительный интеграл движения (вектор Лапласа—Рунге—Кутта, направленный вдоль линии апсид). С помощью этих интегралов исходная система дифференциальных уравнений движения шестого порядка методом редукции сводится к одному уравнению первого порядка, что и делает задачу интегрируемой. И ныне через изучение кеплеровских орбит проходит становление любого специалиста в точных науках.

Но если в математическом плане задача двух тел решена, то в астрономическом аспекте широкий простор для творчества остается [17, 18]. Задача двух тел — это не только неизменный маяк в море возмущенного движения, где учет возмущений от других тел приводит к прецессии кеплеровских эллипсов. Это еще и комплекс задач о топологии орбит, задачи для тел с переменными массами, задачи о рассеянии частиц и, конечно, задачи с ведущим центром (эпициклическое приближение). Отдельное направление в теории составляют кольца Гаусса. Некоторые задачи (например, движение в поле сжатого сфероида) есть не что иное, как возмущенная задача двух тел. Весьма актуальны сейчас задачи о движении небесных тел с учетом спин-орбитальных резонансов. В пространстве n измерений задача двух тел исследуется и сейчас, так как позволяет проверить некоторые результаты в космологии ранней Вселенной.

Примечание. В русле динамической астрономии лежат и задачи по определению вида сил при движении тела по орбитам разного типа, а также вида орбит по заданному закону сил. Часть таких задач решил еще Ньютон. Обратной задаче двух тел является задача Бертрана [12, 13] о нахождении траекторий по заданной силе (в другом варианте — задача о нахождении потенциала по заданному семейству орбит). В частности, движение по эллипсам возможно в двух потенциалах: кеплеровском $\varphi(r) = \dfrac{\mu}{r}$ с силовым центром в фокусе, и в потенциале Гука $\varphi(r) \sim r$, когда центр сил притяжения находится в геометрическом центре эллипса.

4.2. Оскулирующие эллипсы Лагранжа и теория возмущений

К началу XIX века эстафета от эллипсов Кеплера переходит к оскулирующим эллипсам Лагранжа, и на их основе усилиями многих ученых (Лаплас, Делоне, Энке, Ганзен, Хилл, Коуэлл) зарождается теория возмущений [12, 13]. Стало возможным находить ответы на самые сложные вопросы небесной механики, когда законы Кеплера становятся только приблизительными. Фактически, теория возмущений – это идея о том, что можно изучать что-то неизвестное, начиная с известной величины. Один из основных ее приемов: в качестве исходной (промежуточной, или опорной) орбиты берут эллипс, а расхождения между реальной и опорной орбитами раскладывают в ряд. Но не всегда эти ряды работают (из-за присутствия членов с малыми знаменателями). В этой ситуации Ганзен остроумно предложил идею: за опорную орбиту брать не эллипс, а более сложную кривую: тогда ряды для отклонений реальной орбиты от принятой опорной не будут содержать неудобные члены.

4.3. Кольца Гаусса

От эллипсов Кеплера берет начало и другое направление – *кольца Гаусса*. В 1818 г. Гаусс для расчета вековых возмущений предложил усреднять движение возмущающей массы m по эллипсу орбиты; при этом усреднении образуется материальное эллиптическое кольцо с плотностью тем большей, чем дольше в своем движении находится тело на соответствующей дуге ds (рис. 1).

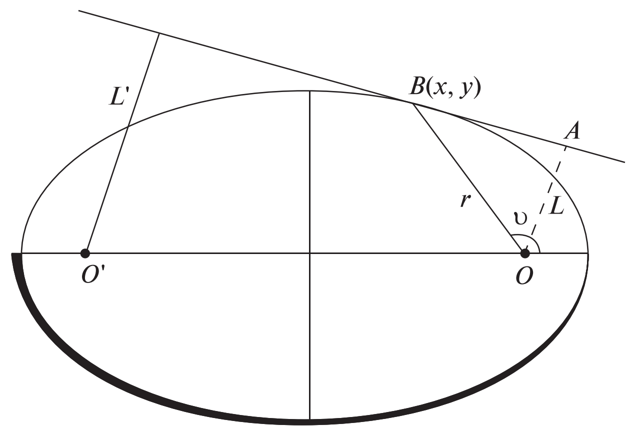


Рис. 1. Геометрическая схема кольца Гаусса. По статье [19].

Сам Гаусс потенциал кольца не нашел, но сейчас этот потенциал в аналитическом виде известен [19]:

$$\varphi_{\text{ring}}(x_1, x_2, x_3) = \frac{2Gm}{\pi\sqrt{\lambda-\nu}} \times$$
$$\times \left\{ \mathrm{K}(k) + \frac{ea(x_1+ea)}{a^2+\nu}\left[\Pi(n,k) - \mathrm{K}(k)\right] \right\}, \qquad (1)$$
$$n = \frac{a^2+\nu}{\nu-\lambda}, \quad k = \sqrt{\frac{\mu-\nu}{\lambda-\nu}} \le 1,$$

где m – масса кольца, $a \ge b$ – его полуоси, e – эксцентриситет, $K(k)$ и $\Pi(k)$ – полные эллиптические интегралы 1-го и 3-го рода, λ, μ, ν – эллипсоидальные координаты пробной точки.

4.4. Системы колец Гаусса. Взаимная энергия двух колец

С развитием метода усреднений стали изучать системы колец Гаусса [20]. В ГАИШ развит новый подход к изучению долгопериодических и вековых возмущений в некоторых задачах небесной механики. Он опирается не на возмущающую функцию Лагранжа R, а на взаимную потенциальную энергию колец Гаусса W_{mut}. Для компланарных колец с общим фокусом эта энергия в квадратичном приближении равна [21]

$$W_{\text{mut}} = -\frac{Gm_1m_2}{\pi a_1}(W_0 + W_1e_1 + W_2e_2 + $$
$$+ W_{11}e_1^2 + W_{22}e_2^2 + W_{12}e_1e_2). \qquad (2)$$

Коэффициенты в (2) выражаются через эллиптические интегралы. Взаимная энергия двух эллиптических колец Гаусса найдена и в более общем случае, когда кольца имеют малый взаимный наклон [22]. Сравнение с традиционным методом разложения возмущающей функции Лагранжа показало адекватность нового подхода. Оказывается, вместо усреднения полученного сложным образом выражения для возмущающей функции Лагранжа методически проще сразу вычислять взаимную энергию колец Гаусса.

Пример 1: метод круглых колец Гаусса в теории возмущений.

На практике встречаются случаи, когда орбиты двух планет с малым углом взаимного наклона можно представить круглыми кольцами; на кольца переносятся массы планет m_1 и m_2, большие полуоси и углы наклона орбит, а также орбитальные угловые моменты планет. Рассмотрим в инерциальной системе координат Oxyz два однородных круглых гравитирующих кольца с общим центром в точке O. Эти кольца Гаусса моделируют орбиты двух планет (рис. 2). Первое кольцо имеет радиус r_1, одномерную плотность μ_1, долготу восходящего узла Ω_1 и наклон i_1 к плоскости Oxy. Аналогично, второе кольцо описывается параметрами $(r_2, \mu_2, \Omega_2, i_2)$.

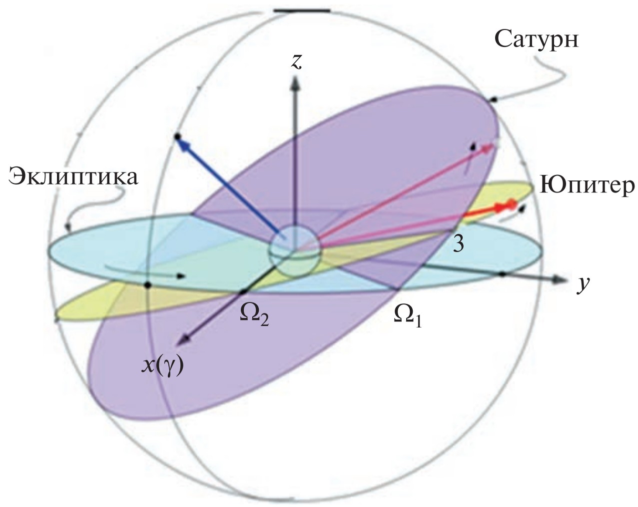


Рис. 2. Схема двух круглых колец с узлами в эклиптике Ω_1 (для орбиты Сатурна) и Ω_2 (для орбиты Юпитера). Для удобства изображения радиус орбиты Юпитера преувеличен. Дугой $\Omega_2 - \Omega_1$ показано расстояние между узлами орбит.

Роль функции возмущений здесь играет взаимная гравитационная энергия колец W_{mut}. В квадратичном по степеням малых углов i_1 и i_2 приближении эта энергия равна

$$W_{\text{mut}} = -\frac{2Gm_1m_2}{\pi r_1}\left\{K(n) - \frac{\Delta i'^2}{4(1-n^2)}\times \left[\frac{1+n^2}{(1-n)^2}E(n) - K(n)\right]\right\}, \tag{3}$$

где $K(n)$ и $E(n)$ – полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода, $n = \frac{r_2}{r_1} \le 1$, угол взаимного наклона $\Delta i'$ связан с углами ориентации колец (i_1, i_2) относительно главной плоскости; с учетом малости наклонов колец к главной плоскости $\Delta i'$ выражается через углы в системе координат, связанной с эклиптикой (нештрихованные координаты)

$$\Delta i'^2 \approx i_1^2 + i_2^2 - 2i_1i_2\cos(\Omega_2 - \Omega_1). \tag{4}$$

Для колец, пересекающихся по диаметру $\Omega_2 - \Omega_1 = 0$ и $\Delta i' = i_2 - i_1$. В общем случае метод позволяет учитывать несовпадение узлов орбит планет. Есть два варианта: i) с большим и ii) с малым углом между узлами орбит. Для каждого из них составлены и в конечном аналитическом виде решены системы из четырех дифференциальных уравнений, описывающих вековую эволюцию орбит. Если M – масса центрального тела (звезды), n_1 и n_2 – средние движения планет по орбитам, уравнения вековой эволюции двух круглых колец имеют вид

$$\begin{gathered}
\frac{d\Omega_1}{dt} = -\frac{n_1}{2\pi(1+n)}\frac{m_2}{M}\left[\frac{1+n^2}{(1-n)^2}E(k) - K(k)\right]\times \\
\times\left(1 - \frac{i_2}{i_1}\cos\Delta\Omega\right); \\
\frac{di_1}{dt} = -\frac{n_1}{2\pi(1+n)}\times \\
\times\frac{m_2}{M}\left[\frac{1+n^2}{(1-n)^2}E(k) - K(k)\right]i_2\sin\Delta\Omega; \\
\frac{d\Omega_2}{dt} = -\frac{n_2 n}{2\pi(1+n)}\frac{m_1}{M}\left[\frac{1+n^2}{(1-n)^2}E(k) - K(k)\right]\times \\
\times\left(1 - \frac{i_1}{i_2}\cos\Delta\Omega\right); \\
\frac{di_2}{dt} = \frac{n_2 n}{2\pi(1+n)}\times \\
\times\frac{m_1}{M}\left[\frac{1+n^2}{(1-n)^2}E(k) - K(k)\right]i_1\sin\Delta\Omega.
\end{gathered} \tag{5}$$

В переменных

$$\begin{aligned}
h_1 &= i_1\cos\Omega_1; \quad k_1 = i_1\sin\Omega_1; \\
h_2 &= i_2\cos\Omega_2; \quad k_2 = i_2\sin\Omega_2
\end{aligned} \tag{6}$$

уравнения эволюции колец преобразуются к более простому виду

$$\begin{aligned}
\frac{dh_1}{dt} &= -\sigma_1(k_2 - k_1); \quad \frac{dh_2}{dt} = \sigma_2(k_2 - k_1); \\
\frac{dk_1}{dt} &= \sigma_1(h_2 - h_1); \quad \frac{dk_2}{dt} = -\sigma_2(h_2 - h_1),
\end{aligned} \tag{7}$$

где обозначены две частоты вековых колебаний

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{n_1}{2\pi(1+n)}\frac{m_2}{M}\left[\frac{1+n^2}{(1-n)^2}E(k) - K(k)\right]; \\
\sigma_2 &= \frac{n_2 n}{2\pi(1+n)}\frac{m_1}{M}\left[\frac{1+n^2}{(1-n)^2}E(k) - K(k)\right].
\end{aligned} \tag{8}$$

Решение системы дифференциальных уравнений (7) получено в конечном виде

$$\begin{aligned}
h_1(t) &= C_1 + \sigma_1[C_3\cos\sigma t + C_4\sin\sigma t]; \\
k_1(t) &= C_2 + \sigma_1[-C_3\sin\sigma t + C_4\cos\sigma t]; \\
h_2(t) &= C_1 - \sigma_2[C_3\cos\sigma t + C_4\sin\sigma t]; \\
k_2(t) &= C_2 - \sigma_2[-C_3\sin\sigma t + C_4\cos\sigma t].
\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ и введены константы интегрирования $C_1 \ldots C_4$. В линейном приближении угол

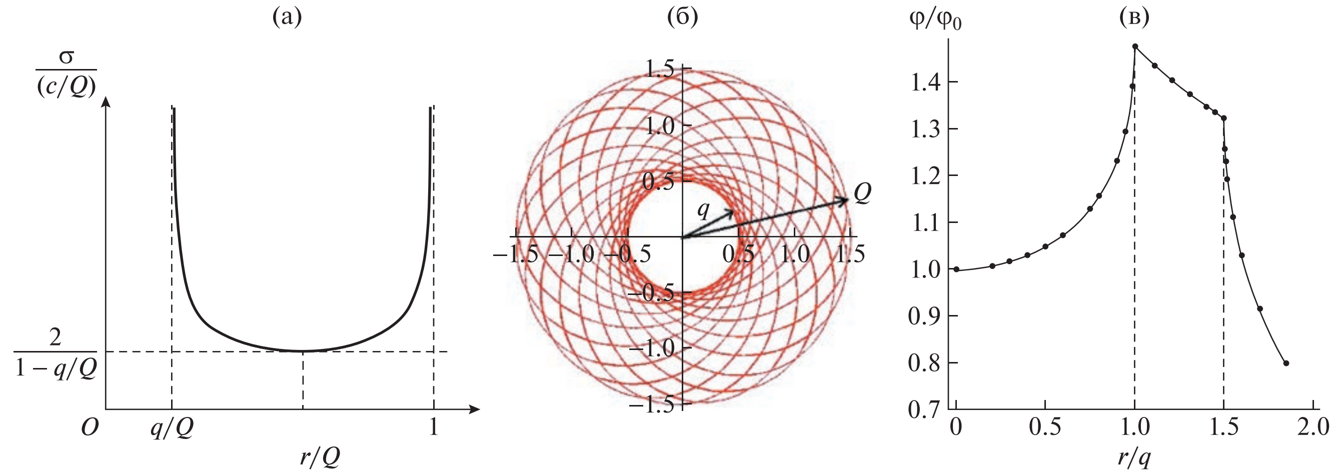


Рис. 3. В центре – R-диск; слева – распределение плотности в R-диске; справа – потенциал в плоскости R-диска. По статье [24].

взаимного наклона орбит в ходе эволюции остается постоянным

$$\Delta i' = \sqrt{(h_1 - h_2)^2 + (k_1 - k_2)^2} = \text{const}. \qquad (10)$$

Вариант (i) проверен на примере двупланетной задачи Солнце–Юпитер–Сатурн, вариант (ii) – на примере пары экзопланет Kepler 10b и Kepler 10c.

Пример 2. Для двух колец Гаусса с элементами $(a_j, e_j, i_j, \omega_j, \Omega_j)$ при малых эксцентриситетах e_1 и e_2 и взаимном наклоне $\Delta i'$ в квадратичном приближении взаимная энергия имеет вид:

$$W_{\text{mut}} = -\frac{Gm_1m_2}{\pi a_1(1+\alpha)} \times \left\{ 2K(k) + \frac{\left[e_1^2 + e_2^2 - \left(i_1^2 + i_2^2 - 2i_1i_2\cos\Delta\Omega\right)\right]}{4} \times \left[\frac{1+\alpha^2}{(1-\alpha)^2}E(k) - K(k)\right] - \frac{e_1e_2}{\alpha}\cos\Delta\varpi\left[\frac{1-\alpha^2+\alpha^4}{(1-\alpha)^2}E(k) - \left(1+\alpha^2\right)K(k)\right]\right\}, \qquad (11)$$

где разность долгот восходящих узлов $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ и

$$\alpha = \frac{a_2}{a_1}, \quad k = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}, \qquad (12)$$
$$\Delta\varpi = \varpi_2 - \varpi_1, \quad \varpi = \omega + \Omega,$$

причем взаимный наклон через элементы колец выражается так:

$$\cos\Delta i' = \cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos\Delta\Omega. \qquad (13)$$

В случае малых $\Delta\Omega$ выражение (11) упрощается. С помощью W_{mut} из (11) по обычной методике записывается и решается система уравнений вековой эволюции колец.

4.5. Двумерное обобщение кольца Гаусса (модель R-диска)

По законам механики из-за внешних возмущений и эффектов ОТО возникает апсидальная прецессия кольца Гаусса. В итоге при азимутальном усреднении получается R-диск [23, 24] (рис. 3). Нижняя граница диска определяется условиями выживаемости звезд от приливных возмущений ЧД, верхняя зависит от параметров орбиты звезды.

Распределение плотности в R-диске дается формулой

$$\sigma(r) = \frac{R_2 - R_1}{\pi} \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{(R_2 - r)(r - R_1)}}. \qquad (14)$$

Такие R-кольца образуются из прецессирующих эллиптических орбит, в фокусе которых находится центральная звезда или черная дыра. Модель объясняет причину существования острых локальных минимумов на кривых вращения плоских галактик (рис. 4), применяется также для изучения динамики звездных дисков в центре Галактики.

4.6. 3D обобщение прецессирующего кольца Гаусса (модель R-тороида)

В продолжение темы колец. Для изучения вековых возмущений в небесной механике была построена аналитическая *модель R-тороида* [26, 27]. Модель основана на тройном усреднении движе-

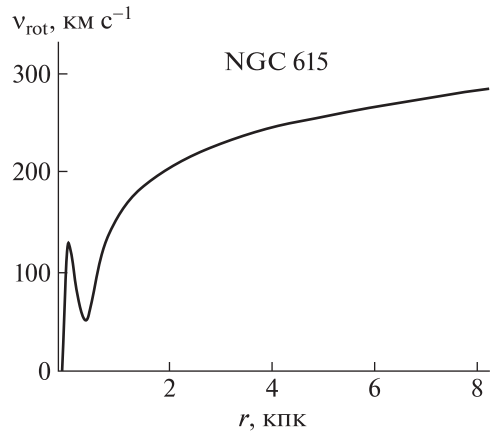


Рис. 4. Кривая вращения для галактики NGC 615, по книге [25].

ния материальной точки и сводится к цепочке преобразований: 1D кольцо Гаусса – 2D ⇒ R-диск – 3D ⇒ R-тороид.

Изучены форма, структура и гравитационный потенциал R-тороида (рис. 5). Закон плотности и нужная для приложений взаимная энергия R-тороида и внешнего кольца Гаусса представлены формулами

$$\rho(r,\theta) = \frac{M}{2\pi^3 ar\sqrt{\sin^2 i - \sin^2\theta}\sqrt{(Q-r)(r-q)}};$$

$$W(r,\theta) = \frac{GM}{r}\times$$

$$\times\left\{1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2}e^2\right)P_2(\cos i)\,P_2(\sin\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \right. \qquad (15)$$

$$+\frac{3}{8}\left(1 + 5e^2 + \frac{15}{8}e^4\right)P_4(\cos i)\times$$

$$\left.\times P_4(\sin\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^4 + O\left(\left(\frac{a}{r}\right)^6\right)\right\}.$$

С помощью $W(r,\theta)$ была получена система уравнений вековой эволюции оскулирующих орбит в гравитационном поле R-тороида и центральной звезды. На основе комбинации из двух R-тороидов разработан метод изучения вековой (апсидальной и нодальной) прецессии орбит в циркумбинарных экзосистемах, состоящих из двойной звезды и планеты [27].

Модели взаимодействующих и прецессирующих колец Гаусса позволяют по-новому трактовать задачи в теории возмущений и упрощают сложные расчеты.

4.8. Задача двух неподвижных центров

В "загашнике" небесной механики есть задача двух неподвижных центров, которую поставил и решил Леонард Эйлер [28]. В 1901 г. Гастон Дарбу предложил вариант задачи с помощью двух *мнимых масс*. Эта идея Дарбу оказалась полезной через полвека. В эпоху ИСЗ задача двух неподвижных центров снова стала актуальной: оригинальный вариант этой задачи был изучен Дж. Винти и советскими учеными (Г.Н. Дубошин, Е.П. Аксенов, Е.А. Гребеников, В.Г. Демин), сумевших задачу о движении искусственных спутников в поле Земли втиснуть в "прокрустово ложе" задачи двух неподвижных центров с мнимыми точечными массами [29]. И здесь в качестве промежуточной орбиты для ИСЗ берется более сложная кривая, чем кеплеровский эллипс.

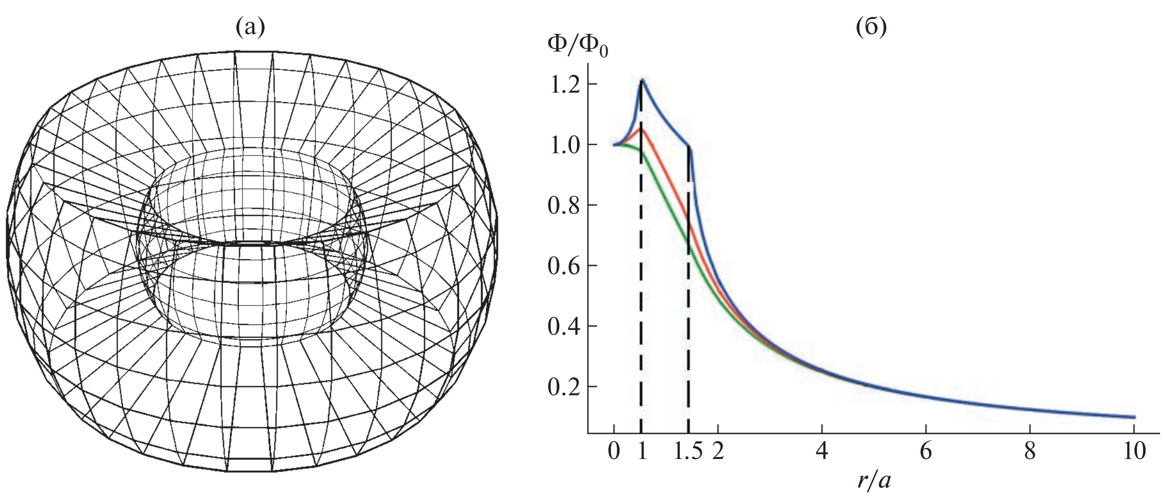


Рис. 5. (а) Фигура R-тороида. (б) Зависимость его внешнего потенциала в экваториальной плоскости.

Замечание. Интересен предельный переход к моделированию потенциала двух мнимых масс в асимптотическом пределе из потенциала сплошного стержня с мнимым распределением плотности [11].

5. ЗАДАЧА ТРЕХ (И БОЛЕЕ) ТЕЛ

Огромный комплекс задач в небесной механике посвящен проблеме трех (и многих) тел.

5.1. Актуальность проблемы

Сразу подчеркнем: задача многих тел – это не отработанный материал, а классика, которая не выходит из моды! Эта задача находит приложения во многих областях физики, включая астрофизику, ядерную физику и физику элементарных частиц [30].

Ее внутреннее богатство начали раскрывать Лагранж, Лаплас и Пуанкаре: здесь совершенствовались аналитические методы механики [30, 31], зародилась и расцвела теория возмущений; здесь, под пеленой математической неопределенности появилось понятие хаоса в динамических системах и пошатнулся могучий Вселенский детерминизм Лапласа.

Та гармония мира, о которой мечтал Лаплас, рисуя предопределенность всех движений, терпит фиаско уже в астрономии (хотя, можно сказать, на ее периферии). Движения звезд в звездных скоплениях и движения многих малых тел Солнечной системы подвержены случайностям – это и заставляет нас рисовать современную картину [14, 32].

Длительные бесплодные попытки решить задачу трех тел привели в конце концов к фундаментальным отрицательным результатам. Брунс, Пенлеве и Пуанкаре доказали отсутствие в этой задаче дополнительных интегралов, кроме 10 классических (шесть интегралов описывают равномерное прямолинейное движение центра масс системы, три – компоненты углового момента, еще один – это интеграл энергии). С тех пор задачу N тел называют неинтегрируемой. Причиной отсутствия других интегралов является очень сложное поведение траекторий.

Вместе с тем следует подчеркнуть, что эти ограничения выполняются только для траекторий в конечной области пространства. Для инфинитных орбит интегрирование все же может существовать (А.Н. Колмогоров, В.М. Алексеев [33]). Для таких орбит существуют локальные интегралы.

В небесной механике независимо от квантовой механики (соотношение неопределенностей Гейзенберга 1927 г.) поняли, что для описания положения частицы, из-за крайней чувствительности траекторий к начальным условиям надо переходить к определению *вероятности* нахождения частицы в пространстве. И в этом фундаментальном вопросе физика и небесная механика – на параллельных рельсах! Пример: столкновение астероида с Землей – тоже вероятностное событие, так как параметры астероидной орбиты всегда содержат некоторую неопределенность.

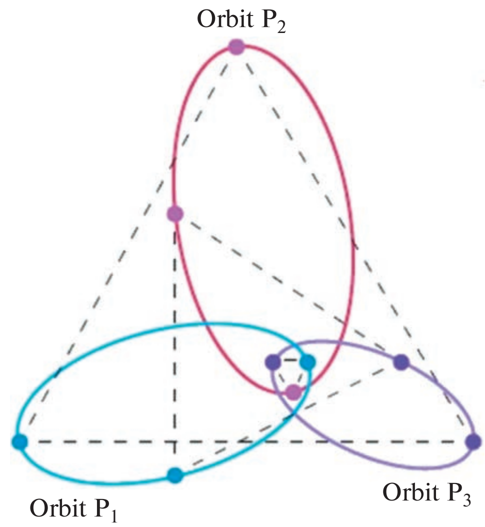


Рис. 6. Схема задачи трех тел.

Исследования в задаче трех тел проводились в двух направлениях: i) поиск общих приближенных решений с помощью метода возмущений и ii) поиск точных частных решений (например, точек либрации).

В общем виде задача трех тел, см. рис. 6, не интегрируется, но для некоторых частных случаев аналитические решения известны. Многие результаты получены компьютерными методами, среди них есть и настоящие сюрпризы (*восьмерка Мура* +600 (!) других подобных ей замысловатых траекторий [34], рис. 7).

5.2. Частные задачи в общей проблеме многих тел

5.2.1. Поиск новых вариантов динамической редукции. Актуальным является поиск новых вариантов динамической редукции. Напомним, что редукция есть процесс сокращения числа уравнений движения с учетом интегралов движения и сохраняющихся величин. Сравнительно новым является следующий вариант редукции [35]: так как любая конфигурация трех точек определяет треугольник, то все переменные задачи можно представить как совокупность геометрических (форма и размер треугольника) и вращательных (ориентация треугольника) переменных.

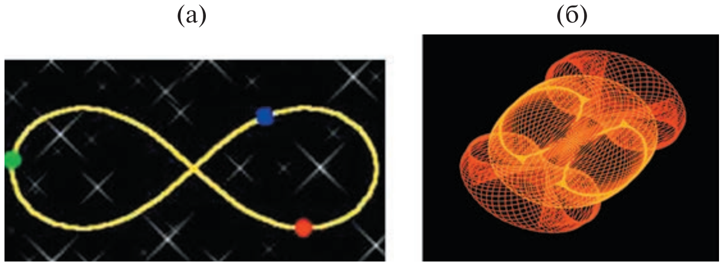


Рис. 7. Восьмерка Мура (а) и родственные ей траектории в задаче трех тел (б), по [34].

5.2.2. Ограниченная задача трех тел. На практике наиболее часто рассматривается *ограниченная задача трех тел* (когда масса третьего тела мала в сравнении с двумя основными “primaries”). Здесь главными являются варианты задачи: ограниченная круговая, ограниченная эллиптическая, ограниченная гиперболическая [36]. Далее эти три варианта широким веером рассыпаются на множество конкретных задач (где варьируются все параметры системы: относительные расстояния, форма тел, учитывается световое давление, масса одного или всех тел может зависеть от времени и т.д.). Иногда встречаются экзотические варианты задачи трех тел, как например *задача Роба* [37].

5.2.3. Точки либрации. Так называют точки равновесия во вращающейся системе отсчета. В ограниченной круговой задаче трех тел сначала были открыты три Эйлеровы (неустойчивые) коллинеарные точки, затем Лагранж нашел еще две (треугольные) точки L_4 и L_5 с устойчивым (при $\frac{m}{M} \le \frac{1}{27}$) движением в их окрестности (рис. 8). Многочисленные варианты задач на изучение точек либрации рассматриваются до сих пор [38].

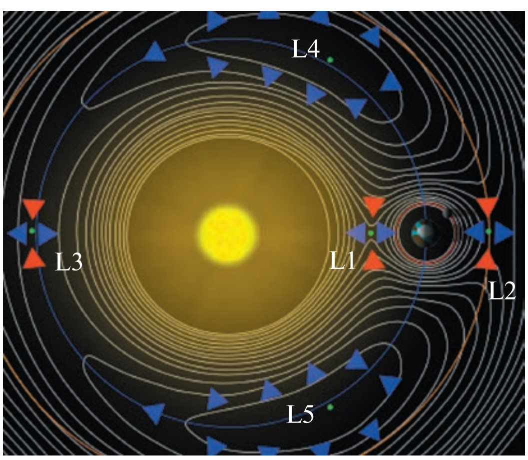


Рис. 8. Стандартная схема точек либрации в задаче трех тел. Изображение: NASA.

В астродинамике планируется все пять точек либрации использовать для освоения Солнечной системы космическими аппаратами. Так, точка L_2 в системе “Земля–Солнце” – идеальное место для наблюдательной астрофизики. В окрестности точки L_2 работало или работает несколько космических миссий:

– GAIA (2013 г.) – космический телескоп оптического диапазона Европейского космического агентства (ЕКА). Составлена трехмерная карта более одного миллиарда звезд нашей Галактики. Открыто более 10 тысяч экзопланет, а также множество астероидов и комет.

– “Планк” – астрономический спутник ЕКА, созданный для изучения вариаций реликтового излучения. Завершил свою работу.

– “Спектр-РГ” (Спектр-Рентген-Гамма) – российско-немецкая орбитальная астрофизическая лаборатория, предназначенная для построения карты Вселенной в рентгеновском диапазоне.

– Телескоп имени Джеймса Уэбба (диаметр зеркала 6.5 м). Специализируется на исследовании в инфракрасном диапазоне ранних галактик, звезд, экзопланет.

Большой интерес представляют два крупных семейства астероидов возле точек либрации L_4 (Греки) и L_5 (Троянцы) на орбите Юпитера (рис. 9). Обнаружены астероиды-троянцы, орбиты которых переходят от L_4 к L_5. Греков почти в два раза больше. Возможное объяснение: ранняя миграция орбиты Юпитера к по направлению к Солнцу.

5.2.4. Задача Хилла. Особенно востребована в небесной механике *задача Хилла* (в ней рассматривается движение малого тела в окрестности планеты при большом возмущающем влиянии Солнца и других планет). Варианты задачи Хилла активно изучаются до сих пор [17, 30]. В частности, теория движения Луны является, по существу, задачей Хилла. Именно ряды Брауна-Хилла стали надежным инструментом важнейшей задачи расчета эфемериды Луны.

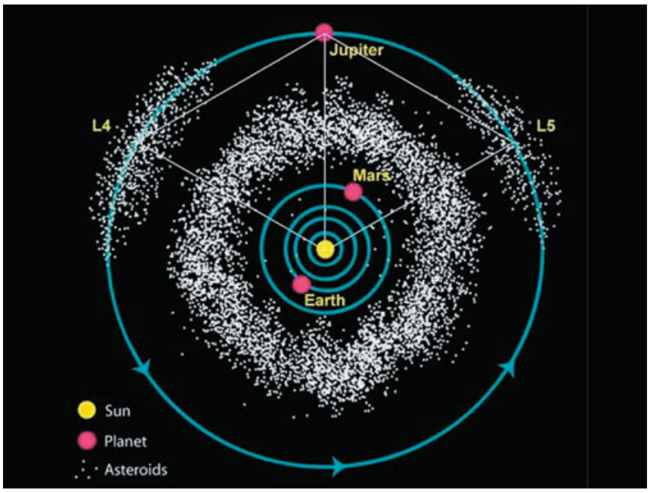


Рис. 9. Схема расположения на орбите Юпитера семейств астероидов “Греки” (L4) и “Троянцы” (L5). Источник: Википедия.

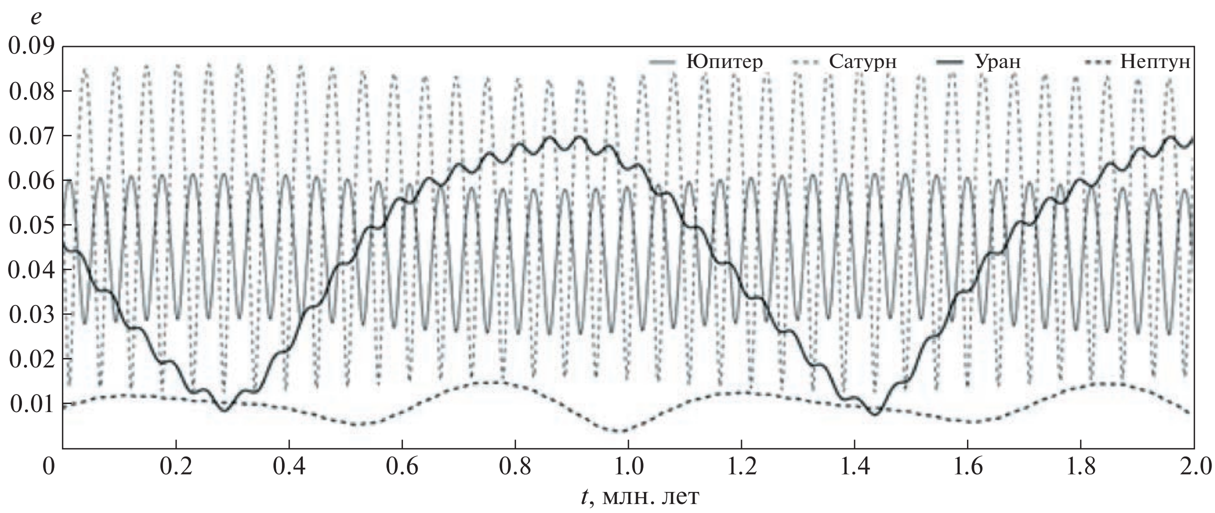


Рис. 10. Численный расчет вековой эволюции эксцентриситетов в задаче для четырех крупнейших планет в Солнечной системе на интервале 2 млн. лет. По работе [39].

5.2.5. Вековая эволюция орбит планет-гигантов Солнечной Системы. Большой интерес представляет картина вековой эволюции больших планет в Солнечной системе под возмущающим влиянием друг на друга. На рис. 10 показаны результаты численных расчетов для системы из пяти тел (четыре планеты и Солнце). Видим, что орбиты Юпитера и Сатурна эволюционируют в противофазе, с гораздо большим периодом эволюционирует орбита Урана. Нептун же ведет себя как свободный художник! Кстати, именно Нептун “выпадает” из закономерности Тициуса-Боде.

5.2.6. Центральные конфигурации. Это — большой комплекс задач, в которых ускорения всех тел направлены к одному центру. Здесь также много вариантов исследования, см. рис. 11, а изучение “хороводов” в пространстве n-измерений — излюбленная тема у математиков.

5.2.7. Задача Ситникова. Отметим еще интегрируемую задачу Ситникова (Макмиллана) (рис. 12), где два тела primaries имеют круговые или эллиптические орбиты, а третье тело нулевой массы движется по нормали.

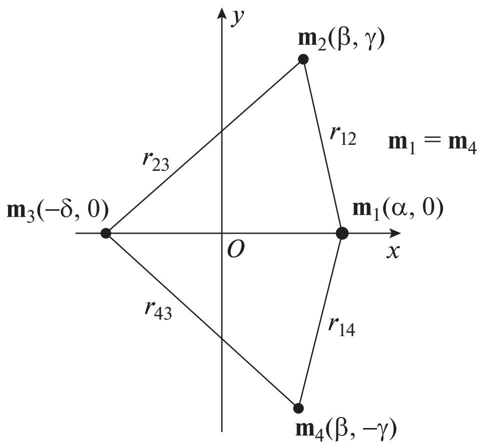


Рис. 11. Пример центральной конфигурации 4-х тел.

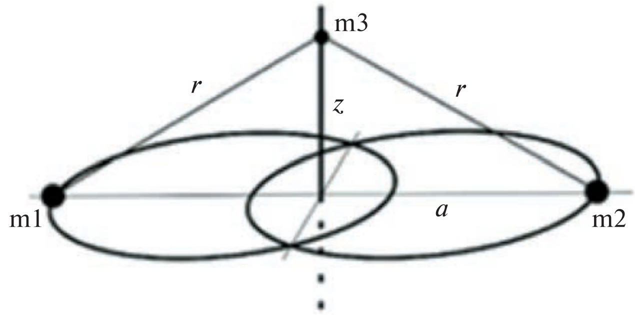


Рис. 12. К задаче Ситникова.

5.2.8. ИСЗ и космический мусор. Актуальной задачей в небесной механике является исследование движения ИСЗ и частиц космического мусора. Запуск искусственных спутников Земли, где первым был Советский Союз, глубоко повлиял на развитие астрономии и многих отраслей промышленности. Начавшееся соревнование мировых держав привело к тому, что спустя 2/3 века на орбитах вокруг Земли кружат многие тысячи созданных человеком аппаратов и их фрагментов, среди которых действующих спутников всего несколько процентов, а остальное – отработавшие свое ступени ракет, еще не сгоревшие в атмосфере аппараты и их многочисленные обломки. Количество этих отходов непрерывно растет. Появился термин “*космический мусор*”, но это мусор, который летает над головой, обладает гигантской кинетической и потенциальной энергией и может быть весьма опасен для человека как на Земле, так и в космосе.

Новые проблемы привели к пониманию необходимости изучения эволюции не только орбит ИСЗ, но и компонентов космического мусора. Эти тела движутся по законам небесной механики в сложном поле сил, определяемом гравитационным влиянием Земли, Луны и Солнца, а также давлением света и сопротивлением атмосферы. И здесь человечество столкнулось с серьезной и трудоемкой научной задачей. Число объектов, за которыми надо следить и предсказывать их движение, огромное, и по характеру задачи исследователю требуется не только детально знать фигуру Земли и структуру ее сложного гравитационного поля, не только творчески применять законы небесной механики, но необходимо развивать и такие области знаний, как теория возмущений, теория резонансов и динамического хаоса.

6. ТЕОРИЯ ФИГУР РАВНОВЕСИЯ

Область применения теории фигур равновесия в современной астрономии очень широкая. В рамках ТФР изучают форму, структуру и устойчивость вращающихся гравитирующих масс. Изучаются колебания тел, причем не только малые, но и нелинейные. Этот раздел науки граничит с геофизикой, астрофизикой и динамикой звездных систем. Модели фигур равновесия строятся для астероидов, планет и спутников, широкий комплекс задач есть для звезд и галактик. История ТФР наполнена яркими открытиями и пронизана глубокими аналитическими исследованиями Клеро и Лапласа, Дирихде и Римана, Пуанкаре, Ляпунова и Чандрасекара. На русском языке есть хорошие книги, излагающие теорию фигур равновесия. Упомянем книги Субботина [7], Чандрасекара [8], Аппеля [40], Пицетти [41], Лихтенштейна [42].

6.1. Элементы теории фигур равновесия

При баротропном состоянии $p = p(\rho)$ вращение в системе подчиняется закону $\Omega = \Omega(r)$ и существует *общий потенциал сил*

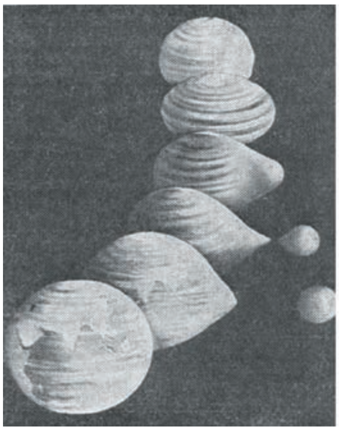
$$\Phi(x) = \varphi(x) + Q(x_1, x_2). \tag{16}$$

Здесь $\varphi(x)$ – ньютоновский, а $Q(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\int_0^{r^2} \Omega^2 dr^2$ – центробежный потенциалы. В этом случае в системе совпадают поверхности $\rho = \text{const}$, $p = \text{const}$ и уровенные $\Phi = \text{const}$. При *баротропном вращении* граничная поверхность конфигурации $S(x)$ совпадает с одной из уровенных поверхностей и удовлетворяет уравнению

$$S(x) = G \iiint\limits_{V \in S(x)} \frac{\rho(x')}{D} dV' + Q(r) + \text{const}. \tag{17}$$

В правой части (17) интегрирование производиться по объему внутри искомой поверхности $S(x)$. Уравнения такого типа называются функ-

(а) (б)



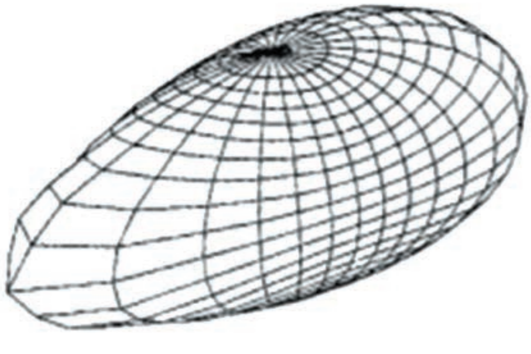


Рис. 13. а) К гипотезе Дарвина-Пуанкаре; б) финальная грушевидная фигура. Из статьи [43].

циональными, общего способа их решения не существует. Не существует, следовательно, и общего метода отыскания формы фигур равновесия. Даже если жидкость однородная и имеет жесткое вращение вокруг неподвижной оси, частные решения уравнения (17) только как бы угадываются. В 1742 г. Маклорен доказал, что сжатый сфероид может быть фигурой равновесия, в 1834 г. Якоби открывает трехосные фигуры относительного равновесия. Сфероиды Маклорена при соответствующем вращении могут сколь угодно мало отличаться от сферы. Эллипсоиды же Якоби существуют только при определенном отношении полуосей, имеют значительный момент вращения и всегда сильно отличаются от сферы. В астрономии однородные сфероиды Маклорена и трехосные эллипсоиды Якоби широко применяются.

6.2. Неоднородные фигуры равновесия

Из неоднородных фигур наиболее популярны *фигуры Роша;* их дополняет *уравнение Клеро,* связывающее распределение плотности $\rho(r)$ с распределением сплюснутости $\varepsilon(r)$ искомых поверхностей:

$$rD\varepsilon'' + (6D + 2rD')\varepsilon' + 2D'\varepsilon = 0,$$
$$D = \frac{1}{r^3}\int_0^{r^3} \rho(r)\,dr^3. \qquad (18)$$

Согласно уравнению (18), в важном на практике случае убывания плотности от центра к поверхности, сжатие изоденсит $\varepsilon(r)$ к центру уменьшается!

6.3. Неэллипсоидальные фигуры равновесия

Еще молодыми Пуанкаре и Ляпунов открывают мир *неэллипсоидальных фигур равновесия* [8—11, 40]. Здесь пристальное внимание привлекли грушевидные фигуры (3-я гармоника на поверхности эллипсоида), играющие роль мостика между эллипсоидами Якоби и двойными звездами. Через деление “груши” Пуанкаре и Дарвин надеялись решить основную загадку космогонии: понять, как образовались Луна, планеты со спутниками, кратные звезды (рис. 13а). Особое очарование этой гипотезе придавало то, что решение о возможном делении “груши” долгое время скрывалось под пеленой математической неопределенности.

В этой кризисной ситуации разобрался А.М. Ляпунов, доказавший, что все “груши”, ответвляющиеся от критического эллипсоида Якоби, вековым и динамическим образом неустойчивы. По этому вопросу между ним и Джорджем Дарвином возникла жаркая полемика. Вскоре Джеймс Джинс независимым методом подтвердил правоту Ляпунова. Уже в наши дни расчеты на компьютере позволили выяснить интереснейшую деталь (рис. 13b): последовательность “груш” кончается не делением, а фигурой с “носиком” (особой точкой), откуда, как из лейки, вытекает жидкость [43].

6.4. Некоторые современные направления в ТФР

6.4.1. Определенный прогресс в ТФР связан с учетом внутреннего поля скоростей. Вот знаменитая формулировка проблемы Дирихле [8—10]: допускают ли законы механики такое движение жидких гравитирующих эллипсоидов, чтобы поле

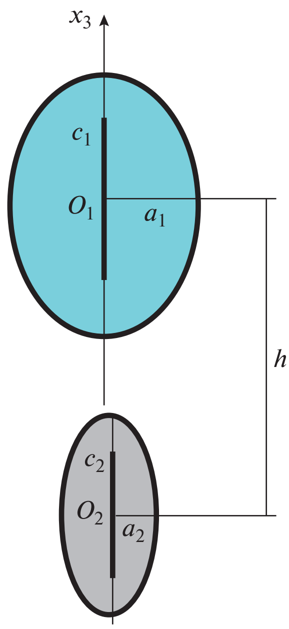


Рис. 14. Сечение двух коллинеарных вытянутых сфероидов [46].

скоростей в них было в любой момент времени линейным по координатам? Оказалось, что допускают! Это позволило пересмотреть всю теорию фигур равновесия. Здесь работали выдающиеся ученые Р. Дедекинд, Б. Риман и С. Чандрасекар, был создан математический аппарат для комплекса задач о нелинейных колебаниях и фигурах равновесия жидких эллипсоидов, цилиндров и дисков. Кроме гравитации в этих моделях можно учитывать и магнитное поле.

6.4.2. В наше время [10, 44] получено обобщение проблемы Дирихле для жидких фигур на динамику звездных систем: построена полная теория, описывающая нелинейные колебания, равновесие и устойчивость самосогласованных фазовых эллипсоидальных моделей бесстолкновительных звездных систем с квадратичным потенциалом. Построены шесть фазовых моделей звездных систем и доказано, что ими исчерпываются все возможные случаи таких эллипсоидальных моделей.

6.4.3. В теории неоднородных планет метод эллипсоидальных поверхностей — лишь первое приближение. Более точно поверхность фигуры равновесия описывается формулой

$$r(R,\theta) = R\left(1 + s_2(R)P_2(\cos\theta) + s_4(R)P_4(\cos\theta) + \ldots\right), \tag{19}$$

где $s_2(R)$ — эллипсоидальные поверхности, $s_4(R)$ — поправка 4-го порядка. В этом направлении (В.Н. Жарков [45]) продолжают изучать фигуры равновесия небесных тел.

6.4.4. Актуальная тема: изучение фигур равновесия двойных систем, например, двойных астероидов. Эти задачи требуют хорошего знания теории потенциала.

Взаимная гравитационная энергия двух однородных вытянутых сфероидов (рис. 14, 15) с точностью до членов малого порядка e_1^5 и e_2^5 включительно равна [46]

$$W_{\text{mut}} = -\frac{GM_1M_2}{h} \times \left\{1 + \frac{e_1^2}{5x_s} + \frac{e_2^2}{5x_s n_s^2} + \frac{e_1^2 e_2^2}{5x_s^2 n_s^2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5x_s} + \frac{1}{x_s^2}\right)\ldots\right\}. \tag{20}$$

Пример. Изучение фигуры равновесия спутника Сатурна Япета позволило объяснить происхождение мощной (высотой 13 км) горной гряды вдоль экватора его поверхности [48] (рис. 16).

Примечание. Обратим внимание на то, что между фазовыми моделями бесстолкновительных звездных систем (где интегралы движения относятся к каждой звезде в отдельности) и небесно-механической задачей N гравитирующих тел (где интегралы движения относятся ко всей

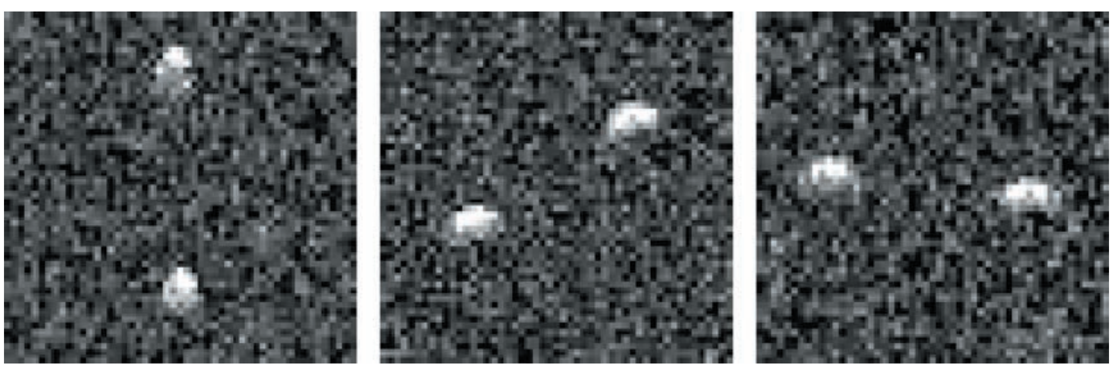


Рис. 15. Фотографии двойного астероида с синхронным вращением [47].

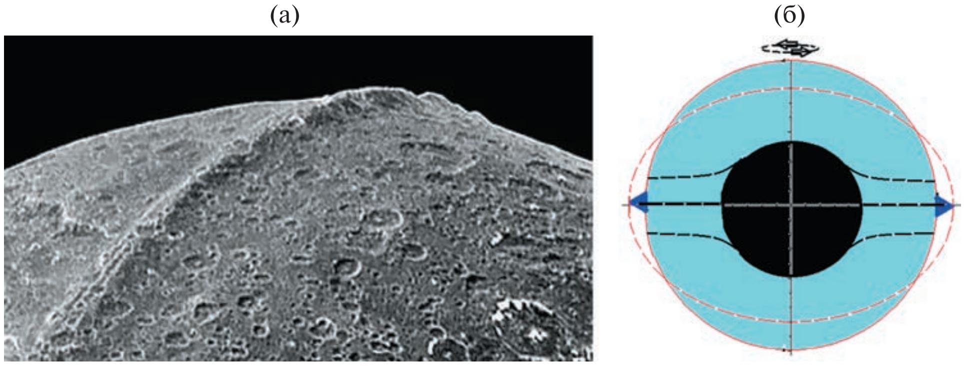


Рис. 16. (а) горный экваториальный хребет на Япете (“Кассини” 2007 г.); (б) схема его образования. Рис. (б) по работе [48].

системе в целом), существует широкая малоисследованная брешь.

7. ПОТРЕБНОСТИ СОВРЕМЕННОЙ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

1. В теоретическом плане небесная механика нуждается в дальнейшем развитии теории нелинейных динамических систем. Исследования показали, что в типичных динамических системах нет полной интегрируемости, однако нет и полного хаоса: складывается синтез, когда островки интегрируемости находятся в окружении хаоса.

2. Отдельно стоит проблема корректности применения расходящихся рядов для анализа устойчивости Солнечной системы на больших промежутках времени в десятки и сотни миллионов лет.

Весьма трудоемкие численные расчеты по вековой эволюции Солнечной системы на таких интервалах показали [49, 50]:

– движение планет-гигантов Юпитер–Сатурн–Уран–Нептун остается предсказуемо устойчивым;

– в движении малых планет и астероидов уровень хаоса становится гораздо заметнее. Меркурий за миллиард лет может попрощаться с нами. Но для Земли, из-за наличия у нее крупного спутника Луны, ситуация с орбитой и климатом оказывается устойчивой.

– происхождение обратного очень медленного вращения Венеры остается невыясненным.

3. Ценную роль методы компьютерного моделирования сыграли в анализе задачи трех (и более) тел, в прослеживании рядов неизвестных ранее неэллипсоидальных фигур равновесия, в изучении взаимодействия планет с диском. Изучение орбит спутников Марса Фобоса и Деймоса наводят на мысль, что, возможно, в раннюю эпоху эти два спутника представляли единое небесное тело. Но дебаты по этому вопросу продолжаются. Есть надежда, что с помощью быстродействующих ЭВМ удастся выяснить, какой будет Солнечная система через многие миллионы лет. Не до конца выяснена связь вида потенциалов с формой хаотических орбит. Актуальными являются полная инвентаризация резонансов и изучение их влияния на движение тел в Солнечной системе. Развитием темы резонансов является изучение эволюции колец Гаусса при орбитальных резонансах, а также исследование трехтельных резонансов в поясе астероидов.

4. Уже отмечалось, что визитной карточкой качественных методов небесной механики является КАМ теория. С основными идеями теории канонических систем и торов в фазовом пространстве можно познакомиться по книге Морбиделли “Современная небесная механика” [14].

5. В последние годы исследование Солнечной системы и внесолнечных планетных систем идет бурными темпами, и постоянный приток новых данных ставит новые задачи. Успехи наблюдательной астрономии предъявляют новые требо-

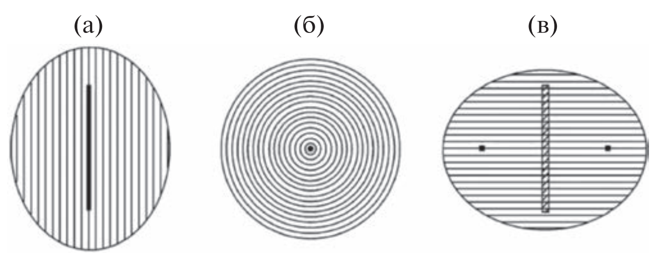


Рис. 17. Представление внешних гравитационных полей: а) вытянутого сфероида (неоднородным вещественным стержнем), б) шара (материальной точкой) и в) – сжатого сфероида (неоднородным стержнем с чисто мнимым распределением плотности). По монографиям [10, 11].

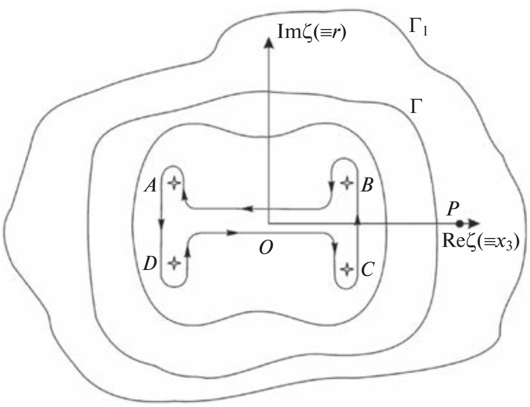


Рис. 18. К вопросу о нахождении эквигравитирующих стержней методом интеграла Коши. По монографии [11].

вания к точности аналитической теории и указывают на важность разработки новых моделей для изучения динамики и эволюции планетных систем [24, 27, 51]. Большой интерес представляет изучение эволюции орбит планет в циркумбинарных (и даже тройных) звездных системах.

6. Важную роль в современной небесной механике играют и методы сугубо математического характера, такие как теория потенциала и теория фигур равновесия.

Развито новое направление в теории потенциала: теория эквигравитирующих тел.

Еще Ньютон был приятно удивлен возможностью замены внешнего поля гравитирующего шара полем материальной точечной массы. Но шар – лишь частный случай трехосного эллипсоида, и важный шаг на этом пути сделали Маклорен и Лаплас: “Однородные софокусные эллипсоиды равной массы создают во внешнем пространстве одинаковые гравитационные поля”. Следующие шаги в этом направлении привели к созданию теории эквигравитирующих тел с вещественной или мнимой плотностью [11]. Новый математический аппарат позволяет решать большой круг задач; разработано, в частности, много оригинальных методов нахождения гравитационной энергии тел сложной формы.

Проблема эквигравитирующих тел разработана в трех направлениях [11].

Первое направление: теория *эквигравитирующих стержней*. Пример дан на рис. 17. Такие стержни могут иметь как реальные, так и мнимые распределения плотности. Для некоторых тел существуют “скелеты” из стержней, или комбинации из стержней и материальных точек (рис. 18). Каждое осесимметричное тело имеет соответствующий набор эквигравитирующих элементов.

Второе направление: представление внешних гравитационных полей объемных тел с экваториальной плоскостью симметрии с помощью специальных *эквигравитирующих дисков*.

Третье направление: развит метод специальных софокусных преобразований. Оказывается, любые элементарные эллипсоидальные оболочки и сплошные слоисто-неоднородные эллипсоиды, связанные специальными софокусными преобразованиями, являются эквигравитирующими.

7. Крупная игра – вылет черной дыры. При тесном взаимодействии двойной черной дыры с третьей (а это – задача трех тел!) одна из черных дыр может быть выброшена из галактики. Есть наблюдательные подтверждения этому, полученные на телескопе “Хаббл”.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рамки обзорной статьи не позволили привести конкретные решения для многих задач небесной механики. Просим извинить за это. В этом обзоре хотелось показать, как зарождалась небесная механика, как ходе работы над задачами начинали витать те общие идеи и формировалось то особое поле творческой мысли, вне которого не было бы современной науки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *И. Тодхантер*, *История математических теорий притяжения и фигуры Земли от Ньютона до Лапласа* (М.: Эдиториал УРСС, 2002).
2. *Н. Т. Роузвер*, *Перигелий Меркурия. От Леверье до Эйнштейна* (М.: Мир, 1985).
3. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, *Теория поля. Издание 3-е, переработанное* (М.: Физматгиз, 1960).
4. *Э. Уиттекер*, *История теории эфира и электричества. Современные теории 1900–1926* (Москва–Ижевск: ИКИ, 2004).
5. *В. А. Брумберг*, *Релятивистская небесная механика* (М.: Наука, 1972).
6. *V. V. Pashkevich and A. N. Vershkov*, Artificial Satellites **55**, № 3, 118–129 (2020).
7. *М. Ф. Субботин*, *Курс небесной механики, Т. 3* (М.–Л.: ГИТТЛ, 1949).
8. *С. Чандрасекар*, *Эллипсоидальные фигуры равновесия* (М.: Мир, 1972).
9. *Б. П. Кондратьев*, *Динамика эллипсоидальных гравитирующих фигур* (М.: Наука, 1989).
10. *Б. П. Кондратьев*, *Теория потенциала и фигуры равновесия* (Москва–Ижевск: РХД 2003).
11. *Б. П. Кондратьев*, *Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями* (М.: Мир, 2007).
12. *М. Ф. Субботин*, *Введение в теоретическую астрономию* (М.: Наука, 1968).

13. *Г. Н. Дубошин*, *Небесная механика. Основные задачи и методы. 3-е изд.* (М.: Наука, 1975).
14. *А. Морбиделли*, *Современная небесная механика. Аспекты динамики Солнечной системы* (Москва–Ижевск: РХД, 2004).
15. *Х. С. Думас*, *Теория КАМ. Как это было* (Москва–Ижевск: РХД, 2017).
16. *Ф. Мультон*, *Введение в небесную механику* (М.–Л. ОНТИ, 1935).
17. *К. Мюррей, С. Дермотт*, *Динамика Солнечной системы* (М.: Физматлит, 2009).
18. *Н. В. Емельянов*, *Динамика естественных спутников планет на основе наблюдений* (Фрязино Век 2, 2019).
19. *Б. П. Кондратьев*, Астрон. вестник **46**, № 5, 380–391 (2012).
20. *М. А. Вашковьяк, С. Н. Вашковьяк*, Астрон. вестник **46,** № 1, 72–80 (2012).
21. *Б. П. Кондратьев, В. С. Корноухов*, Журнал Технической Физики **89**, № 10, 1477–1481 (2019).
22. *Б. П. Кондратьев, В. С. Корноухов*, Астрон. Журн. **97**, № 5, 408–420 (2020).
23. *B. P. Kondratyev, N. G. Trubitsyna, and E. Sh. Mukhametshina*, *Order and Chaos in Stellar and Planetary Systems* (Astron. Soc. Pac., San Francisco, ASP Conf. Ser., Vol. 316, 326, 2004).
24. *B. P. Kondratyev*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **442**, 1755–1766 (2014).
25. *А. В. Хоперсков, А. М. Фридман*, *Физика галактических дисков* (Москва: Физматлит, 2011).
26. *Б. П. Кондратьев, В. С. Корноухов*, Астрон. журн. **98**, № 5, 407–422 (2021).
27. *Б. П. Кондратьев, В. С. Корноухов*, Астрон. журн. **98**, № 7, 571–580 (2021).
28. *И. А. Герасимов*, *Задача двух неподвижных центров* (Фрязино Век 2, 2005).
29. *Е. П. Аксенов*, *Теория движения искусственных спутников Земли* (М.: Наука, 1986).
30. *К. Маршал*, *Задача трех тел* (Москва–Ижевск: РХД, 2004).
31. *К. Л. Зигель*, *Лекции по небесной механике* (М.: ИЛ, 1959).
32. *I. I. Shevchenko*, *Dynamical Chaos in Planetary Systems* (Springer Nature, 2020).
33. *В. М. Алексеев*, *Лекции по небесной механике* (Москва–Ижевск: РХД, 2001).
34. *C. Moore*, Phys. Rev. Lett. **70**, 3675–3679 (1993).
35. *B. Kol*, arXiv:2107.12372 (2021).
36. *В. Себехей*, *Теория орбит. Ограниченная задача трех тел* (М.: Наука, 1982).
37. *H. A. G. Robe*, Celestial Mechanics **16**, 343 (1977).
38. *А. П. Маркеев*, *Точки либрации в небесной механике и космодинамике* (М.: Наука, 1978).
39. *А. С. Перминов, Э. Д. Кузнецов*, Астрон. вестник **52**, 2 (2018).
40. *П. Аппель*, *Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости* (Л.-М.: ОНТИ, 1936).
41. *П. Пицетти*, *Основы механической теории фигуры планет* (М.: ГТТИ, 1933).
42. *Л. Лихтенштейн*, *Фигуры равновесия вращающейся жидкости* (М.: Наука, 1965).
43. *Y. Eriguchi, I. Hachisu, and D. Sugimoto*, Progress of Theoretical Physics **67**, 4, 1068–1075 (1982).
44. *B. P. Kondratyev*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 274, 3, 657–659 (1995).
45. *В. Н. Жарков Внутреннее строение Земли и планет* (М.: Наука и образование, 2013).
46. *B. P. Kondratyev, V. S. Kornoukhov, and E. N. Kireeva*, eprint arXiv:astro-ph, 2303.13892 (2023).
47. *P. A. Taylor, E. G. Rivera-Valentin, A. K. Virkki, et al.*, 50th Lunar and Planetary Science Conference, held 18–22 March, 2019 at The Woodlands, Texas. LPI Contribution No. 2132, 2945 (2019).
48. *Б. П. Кондратьев*, Астрон. вестник **52**, № 5, 136 (2018).
49. *G. J. Sussman and J. Wisdom*, Science **257**, 5066, 56–62 (1994).
50. *J. Laskar*, Astron. and Astrophys. **287**, L9–L12 (1994).
51. *М. Я. Маров, И. И. Шевченко*, *Экзопланеты. Экзопланетология* (М.–Ижевск: ИКИ, 2017).

MILESTONES IN THE DEVELOPMENT OF CELESTIAL MECHANICS

B. P. Kondratyev[a,b]

[a] *M.V. Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Sternberg Astronomical Institute, Moscow, Russia*

[b] *Main (Pulkovo) Astronomical Observatory of the RAS, St. Petersburg, Russia*

A brief outline of the development of ideas and a review of some achievements in modern celestial mechanics are given. The emphasis is on the fact that the classical definition of this science given by Laplace does not fully reflect the content of modern celestial mechanics, and the term dynamic astronomy is more capacious. Dynamic astronomy studies almost everything that moves and rotates in space: from dust particles to comets and asteroids, from satellites, planets and their satellites to stars and galaxies. This complex science includes not only the problems of classical, but also relativistic celestial mechanics, it includes the theory of equilibrium figures, various computational methods and computer simulation methods. Qualitative methods are of great importance, the culmination of which was the creation of the KAM theory. The development of celestial mechanics went through the practice of various applications, and the range of problems in it is exceptionally wide. A striking stimulus for the development of dynamical astronomy was the discovery of exoplanets around other stars. The article traces a chain of ideas from Keplerian orbits to osculating Lagrangian ellipses, from two-body problems to many-body problems, from Gaussian rings to models built on the basis of precessing analogues of these rings.

Keywords: celestial mechanics, dynamical astronomy, relativistic celestial mechanics, theory of equilibrium figures, problems and tasks