

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ ПО ГРАДИЕНТОМЕТРИЧЕСКИМ ИЗМЕРЕНИЯМ В ЗЕМНОЙ ГЕОЦЕНТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

© 2024 г. А. А. Ключков<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>Институт астрономии РАН, Москва, Россия

\*E-mail: kaa5774@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.09.2023 г.

После доработки 07.02.2024 г.

Принята в печать 11.03.2024 г.

В статье представлены результаты определения параметров гравитационного поля Земли по градиентометрическим измерениям в геоцентрической земной системе координат. Вычисления выполнялись с использованием метода регуляризации, согласно которому к матрице нормальных уравнений добавляется матрица регуляризации, умноженная на параметр регуляризации. В результате вычислений для различных параметров регуляризации были получены поправки к гармоническим коэффициентам степени и порядка 200 и 201, представленные в статье в виде графиков. По полученным поправкам вычислены степенные дисперсии, представленные в табл. 1 и 2.

*Ключевые слова:* спутниковая градиентометрия, гравитационное поле Земли, земная система координат, тензор гравитационного потенциала, градиентометр.

DOI: 10.31857/S0004629924050072 EDN: JNWLTM

## 1. ВВЕДЕНИЕ

До 2000 г. параметры гравитационного поля Земли (ГПЗ) получали из математической обработки наблюдений космических аппаратов различного назначения. Дальнейшее повышение точности определения параметров ГПЗ связано с учетом временных вариаций параметров гравитационного поля, обусловленных, главным образом, геодинамическими процессами, происходящими внутри Земли.

Использование для этой цели наблюдений ИСЗ, выполненных с наземных пунктов, затруднено по следующим причинам:

- во-первых, при обработке информации низкоорбитальных спутников возникают сложности учета влияния атмосферного торможения при расчете их орбит;
- во-вторых, неравномерное распределение наземных пунктов наблюдения влияет на точность определения параметров гравитационного поля Земли;
- в-третьих, коэффициенты сферических гармоник быстро убывают с увеличением высоты полета спутника, что влияет на пространственное разрешение модели ГПЗ.

Поэтому актуальной стала задача получения высокостепенных моделей гравитационного поля Земли высокого пространственного разрешения и точности по наблюдениям из космоса.

Для решения этой задачи с конца 60-х годов XX столетия началась разработка новых типов наблюдений, чувствительных к иррегулярностям высокочастотной части спектра гравитационного поля Земли.

Традиционные методы определения гравитационного поля Земли основаны на наблюдениях движения в гравитационном поле полностью свободной тест-массы, в качестве которой выступает спутник.

Альтернативная идея состоит в том, чтобы наблюдать движение тест-массы не с пунктов земной системы координат, а в системе координат, которая сама находится в свободном падении. Это может быть реализовано следующим образом: внутри КА размещается одна тест-масса или группа тест-масс, которая наблюдается относительно свободно падающего центра масс КА.

В соответствии с этой идеей были разработаны две концепции наблюдений:

- межспутниковое слежение (Satellite-Satellite Tracking, SST);

- спутниковая гравитационная градиентометрия (Satellite Gravity Gradiometry, SGG).

В соответствии с первой концепцией параметры движения тест-масс получают в виде расстояний и скоростей, которые измеряются по линии между двумя (или более) спутниками. Концепция имеет два варианта: «высокий-низкий» и «низкий-низкий».

В соответствии со второй концепцией измеряются относительные ускорения тест-масс, находящихся на борту спутника на некотором расстоянии друг от друга. В результате получают компоненты тензора гравитационного потенциала.

Современные подходы изучения гравитационного поля Земли из космоса основаны на комбинации методов наблюдений, рассмотренных выше:

- SST в варианте «высокий-низкий» и SGG;
- SST в варианте «высокий-низкий»;
- SST в варианте «низкий-низкий».

В первом случае на низкоорбитальной платформе расположен градиентометр, а аппаратура межспутникового слежения наблюдает КА высокоорбитальной навигационной системы GPS (ГЛОНАСС).

В последнем случае конфигурация «низкий-низкий» предполагает, что низкоорбитальные КА, находящиеся на одной орбите на некотором расстоянии друг от друга и связанные между собой измерениями радиодальности с микронной точностью, наблюдают КА высокоорбитальной навигационной системы.

Практическая реализация данных концепций наблюдений была осуществлена в трех проектах: германский CHAMP; американо-германский GRACE; европейский GOCE. Это открыло новую эру в изучении гравитационного поля Земли и его временных вариаций.

Проект GOCE на сегодняшний день является единственным успешным проектом, в результате реализации которого на основе математической обработки градиентометрических измерений определены параметры гравитационного поля Земли с высоким пространственным разрешением (100 км) и высокой точностью (1 см — для высот геоида; 1 мГал — для аномалий силы тяжести).

## 2. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЙ ГРАВИТАЦИОННЫЙ ГРАДИЕНТОМЕТР

Определение параметров ГПЗ в проекте GOCE осуществляется на основе математической обработки измерений, выполненных электростатическим градиентометром, установленным на борту спутника.

Основное назначение гравитационного градиентометра — измерение компонентов тензора гравитационного градиента.

Основным элементом градиентометра является ансамбль из шести акселерометров, расположенных попарно в трех пространственных плоскостях на расстоянии 0.5 м друг от друга.

В каждом акселерометре имеется платиновородиевая пробная масса размером  $4 \times 4 \times 1$  см и весом 320 г, положение которой относительно центра клетки активно контролируется посредством приложения электрического напряжения к 16 электродам, вмонтированным во внутренние стенки верхней пластины, нижней пластины и кольцевой пластины, которые составляют клетку. Клетку вокруг пробной массы сделана из инвара. Электроды представляют собой титановые стеклокерамические пластины. Размерная точность акселерометров порядка 1 мкм.

Принцип действия акселерометров основан на измерении сил, необходимых для поддержания пробной массы в центре клетки. Шесть степеней свободы управляемого электростатического подвеса обеспечивают контроль перемещения и вращения пробной массы.

На рис. 1 приведена схема емкостного акселерометра.

Любое движение пробной массы вызовет разность электрических потенциалов между С1 и С2. Эта разность обнаруживается, усиливается и корректируется. Коррекция осуществляется путем регулирования электрического потенциала электродов S до тех пор, пока разность потенциалов не будет сведена к нулю. Электростатические силы, приложенные в следящем контуре, обеспечивают измерение ускорения, пропорциональное инерционным силам, действующим на пробную массу. Контрольный вольтаж измеряет ускорение пробной массы относительно клетки [5].

## 3. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ПРОЕКТЕ GOCE

При математической обработке измерений, выполненных электростатическим градиентометром, установленным на борту спутника, используются следующие системы координат:

- инерциальная геоцентрическая система координат, в которой осуществляется определение орбиты спутника;

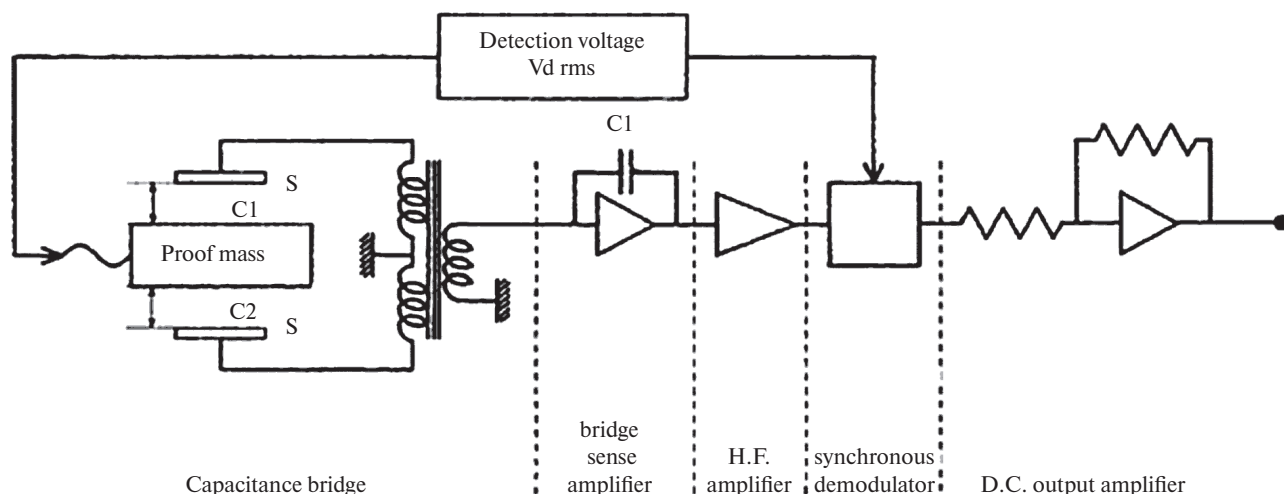


Рис. 1. Схема емкостного акселерометра.

- земная геоцентрическая система координат, с которой связаны определяемые параметры модели гравитационного поля;
- локальная североориентированная система координат, в которой вычисляются компоненты тензора геопотенциала;
- система координат градиентометра, в которой выполняются измерения.

### 3.1. Инерциальная система координат

Инерциальная система координат (IRF) — пространственно-фиксированная ортогональная правоориентированная система координат. Она определяется следующим образом [2]:

- начало расположено в центре масс Земли;
- ось  $X_{IRF}$  направлена по линии пересечения плоскости средней эклиптики и плоскости среднего экватора на эпоху J2000.0 (1 января 2000 г. 12h UTC) в точку весеннего равноденствия;
- ось  $Z_{IRF}$  ортогональна плоскости среднего экватора на эпоху J2000.0;
- ось  $Y_{IRF}$  дополняет систему до правой ортогональной триады.

### 3.2. Земная система координат

Земная система координат (EFRF) — ортогональная правоориентированная система координат, жестко связанная с Землей. Она определяется следующим образом [2]:

- начало расположено в центре масс Земли;
- ось  $X_{EFRF}$  направлена по линии пересечения плоскости среднего земного экватора на заданную эпоху и плоскости Гринвичского меридиана;
- ось  $Z_{EFRF}$  ортогональна плоскости среднего земного экватора на заданную эпоху;
- ось  $Y_{EFRF}$  дополняет систему до правой ортогональной триады.

Угол между осями X инерциальной и земной систем координат определяет истинное Гринвичское звездное время.

Ориентация основных систем координат относительно друг друга, используемых в проекте GOCE, показана на рис. 2.

### 3.3. Локальная североориентированная система координат

Локальная североориентированная система координат (LNOF), используемая в проекте GOCE [2], — правоориентированная система координат, которая определяется следующим образом (см. рис. 3):

- начало системы координат LNOF располагается в центре масс КА (P);
- ось  $Z_{LNOF}$  определяется как вектор, направленный из начала системы координат LNOF по радиус-вектору КА ( $U_p$ );
- ось  $Y_{LNOF}$  определяется как вектор, перпендикулярный плоскости геоцентрического

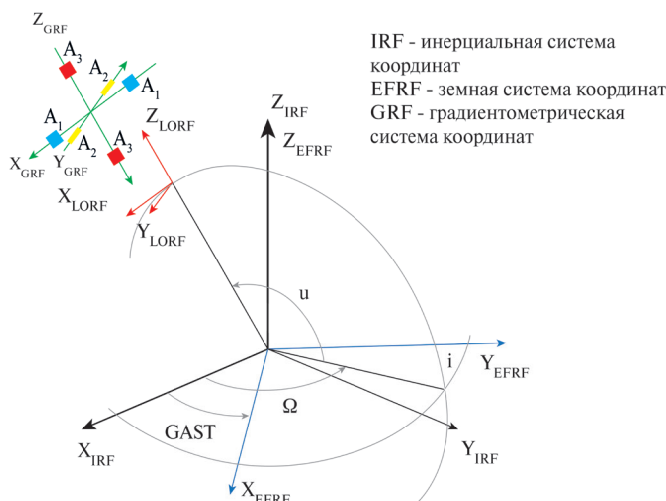


Рис. 2. Основные системы координат, используемые в проекте GOCE.

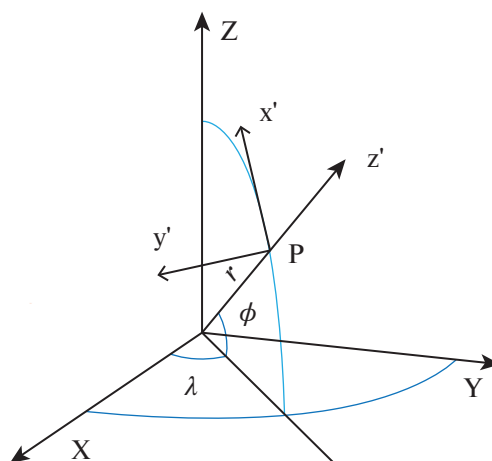


Рис. 3. Геоцентрическая прямоугольная, локальная североориентированная и сферическая системы координат.

меридиана, проходящего через центр масс КА, и имеющий направление в точку Запада (West);

- ось  $X_{LNOF}$  определяется как вектор, перпендикулярный плоскости, образуемой векторами  $Y_{LNOF}$  и  $Z_{LNOF}$ , дополняющий систему координат до правой и имеющий направление в точку севера (North).

В этой системе координат вычисляются калиброванные гравитационные градиенты, которые доводятся до потребителей в виде продуктов EGG\_TRF\_2.

### 3.4. Система координат градиентометра

Система координат GRF — система координат, в которой выполняются измерения гравитационных градиентов в проекте GOCE. Эта система координат предназначена для описания взаимного положения и центрировки акселерометров и всего инструмента в целом относительно внешних референсных систем координат (см. рис. 2).

Начало системы координат GRF находится в точке пересечения начал трех одноосных градиентометров.

Оси  $X_{GRF}$ ,  $Y_{GRF}$ ,  $Z_{GRF}$  параллельны соответствующим осям систем координат трех одноосных градиентометров и направлены таким же образом (см. рис. 2).

Компоненты гравитационного тензора относятся к системе координат градиентометра (GRF), тогда как искомые параметры модели гравитаци-

онного поля Земли — к Земной системе координат (EFRF). Поэтому возникает задача преобразования одной системы координат в другую.

Для ее решения необходимо сначала выбрать рабочую систему координат, в которой будет выполняться математическая обработка измерительной информации. Это может быть Земная система координат или система координат градиентометра.

При реализации первого варианта потребуется выполнять преобразование измеренных градиентов из GRF в ECRF.

При этом прямое вращение тензора гравитационного градиента из системы координат GRF в ECRF приведет к тому, что проектирование менее точных компонентов гравитационного градиента ( $V_{xy}$  и  $V_{yz}$ ) приведет к ошибкам в Земной системе координат [2].

В связи с этим целесообразно в качестве рабочей выбрать систему координат градиентометра (GRF). В этом случае вычисленные по модели гравитационного поля градиенты, которые могут считаться равноточными, необходимо будет преобразовывать в GRF.

В данной статье представлены результаты определения параметров гравитационного поля Земли, полученные из математической обработки градиентометрических измерений, выполненной в земной геоцентрической системе координат (Earth Fixed Reference Frame, EFRF) с использованием данных продукта EGG\_TRF\_2.

**4. АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ ПО ГРАДИЕНТОМЕТРИЧЕСКИМ ИЗМЕРЕНИЯМ**

Уравнение поправок динамического метода космической геодезии для определения параметров гравитационного поля Земли по градиентометрическим измерениям в геоцентрической земной системе координат имеет вид [1]

$$\bar{v} = \frac{\partial V'_{\text{EFRF}}}{\partial(\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm})} \cdot \begin{pmatrix} \Delta \bar{C}_{nm} \\ \Delta \bar{S}_{nm} \end{pmatrix} - (\bar{V}'_{\text{EFRF}} - V'_{\text{EFRF}}{}^0), \quad (1)$$

где  $\bar{v}$  — вектор поправок к измеренным величинам;  $V'_{\text{EFRF}}$  — измеренные компоненты гравитационного тензора;  $V'_{\text{EFRF}}{}^0$  — вычисленные значения компонентов тензора гравитационного потенциала по значениям коэффициентов сферических гармоник  $(\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm})^0$  априорной модели гравитационного поля;  $\frac{\partial V'_{\text{EFRF}}}{\partial(\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm})}$  — частные производные от ком-

понентов тензора гравитационного потенциала по коэффициентам сферических гармоник  $(\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm})$ ;  $l = (\bar{V}'_{\text{EFRF}} - V'_{\text{EFRF}}{}^0)$  — свободный член уравнения поправок.

*4.1. Вычисление первых и вторых производных от гравитационного потенциала по пространственным прямоугольным координатам*

Гравитационный потенциал, представляемый в виде разложения в ряд по сферическим функциям, есть функция сферических координат, которые могут быть выражены через пространственные прямоугольные координаты.

Поэтому первые и вторые производные от гравитационного потенциала по пространственным прямоугольным координатам могут быть получены на основании следующих формул.

Первые производные от гравитационного потенциала по пространственным прямоугольным координатам:

$$\left. \begin{aligned} V_X &= \frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial X} = V_r \cdot r_X + V_\theta \cdot \theta_X + V_\lambda \cdot \lambda_X; \\ V_Y &= \frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial Y} = V_r \cdot r_Y + V_\theta \cdot \theta_Y + V_\lambda \cdot \lambda_Y; \\ V_Z &= \frac{\partial V}{\partial Z} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial Z} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial Z} + \frac{\partial V}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial Z} = V_r \cdot r_Z + V_\theta \cdot \theta_Z + V_\lambda \cdot \lambda_Z. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Вторые производные от гравитационного потенциала по прямоугольным координатам земной геоцентрической системы координат EFRF вычисляют

путем прямого дифференцирования формул (2) по соответствующим координатам. В итоге получают следующие соотношения [2]:

$$\begin{aligned} V_{XX} &= V_{rr}r_{XX} + V_{\lambda\lambda}\lambda_{XX} + V_{\theta\theta}\theta_{XX} + V_{rr}r_X^2 + V_{\lambda\lambda}\lambda_X^2 + V_{\theta\theta}\theta_X^2 + 2 \cdot (V_{r\lambda}r_X\lambda_X + V_{r\theta}r_X\theta_X + V_{\lambda\theta}\lambda_X\theta_X), \\ V_{YY} &= V_{rr}r_{YY} + V_{\lambda\lambda}\lambda_{YY} + V_{\theta\theta}\theta_{YY} + V_{rr}r_Y^2 + V_{\lambda\lambda}\lambda_Y^2 + V_{\theta\theta}\theta_Y^2 + 2 \cdot (V_{r\lambda}r_Y\lambda_Y + V_{r\theta}r_Y\theta_Y + V_{\lambda\theta}\lambda_Y\theta_Y), \\ V_{ZZ} &= V_{rr}r_{ZZ} + V_{\lambda\lambda}\lambda_{ZZ} + V_{\theta\theta}\theta_{ZZ} + V_{rr}r_Z^2 + V_{\lambda\lambda}\lambda_Z^2 + V_{\theta\theta}\theta_Z^2 + 2 \cdot (V_{r\lambda}r_Z\lambda_Z + V_{r\theta}r_Z\theta_Z + V_{\lambda\theta}\lambda_Z\theta_Z), \\ V_{XY} &= V_{rr}r_{XY} + r_X \cdot (V_{rr}r_Y + V_{r\theta}\theta_Y + V_{r\lambda}\lambda_Y) + V_{\theta\theta}\theta_{XY} + \theta_X \cdot (V_{r\theta}r_Y + V_{\theta\theta}\theta_Y + V_{\theta\lambda}\lambda_Y) + V_{\lambda\lambda}\lambda_{XY} + \lambda_X \cdot (V_{r\lambda}r_Y + V_{\theta\lambda}\theta_Y + V_{\lambda\lambda}\lambda_Y) \\ V_{XZ} &= V_{rr}r_{XZ} + r_X \cdot (V_{rr}r_Z + V_{r\theta}\theta_Z + V_{r\lambda}\lambda_Z) + V_{\theta\theta}\theta_{XZ} + \theta_X \cdot (V_{r\theta}r_Z + V_{\theta\theta}\theta_Z + V_{\theta\lambda}\lambda_Z) + V_{\lambda\lambda}\lambda_{XZ} + \lambda_X \cdot (V_{r\lambda}r_Z + V_{\theta\lambda}\theta_Z + V_{\lambda\lambda}\lambda_Z) \\ V_{YZ} &= V_{rr}r_{YZ} + r_Y \cdot (V_{rr}r_Z + V_{r\theta}\theta_Z + V_{r\lambda}\lambda_Z) + V_{\theta\theta}\theta_{YZ} + \theta_Y \cdot (V_{r\theta}r_Z + V_{\theta\theta}\theta_Z + V_{\theta\lambda}\lambda_Z) + V_{\lambda\lambda}\lambda_{YZ} + \lambda_Y \cdot (V_{r\lambda}r_Z + V_{\theta\lambda}\theta_Z + V_{\lambda\lambda}\lambda_Z) \\ V_{YX} &= V_{XY} \\ V_{ZX} &= V_{XZ} \\ V_{ZY} &= V_{YZ} \end{aligned} \quad (3)$$

В формулах (3) содержатся первые и вторые производные от гравитационного потенциала по сферическим координатам, а также первые и вторые производные от сферических координат по пространственным прямоугольным координатам.



4.2. Вычисление первых и вторых производных от гравитационного потенциала по сферическим координатам

Формулы для вычисления первых и вторых производных от гравитационного потенциала по сферическим координатам получают путем прямого дифференцирования формулы (4), представляющей гравитационный потенциал в виде разложения в ряд по сферическим функциям

$$V(r, \phi, \lambda) = \frac{GM_e}{r} + \frac{GM_e}{r} \sum_{n=L_{\min}}^{L_{\max}} \left( \frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \phi), \quad (4)$$

где  $GM_e$  — геоцентрическая гравитационная постоянная;  $a_e$  — большая полуось общего земного эллипсоида;  $\bar{P}_{nm}$  — полностью нормированные присоединенные функции Лежандра степени  $n$  и порядка  $m$ .

Первые производные гравитационного потенциала по сферическим координатам вычисляют по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} V_r &= -\frac{GM_e}{r^2} - \frac{GM_e}{a_e^2} \sum_{n=L_{\min}}^{L_{\max}} (n+1) \left( \frac{a_e}{r} \right)^{n+2} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \\ V_\theta &= \frac{GM_e}{a_e} \cdot \sum_{n=L_{\min}}^{L_{\max}} \left( \frac{a_e}{r} \right)^{n+1} \cdot \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cdot \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \cdot \sin m\lambda) \cdot \frac{\partial \bar{P}_{nm}(\cos \theta)}{\partial \theta} \\ V_\lambda &= \frac{GM_e}{a_e} \cdot \sum_{n=L_{\min}}^{L_{\max}} \left( \frac{a_e}{r} \right)^{n+1} \cdot \sum_{m=0}^n m \cdot (-\bar{C}_{nm} \cdot \sin m\lambda + \bar{S}_{nm} \cdot \cos m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Вторые производные гравитационного потенциала по сферическим формулам вычисляют по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} V_{rr} &= 2 \cdot \frac{GM_e}{r^3} + \frac{GM_e}{a_e^3} \cdot \sum_{n=L_{\min}}^{L_{\max}} (n+1) \cdot (n+2) \cdot \left( \frac{a_e}{r} \right)^{n+3} \cdot \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cdot \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \cdot \sin m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \\ V_{r\theta} &= -\frac{GM_e}{a_e^2} \cdot \sum_{n=L_{\min}}^{L_{\max}} (n+1) \cdot \left( \frac{a_e}{r} \right)^{n+2} \cdot \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cdot \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \cdot \sin m\lambda) \cdot \frac{\partial \bar{P}_{nm}(\cos \theta)}{\partial \theta} \\ V_{r\lambda} &= -\frac{GM_e}{a_e^2} \cdot \sum_{n=L_{\min}}^{L_{\max}} (n+1) \cdot \left( \frac{a_e}{r} \right)^{n+2} \cdot \sum_{m=0}^n m \cdot (-\bar{C}_{nm} \cdot \sin m\lambda + \bar{S}_{nm} \cdot \cos m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \\ V_{\theta\theta} &= \frac{GM_e}{a_e} \cdot \sum_{n=L_{\min}}^{L_{\max}} \left( \frac{a_e}{r} \right)^{n+1} \cdot \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cdot \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \cdot \sin m\lambda) \cdot \frac{\partial^2 \bar{P}_{nm}(\cos \theta)}{\partial \theta^2} \\ V_{\theta\lambda} &= \frac{GM_e}{a_e} \cdot \sum_{n=L_{\min}}^{L_{\max}} \left( \frac{a_e}{r} \right)^{n+1} \cdot \sum_{m=0}^n m \cdot (-\bar{C}_{nm} \cdot \sin m\lambda + \bar{S}_{nm} \cdot \cos m\lambda) \cdot \frac{\partial \bar{P}_{nm}(\cos \theta)}{\partial \theta} \\ V_{\lambda\lambda} &= \frac{GM_e}{a_e} \cdot \sum_{n=L_{\min}}^{L_{\max}} \left( \frac{a_e}{r} \right)^{n+1} \cdot \sum_{m=0}^n m^2 \cdot (-\bar{C}_{nm} \cdot \cos m\lambda - \bar{S}_{nm} \cdot \sin m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Сферические координаты выражаются через прямоугольные следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \\ P &= \sqrt{X^2 + Y^2} \\ \theta &= \arctg\left(\frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{Z}\right) = \arctg\left(\frac{P}{Z}\right) \\ \lambda &= \arctg\left(\frac{Y}{X}\right) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Первые и вторые частные производные от сферических координат по пространственным прямоугольным координатам вычисляются на основании формул, приведенных в Приложении 1.

Частные производные от компонентов тензора гравитационного потенциала по гармоническим

коэффициентам  $\bar{C}_{lm}$  и  $\bar{S}_{lm}$  в системе координат ECRF на момент времени  $t_k$  могут быть получены путем прямого дифференцирования формул (5) и (6) по уточняемым гармоническим коэффициентам  $\bar{C}_{lm}$  и  $\bar{S}_{lm}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{xx}}{\partial C_{nm}} &= \frac{\partial V_r}{\partial C_{nm}} r_{xx} + \frac{\partial V_\lambda}{\partial C_{nm}} \lambda_{xx} + \frac{\partial V_\theta}{\partial C_{nm}} \theta_{xx} + \frac{\partial V_{rr}}{\partial C_{nm}} r_x^2 + \frac{\partial V_{\lambda\lambda}}{\partial C_{nm}} \lambda_x^2 + \frac{\partial V_{\theta\theta}}{\partial C_{nm}} \theta_x^2 + 2 \cdot \left( \frac{\partial V_{r\lambda}}{\partial C_{nm}} r_x \lambda_x + \frac{\partial V_{r\theta}}{\partial C_{nm}} r_x \theta_x + \frac{\partial V_{\lambda\theta}}{\partial C_{nm}} \lambda_x \theta_x \right), \\ \frac{\partial V_{yy}}{\partial C_{nm}} &= \frac{\partial V_r}{\partial C_{nm}} r_{yy} + \frac{\partial V_\lambda}{\partial C_{nm}} \lambda_{yy} + \frac{\partial V_\theta}{\partial C_{nm}} \theta_{yy} + \frac{\partial V_{rr}}{\partial C_{nm}} r_y^2 + \frac{\partial V_{\lambda\lambda}}{\partial C_{nm}} \lambda_y^2 + \frac{\partial V_{\theta\theta}}{\partial C_{nm}} \theta_y^2 + 2 \cdot \left( \frac{\partial V_{r\lambda}}{\partial C_{nm}} r_y \lambda_y + \frac{\partial V_{r\theta}}{\partial C_{nm}} r_y \theta_y + \frac{\partial V_{\lambda\theta}}{\partial C_{nm}} \lambda_y \theta_y \right), \\ \frac{\partial V_{zz}}{\partial C_{nm}} &= \frac{\partial V_r}{\partial C_{nm}} r_{zz} + \frac{\partial V_\lambda}{\partial C_{nm}} \lambda_{zz} + \frac{\partial V_\theta}{\partial C_{nm}} \theta_{zz} + \frac{\partial V_{rr}}{\partial C_{nm}} r_z^2 + \frac{\partial V_{\lambda\lambda}}{\partial C_{nm}} \lambda_z^2 + \frac{\partial V_{\theta\theta}}{\partial C_{nm}} \theta_z^2 + 2 \cdot \left( \frac{\partial V_{r\lambda}}{\partial C_{nm}} r_z \lambda_z + \frac{\partial V_{r\theta}}{\partial C_{nm}} r_z \theta_z + \frac{\partial V_{\lambda\theta}}{\partial C_{nm}} \lambda_z \theta_z \right), \\ \frac{\partial V_{xy}}{\partial C_{nm}} &= \frac{\partial V_r}{\partial C_{nm}} r_{xy} + r_x \cdot \left( \frac{\partial V_{rr}}{\partial C_{nm}} r_y + \frac{\partial V_{r\theta}}{\partial C_{nm}} \theta_y + \frac{\partial V_{r\lambda}}{\partial C_{nm}} \lambda_y \right) + \frac{\partial V_\theta}{\partial C_{nm}} \theta_{xy} + \theta_x \cdot \left( \frac{\partial V_{r\theta}}{\partial C_{nm}} r_y + \frac{\partial V_{\theta\theta}}{\partial C_{nm}} \theta_y + \frac{\partial V_{\theta\lambda}}{\partial C_{nm}} \lambda_y \right) + \frac{\partial V_\lambda}{\partial C_{nm}} \lambda_{xy} + \lambda_x \cdot \left( \frac{\partial V_{r\lambda}}{\partial C_{nm}} r_y + \frac{\partial V_{\theta\lambda}}{\partial C_{nm}} \theta_y + \frac{\partial V_{\lambda\lambda}}{\partial C_{nm}} \lambda_y \right), \\ \frac{\partial V_{xz}}{\partial C_{nm}} &= \frac{\partial V_r}{\partial C_{nm}} r_{xz} + r_x \cdot \left( \frac{\partial V_{rr}}{\partial C_{nm}} r_z + \frac{\partial V_{r\theta}}{\partial C_{nm}} \theta_z + \frac{\partial V_{r\lambda}}{\partial C_{nm}} \lambda_z \right) + \frac{\partial V_\theta}{\partial C_{nm}} \theta_{xz} + \theta_x \cdot \left( \frac{\partial V_{r\theta}}{\partial C_{nm}} r_z + \frac{\partial V_{\theta\theta}}{\partial C_{nm}} \theta_z + \frac{\partial V_{\theta\lambda}}{\partial C_{nm}} \lambda_z \right) + \frac{\partial V_\lambda}{\partial C_{nm}} \lambda_{xz} + \lambda_x \cdot \left( \frac{\partial V_{r\lambda}}{\partial C_{nm}} r_z + \frac{\partial V_{\theta\lambda}}{\partial C_{nm}} \theta_z + \frac{\partial V_{\lambda\lambda}}{\partial C_{nm}} \lambda_z \right), \\ \frac{\partial V_{yz}}{\partial C_{nm}} &= \frac{\partial V_r}{\partial C_{nm}} r_{yz} + r_y \cdot \left( \frac{\partial V_{rr}}{\partial C_{nm}} r_z + \frac{\partial V_{r\theta}}{\partial C_{nm}} \theta_z + \frac{\partial V_{r\lambda}}{\partial C_{nm}} \lambda_z \right) + \frac{\partial V_\theta}{\partial C_{nm}} \theta_{yz} + \theta_y \cdot \left( \frac{\partial V_{r\theta}}{\partial C_{nm}} r_z + \frac{\partial V_{\theta\theta}}{\partial C_{nm}} \theta_z + \frac{\partial V_{\theta\lambda}}{\partial C_{nm}} \lambda_z \right) + \frac{\partial V_\lambda}{\partial C_{nm}} \lambda_{yz} + \lambda_y \cdot \left( \frac{\partial V_{r\lambda}}{\partial C_{nm}} r_z + \frac{\partial V_{\theta\lambda}}{\partial C_{nm}} \theta_z + \frac{\partial V_{\lambda\lambda}}{\partial C_{nm}} \lambda_z \right), \\ \frac{\partial V_{yx}}{\partial C_{nm}} &= \frac{\partial V_{xy}}{\partial C_{nm}}, \\ \frac{\partial V_{zx}}{\partial C_{nm}} &= \frac{\partial V_{xz}}{\partial C_{nm}}, \\ \frac{\partial V_{zy}}{\partial C_{nm}} &= \frac{\partial V_{yz}}{\partial C_{nm}} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{xx}}{\partial S_{nm}} &= \frac{\partial V_r}{\partial S_{nm}} r_{xx} + \frac{\partial V_\lambda}{\partial S_{nm}} \lambda_{xx} + \frac{\partial V_\theta}{\partial S_{nm}} \theta_{xx} + \frac{\partial V_{rr}}{\partial S_{nm}} r_x^2 + \frac{\partial V_{\lambda\lambda}}{\partial S_{nm}} \lambda_x^2 + \frac{\partial V_{\theta\theta}}{\partial S_{nm}} \theta_x^2 + 2 \cdot \left( \frac{\partial V_{r\lambda}}{\partial S_{nm}} r_x \lambda_x + \frac{\partial V_{r\theta}}{\partial S_{nm}} r_x \theta_x + \frac{\partial V_{\lambda\theta}}{\partial S_{nm}} \lambda_x \theta_x \right), \\ \frac{\partial V_{yy}}{\partial S_{nm}} &= \frac{\partial V_r}{\partial S_{nm}} r_{yy} + \frac{\partial V_\lambda}{\partial S_{nm}} \lambda_{yy} + \frac{\partial V_\theta}{\partial S_{nm}} \theta_{yy} + \frac{\partial V_{rr}}{\partial S_{nm}} r_y^2 + \frac{\partial V_{\lambda\lambda}}{\partial S_{nm}} \lambda_y^2 + \frac{\partial V_{\theta\theta}}{\partial S_{nm}} \theta_y^2 + 2 \cdot \left( \frac{\partial V_{r\lambda}}{\partial S_{nm}} r_y \lambda_y + \frac{\partial V_{r\theta}}{\partial S_{nm}} r_y \theta_y + \frac{\partial V_{\lambda\theta}}{\partial S_{nm}} \lambda_y \theta_y \right), \\ \frac{\partial V_{zz}}{\partial S_{nm}} &= \frac{\partial V_r}{\partial S_{nm}} r_{zz} + \frac{\partial V_\lambda}{\partial S_{nm}} \lambda_{zz} + \frac{\partial V_\theta}{\partial S_{nm}} \theta_{zz} + \frac{\partial V_{rr}}{\partial S_{nm}} r_z^2 + \frac{\partial V_{\lambda\lambda}}{\partial S_{nm}} \lambda_z^2 + \frac{\partial V_{\theta\theta}}{\partial S_{nm}} \theta_z^2 + 2 \cdot \left( \frac{\partial V_{r\lambda}}{\partial S_{nm}} r_z \lambda_z + \frac{\partial V_{r\theta}}{\partial S_{nm}} r_z \theta_z + \frac{\partial V_{\lambda\theta}}{\partial S_{nm}} \lambda_z \theta_z \right), \\ \frac{\partial V_{xy}}{\partial S_{nm}} &= \frac{\partial V_r}{\partial S_{nm}} r_{xy} + r_x \cdot \left( \frac{\partial V_{rr}}{\partial S_{nm}} r_y + \frac{\partial V_{r\theta}}{\partial S_{nm}} \theta_y + \frac{\partial V_{r\lambda}}{\partial S_{nm}} \lambda_y \right) + \frac{\partial V_\theta}{\partial S_{nm}} \theta_{xy} + \theta_x \cdot \left( \frac{\partial V_{r\theta}}{\partial S_{nm}} r_y + \frac{\partial V_{\theta\theta}}{\partial S_{nm}} \theta_y + \frac{\partial V_{\theta\lambda}}{\partial S_{nm}} \lambda_y \right) + \frac{\partial V_\lambda}{\partial S_{nm}} \lambda_{xy} + \lambda_x \cdot \left( \frac{\partial V_{r\lambda}}{\partial S_{nm}} r_y + \frac{\partial V_{\theta\lambda}}{\partial S_{nm}} \theta_y + \frac{\partial V_{\lambda\lambda}}{\partial S_{nm}} \lambda_y \right), \\ \frac{\partial V_{xz}}{\partial S_{nm}} &= \frac{\partial V_r}{\partial S_{nm}} r_{xz} + r_x \cdot \left( \frac{\partial V_{rr}}{\partial S_{nm}} r_z + \frac{\partial V_{r\theta}}{\partial S_{nm}} \theta_z + \frac{\partial V_{r\lambda}}{\partial S_{nm}} \lambda_z \right) + \frac{\partial V_\theta}{\partial S_{nm}} \theta_{xz} + \theta_x \cdot \left( \frac{\partial V_{r\theta}}{\partial S_{nm}} r_z + \frac{\partial V_{\theta\theta}}{\partial S_{nm}} \theta_z + \frac{\partial V_{\theta\lambda}}{\partial S_{nm}} \lambda_z \right) + \frac{\partial V_\lambda}{\partial S_{nm}} \lambda_{xz} + \lambda_x \cdot \left( \frac{\partial V_{r\lambda}}{\partial S_{nm}} r_z + \frac{\partial V_{\theta\lambda}}{\partial S_{nm}} \theta_z + \frac{\partial V_{\lambda\lambda}}{\partial S_{nm}} \lambda_z \right), \\ \frac{\partial V_{yz}}{\partial S_{nm}} &= \frac{\partial V_r}{\partial S_{nm}} r_{yz} + r_y \cdot \left( \frac{\partial V_{rr}}{\partial S_{nm}} r_z + \frac{\partial V_{r\theta}}{\partial S_{nm}} \theta_z + \frac{\partial V_{r\lambda}}{\partial S_{nm}} \lambda_z \right) + \frac{\partial V_\theta}{\partial S_{nm}} \theta_{yz} + \theta_y \cdot \left( \frac{\partial V_{r\theta}}{\partial S_{nm}} r_z + \frac{\partial V_{\theta\theta}}{\partial S_{nm}} \theta_z + \frac{\partial V_{\theta\lambda}}{\partial S_{nm}} \lambda_z \right) + \frac{\partial V_\lambda}{\partial S_{nm}} \lambda_{yz} + \lambda_y \cdot \left( \frac{\partial V_{r\lambda}}{\partial S_{nm}} r_z + \frac{\partial V_{\theta\lambda}}{\partial S_{nm}} \theta_z + \frac{\partial V_{\lambda\lambda}}{\partial S_{nm}} \lambda_z \right), \\ \frac{\partial V_{yx}}{\partial S_{nm}} &= \frac{\partial V_{xy}}{\partial S_{nm}}, \\ \frac{\partial V_{zx}}{\partial S_{nm}} &= \frac{\partial V_{xz}}{\partial S_{nm}}, \\ \frac{\partial V_{zy}}{\partial S_{nm}} &= \frac{\partial V_{yz}}{\partial S_{nm}} \end{aligned} \quad (9)$$

В формулах (8) и (9) частные производные от геопотенциала в сферической системе координат по уточняемым гармоническим коэффициентам  $\bar{C}_{nm}$  и  $\bar{S}_{nm}$  вычисляются по формулам (10)–(13) [3]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial \bar{C}_{nm}} &= -\frac{GM_e}{a_e^2} \cdot (n+1) \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+2} (\cos m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \\ \frac{\partial V_\theta}{\partial \bar{C}_{nm}} &= \frac{GM_e}{a_e} \cdot \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1} (\cos m\lambda) \cdot \frac{\partial \bar{P}_{nm}(\cos\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V_\lambda}{\partial \bar{C}_{nm}} &= \frac{GM_e}{a_e} \cdot \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1} \cdot m \cdot (-\sin m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial \bar{S}_{nm}} &= -\frac{GM_e}{a_e^2} \cdot (n+1) \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+2} (\sin m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \\ \frac{\partial V_\theta}{\partial \bar{S}_{nm}} &= \frac{GM_e}{a_e} \cdot \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1} (\sin m\lambda) \cdot \frac{\partial \bar{P}_{nm}(\cos\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V_\lambda}{\partial \bar{S}_{nm}} &= \frac{GM_e}{a_e} \cdot \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1} \cdot m \cdot (\cos m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_{rr}}{\partial \bar{C}_{nm}} &= \frac{GM_e}{a_e^3} \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+3} \cdot (\cos m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \\ \frac{\partial V_{r\theta}}{\partial \bar{C}_{nm}} &= -\frac{GM_e}{a_e^2} \cdot (n+1) \cdot \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+2} \cdot (\cos m\lambda) \cdot \frac{\partial \bar{P}_{nm}(\cos\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V_{r\lambda}}{\partial \bar{C}_{nm}} &= \frac{GM_e}{a_e^2} \cdot (n+1) \cdot \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+2} \cdot m \cdot (\sin m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \\ \frac{\partial V_{\theta\theta}}{\partial \bar{C}_{nm}} &= \frac{GM_e}{a_e} \cdot \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1} \cdot (\cos m\lambda) \cdot \frac{\partial^2 \bar{P}_{nm}(\cos\theta)}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial V_{\theta\lambda}}{\partial \bar{C}_{nm}} &= \frac{GM_e}{a_e} \cdot \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1} \cdot m \cdot (-\sin m\lambda) \cdot \frac{\partial \bar{P}_{nm}(\cos\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V_{\lambda\lambda}}{\partial \bar{C}_{nm}} &= \frac{GM_e}{a_e} \cdot \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1} \cdot m^2 \cdot (-\cos m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_{rr}}{\partial \bar{S}_{nm}} &= \frac{GM_e}{a_e^3} \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+3} \cdot (\sin m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \\ \frac{\partial V_{r\theta}}{\partial \bar{S}_{nm}} &= \frac{GM_e}{a_e^2} \cdot (n+1) \cdot \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+2} \cdot (\sin m\lambda) \cdot \frac{\partial \bar{P}_{nm}(\cos\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V_{r\lambda}}{\partial \bar{S}_{nm}} &= \frac{GM_e}{a_e^2} \cdot (n+1) \cdot \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+2} \cdot m \cdot (-\cos m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \\ \frac{\partial V_{\theta\theta}}{\partial \bar{S}_{nm}} &= \frac{GM_e}{a_e} \cdot \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1} \cdot (\sin m\lambda) \cdot \frac{\partial^2 \bar{P}_{nm}(\cos\theta)}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial V_{\theta\lambda}}{\partial \bar{S}_{nm}} &= \frac{GM_e}{a_e} \cdot \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1} \cdot m \cdot (-\cos m\lambda) \cdot \frac{\partial \bar{P}_{nm}(\cos\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V_{\lambda\lambda}}{\partial \bar{S}_{nm}} &= \frac{GM_e}{a_e} \cdot \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1} \cdot m^2 \cdot (-\sin m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Таким образом, получены все необходимые формулы для вычисления элементов матрицы  $\frac{\partial V_{\text{EFRF}}}{\partial (\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm})}$ .



5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ ПО ГРАДИЕНТОМЕТРИЧЕСКИМ ИЗМЕРЕНИЯМ

Для выполнения экспериментальных вычислений использовались данные продукта EGG\_TRF\_2 на 30-суточном временном интервале 1 ноября 2009 г. – 30 ноября 2009 г.

Для получения данных продукта EGG\_TRF\_2 используются калиброванные градиенты гравитационного поля продукта EGG\_NOM\_2, а также кватернионы, содержащиеся в продукте EGG\_IAQ\_1b, для преобразования из системы координат GRF в инерциальную систему координат IRF, и параметры точной орбиты КА GOCE, полученные редуционно-динамическим методом и находящиеся в продукте SST\_PSO\_2.

Алгоритм получения данных продукта EGG\_TRF\_2 состоит в следующем:

- Вычисляются модельные компоненты  $V_{xy}$  и  $V_{yz}$  с использованием модели гравитационного поля, полученной QL-методом по информации проекта GOCE.
- Применяется высокочастотный фильтр для четырех точных компонентов тензора гравитационного потенциала продукта EGG\_NOM\_2 и двух модельных компонентов тензора гравитационного потенциала.
- Сигнал меньше нижней границы полосы измерений заменяется сигналом, полученным по априорной модели гравитационного поля.
- Тензор гравитационного потенциала вращается из GRF в LNOF.

Продукт EGG\_TRF\_2, полученный по вышеописанному алгоритму, содержит калиброванные градиенты гравитационного поля в системе координат LNOF. Вместе со значениями градиентов гравитационного поля приведены их оценки и флаги, помечающие данные для последующей отбраковки или данные, полученные интерполированием в случае наличия пропуска в данных. Приводится также эпоха в шкале времени GPS и геоцентрические координаты (широта, долгота и радиус-вектор спутника).

Первоначально в соответствии с правилами преобразования тензоров из одной системы координат в другую данные продукта EGG\_TRF\_2 преобразовывались из локальной североориентированной системы координат (LNOF) в земную систему

координат (EFRF) на основании следующего соотношения

$$V_{EFRF} = C_{EFRF}^{LNOF} \cdot V_{LNOF} \cdot (C_{EFRF}^{LNOF})^T. \quad (14)$$

В формуле (14)  $C_{EFRF}^{LNOF}$  — матрица преобразования из североориентированной системы координат (LNOF) в земную систему координат (EFRF), которая имеет вид [2]

$$C_{EFRF}^{LNOF} = \begin{pmatrix} -\cos \lambda \cdot \sin \phi & \sin \lambda & \cos \lambda \cdot \cos \phi \\ -\sin \lambda \cdot \sin \phi & -\cos \lambda & \sin \lambda \cdot \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & \sin \phi \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где  $\phi, \lambda$  — сферические координаты спутника.

Далее систему уравнений (1) преобразуют к системе нормальных уравнений и, решая ее по методу наименьших квадратов, получают поправки  $\begin{pmatrix} \Delta \bar{C}_{nm} \\ \Delta \bar{S}_{nm} \end{pmatrix}$  к предварительным значениям коэффициентов сферических гармоник  $(\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm})^0$

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{C}_{lm} \\ \Delta \bar{S}_{lm} \end{bmatrix} = (A^T P A + \alpha K)^{-1} \cdot (A^T P l), \quad (16)$$

где  $A$  — матрица коэффициентов условных уравнений поправок;  $\alpha$  — параметр регуляризации;  $K$  — матрица регуляризации;  $P$  — весовая матрица измерений;  $l$  — вектор свободных членов уравнений поправок.

Оценка точности полученного решения выполняется по формуле

$$Q = \mu^2 \cdot (A^T P A + \alpha K)^{-1}, \quad (17)$$

$$\mu^2 = \frac{v^T P v}{n - u}, \quad (18)$$

где  $\mu$  — средняя квадратическая ошибка единицы веса;  $v$  — вектор поправок в измеренные величины вычисляется в соответствии с формулой (1);  $n$  — число измерений;  $u$  — число определяемых параметров.

Определение параметров гравитационного поля Земли по градиентометрическим измерениям относится к классу обратных задач, которые по существу являются некорректными задачами. Поэтому при их решении используются методы регуляризации.

Кроме того, конфигурация орбиты проекта GOCE такова, что полярные области не охвачены

измерительной информацией. В этом случае необходимо добавить некоторую априорную информацию и при решении такой задачи использовать методы регуляризации.

Влияние регуляризации возрастает с увеличением степени сферической гармоник, так что коэффициенты сферической гармоник (или, точнее, поправки к коэффициентам), относящиеся к высшим степеням, постепенно приближаются к нулю.

При этом регуляризация играет двойную роль. С одной стороны, когда рассматриваемая обратная задача некорректна, необходимо использовать регуляризацию, чтобы обеспечить получение устойчивого решения задачи. С другой стороны, регуляризация играет роль фильтра нижних частот, который подавляет высокочастотные ошибки в модели из-за распространяющегося шума данных. В контексте математической обработки градиентометрических данных, основная цель регуляризации — подавить ошибки модели гравитационного поля Земли на самых высоких пространственных частотах [4].

В соответствии с этим алгоритмом была разработана программа: для реальных измерений. С помощью этой программы были выполнены экспериментальные вычисления.

Уточняемыми параметрами на 30-суточном временном интервале были коэффициенты сферических гармоник степени и порядка 200 и 201.

Число уточняемых параметров составляет 804 коэффициента.

Вычисления выполнялись с использованием и без использования метода регуляризации.

В качестве матрицы регуляризации используется диагональная матрица следующего вида

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_{C_{20}}^2} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{C_{21}}^2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \frac{1}{\sigma_{C_{nm}}^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sigma_{S_{21}}^2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_{S_{nm}}^2} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где  $\sigma_{C_{nm}}, \sigma_{S_{nm}}$  — оценки уточняемых сферических гармоник.

Параметры регуляризации, которые использовались при выполнении экспериментальных вычислений по реальным данным, имеют следующие значения:  $1.0 \cdot 10^{-20}$ ;  $1.0 \cdot 10^{-22}$ ;  $1.0 \cdot 10^{-24}$ .

В ходе выполнения экспериментальных вычислений были получены поправки к предварительным значениям коэффициентов сферических гармоник степени и порядка 200 и 201, по которым были вычислены оценки вариаций степенных дисперсий в соответствии с формулой

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum_{m=0}^n (\Delta C_{nm}^2 + \Delta S_{nm}^2)}{2n + 1}}, \quad (20)$$

где  $\Delta C_{nm}, \Delta S_{nm}$  — поправки к предварительным значениям коэффициентов сферических гармоник, полученные из решения.

Результаты экспериментальных вычислений для 30-суточного временного интервала приведены в табл. 1 и 2.

**Таблица 1.** Оценка степенной дисперсии без регуляризации.

Без регуляризации		
№ п/п	Временной интервал	29.779 суток
	Число измерений	2572892
1	Оценка степенной дисперсии $n = 200$	$6.61 \times 10^{-7}$
2	Оценка степенной дисперсии $n = 201$	$1.57 \times 10^{-7}$

**Таблица 2.** Оценка степенной дисперсии с использованием регуляризации

Регуляризация			
№ п/п	Временной интервал	29.779 суток	
	Число измерений	2572892	
	Параметр регуляризации $\alpha$	Оценка степенной дисперсии $n = 200$	Оценка степенной дисперсии $n = 201$
1	$\text{Alreg} = 1. \times 10^{-203}$	$1.91 \times 10^{-9}$	$2.06 \times 10^{-9}$
2	$\text{Alreg} = 1. \times 10^{-22}$	$1.02 \times 10^{-10}$	$8.01 \times 10^{-11}$
3	$\text{Alreg} = 1. \times 10^{-24}$	$1.08 \times 10^{-12}$	$1.07 \times 10^{-12}$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ результатов, представленных в табл. 1 и 2 показывает, что использование метода регуляризации и подбор оптимального параметра регуляризации позволяет получить поправки, соответствующие оценкам определяемых гармонических коэффициентов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. А. Клюйков, *Астрон. журн.* 99, № 8, 1–4 (2022).
2. А. А. Клюйков, *Геодезия и картография*, № 7, 2–8 (2021).
3. А. А. Клюйков, *Геодезия и картография*, № 11, 20–23 (2016).
4. P. Ditmar, J. Kusche, R. Klees, *Journal of Geodesy* 77, 465–477 (2003).
5. Gravity field and Steady-State Ocean Circulation Mission. ESA SP-1233(1)-The Four Candidate Earth ExplorerCore Mission/ 217 pp.

**DETERMINATION OF PARAMETERS GRAVITY FIELD EARTH  
BY GRADIOMETRIC MEASUREMENTS  
IN EARTH FIXED REFERENCE FRAME**

**A. A. Klyukov<sup>a,\*</sup>**

*<sup>a</sup>Institute of Astronomy of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

*\*E-mail: kaa5774@yandex.ru*

The article presents the results of determining the parameters of the Earth's gravitational field from gradiometric measurements in the geocentric terrestrial coordinate system. The calculations were performed using the regularization method, according to which a regularization matrix multiplied by the regularization parameter is added to the matrix of normal equations. As a result of calculations for various regularization parameters, corrections to harmonic coefficients of degree and order 200 and 201 were obtained, presented in the article in the form of graphs. Based on the corrections obtained, the power-law variances presented in Tables 1 and 2 are calculated.

*Keywords:* satellite gradiometry, Earth's gravitational field, Earth coordinate system, gravitational potential tensor, gradiometer.

## Приложение 1

Частные производные от сферических координат по прямоугольным координатам

$$\begin{aligned}
r_X &= \frac{\partial r}{\partial X} = \frac{X}{r}; r_{XX} = \frac{\partial^2 r}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{X}{r} \right) = \frac{r - X \cdot \frac{\partial r}{\partial X}}{r^2} = \frac{r^2 - X^2}{r^3}; \\
r_{XY} &= \frac{\partial^2 r}{\partial X \partial Y} = \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{X}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial Y} (X \cdot r^{-1}) = -\frac{X \cdot \frac{\partial r}{\partial Y}}{r^2} = -\frac{XY}{r^3}; \\
r_{XZ} &= \frac{\partial^2 r}{\partial X \partial Z} = \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{X}{r} \right) = \frac{\partial (X \cdot r^{-1})}{\partial Z} = -\frac{X \cdot \frac{\partial r}{\partial Z}}{r^2} = -\frac{XZ}{r^3}; \\
r_Y &= \frac{\partial r}{\partial Y} = \frac{Y}{r}; r_{YY} = \frac{\partial^2 r}{\partial Y^2} = \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{Y}{r} \right) = \frac{r - Y \cdot \frac{\partial r}{\partial Y}}{r^2} = \frac{r^2 - Y^2}{r^3}; \\
r_{YZ} &= \frac{\partial^2 r}{\partial Y \partial Z} = \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{Y}{r} \right) = \frac{\partial (Y \cdot r^{-1})}{\partial Z} = -\frac{Y \cdot \frac{\partial r}{\partial Z}}{r^2} = -\frac{YZ}{r^3}; \\
r_Z &= \frac{\partial r}{\partial Z} = \frac{Z}{r}; r_{ZZ} = \frac{\partial^2 r}{\partial Z^2} = \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{Z}{r} \right) = \frac{r - Z \cdot \frac{\partial r}{\partial Z}}{r^2} = \frac{r^2 - Z^2}{r^3}; \\
\theta_X &= \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} \left[ \arctg \left( \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{Z} \right) \right] = \frac{Z^2}{X^2 + Y^2 + Z^2} \cdot \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \cdot \frac{1}{Z} = \frac{XZ}{r^2 P}; \\
\theta_{XX} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X} \left[ \frac{Z^2}{X^2 + Y^2 + Z^2} \cdot \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \cdot \frac{1}{Z} \right] = \frac{Z^2}{X^2 + Y^2 + Z^2} \cdot \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \cdot \frac{1}{Z} = \frac{XZ}{r^2 P}; \\
\theta_Y &= \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \left[ \arctg \left( \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{Z} \right) \right]' = \frac{Z^2}{X^2 + Y^2 + Z^2} \cdot \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \cdot \frac{1}{Z} = \frac{YZ}{r^2 P}; \\
\theta_Z &= \frac{\partial \theta}{\partial Z} = \left[ \arctg \left( \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{Z} \right) \right]' = -\frac{Z^2}{X^2 + Y^2 + Z^2} \cdot \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{Z^2} = -\frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{X^2 + Y^2 + Z^2} = -\frac{P}{r^2}; \\
\lambda_X &= \frac{\partial \lambda}{\partial X} = -\frac{Y}{X^2 + Y^2} = -\frac{Y}{P^2}; \lambda_{XX} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X} \left( -\frac{Y}{P^2} \right) = -Y \cdot \frac{\partial (P^{-2})}{\partial X} = 2Y \cdot P^{-3} \cdot \frac{X}{P} = \frac{2XY}{P^4}; \\
\lambda_{XY} &= \frac{\partial^2 \lambda}{\partial X \partial Y} = \frac{\partial}{\partial Y} \left( -\frac{Y}{P^2} \right) = \frac{\partial (-Y \cdot P^{-2})}{\partial Y} = -P^{-2} + \frac{2Y}{P^3} \cdot \frac{\partial P}{\partial Y} = -\frac{1}{P^2} + \frac{2Y}{P^3} \cdot \frac{Y}{P} = \frac{2Y^2 - P^2}{P^4} = \frac{Y^2 - X^2}{P^4}; \\
\lambda_{XZ} &= \frac{\partial^2 \lambda}{\partial X \partial Z} = \frac{\partial}{\partial Z} \left( -\frac{Y}{P^2} \right) = 0; \\
\lambda_Y &= \frac{\partial \lambda}{\partial Y} = \frac{X}{X^2 + Y^2} = \frac{X}{P^2}; \lambda_{YY} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial Y^2} = \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{X}{P^2} \right) = X \cdot \frac{\partial (P^{-2})}{\partial Y} = -2X \cdot P^{-3} \cdot \frac{Y}{P} = -\frac{2XY}{P^4}; \\
\lambda_{YZ} &= \frac{\partial^2 \lambda}{\partial Y \partial Z} = \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{X}{P^2} \right) = 0; \\
\lambda_Z &= \frac{\partial \lambda}{\partial Z} = 0; \lambda_{ZZ} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial Z^2} = 0;
\end{aligned}$$