

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ГАЛАКТИКИ КАК ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

© 2025 г. С. А. Гасанов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга, Москва, Россия

e-mail: gasanov@sai.msu.ru

Поступила в редакцию 14.05.2024 г.

После доработки 18.09.2024 г.

Принята в печать 14.10.2024 г.

В настоящей работе рассмотрены несколько новых моделей слоисто-неоднородной эллиптической галактики, имеющей форму либо трехосного эллипсоида, либо сжатого или вытянутого сфероида, и состоящей из барионной массы и темной материи с разными законами распределения плотности — профилями. На основе этих моделей определены некоторые ключевые динамические параметры ЭГ: гравитационная (потенциальная) энергия и кинетическая энергия вращения, распределение углового момента и удельные угловые моменты в зависимости от профилей плотности. Установлены равновесие и устойчивость (неустойчивость) ЭГ как динамической системы согласно известным критериям. Найдены критические значения параметра семейства сфероидов, определяющие границы устойчивости (или неустойчивости) динамической системы по значениям удельных угловых моментов в зависимости от профилей плотности. Полученные результаты применены к более шестидесяти модельным ЭГ с параметрами, точно совпадающими с реально существующими и приведены в виде таблиц и рисунков.

Ключевые слова: эллиптические галактики, фундаментальные параметры, равновесие и устойчивость (неустойчивость)

DOI: 10.31857/S0004629925010017, EDN: HLYULX

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] рассмотрены три новые модели слоисто-неоднородной эллиптической галактики (ЭГ), состоящей из барионной массы (БМ) и темной материи (ТМ). Согласно этим моделям, эллиптическая галактика вместе с гало (другой вариант — без него) считается двухслойным неоднородным эллипсоидом вращения — вытянутым сфероидом. На основе этих моделей определены ключевые динамические параметры ЭГ [1] и исследовано пространственное движение пассивно-гравитирующего тела (ПГТ) в гравитационном поле такой галактики [2]. Полученные результаты применены к модельным эллиптическим галактикам, параметры которых точно совпадают с параметрами реально существующих.

В работе [3] рассмотрены другие модели слоисто-неоднородной эллиптической галактики. Согласно этим моделям ЭГ состоит из БМ и ТМ и представляет собой либо слоисто-неоднородной трехосный эллипсоид с полуосами $a > b > c$ (Модель I), либо слоисто-неоднородной сжатый сфероид — сфероид Маклорена, $a = b > c$ (Модель II), либо слоисто-неоднородной вытянутый сфероид $a > b = c$ (Модель III). При этом законом распределения плотности — профилем БМ — является

$\rho_1(m)$, а профилем ТМ — $\rho_2(m)$. На основе этих моделей определены некоторые ключевые динамические параметры ЭГ и установлены соотношения: {масса-размеры}, {масса-дисперсия скоростей}, {размер-дисперсия скоростей-светимость (поверхностная яркость)}. Исследованы эволюционные сценарии образования ЭГ согласно этим моделям.

Упомянутые выше модели предназначены для решения задач небесной механики и частично астрофизики. Для получения точных результатов во всех моделях потенциалы в ряд не разлагаются, а берутся их точные выражения. При этом условные границы ЭГ определяются по значениям величин D_{25} и R_{25} [4].

Эти модели не могут претендовать на полноту охвата проблемы ТМ в целом, но сделана еще одна попытка исследовать влияние ТМ на кинематику и динамику ПГТ.

Во всех моделях в качестве профиля $\rho_1(m)$ берется “астрофизический закон” распределения плотности. Такое название профиля дано в книге [5, стр. 354], он получается из закона распределения поверхностной яркости, открытого Хабблом [6], посредством решения интегрального уравнения Абеля. В качестве профиля $\rho_2(m)$ использован один из

аналогов профилей NFW и Хернквиста, введенные нами в работах [1–3]. Эти профили названы аналогами, так как они получены из оригинальных профилей NFW [7] и Хернквиста [8] путем адаптации их к эллиптическим галактикам.

В настоящей работе на основе моделей I, II и III (см. [3]) найдены явные выражения полной гравитационной (потенциальной) энергии и кинетической энергии вращения ЭГ, распределения углового момента и удельного углового момента в зависимости от профиля плотности. Исследуется устойчивость динамической системы согласно критерию Пиблса–Острайкера [9], [10, с. 189], по критерию неустойчивости Вандервортса [11], а также по значениям удельных угловых моментов [12]. Найдены критические значения параметра семейства сфероидов, определяющие границы устойчивости (или неустойчивости) динамической системы по значениям удельных угловых моментов в зависимости от профиля плотности.

Следует отметить, что устойчивость звездных систем были исследованы в работах других авторов. В частности, в работе [13] устойчивость исследуется методом матричных уравнений, который в книге [14, стр. 419] назван матричным методом Калнайса. Аналогичные исследования по устойчивости звездных систем проведены в работах [15–17], а в работе [18] анализируется природа неустойчивости радиальной орбиты в сферически-симметричных бесптолковательных звездных системах.

2. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ И КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ВРАЩЕНИЯ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ГАЛАКТИКИ. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ

Пусть эллиптическая галактика (ЭГ) представляется собой трехосный слоисто-неоднородный эллипсоид с полуосами a , b и c , состоящий из барионной массы (БМ) и темной материи (ТМ). Под слоисто-неоднородным эллипсоидом подразумевается эллипсоид с гомотетическим (эллипсоидальным) законом распределения плотности — профилем. Положим, что $\rho_1(m)$ и $\rho_2(m)$ — законы распределения плотности БМ и ТМ данного эллипсоида соответственно. Эти профили являются функциями только параметра m семейства эллипсоидальных поверхностей

$$m^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \quad (a > b > c, \quad 0 \leq m \leq 1). \quad (1)$$

Здесь значение $m = 0$ соответствует центру ЭГ, а $m = 1$ — эллипсоидальной поверхности, которой ограничена ЭГ.

Полная гравитационная (потенциальная) энергия W и кинетическая энергия вращения T слоисто-неоднородного эллипсоида с полуосами a , b , c , плотностью $\rho(m)$ и массой $M(m)$ в случае изо-

тропного давления определяются общей формулой [12, стр. 115, 120]

$$\begin{aligned} W &= -2A_0 J_0 \psi(1), \\ T &= A_0 J_1 \psi(1), \\ A_0 &= \frac{\pi Gabc}{2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\psi(m) = \int_0^{m^2} \rho(u) M(u) du^2, \quad (3)$$

$$M(m) = 4\pi abc \int_0^m u^2 \rho(u) du, \quad (k = 1, 2),$$

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_0^\infty \frac{du}{\Delta(u)} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - c^2}} F(\varphi_0, n), \\ J_1 &= J_0 - 3c^2 K_0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$K_0 = \int_0^\infty \frac{du}{(c^2 + u) \Delta(u)} = \frac{2}{b^2 - c^2} \left[-\frac{E(\varphi_0, n)}{\sqrt{a^2 - c^2}} + \frac{b}{ac} \right]. \quad (5)$$

Здесь $F(\varphi_0, n)$, $E(\varphi_0, n)$ — неполные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода. Кроме того, аргумент φ_0 и модуль n этих интегралов, а также функция $\Delta(u)$ равны

$$\begin{aligned} \sin \varphi_0 &= \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}, \quad n = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \\ \Delta(u) &= \sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь применим формулу (2) к слоисто-неоднородному промежуточному эллипсоиду, состоящему из барионной массы с профилем $\rho_1(m)$, массой $M_1(m)$ и темной материи с профилем $\rho_2(m)$, массой $M_2(m)$. Для этого в указанной формуле вместо профиля $\rho(m)$ и массы $M(m)$ следует пользоваться общим профилем и общей массой, т. е. положить

$$\begin{aligned} \rho(m) &= \rho_1(m) + \rho_2(m), \\ M(m) &= M_1(m) + M_2(m). \end{aligned} \quad (7)$$

При этом массы $M_1(m)$ и $M_2(m)$ определяются по формуле (3) заменой профиля $\rho(m)$ на соответствующий, а полная масса — при $m = 1$. Кроме того, формулу (2) в этом случае можно переписать в виде

$$\begin{aligned} W &= -2A_0 J_0 \psi(1), \\ T &= A_0 J_1 \psi(1), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\psi(m) = \sum_{n=1}^4 \psi_n(m),$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1(m) &= \int_0^{m^2} \rho_1(u) M_1(u) du^2, \\ \psi_2(m) &= \int_0^{m^2} \rho_1(u) M_2(u) du^2, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}\psi_3(m) &= \int_0^{m^2} \rho_2(u) M_1(u) du^2, \\ \psi_4(m) &= \int_0^{m^2} \rho_2(u) M_2(u) du^2.\end{aligned}\quad (10)$$

3. ЯВНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ЭНЕРГИЙ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПРОФИЛЕЙ

В этом разделе вычислим полные потенциальную энергию W и кинетическую энергию вращения T слоисто-неоднородной эллиптической галактики в зависимости от конкретных профилей $\rho_1(m)$ барионной массы и $\rho_2(m)$ темной материи, а также от формы галактики. Последовательно будем рассматривать следующие формы ЭГ:

- 1) трехосный эллипсоид $a > b > c$,
- 2) сжатый сферионд $a = b > c$ и
- 3) вытянутый сферионд $a > b = c$.

Очевидно, что трехосный эллипсоид представляет собой более сложную и общую форму, чем другие. Поэтому его следует рассмотреть более подробно; случаи 2) и 3) являются частными случаями первого.

3.1. Эллиптическая галактика как слоисто-неоднородный трехосный эллипсоид

В качестве закона распределения плотности (профиля) для барионной массы (БМ) эллиптической галактики как слоисто-неоднородного трехосного эллипсоида возьмем “астрофизический закон” распределения плотности $\rho_1(m)$, связанный с профилем поверхностной яркости $I_1(m)$ [6] посредством интегрального уравнения Абеля:

$$\begin{aligned}\rho_1(m) &= \frac{\rho_0}{w^3}, \\ I_1(m) &= \frac{I_0}{w^2}, \\ w &= \sqrt{1 + \beta m^2},\end{aligned}\quad (11)$$

где m определяется равенством (1), ρ_0 — плотность в центре эллиптической галактики, I_0 — центральная поверхностная яркость, а параметр $\beta \gg 1$ для каждой ЭГ выбирается отдельно и находится выравниванием данных фотометрии [19]. Если известен соответствующий профиль с поверхностной яркостью $I_2(m)$, то из интегрального уравнения Абеля аналогичным образом определяется профиль $\rho_2(m)$. Можно решить и обратную задачу: при заданном профиле $\rho_2(m)$ с помощью упомянутого выше интегрального уравнения находится профиль $I_2(m)$.

Масса $M_1(m)$ промежуточного эллипсоида, состоящего из БМ с профилем $\rho_1(m)$, вычисляется по

формуле (3) и равна

$$\begin{aligned}M_1(m) &= \frac{4\pi\rho_0 abc}{\beta\sqrt{\beta}} \left[\varphi_1(m) - \frac{\sqrt{w^2 - 1}}{w} \right], \\ \varphi_1(m) &= \ln \left(w + \sqrt{w^2 - 1} \right),\end{aligned}\quad (12)$$

причем полная масса ЭГ с БМ равна $M_1 \equiv M(m = 1)$, а w определен выше.

Если ЭГ состоит только из БМ, то

$$\begin{aligned}\psi_2(m) &= \psi_3(m) = \psi_4(m) \equiv 0, \\ \psi(m) &\equiv \psi_1(m) = 4\pi\rho_0^2 a b c f_1(m),\end{aligned}\quad (13)$$

где

$$\begin{aligned}f_1(m) &= \frac{1}{\beta^2\sqrt{\beta}} \left[\arctg \sqrt{w^2 - 1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\varphi_1(m)}{w} + \frac{\sqrt{w^2 - 1}}{w^2} \right].\end{aligned}\quad (14)$$

Тогда подставив выражение (13) функции $\psi(m)$ в формулу (8) для полной потенциальной энергии W и кинетической энергии вращения T такой галактики получим:

$$\begin{aligned}W &= -2W_0 J_0 \rho_0^2 f_1(1), \\ T &= W_0 J_1 \rho_0^2 f_1(1), \\ W_0 &= 2\pi^2 G a^2 b^2 c^2,\end{aligned}\quad (15)$$

где коэффициенты J_0 , J_1 определяются равенством (4), а функция $f_1(m)$ — равенством (14).

Заметим, что из выражений энергий (2) и (15) следует, что отношение

$$t \equiv \frac{T}{|W|} = \frac{J_1}{2J_0} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3c^2 K_0}{J_0} \right)\quad (16)$$

не зависит от распределения массы неоднородного эллипсоида, а зависит только от его формы или размеров.

Теперь положим, что ЭГ состоит из БМ и ТМ, причем профиль БМ $\rho_1(m)$ определяется равенством (11). В качестве профиля ТМ будем рассматривать один из аналогов профилей NFW и Хернквиста, приведенных в работах [1–3]. Оригиналы этих профилей, рассмотренных в работах NFW [8] и Хернквиста [9], предназначены для сферически симметричных галактик. Для применения этих профилей к ЭГ мы внесли соответствующие изменения и назвали их аналогами этих профилей [1–3].

Сначала рассмотрим аналог профиля NFW [1–3]:

$$\begin{aligned}\rho_2(m) &= \frac{K}{g^2(g-1)}, \\ g &= 1 + \mu m, \\ \mu &= \frac{\sqrt[3]{abc}}{r_s},\end{aligned}\quad (17)$$

где r_s – радиус-шкала ЭГ. Масса промежуточного эллипсоида $M_2(m)$ при этом будет равна

$$M_2(m) = 4\pi K r_s^3 \left(\ln g - \frac{g-1}{g} \right).$$

Далее, вычислив функции $\psi_k(m)$ ($k = 2, 3, 4$) с учетом выражения $\psi_1(m)$ для энергий W и T , получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}W &= -2W_0 J_0 \Phi_2(1), \\ T &= W_0 J_1 \Phi_1(1),\end{aligned}\quad (18)$$

где коэффициенты J_0 , J_1 и W_0 приведены выше, а функция $\Phi_1(m)$ равна

$$\begin{aligned}\Phi_1(m) &= \rho_0^2 N_1(m) + 2K\rho_0 N_2(m) + K^2 N_3(m), \\ N_1(m) &\equiv f_1(m).\end{aligned}\quad (19)$$

Здесь функция $f_1(m)$ определяется равенством (14), а

$$\begin{aligned}N_2(m) &= \frac{1}{\beta \mu^3 w} \left[\frac{g-1}{g} - \frac{\mu w}{\sqrt{\beta} g} \ln \varphi_1(m) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu w}{2\sqrt{\beta + \mu^2}} \ln \frac{\varphi_2(m)}{\varphi_2(0)} - \ln g \right],\end{aligned}\quad (20)$$

$$N_3(m) = \frac{1}{\mu^5} \left(1 - \frac{1}{g^2} - \frac{\ln g^2}{g} \right),\quad (21)$$

причем функция $\varphi_1(m)$ определена выше равенством (12), а

$$\begin{aligned}\varphi_2(m) &= \frac{w \sqrt{\mu^2 + \beta} + \beta m - \mu}{w \sqrt{\mu^2 + \beta} - \beta m + \mu}, \\ [14pt] \varphi_2(0) &= \varphi_2(m=0).\end{aligned}\quad (22)$$

Согласно аналогу профиля Хернквиста [1] имеем

$$\begin{aligned}\rho_2(m) &= \frac{M}{2\pi \bar{a}^3} \frac{1}{\bar{g}^3(\bar{g}-1)}, \\ M_2(m) &= \frac{M(\bar{g}-1)^2}{\bar{g}^2}, \\ \bar{g} &= 1 + \bar{\mu}m, \\ \bar{\mu} &= \frac{\sqrt[3]{abc}}{\bar{a}}.\end{aligned}\quad (23)$$

Здесь M – полная масса галактики, а \bar{a} – шкала масштабирования галактики.

Аналогично вычисляем энергию

$$\begin{aligned}W &= -2W_0 J_0 \Phi_2(1), \\ T &= W_0 J_1 \Phi_1(1),\end{aligned}\quad (24)$$

где W_0 определен в (15), а

$$\begin{aligned}\Phi_2(m) &= \rho_0^2 H_1(m) + 2M\rho_0 H_2(m) + M^2 H_3(m), \\ H_1(m) &\equiv f_1(m).\end{aligned}\quad (25)$$

Здесь

$$\begin{aligned}H_2(m) &= \frac{1}{8\pi \bar{\mu}^2 \bar{a}^3} \left[\frac{1}{(\bar{\mu}^2 + \beta)^{3/2}} \ln \frac{\varphi_2(m)}{\varphi_2(0)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2 \ln \varphi_1(m)}{\beta \sqrt{\beta} \bar{g}^2} + \frac{2\bar{\mu} \varphi_3(m)}{\beta(\bar{\mu}^2 + \beta)} \right],\end{aligned}\quad (26)$$

$$H_3(m) = \frac{(\bar{g}-1)^3(3+\bar{g})}{48\pi^2 \bar{\mu}^5 \bar{a}^6 \bar{g}^4},\quad (27)$$

$$\varphi_3(m) = 1 + \frac{1}{w} + \frac{(\bar{g}-1)(2\beta + w^2 - 2)}{\bar{g}^2 w},$$

где функции $\varphi_1(m)$ и $\varphi_2(m)$ определены выше.

3.2. ЭГ как слоисто-неоднородный сжатый сфероид (сфероид Маклорена)

В этом случае соответствующие потенциальные энергии W и кинетические энергии вращения T также будут определяться формулами (15), (18) и (24). Однако коэффициенты J_0 , J_1 , W_0 , а также параметры m , μ , $\bar{\mu}$ вычисляются иначе:

$$\begin{aligned}J_0 &= \frac{2}{ae} \arcsin e, \\ J_1 &= \frac{1}{ae^2} \left[a(3-2e^2) J_0 - 6\sqrt{1-e^2} \right], \\ e^2 &= 1 - \frac{c^2}{a^2}, \quad (a=b),\end{aligned}\quad (28)$$

$$\begin{aligned}W_0 &= 2\pi^2 G a^4 c^2, \\ m^2 &= \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}, \\ \mu &= \frac{\sqrt[3]{a^2 c}}{r_s}, \\ \bar{\mu} &= \frac{\sqrt[3]{a^2 c}}{\bar{a}}.\end{aligned}\quad (29)$$

3.3. ЭГ как слоисто-неоднородный вытянутый сфероид

В этом случае в соответствующих формулах (15), (18) и (24) для энергий W и T следует учесть

$$\begin{aligned}J_0 &= \frac{1}{ae} \ln \frac{1+e}{1-e}, \\ J_1 &= \frac{1}{2ae^2} \left[a(3-e^2) J_0 - 6 \right],\end{aligned}\quad (30)$$

$$W_0 = 2\pi^2 G a^2 c^4,$$

$$b = c, \quad m^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{c^2},$$

$$\mu = \frac{\sqrt[3]{ac^2}}{r_s}, \quad \bar{\mu} = \frac{\sqrt[3]{ac^2}}{\bar{a}}.$$

4. КРИТЕРИИ РАВНОВЕСИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

4.1. Критерии равновесия

Для существования неоднородной ЭГ как фигуры равновесия должно удовлетворяться необходимое условие для угловой скорости вращения Ω – неравенство Пуанкаре [20]:

$$\Omega^2 \leq 2\pi G \bar{\rho}, \quad (\Omega^2 \leq \pi G \rho_0, \quad \Omega^2 \leq 0.45\pi G \bar{\rho}). \quad (31)$$

Здесь G – гравитационная постоянная, а $\bar{\rho}$ – средняя плотность неоднородной эллиптической галактики. Выполнение неравенства Пуанкаре гарантирует направление полной силы тяжести внутрь и неотрицательность давления. В скобках указаны более строгие неравенства Крудели и Кондратьева соответственно [12, с. 325]. В неравенстве Крудели ρ_0 – плотность в центре галактики и она убывает от центра к периферии. При этом о направлении силы тяжести речь не идет и согласно теореме вириала должно выполняться неравенство

$$2T + W < 0, \quad \text{или} \quad t \equiv \frac{T}{|W|} < \frac{1}{2}.$$

Здесь энергии W и T определены формулой (15).

Теперь рассмотрим сфериоиды Маклорена, для которых нормированная угловая скорость вращения $\tilde{\Omega}$ равна [12, стр. 357]:

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}^2 \equiv \frac{\Omega^2}{\pi G \bar{\rho}} = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e^3} \times \\ \times \left[(3 - 2e^2) \arcsin e - 3e\sqrt{1-e^2} \right], \quad (32) \\ \left(\tilde{\Omega}^2 = 0.37423 \right), \end{aligned}$$

где в скобках указано значение $\tilde{\Omega}^2$ критической конфигурации равновесия. Из (32) заключаем, что сфериоид Маклорена – однопараметрическая фигура относительного равновесия; его характеристики зависят только от сжатия фигуры ϵ , или от эксцентриситета e :

$$\epsilon = 1 - \frac{c}{a},$$

$$e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2} = 1 - (1 - \epsilon)^2.$$

Как указано в монографии [12, стр. 358], еще Симпсон и Даламбер заметили, что в интервале $0 \leq \tilde{\Omega}^2 < 0.4493$ для каждого значения $\tilde{\Omega}^2$ существуют два сфериоида сплюснутости. Однако это не значит, что чем быстрее вращение фигуры, тем сильнее она будет сжата с полюсов. На самом деле, чем

быстрее вращение фигуры, тем меньше сплюснутость, или сжатие. Сфериоид с критическим сжатием $\epsilon = 0.632$ вращается с максимально возможной для всей последовательности Маклорена угловой скоростью $\Omega_{\max} = 0.6703$. Оказывается, что нельзя заставить сфериоид Маклорена вращаться быстрее. Кроме того, А. М. Ляпунов доказал, что при $\Omega > \Omega_{\max} = 0.6703$ не существуют эллипсоидальных (или близких к ним) фигур равновесия. К такому выводу А. М. Ляпунов пришел при решении задачи, которую ему предложил П. Л. Чебышев: выяснить, могут ли существовать новые фигуры равновесия, вращающиеся быстрее указанного предела Ω_{\max} [12, стр. 360].

4.2. Критерии устойчивости

Сфериоиды Маклорена остаются вековым образом устойчивыми вплоть до критической конфигурации со значением $e = 0.81267$, полученным как решение соответствующего уравнения. При $\tilde{\Omega}^2 = 0.37423$ сфериоид Маклорена становится неустойчивым в вековом отношении [12, стр. 362]. Установлено, что в точке $e = 0.81267$ от последовательности сфериоидов Маклорена ответвляется последовательность трехосных фигур равновесия, называемых эллипсоидами Якоби [12, стр. 364]. Сами же сфериоиды Маклорена в отсутствии диссипации остаются динамически устойчивыми вплоть до $e = 0.95289$ [12, стр. 364].

По выражению Дарвина: при наличии диссипативных сил природа “делает посадку”, т. е. от сфериоидов Маклорена в этой точке неизбежно происходит бифуркация эллипсоидов Якоби. Однако в книге [12, стр. 364] доказано, что никакой неизбежности делать в природе указанную посадку (по Дарвину) в точке $\tilde{\Omega}^2 = 0.37423$ нет, если в жидкой фигуре сохраняется циркуляция. Кроме того, при дополнительном, не учтенному классиками условию сохранения циркуляции установлено, что [12, стр. 367]:

а) ответвление эллипсоидов в точке $e = 0.81267$ невозможно;

б) точка динамической неустойчивости $e = 0.95289$ сфериоида Маклорена превращается в нейтральную точку по отношению к превращению сфериоида в трехосный эллипсоид. Однако в точке $e = 0.95289$ такое ответвление невозможно, поскольку в ней (и за ней) сфериоиды Маклорена становятся уже динамически неустойчивыми.

Заметим, что еще Пуанкаре и Ляпунову было известно, что эллипсоид Якоби для параметров

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &\leq 0.432232, \\ \frac{c}{a} &\leq 0.345069, \\ \tilde{\Omega}^2 = \frac{\Omega^2}{\pi G \rho} &\geq 0.284030 \end{aligned} \quad (33)$$

имеет нейтральную точку относительно грушевидной моды. Ляпунов доказал, что начиная с этой точки эллипсоиды являются вековым образом неустойчивыми [12, стр. 364].

Критерием устойчивости изолированной осесимметричной конфигурации согласно гипотезе Пиблса–Острайкера [9] и [10, стр. 189] является выполнение неравенства для отношения t (см. выше)

$$t < t_{\text{crit}} \approx 0.14 \pm 0.03. \quad (34)$$

При этом критерий (34) Пиблса–Острайкера об устойчивости не применим к трехосному эллипсоиду как динамической системе. Если потенциал тела имеет квадратичную форму, то для установления устойчивости такой системы применяются другие формулы [12, с. 419], содержащие тензор дисперсии скоростей. Квадратичную форму потенциала имеет только однородный трехосный эллипсоид. Потенциал неоднородного трехосного эллипсоида имеет более сложную форму и содержит эллиптические интегралы.

Далее, положим, что ЭГ представляет собой слоисто-неоднородный сжатый ($a = b > c$), или вытянутый сфероид ($a > b = c$), состоящий из БМ и ТМ. Для БМ берется “астрофизический” профиль (11), а для ТМ – один из аналогов профилей NFW и Хернквиста.

В качестве примера взяты 60 модельных ЭГ, имеющих формы либо сжатого, либо вытянутого сфероида с параметрами, точно совпадающими с реально существующими. Оказалось, что условие равновесия (32) выполняется: отношение $\Omega^2 \pi G \rho_0$ составляет от 0.007 до 0.01 для обоих типов сфероидов.

Отношение (34) – критерий устойчивости Пиблса–Острайкера выполняется в случае сжатых сфероидов: параметр t изменяется от 0.0061 до 0.1068. Для установления устойчивости (или неустойчивости) вытянутых сфероидов можно пользоваться другим критерием, а именно: какое значение принимает отношение $t_A = L_B/L_C$ удельных угловых моментов L_C сжатого и L_B вытянутого сфероидов. Значение $t_A < 1$ соответствует устойчивости, а $t_A > 1$ – наоборот.

Исходя из этих соображений ниже приведены формулы вычисления распределения углового момента и удельного углового момента в сфероиде Маклорена с полуосами $a = b \geq c$ и в вытянутом сфероиде с полуосами $a \geq b = c$.

Примечание 1. Отметим, что параметр t , фигурирующий в критерии устойчивости (34) Пиблса–Острайкера не зависит от распределения вещества (от профиля $\rho(m)$), а зависит, только от формы и размеров ЭГ. В то же самое время, удельные угловые моменты сжатого и вытянутого сфероидов (L_C и L_B), а значит, и их отношение t_A , зависят и от формы и размеров ЭГ, и от распределения в них вещества.

4.3. Распределение углового момента и удельный угловой момент в сфероиде Маклорена

В монографии [12] подробно описан метод получения формулы вычисления удельного углового момента $l(R)$ сначала для однородного сфероида Маклорена, а затем и для слоисто-неоднородного сфероида Маклорена с плотностью $\rho(m)$ методом синтеза элементарных оболочек [12, стр. 103]. Для применения этого метода к данному сфероиду в нем выделяется элементарная цилиндрическая оболочка с радиусом $R_0 = m_0 a$ и единичной толщиной. Затем, применив к этой оболочке математический метод, примененный в [12, стр. 598], находим удельный угловой момент $l(m_0)$ и параметр q для слоисто-неоднородного (состоящего из гомотетических слоев с постоянной сплюснутостью) сфероида Маклорена с плотностью $\rho(m)$ в виде

$$\begin{aligned} l(m_0) &= \frac{15m_0}{2a} L_T(1 - q_0^2) \Phi_1(m_0), \\ q_0^3 &= \frac{\Phi_2(m_0)}{\Phi_2(0)} \leq 1, \\ \Phi_2(0) &\equiv \Phi_2(m_0 = 0), \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1(m_0) &= \sqrt{1 - e^2} \int_{m_0}^1 \frac{m\rho(m) dm}{\sqrt{m^2 - m_0^2}} \geq 0, \\ \Phi_2(m_0) &= 3\sqrt{1 - e^2} \int_{m_0}^1 m\rho(m) \sqrt{m^2 - m_0^2} \times \\ &\quad \times dm \geq 0, \\ \Phi_2(0) &= 3\sqrt{1 - e^2} \int_0^1 m^2 \rho(m) dm > 0, \\ e^2 &= 1 - \frac{c^2}{a^2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Неотрицательность функций $\Phi_1(m_0)$ и $\Phi_2(m_0)$ очевидна, так как подынтегральные функции в формулах (36) положительны. Условие $0 < q_0 \leq 1$ вытекает из неравенства $0 < \Phi_2(m_0) < \Phi_2(0)$, которое в свою очередь следует из неравенства $m\rho(m)\sqrt{m^2 - m_0^2} \leq m^2\rho(m)$, выполняющегося для подынтегральных функций.

Далее, учтем, что полный угловой момент L_T слоисто-неоднородного сфероида Маклорена с профилем $\rho(m)$, его полный момент инерции I_T относительно оси вращения Oz , а также полная масса M_T равны

$$\begin{aligned} L_T &= \Omega I_T, \\ I_T &= \frac{2M_T}{5} a^2, \\ M_T &= 4\pi a^2 c \int_0^1 m^2 \rho(m) dm. \end{aligned}$$

Тогда выражение (35) можно переписать в виде

$$\alpha(m_0) \equiv \frac{l(m_0)}{\Omega M_T} = 3m_0a(1-q_0^2)\Phi_1(m_0) > 0, \quad (37)$$

$$(0 < q_0 < 1),$$

где неотрицательные функции $\Phi_1(m_0)$, $\Phi_2(m_0)$ и параметр q_0 определены выше.

4.4. Распределение углового момента и удельный угловой момент в вытянутом сфероиде

Теперь об однородном вытянутом сфероиде, ограниченном сфероидальной поверхностью

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{r^2}{c^2} &= 1, \\ r^2 &= y^2 + z^2, \\ r^2 &= c^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right). \end{aligned} \quad (38)$$

Пусть цилиндрическая поверхность с радиусом R выделяет в данном сфероиде объем $V(R)$ (рис. 1).

Точки $A(-H, R)$, $B(H, R)$, $C(-H, -R)$ и $D(H, -R)$ находятся на поверхности данного сфероида, т. е. их координаты должны удовлетворять уравнению этой поверхности:

$$\begin{aligned} \frac{H^2}{a^2} + \frac{R^2}{c^2} &= 1, \quad H = aq, \\ q &= \sqrt{1 - \frac{R^2}{c^2}}, \quad R^2 = c^2(1 - q^2). \end{aligned} \quad (39)$$

По аналогии со сжатым сфероидом найдем объем заштрихованной части $V(R)$ вытянутого сфероида с полуосами $LO = OP = a$ и $SO = ON = c$ (см. рис. 1). Этот объем равен сумме объемов цилиндра и двух сегментов:

$$V(R) = V_{\text{cyl}} + 2V_{\text{seg}}, \quad V_{\text{cyl}} = 2\pi R^2 H.$$

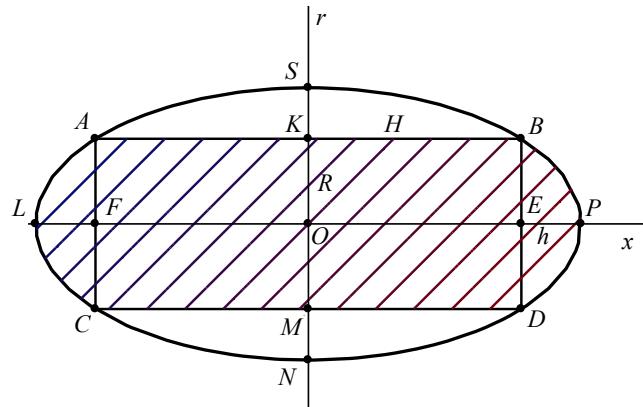


Рис. 1. Сечение вытянутого сфероида с полуосами $LO = OP = a$ и $SO = ON = c$. Заштрихована площадь, состоящая из сечений цилиндра $ABCD$ с радиусом $R = BK = KD$, высотой $2H = FE$ и двух равных сфероидальных сегментов (точнее сегментов параболоида вращения) высотой $h = LF = EP$.

Здесь V_{cyl} — объем цилиндра с радиусом основания $R = KO = OM$ и высотой $2H = FE$, а $2V_{\text{seg}}$ — объем двух равных сегментов ALC и BPD с высотой $h = LF = EP$ (см. рис. 1), образованных частями сфероида (39) и плоскостями $x = H$ и $x = a$, а также $x = -a$ и $x = -H$. Эти сегменты также можно считать параболоидами вращения.

Вычислим объем V_{seg} сегмента ALC (или BPD) в силу равенств (38) и (39):

$$V_{\text{seg}} = \pi \int_H^a r^2 dx = \pi \int_H^a c^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{\pi ac^2}{3} (2 - 3q + q^3).$$

Следовательно, для искомого объема $V(R)$ находим

$$V(R) = V_{\text{cyl}} + 2V_{\text{seg}} = 2\pi HR^2 + \frac{4\pi ac^2}{3} \left(1 - \frac{3}{2}q + \frac{1}{2}q^3\right).$$

С учетом выражений H и R для $V(R)$ окончательно находим

$$\begin{aligned} V(R) &= \frac{4\pi ac^2}{3} (1 - q^3) = V_T(1 - q^3), \\ V_T &= \frac{4}{3} \pi ac^2, \end{aligned}$$

где V_T — полный объем вытянутого сфероида.

Таким образом, масса заштрихованной части $M(R)$ определится равенством

$$\begin{aligned} M(R) &= \rho V(R) = \rho V_T(1 - q^3) = M_T(1 - q^3), \\ q^3 &= 1 - \frac{M(R)}{M_T}, \end{aligned}$$

а масса M_{seg} сегмента $ALCD$ (или BPD) будет равна

$$\begin{aligned} M_{\text{seg}} &= \rho V_{\text{seg}} = \frac{\pi \rho}{3} ac^2 (2 - 3q + q^3) = \\ &= \frac{\pi \rho}{3} ac^2 (1 - q)^2 (2 + q). \end{aligned}$$

Теперь вычислим J_z — момент инерции заштрихованной части тела относительно оси Oz . По аналогии с случаем сфероида Маклорена он равен

$$J_z = J_{\text{cyl}} + 2J_{\text{seg}},$$

где J_{cyl} — момент инерции цилиндра с плотностью ρ , радиусом R и высотой $2H$ относительно поперечной оси Oz , перпендикулярной к продольной оси Ox и проходящей через его центр масс, а J_{seg} — момент инерции одного из сфероидальных сегментов ALC (или BPD) относительно той же оси.

Согласно [5] момент инерции J_{cyl} рассматриваемого цилиндра относительно поперечной оси, проходящей через его центр тяжести, равен

$$\begin{aligned} J_{\text{cyl}} &= \frac{M_{\text{cyl}}}{12} (4H^2 + 3R^2) = \\ &= \frac{\pi \rho R^2 H}{6} (4H^2 + 3R^2), \\ (M_{\text{cyl}} &= \rho V_{\text{cyl}} = 2\rho \pi R^2 H). \end{aligned} \quad (40)$$

Остается вычислить момент инерции $J_{Oz} \equiv J_{\text{seg}}$ сегмента Ba_1D (точнее параболоида вращения) с плот-

нностью ρ и радиусом основания круга с радиусом R относительно оси вращения Oz следующим образом. Вырежем мысленно в сегменте Ba_1D тонкий цилиндр с массой dm , находящийся от оси вращения Oz на расстоянии x . Согласно теореме Гюйгенса–Штейнера момент инерции dJ_{seg} такого цилиндра будет равен

$$dJ_{\text{seg}} = x^2 dm + \frac{r^2}{4} dm,$$

$$dm = \rho dV, \quad dV = \pi r^2 dx,$$

где второе слагаемое в выражении dJ_{seg} представляет собой момент инерции тонкого цилиндра (диска) относительно оси, проходящей через его диаметр. Для момента инерции всего сегмента получим

$$J_{\text{seg}} = \int_H^a x^2 dm + \frac{1}{4} \int_H^a r^2 dm =$$

$$= \pi \rho \int_H^a x^2 r^2 dx + \frac{\pi \rho}{4} \int_H^a r^4 dx.$$

Подставив в интегралы выражение r^2 после интегрирования, находим

$$J_{\text{seg}} = \frac{2\pi\rho ac^2}{15} \left[a^2 + c^2 - \frac{1}{2} q^3 (5 - 3q^2) a^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{q}{8} (15 - 10q^2 + 3q^4) c^2 \right].$$

Так как

$$J_{\text{cyl}} = \frac{\pi \rho R^2 H}{6} (4H^2 + 3R^2) =$$

$$= \frac{\pi \rho ac^2 q (1 - q^2)}{6} [4a^2 q^2 + 3(1 - q^2) c^2],$$

то искомый момент инерции J_z заштрихованной части тела относительно оси вращения Oz вытянутого сферида будет равен

$$J_z = \frac{4\pi\rho ac^2 (a^2 + c^2)}{15} \times$$

$$\times \left[1 - \frac{5}{2} \frac{c^2}{a^2 + c^2} q^3 + \left(\frac{3}{2} A - \frac{a^2}{a^2 + c^2} \right) q^5 \right],$$

или

$$J_z = J_T \left[1 - \frac{5}{2} A q^3 + \frac{1}{2} (5A - 2) q^5 \right],$$

$$J_T = \frac{M_T}{5} (a^2 + c^2), \quad (41)$$

$$A = \frac{c^2}{a^2 + c^2},$$

где

$$rlM_T = \frac{4\pi\rho ac^2}{3}, \quad (42)$$

$$q^3 = 1 - \frac{M(R)}{M_T} = c^3 \sqrt{(1 - R^2)^3}.$$

Здесь J_T — полный момент инерции вытянутого сферида относительно оси Oz , а M_T — его полная масса.

Таким образом, распределение углового момента $L(R) = \Omega J_z(R)$ в вытянутом сфериде примет вид

$$L(R) = L_T \left[1 - \frac{5}{2} A q^3 + \frac{1}{2} (5A - 2) q^5 \right],$$

$$L_T = \Omega J_T = \frac{\Omega M_T}{5} (a^2 + c^2), \quad (43)$$

$$\Omega^2 = \frac{GM_T}{a^3},$$

где L_T — полный угловой момент вытянутого сферида.

Заметим, что при $A = 1$ выражение $L(R)$ совпадает с его выражением для сжатого сферида.

Для применения метода синтеза элементарных оболочек к вытянутому однородному сфероиду с угловым моментом $L(R)$, определяемым приведенным выше равенством, выделим мысленно в нем элементарную цилиндрическую оболочку с радиусом $R_1 = m_1 c$ и единичной толщиной. Применив математический аппарат, приведенный в работе [5], найдем удельный угловой момент $l(m_1)$ и параметр q_1 для слоисто-неоднородного вытянутого сферида (с постоянной сплюснутостью) с профилем $\rho(m)$ в виде

$$l(m_1) = \frac{5m_1}{2c} L_T [3A - (5A - 2) q_1^2] \times$$

$$\times \Phi_1(m_1) > 0, \quad (44)$$

$$q_1^3 = \frac{\Phi_2(m_1)}{\Phi_2(0)} < 1,$$

или с учетом выражений L_T из (43), коэффициента A из (41) и тождества

$$(a^2 + c^2) [3A - (5A - 2) q_1^2] = 3c^2 - (3c^2 - 2a^2) q_1^2$$

имеем

$$\beta(m_1) \equiv \frac{l(m_1)}{\Omega M_T} = \frac{m_1}{2c} [3c^2 - (3c^2 - 2a^2) q_1^2] \Phi_1(m_1),$$

или

$$\beta(m_1) = \frac{m_1 a}{2\sqrt{1 - e^2}} [3 - 3e^2 - (1 - 3e^2) q_1^2] \times$$

$$\times \Phi_1(m_1) > 0, \quad (45)$$

$$(0 < q_1 < 1).$$

Функции $\Phi_1(m_1)$ и $\Phi_2(m_1)$, фигурирующие в (44) и 45, определяются формулой 36.

Очевидно, что отношение функций $\alpha(m_0)$ и $\beta(m_1)$, определяемых равенствами (37) и (45), имеет вид

$$\frac{\alpha(m_0)}{\beta(m_1)} = \frac{6\sqrt{1 - e^2}(1 - q_0^2)}{3 - 3e^2 - (1 - 3e^2) q_1^2} \frac{m_0}{m_1} \frac{\Phi_1(m_0)}{\Phi_1(m_1)} > 0,$$

$$(0 < q_0 < 1, 0 < q_1 < 1).$$

Кроме того, при $m_0 = m_1$ имеем $q_1 = q_0$. Поэтому это соотношение зависит не только от параметра q_0 ,

но и от эксцентриситета e , т. е. от формы и размеров сфераоида:

$$\frac{\alpha(m_0)}{\beta(m_0)} = \frac{6\sqrt{1-e^2}(1-q_0^2)}{3-3e^2-(1-3e^2)q_0^2} > 0, \quad (46)$$

$$(0 < q_0 < 1).$$

Для определения устойчивости (или неустойчивости) рассмотрим далее, слоисто-неоднородные сфераоид Маклорена и вытянутый сфераоид, состоящие из барионной массы (БМ) и темной материи (ТМ) с известными профилями плотностей.

4.5. Слоисто-неоднородные сфераоиды с “астрофизическим” профилем

Рассмотрим сначала слоисто-неоднородные сфераоид Маклорена и вытянутый сфераоид, состоящие только из БМ с “астрофизическим” профилем 11. В этом случае в формуле (36) профиль $\rho(m)$ заменяется на $\rho_1(m)$ из (11) и вычисляются функции $\Phi_1(m_0)$, $\Phi_2(m_0)$ и $\Phi_2(0)$. Затем по формулам (35) и 37 определяются параметр q_0 и нормированный удельный угловой момент $\alpha(m_0)$ для слоисто-неоднородного сфераоида Маклорена с профилем $\rho(m)$, а по формулам (44) и (45) – параметр q_1 и $\beta(m_1)$ для слоисто-неоднородного вытянутого сфераоида с тем же профилем.

Итак, по формуле (36) в случае “астрофизического” профиля для функций $\Phi_1(m_0)$, $\Phi_2(m_0)$ и $\Phi_2(0)$ находим

$$\Phi_1(m_0) = C_1 F_1(m_0) > 0,$$

$$C_1 = \frac{\rho_0 \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1+\beta}},$$

$$F_1(m_0) = \frac{\sqrt{1-m_0^2}}{1+\beta m_0^2} > 0,$$

$$\Phi_2(m_0) = C_2 F_2(m_0) > 0,$$

$$\Phi_2(0) = C_2 F_2(0) > 0,$$

$$C_2 = 3C_1,$$

где

$$F_2(m_0) = \frac{1}{2\beta\sqrt{\beta}} \left[\sqrt{1+\beta} \ln \eta_1(m_0) - \right.$$

$$\left. -\sqrt{1+\beta} \ln(1+\beta m_0^2) - 2\sqrt{\beta} \sqrt{1-m_0^2} \right] > 0,$$

$$F_2(0) = \frac{1}{2\beta\sqrt{\beta}} \left[\sqrt{1+\beta} \ln \left(\sqrt{\beta} + \sqrt{1+\beta} \right)^2 - \right.$$

$$\left. -2\sqrt{\beta} \right] > 0,$$

а

$$\eta_1(m_0) = 1 + 2\beta - \beta m_0^2 + 2\sqrt{\beta} \sqrt{1+\beta} \sqrt{1-m_0^2}.$$

Теперь обозначим через $\alpha_1(m_0)$ и $\beta_1(m_1)$ нормированные удельные угловые моменты слоисто-неоднородного сфераоида Маклорена и вытянутого

сфераоида с “астрофизическими” профилем. Тогда в силу (37) и (45) для этих функций, а по формулам (35) и (44) для параметра q_1^3 получим

$$\alpha_1(m_0) = A_1(q_0) m_0 F_1(m_0) > 0, \quad (47)$$

$$q_1^3 = \frac{F_2(m_0)}{F_2(0)} < 1,$$

$$\beta_1(m_1) = B_1(q_1) m_1 F_1(m_1) > 0, \quad (48)$$

$$q_1^3 = \frac{F_2(m_1)}{F_2(0)} < 1,$$

где функции $F_1(m_0)$, $F_2(m_0)$ и $F_2(0)$ определены выше, а

$$A_1(q_0) = \frac{3a \rho_0 \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1+\beta}} (1-q_0^2) > 0,$$

$$B_1(q_1) = \frac{\rho_0 a}{2\sqrt{1+\beta}} [3-3e^2-(1-3e^2)q_1^2] > 0.$$

Легко проверить, что контрольные условия $\Phi_1(1) \equiv F_1(1) = 0$ и $\Phi_2(1) \equiv F_2(1) = 0$ удовлетворяются. Кроме того, при $m_0 = m_1$ имеем $q_1 = q_0$, а отношение $\alpha_1(m_0)/\beta_1(m_1)$ имеет точно такой же вид, что и (46).

4.6. Слоисто-неоднородные сфераоиды с аналогом профиля NFW

Теперь положим, что слоисто-неоднородные сфераоид Маклорена и вытянутый сфераоид состоят из БМ с аналогом профиля NFW. В этом случае в формуле (36) следует заменить профиль $\rho(m)$ на аналог профиля NFW $\rho_2(m)$, определяемый равенством (17). После вычисления соответствующих интегралов в (36) находим функции $\Phi_1(m_0)$, $\Phi_2(m_0)$ и $\Phi_2(0)$:

$$\Phi_1(m_0) = D_1 N_1(m_0, \mu) > 0,$$

$$D_1 = K \sqrt{1-e^2},$$

$$N_1(m_0, \mu) = \frac{1}{2\mu u_0^3} \left[h_2(m_0) - \frac{2\mu u_0 v_0}{1+\mu} \right] > 0, \quad (49)$$

$$\Phi_2(m_0) = D_2 N_2(m_0, \mu) > 0,$$

$$\Phi_2(0) = D_2 N_2(0, \mu) > 0,$$

$$D_2 = 3D_1,$$

где

$$N_2(m_0, \mu) = \frac{1}{\mu^3} \left[-\frac{h_2(m_0)}{2u_0} - \frac{\mu v_0}{1+\mu} + \ln \frac{1+v_0}{m_0} \right] > 0,$$

$$N_2(0, \mu) = \frac{1}{\mu^3} \left(\ln(1+\mu) - \frac{\mu}{1+\mu} \right) > 0,$$

$$h_2(m_0) = \ln \frac{1+\mu m_0^2 + u_0 v_0}{1+\mu m_0^2 - u_0 v_0},$$

$$u_0 = \sqrt{1-\mu^2 m_0^2}, \quad v_0 = \sqrt{1-m_0^2}.$$

После чего по формулам (37) и (45) определяем нормированные удельные угловые моменты $\alpha_2(m_0)$

для слоисто-неоднородного сфероида Маклорена и $\beta_2(m_1)$ для вытянутого сфероида с аналогом профиля NFW, а по формулам (35) и 44 параметр q^3 :

$$\begin{aligned}\alpha_2(m_0) &= A_2(q_0) m_0 N_1(m_0, \mu_0) > 0, \\ q_0^3 &= \frac{N_2(m_0, \mu_0)}{N_2(0, \mu_0)} < 1, \\ \mu_0 &= \frac{\sqrt[3]{a^2 c}}{r_s},\end{aligned}\quad (50)$$

$$\begin{aligned}\beta_2(m_1) &= B_2(q_1) m_1 N_1(m_1, \mu_1) > 0, \\ q_1^3 &= \frac{N_2(m_1, \mu_1)}{N_2(0, \mu_1)} < 1, \\ \mu_1 &= \frac{\sqrt[3]{a c^2}}{r_s},\end{aligned}\quad (51)$$

где функции $N_1(m, \mu)$, $N_2(m, \mu)$ определены выше, а

$$\begin{aligned}A_2(q_0) &= 3K a \sqrt{1 - e^2} (1 - q_0^2) > 0, \\ B_2(q_1) &= \frac{K a}{2} [3 - 3e^2 - (1 - 3e^2) q_1^2] > 0.\end{aligned}$$

Контрольные условия $\Phi_1(1) \equiv N_1(1) = 0$ и $\Phi_2(1) \equiv N_2(1) = 0$ удовлетворяются. Кроме того, при $m_0 = m_1$ отношение $\alpha_2(m_0)/\beta_2(m_0)$ по аналогии с (46) при $m_0 = m_1$ имеет вид:

$$\frac{\alpha_2(m_0)}{\beta_2(m_0)} = \frac{6\sqrt{1-e^2}(1-q_0^2)}{3-3e^2-(1-3e^2)q_1^2} \frac{N_1(m_0, \mu_0)}{N_1(m_0, \mu_1)} > 0, \quad (52)$$

$$(0 < q_0 < 1, 0 < q_1 < 1).$$

Отличие отношения (52) от (46) связано с параметрами μ_0 и μ_1 , которые для сфероида Маклорена и вытянутого сфероида определяются по разному.

4.7. Слоисто-неоднородные сфероиды с аналогом профиля Хернквиста

Пусть теперь слоисто-неоднородные сфероид Маклорена и вытянутый сфероид состоят из БМ с аналогом профиля Хернквиста. В этом случае в формулах (36) и (37) следует положить $\rho(m) = \rho_2(m)$, где аналог профиля Хернквиста $\rho_2(m)$ определяется равенством (23). После вычисления интегралов в (36) находим функции $\Phi_1(m_0)$, $\Phi_2(m_0)$ и $\Phi_2(0)$:

$$\begin{aligned}\Phi_1(m_0) &= E_1 H_1(m_0, \bar{\mu}_0) > 0, \\ \Phi_2(m_0) &= E_2 H_2(m_0, \bar{\mu}_0) > 0, \\ \Phi_2(0) &= E_2 H_2(0, \bar{\mu}_0) > 0,\end{aligned}\quad (53)$$

где

$$\begin{aligned}H_1(m_0, \bar{\mu}_0) &= \frac{1}{4\bar{\mu}_0 \bar{u}_0^5} \text{Big}[(2 + \bar{\mu}_0^2 m_0^2) \bar{h}_2(m_0) - \\ &\quad - \frac{2\bar{\mu}_0 \bar{u}_0 \bar{v}_0}{(1 + \bar{\mu}_0)^2} (4 + 3\bar{\mu}_0 - \bar{\mu}_0^2 m_0^2)] > 0, \\ H_2(m_0, \bar{\mu}_0) &= \frac{1}{2\bar{\mu}_0 (1 + \bar{\mu}_0)^2 \bar{u}_0^3} \left[(1 + \bar{\mu}_0 m_0^2) \bar{u}_0 \bar{v}_0 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{m_0^2 (1 + \bar{\mu}_0)^2}{2} \bar{h}_2(m_0) \right] > 0, \\ H_2(0, \bar{\mu}_0) &= \frac{1}{2\bar{\mu}_0 (1 + \bar{\mu}_0)^2} > 0, \\ \bar{h}_2(m_0) &= \ln \frac{1 + \bar{\mu}_0 m_0^2 + \bar{u}_0 \bar{v}_0}{1 + \bar{\mu}_0 m_0^2 - \bar{u}_0 \bar{v}_0}, \\ E_1 &= \frac{M \sqrt{1 - e^2}}{2\pi \bar{a}^3}, E_2 = 3E_1, \\ \bar{u}_0 &= \sqrt{1 - \bar{\mu}_0^2 m_0^2}, \quad \bar{v}_0 = \sqrt{1 - m_0^2}.\end{aligned}$$

Аналогичным образом определяем нормированные удельные угловые моменты $\alpha_3(m_0)$ для слоисто-неоднородного сфероида Маклорена и $\beta_3(m_1)$ для вытянутого сфероида с аналогом профиля Хернквиста, а также параметр \bar{q}^3 :

$$\begin{aligned}\alpha_3(m_0) &= A_3(\bar{q}_0) m_0 H_1(m_0, \bar{\mu}_0) > 0, \\ \bar{q}_0^3 &= \frac{H_2(m_0, \bar{\mu}_0)}{H_2(0, \bar{\mu}_0)} < 1, \\ \bar{\mu}_0 &= \frac{\sqrt[3]{a^2 c}}{\bar{a}}, \\ \beta_3(m_1) &= B_3(\bar{q}_1) m_1 H_1(m_1, \bar{\mu}_1) > 0, \\ \bar{q}_1^3 &= \frac{H_2(m_1, \bar{\mu}_1)}{H_2(0, \bar{\mu}_1)} < 1, \\ \bar{\mu}_1 &= \frac{\sqrt[3]{a c^2}}{\bar{a}},\end{aligned}\quad (54)$$

где

$$\begin{aligned}A_3(\bar{q}_0) &= \frac{3Ma \sqrt{1 - e^2}}{2\pi \bar{a}^3} (1 - \bar{q}_0^2) > 0, \\ B_3(\bar{q}_1) &= \frac{Ma}{4\pi \bar{a}^3} [3 - 3e^2 - (1 - 3e^2) \bar{q}_1^2] > 0.\end{aligned}$$

При этом отношение $\alpha_3(m_0)/\beta_3(m_0)$ по аналогии с (46) при $m_0 = m_1$ имеет вид:

$$\frac{\alpha_3(m_0)}{\beta_3(m_0)} = \frac{6\sqrt{1-e^2}(1-\bar{q}_0^2)}{3-3e^2-(1-3e^2)\bar{q}_1^2} \frac{H_1(m_0, \bar{\mu}_0)}{H_1(m_0, \bar{\mu}_1)} > 0, \quad (55)$$

$$(0 < \bar{q}_0 < 1, 0 < \bar{q}_1 < 1).$$

Отличие отношения (55) от (46) также объясняется с различием параметров $\bar{\mu}_0$ и $\bar{\mu}_1$.

4.8. Слоисто-неоднородные сфериоиды, состоящие из барионной массой и темной материи

Заметим, что приведенные выше выражения $\alpha_k(m_0)$ и $\beta_k(m_0)$ соответствуют случаю, когда слоисто-неоднородный сфериоид (сжатый и вытянутый) состоит, например, только из барионной массы (БМ) с профилем $\rho(m)$. Если данные сфериоиды состоят из БМ и ТМ с профилями $\rho_1(m)$ и $\rho_2(m)$ соответственно, то в формуле (50) для функций $\Phi_1(m_0)$ и $\Phi_2(m_0)$ профиль $\rho(m)$ следует заменить на сумму $\rho_1(m) + \rho_2(m)$. При этом в качестве профиля $\rho_1(m)$ для БМ возьмем “астрофизический профиль”, а вместо профиля $\rho_2(m)$ для ТМ один из аналогов профилей NFW и Хернквиста (см. раздел 3). В этом случае нормированные удельные угловые моменты слоисто-неоднородных сфероида Маклорена и вытянутого сфероида будут определяться иначе. По этой причине обозначим через $\tilde{\alpha}_k(m_0)$, $\tilde{\beta}_k(m_0)$ и $\tilde{q}^3(m_0)$ соответствующие нормированные удельные угловые моменты и параметр. Ниже приведены соответствующие формулы для вычисления этих величин:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_k(m_0) &= 3m_0a(1 - \tilde{q}_0^2)S_1(m_0) > 0, \\ \tilde{q}_0^3 &= \frac{S_2(m_0)}{S_2(0)} < 1,\end{aligned}\quad (56)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_k(m_1) &= \frac{m_1}{2c} [3c^2 - (3c^2 - 2a^2)\tilde{q}_1^2] S_1(m_1) > 0, \\ \tilde{q}_1^3 &= \frac{S_2(m_1)}{S_2(0)} < 1,\end{aligned}\quad (57)$$

где

$$\begin{aligned}S_1(m_0) &= \sqrt{1 - e^2} \int_{m_0}^1 \frac{m[\rho_1(m) + \rho_2(m)]}{\sqrt{m^2 - m_0^2}} dm \geq 0, \\ S_2(m_0) &= 3\sqrt{1 - e^2} \int_{m_0}^1 m[\rho_1(m) + \rho_2(m)] \times \\ &\quad \times \sqrt{m^2 - m_0^2} dm \geq 0, \\ S_2(0) &\equiv S_2(m_0 = 0) \geq 0.\end{aligned}\quad (58)$$

Здесь для краткости приведены формулы для функций $S_1(m_0)$ и $S_2(m_0)$ с аргументом m_0 . Эти же функции для аргумента m_1 легко получаются из них заменой m_0 на m_1 .

Сначала для БМ возьмем “астрофизический профиль”, а для ТМ – аналог профиля NFW. В этом случае функции $\tilde{\alpha}_1(m_0)$ и $\tilde{\beta}_1(m_0)$ в силу формул (56) и (57) можно представить в виде:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_1(m_0) &= m_0[A_1(q_0)F_1(m_0) + \\ &\quad + A_2(q_0)N_1(m_0, \mu_0)] \geq 0, \\ \tilde{\beta}_1(m_1) &= m_1[B_1(q_1)F_1(m_1) + \\ &\quad + B_2(q_1)N_1(m_1, \mu_1)] \geq 0.\end{aligned}\quad (59)$$

Аналогично в случае аналога профиля Хернквиста:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_2(m_0) &= m_0[A_1(q_0)F_1(m_0) + \\ &\quad + A_3(q_0)H_1(m_0, \bar{\mu}_0)] \geq 0, \\ \tilde{\beta}_2(m_1) &= m_1[B_1(q_1)F_1(m_1) + \\ &\quad + B_3(q_1)H_1(m_1, \bar{\mu}_1)] \geq 0.\end{aligned}\quad (60)$$

Фигурирующие в равенствах (59) и (60) коэффициенты $A_k(q)$, $B_k(q)$ и функции $F_k(m)$, $N_k(m)$ и $H_k(m)$ ($k = 1, 2$) приведены выше.

Теперь определим параметры \tilde{q}_0^3 и \tilde{q}_1^3 по формулам (56) и (57). Для этого достаточно вычислить функции $S_2(m_0)$ и $S_2(0)$. В случае “астрофизического профиля” для БМ и аналога профиля NFW для ТМ получим:

$$\begin{aligned}\tilde{q}_0^3 &= \frac{C_2F_2(m_0) + D_2N_2(m_0, \mu_0)}{C_2F_2(0) + D_2N_2(0, \mu_0)} < 1, \\ \tilde{q}_1^3 &= \frac{C_2F_2(m_1) + D_2N_2(m_1, \mu_1)}{C_2F_2(0) + D_2N_2(0, \mu_1)} < 1.\end{aligned}$$

В случае “астрофизического профиля” для БМ и аналога профиля Хернквиста для ТМ получаем:

$$\begin{aligned}\tilde{q}_0^3 &= \frac{C_2F_2(m_0) + E_2H_2(m_0, \bar{\mu}_0)}{C_2F_2(0) + E_2H_2(0, \bar{\mu}_0)} < 1, \\ \tilde{q}_1^3 &= \frac{C_2F_2(m_1) + E_2H_2(m_1, \bar{\mu}_1)}{C_2F_2(0) + E_2H_2(0, \bar{\mu}_1)} < 1,\end{aligned}$$

где коэффициенты C_k , D_k и E_k , а также функции $F_k(m_0)$, $N_k(m_n, \mu_k)$ и $H_k(m_n, \bar{\mu}_k)$ ($n = 0, 1$, $k = 1, 2$) приведены выше.

Отношения функций $\tilde{\alpha}_k(m_0)/\tilde{\beta}_k(m_0)$ при $m_1 = m_0$ примут вид:

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{\alpha}_1(m_0)}{\tilde{\beta}_1(m_0)} &= \frac{A_1(\tilde{q}_0)F_1(m_0) + A_2(\tilde{q}_0)N_1(m_0, \mu_0)}{B_1(\tilde{q}_1)F_1(m_0) + B_2(\tilde{q}_1)N_1(m_0, \mu_1)} = \\ &= \frac{6\sqrt{1 - e^2}(1 - \tilde{q}_0^2)}{3 - 3e^2 - (1 - 3e^2)\tilde{q}_1^2} \times \\ &\quad \times \frac{\rho_0F_1(m_0) + K\sqrt{1 + \beta}N_1(m_0, \mu_0)}{\rho_0F_1(m_0) + K\sqrt{1 + \beta}N_1(m_0, \mu_1)} > 0,\end{aligned}\quad (61)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{q}_0^3 &= \frac{\rho_0F_2(m_0) + K\sqrt{1 + \beta}N_2(m_0, \mu_0)}{\rho_0F_2(0) + K\sqrt{1 + \beta}N_2(0, \mu_0)} < 1, \\ \tilde{q}_1^3 &= \frac{\rho_0F_2(m_1) + K\sqrt{1 + \beta}N_2(m_1, \mu_1)}{\rho_0F_2(0) + K\sqrt{1 + \beta}N_2(0, \mu_1)} < 1,\end{aligned}\quad (62)$$

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{\alpha}_2(m_0)}{\tilde{\beta}_2(m_0)} &= \frac{A_1(\tilde{q}_0)F_1(m_0) + A_3(\tilde{q}_0)H_1(m_0, \bar{\mu}_0)}{B_1(\tilde{q}_1)F_1(m_0) + B_3(\tilde{q}_1)H_1(m_0, \bar{\mu}_1)} = \\ &= \frac{6\sqrt{1 - e^2}(1 - \tilde{q}_0^2)}{3 - 3e^2 - (1 - 3e^2)\tilde{q}_1^2} \times \\ &\quad \times \frac{2\pi\bar{a}^3\rho_0F_1(m_0) + M\sqrt{1 + \beta}H_1(m_0, \bar{\mu}_0)}{2\pi\bar{a}^3\rho_0F_1(m_0) + M\sqrt{1 + \beta}H_1(m_0, \bar{\mu}_1)} > 0,\end{aligned}\quad (63)$$

а

$$\begin{aligned}\tilde{q}_0^3 &= \frac{2\pi\bar{a}^3\rho_0F_2(m_0) + M\sqrt{1+\beta}H_2(m_0, \bar{\mu}_0)}{2\pi\bar{a}^3\rho_0F_2(0) + M\sqrt{1+\beta}H_2(0, \bar{\mu}_0)} < 1, \\ \tilde{q}_1^3 &= \frac{2\pi\bar{a}^3\rho_0F_2(m_0) + M\sqrt{1+\beta}H_2(m_0, \bar{\mu}_1)}{2\pi\bar{a}^3\rho_0F_2(0) + M\sqrt{1+\beta}H_2(0, \bar{\mu}_1)} < 1.\end{aligned}\quad (64)$$

При этом если $\mu_0 = \mu_1 \equiv \mu$ и $\bar{\mu}_0 = \bar{\mu}_1 \equiv \bar{\mu}$, то $\tilde{q}_0 = \tilde{q}_1 \equiv \tilde{q}$ и эти соотношения упростятся:

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{\alpha}_1(m_0)}{\tilde{\beta}_1(m_0)} &= \frac{6\sqrt{1-e^2}(1-\tilde{q}^2)}{3-3e^2-(1-3e^2)\tilde{q}^2}, \\ \tilde{q}^3 &= \frac{\rho_0F_2(m_0) + K\sqrt{1+\beta}N_2(m_0, \mu)}{\rho_0F_2(0) + K\sqrt{1+\beta}N_2(0, \mu)} < 1, \\ \frac{\tilde{\alpha}_2(m_0)}{\tilde{\beta}_2(m_0)} &= \frac{6\sqrt{1-e^2}(1-\tilde{q}^2)}{3-3e^2-(1-3e^2)\tilde{q}^2}, \\ \tilde{q}^3 &= \frac{2\pi\bar{a}^3\rho_0F_2(m_0) + M\sqrt{1+\beta}H_2(m_0, \bar{\mu})}{2\pi\bar{a}^3\rho_0F_2(0) + M\sqrt{1+\beta}H_2(0, \bar{\mu})} < 1.\end{aligned}$$

Итак, мы рассмотрели два варианта слоисто-неоднородных сжатых и вытянутых сфероидов. Первый вариант соответствует случаю, когда эти сфероиды состоят только из БМ, а во втором варианте они состоят из БМ и ТМ. В первом варианте мы определили нормированные удельные угловые моменты $\alpha_k(m_0)$ и $\beta_k(m_0)$ слоисто-неоднородных сжатых и вытянутых сфероидов (табл. 1).

Во втором варианте эти величины обозначены как $\tilde{\alpha}_k(m_0)$ и $\tilde{\beta}_k(m_0)$ (табл. 2).

Величины $\alpha_k(m_0)$, $\beta_k(m_0)$, $\tilde{\alpha}_k(m_0)$ и $\tilde{\beta}_k(m_0)$ имеют размерность поверхности плотности (в массах Солнца на квадратный парсек). При этом удельный угловой момент $l(m_0)$ выражается в $M_\odot^2/\text{пк}^2/\text{Муг}$, где M_\odot — масса Солнца, а Муг — млн лет.

Таблица 1. Явные выражения нормированных удельных угловых моментов $\alpha(m_0)$ и $\beta(m_1)$ слоисто-неоднородных сжатых и вытянутых сфероидов в зависимости от профиля $\rho(m)$ в соответствии с первым вариантом

$\rho(m)$	$\alpha(m_0)$	$\beta(m_1)$
$\frac{\rho_0}{(1+\beta m^2)^{3/2}}$	$A_1(q_0)m_0F_1(m_0)$ $q_0^3 = \frac{F_2(m_0)}{F_2(0)}$	$B_1(q_1)m_1F_1(m_1)$ $q_1^3 = \frac{F_2(m_1)}{F_2(0)}$
$\frac{K}{\mu m(1+\mu m)^2}$	$A_2(q_0)m_0N_1(m_0, \mu_0)$ $q_0^3 = \frac{N_2(m_0, \mu_0)}{N_2(0, \mu_0)}, \mu_0 = \frac{\sqrt[3]{a^2c}}{r_2}$	$B_2(q_1)m_1N_1(m_1, \mu_1)$ $q_1^3 = \frac{N_2(m_1, \mu_1)}{N_2(0, \mu_1)}, \mu_1 = \frac{\sqrt[3]{ac^2}}{r_s}$
$\frac{M}{2\pi\bar{a}} \frac{1}{\bar{\mu}m(1+\bar{\mu}m)^3}$	$A_3(\bar{q}_0)m_0H_1(m_0, \bar{\mu}_0)$ $\bar{q}_0^3 = \frac{H_2(m_0, \bar{\mu}_0)}{H_2(0, \bar{\mu}_0)}, \bar{\mu}_0 = \frac{\sqrt[3]{a^2c}}{\bar{a}}$	$B_3(\bar{q}_1)m_1H_1(m_1, \bar{\mu}_1)$ $\bar{q}_1^3 = \frac{H_2(m_1, \bar{\mu}_1)}{H_2(0, \bar{\mu}_1)}, \bar{\mu}_1 = \frac{\sqrt[3]{ac^2}}{\bar{a}}$

Примечание. Функции $An()$, $Bn()$, $(n = 1, 2, 3)$, $F_k()$, $N_k()$, $H_k()$ ($k = 1, 2$) определяются соответствующими равенствами и приведены в тексте.

4.9. Критические значения параметров m_0 и m_1

Очевидно, что при $m_0 = m_1$ могут выполняться неравенства

$$\frac{\alpha_k(m_0)}{\beta_k(m_0)} > 1, \quad \frac{\tilde{\alpha}_n(m_0)}{\tilde{\beta}_n(m_0)} > 1, \quad (65)$$

$$0 \leq m_0 \leq 1, \quad k = 1, 2, 3, n = 1, 2.$$

В этом случае будем считать, что имеет место устойчивость слоисто-неоднородного вытянутого сфероида при соответствующих профилях (при одинаковой массе). Если же не выполняются неравенства (65), т. е. нормированные значения удельного углового момента вытянутого сфероида $\beta_k(m_0)$ и $\tilde{\beta}_n(m_0)$ превышают аналогичные значения сфероида Маклорена $\alpha_k(m_0)$ и $\tilde{\alpha}_n(m_0)$ соответственно, то имеет место неустойчивость вытянутого сфероида.

Пусть при некотором значении m_0 имеют место равенства $\alpha_k(m_0) = \beta_k(m_0)$ и $\tilde{\alpha}_n(m_0) = \tilde{\beta}_n(m_0)$. Такое значение параметра m_0 назовем критическим (или переходным) и обозначим его через \tilde{m}_0 . Например, в случае “астрофизического профиля” в силу (47) и (48) получим:

$$\begin{aligned}\alpha_1(m_0) &= \beta_1(m_0), \\ q_0^2 = q_1^2 &= \frac{6\sqrt{1-e^2}+3e^2-3}{6\sqrt{1-e^2}+3e^2-1} = \\ &= 1 - \frac{2}{6\sqrt{1-e^2}+3e^2-1}.\end{aligned}$$

При аналоге профиля NFW это условие в силу (52) примет вид:

$$\begin{aligned}\alpha_2(m_0) &= \beta_2(m_0), \\ 6\sqrt{1-e^2}(1-q_0^2)N_1(m_0, \mu_0) &= \\ &= [3-3e^2-(1-3e^2)q_1^2]N_1(m_0, \mu_1).\end{aligned}$$

Таблица 2. Явные выражения нормированных удельных угловых моментов $\tilde{\alpha}(m_0)$ и $\tilde{\beta}(m_1)$ слоисто-неоднородных сжатых и вытянутых сфероидов в зависимости от профиля $\rho(m) = \rho_1(m) + \rho_2(m)$ в соответствии со вторым вариантом

$\rho_1(m) + \rho_2(m)$	$\tilde{\alpha}(m_0)$	$\tilde{\beta}(m_1)$
$\frac{\rho_0}{(1 + \beta m^2)^{3/2}} + \frac{K}{\mu m(1 + \mu m)^2}$	$m_0 [A_1(q_0)F_1(m_0) + A_2(q_0)N_1(m_0, \mu_0)]$ $\tilde{q}_0^3 = \frac{C_2 F_2(m_0) + D_2 N_2(m_0, \mu_0)}{C_2 F_2(0) + D_2 N_2(0, \mu_1)}$	$m_1 [B_1(q_1)F_1(m_1) + B_2(q_1)N_1(m_1, \mu_1)]$ $\tilde{q}_1^3 = \frac{C_2 F_2(m_1) + D_2 N_2(m_1, \mu_1)}{C_2 F_2(0) + D_2 N_2(0, \mu_0)}$
$\frac{\rho_0}{(1 + \beta m^2)^{3/2}} + \frac{M}{2\pi\bar{a}\bar{\mu}m(1 + \bar{\mu}m)^3}$	$m_0 [A_1(q_0)F_1(m_0) + A_2(q_0)N_1(m_0, \bar{\mu}_0)]$ $\tilde{q}_0^3 = \frac{C_2 F_2(m_0) + E_2 H_2(m_0, \bar{\mu}_0)}{C_2 F_2(0) + E_2 H_2(0, \bar{\mu}_1)}$	$m_1 [B_1(q_1)F_1(m_1) + B_2(q_1)N_1(m_1, \bar{\mu}_1)]$ $\tilde{q}_1^3 = \frac{C_2 F_2(m_1) + E_2 H_2(m_1, \bar{\mu}_1)}{C_2 F_2(0) + E_2 H_2(0, \bar{\mu}_0)}$

Примечание. Функции $Ak()$, $Bk()$, $F_k()$, $N_k()$ и $H_k()$, а также параметры μ_k , $\bar{\mu}_k$ ($k = 1, 2$) те же самые, что и в табл. 1. Коэффициенты C_2 , D_2 и E_2 приведены в тексте.

При аналоге профиля Хернквиста в силу (55) находим

$$\begin{aligned} \alpha_3(m_0) &= \beta_3(m_0), \\ 6\sqrt{1 - e^2}(1 - \tilde{q}_0^2)H_1(m_0, \bar{\mu}_0) &= \\ &= [3 - 3e^2 - (1 - 3e^2)\tilde{q}_1^2]H_1(m_0, \bar{\mu}_1). \end{aligned}$$

Наконец, при смешанных профилях в силу (61) и (63) получим:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1(m_0) &= \tilde{\beta}_1(m_0), \\ \left[6\sqrt{1 - e^2}(1 - \tilde{q}_0^2)\right] \times & \\ \times \left[\rho_0 F_1(m_0) + K\sqrt{1 + \beta}N_1(m_0, \mu_0)\right] &= \\ = [3 - 3e^2 - (1 - 3e^2)\tilde{q}_1^2] \times & \\ \times \left[\rho_0 F_1(m_0) + K\sqrt{1 + \beta}N_1(m_0, \mu_1)\right], & \\ \tilde{\alpha}_2(m_0) &= \tilde{\beta}_2(m_0), \\ \left[6\sqrt{1 - e^2}(1 - \tilde{q}_0^2)\right] \times & \\ \times \left[2\pi\bar{a}^3\rho_0 F_1(m_0) + M\sqrt{1 + \beta}H_1(m_0, \bar{\mu}_0)\right] &= \\ = [3 - 3e^2 - (1 - 3e^2)\tilde{q}_1^2] \times & \\ \times \left[2\pi\bar{a}^3\rho_0 F_1(m_0) + M\sqrt{1 + \beta}H_1(m_0, \bar{\mu}_1)\right]. & \\ \tilde{\alpha}_2(m_0) &= \tilde{\beta}_2(m_0), \\ \left[6\sqrt{1 - e^2}(1 - \tilde{q}_0^2)\right] \times & \\ \times \left[2\pi\bar{a}^3\rho_0 F_1(m_0) + M\sqrt{1 + \beta}H_1(m_0, \bar{\mu}_0)\right] &= \\ = [3 - 3e^2 - (1 - 3e^2)\tilde{q}_1^2] \times & \\ \times \left[2\pi\bar{a}^3\rho_0 F_1(m_0) + M\sqrt{1 + \beta}H_1(m_0, \bar{\mu}_1)\right]. & \end{aligned}$$

Очевидно, что при $m_0 \leq \tilde{m}_0$, или $m_0 > \tilde{m}_0$ неравенства в (65) либо будут выполняться, либо нет. В разделе 7 (табл. 3) найдено критическое значение \tilde{m}_0 для некоторых модельных эллиптических галактик (МЭГ) и установлена устойчивость (неустой-

чивость) в смысле выполнения (или невыполнение) неравенства (65).

Таким образом, мы рассмотрели три критерия устойчивости эллипсоидальных тел: критерий Пиблса–Острайкера, выраженный неравенством (34), критерий (65) по значениям нормированного удельного углового момента и неравенство (33) для отношений полуосей такого тела и угловой скорости вращения. В следующих разделах рассмотрим критерии неустойчивости Вандервортса.

5. КРИТЕРИЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВАНДЕРВОРТА. СЛУЧАЙ ТРЕХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА

Критерий неустойчивости трехосного эллипсоида с полуосами $a_1 \geq a_2 > a_3$ как динамической системы в работе [11] представлен в виде

$$t_e \equiv \frac{L^2}{2(I_{11} + I_{22})|W|} > \frac{(2+P)^3}{27I} \frac{a_1^2 A_1}{Q^2}, \quad (66)$$

который назовем критерием Вандервортса. В левой части неравенства (66) L – угловой момент, I_{11} и I_{22} – тензоры момента инерции, W – гравитационная (потенциальная) энергия системы (см. ниже). В правой части неравенства (66) положено:

$$\begin{aligned} P &= -\frac{2V_{12:12}}{V_{11}}, & Q &= 2 - P \frac{\Omega_P}{\Omega_L}, \\ \Omega_L &= \frac{L}{2I_{11}}, & \Omega_P &= \frac{W_{12:12}}{V_{12:12}} \Omega, \end{aligned} \quad (67)$$

и

$$\begin{aligned} I &= a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{\Delta(u)}, \\ A_i &= a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{(u + a_i^2) \Delta(u)}, \\ \Delta^2(u) &= (a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u). \end{aligned} \quad (68)$$

Таблица 3. Критические значения параметра \tilde{m}_0 , определяемые в зависимости от профилей $\rho_1(m)$ БМ и $\rho_2(m)$ ТМ для модельных эллиптических галактик (МЭГ), имеющих форму вытянутого сфераонда с полуосами a и $b = c$ [кпк]

МЭГ	Полуоси		Профили		Параметр \tilde{m}_0
	a	$b = c$	$\rho_1(m)$	$\rho_2(m)$	
NGC 4374 E1 (M 84)	17.373	15.131	$\frac{\rho_0}{(1 + \beta m^2)^{3/2}}$	0	0.15524
				$\frac{K}{\mu m(1 + \mu m)^2}$	0.16043
				$\frac{M}{2\pi\bar{a}^3} \frac{1}{\bar{\mu}(1 + \bar{\mu})^3}$	0.15598
NGC 4406 E3 (M 86)	28.055	20.324	$\frac{\rho_0}{(1 + \beta m^2)^{3/2}}$	0	0.13422
				$\frac{K}{\mu m(1 + \mu m)^2}$	0.15211
				$\frac{M}{2\pi\bar{a}^3} \frac{1}{\bar{\mu}(1 + \bar{\mu})^3}$	0.13498
NGC 4472 E2 (M 49)	25.450	22.069	$\frac{\rho_0}{(1 + \beta m^2)^{3/2}}$	0	0.15923
				$\frac{K}{\mu m(1 + \mu m)^2}$	0.16656
				$\frac{M}{2\pi\bar{a}^3} \frac{1}{\bar{\mu}(1 + \bar{\mu})^3}$	0.16002

Примечание. В первой строке в столбце $\rho_2(m)$ цифра 0 означает, что ЭГ состоит только из БМ с профилем $\rho_1(m)$. При $m_0 > \tilde{m}_0$ вытянутый сфераонд становится устойчивым, а при $m_0 < \tilde{m}_0$ – неустойчивым согласно критерию (65).

Здесь для удобства использованы переобозначения:

$$a_1 \equiv a, a_2 \equiv b \text{ и } a_3 \equiv c.$$

Далее, тензор момента инерции I_{ij} равен [5, 13]

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \delta_{ij} \tilde{M} a_i^2 J(1), \\ J(m) &= \int_0^m m^4 \rho(m) dm, \\ \tilde{M} &= \frac{4}{3} \pi a_1 a_2 a_3, \end{aligned} \quad (69)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. При этом из формул (68) и (69) следует

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 a_k^2 A_k &= I, \\ 1 - \frac{I_{33}}{I_{11}} &= 1 - \frac{a_3^2}{a_1^2} = e^2, \\ I_{11} + I_{22} &= \tilde{M} (a_1^2 + a_2^2) J(1). \end{aligned} \quad (70)$$

Тензоры V_{ij} , $V_{ij:ij}$ и $W_{12:12}$ в равенстве (67) определяются формулами [13]:

$$\begin{aligned} V_{ij} &= -V_0 a_i^2 A_i \delta_{ij} \psi(1), \\ V_{ij:ij} &= V_0 a_i^2 (A_i - a_j^2 A_{ij}) \psi(1), \\ V_0 &= \pi^2 G a_1 a_2 a_3, \\ W_{12:12} &= \frac{1}{2} \Omega^2 I_{11}, \end{aligned} \quad (71)$$

$$A_{ij} = a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{(u + a_i^2)(u + a_j^2) \Delta(u)}, \quad (72)$$

$$\psi(1) \equiv \psi(m=1),$$

$$\begin{aligned} \psi(m) &= \int_0^m [F(m^2)]^2 dm, \\ F(m^2) &= \int_{m^2}^1 \rho(m^2) dm^2, \\ m^2 &= \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2}. \end{aligned} \quad (73)$$

Очевидно, что для осесимметричного тела $a_1 = a_2 > a_3$ имеют место равенства:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2, & A_{12} &= A_{21}, \\ I_{22} &= I_{11}, & V_{22} &= V_{11}, \\ V_{12:12} &= V_{21:21}, & \Omega_L &= \Omega. \end{aligned} \quad (74)$$

Кроме того, для потенциальной энергии W и кинетической энергии вращения T помимо (2) можно пользоваться и другими формулами, приведенными в работе [13]:

$$\begin{aligned} W &= \frac{V_0 I}{a_i^2 A_i} = -\pi^2 G a_1 a_2 a_3 I \psi(1), \\ T &= \frac{\Omega L}{2}, \quad L = \Omega (I_{11} + I_{22}). \end{aligned} \quad (75)$$

Коэффициент I и функция $\psi(m)$ определены выше.

Если в (66) учесть выражения (75) для углового момента L и кинетической энергии вращения T , то выражение t_e будет точно совпадать с выражением t из (16), т. е. $t_e \equiv t = T/|W|$. Кроме того, с учетом выражений (75) для потенциальной энергии W и углового момента L , критерий (66) Вандервортса можно переписать в виде

$$t_e \equiv \frac{\Omega^2}{2} \frac{I_{11} + I_{22}}{|V_{11}|} > \frac{2}{27} \frac{(1+S)^3}{(1+U)^2} \equiv t_1, \quad (76)$$

где с учетом выражений L , V_{11} , $V_{12:12}$, Ω_P и Ω_L величины P и Q представлены в виде:

$$\begin{aligned} P &= 2S, & Q &= 2(1+U), \\ S &= 1 - \frac{a_2^2 A_{12}}{A_1}, & (77) \\ U &= \frac{\Omega^2 I_{11}^2}{V_{11} (I_{11} + I_{22})}. \end{aligned}$$

Для проверки выполнения критерия неустойчивости — неравенства (76) — необходимо определить следующие величины: t_e , A_1 , I , S и U . Отношение t_e нам известно, так как полная гравитационная энергия W и кинетическая энергия вращения T определены выше формулой (2), причем для T имеем еще вторую формулу (75). Следовательно, остается определить четыре последние.

После вычисления интегралов в (68), (69) и (72) для I , A_1 и A_{12} получим:

$$\begin{aligned} I &= a_1 a_2 a_3 J_0, \\ A_1 &= \frac{2a_1 a_2 a_3}{(a_1^2 - a_2^2)\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} \times \\ &\times [F(\varphi_0, n) - E(\varphi_0, n)], \quad (78) \\ A_{12} &= -\frac{2a_3^2}{(a_1^2 - a_2^2)(a_2^2 - a_3^2)} + \\ &+ \frac{2a_1 a_2 a_3}{(a_1^2 - a_2^2)^2(a_2^2 - a_3^2)\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} \times \\ &\times [(a_1^2 + a_2^2 - 2a_3^2)E(\varphi_0, n) - \\ &- 2(a_2^2 - a_3^2)F(\varphi_0, n)]. \quad (79) \end{aligned}$$

Здесь J_0 определяется равенством (4), а аргумент φ_0 и модуль n эллиптических интегралов — равенством (6), в котором следует учесть обозначения $a \equiv a_1$, $b \equiv a_2$ и $c \equiv a_3$.

Вычисленные выше интегралы (78) и (79) позволяют определить отношение A_1/I и величину S . Остается вычислить величину U , которая содержит тензоры момента инерции I_{11} , I_{22} и тензор V_{11} . Эти величины зависят исключительно от профиля плотности,

т. е. их можно вычислить только при заданном профиле $\rho(m)$. В подразделах 5.1, 5.2, 5.3 и 5.4 рассмотрены конкретные профили плотности $\rho(m)$, соответствующие современным требованиям к структуре галактик.

Примечание 2. Как мы выше отмечали (см. Примечание 1), отношение кинетической энергии вращения к модулю потенциальной энергии в критерии устойчивости Пиблса—Острайкера (34) не зависит от распределения вещества в галактике, т. е. от профиля $\rho(m)$, но зависит только от формы и размеров ЭГ. Однако согласно другому критерию устойчивости, отношение удельных угловых моментов сжатого и вытянутого сфероидов зависит и от формы и размеров ЭГ, и от распределения в них вещества. В силу критерия неустойчивости 76 Вандервортса отношения t_e и t_1 (см. выше) также зависят от профиля $\rho(m)$.

5.1. Критерий неустойчивости ЭГ при “астрофизическом” профиле

Положим, что ЭГ состоит только из БМ, с “астрофизическими” профилем $\rho(m)$, определяемый равенством (11). Нам следует определить следующие величины. Сначала подставим выражение (11) в формулу (72) и находим функции $F_1(m^2) \equiv F(m^2)$ и $\psi_1(m^2) \equiv \psi(m^2)$:

$$\begin{aligned} F_1(m^2) &= \int_{m^2}^1 \frac{\rho_0}{\sqrt{(1+\beta m^2)^3}} dm^2 = \\ &= \frac{2\rho_0}{\beta} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\beta m^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\beta}} \right), \quad (80) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_1(m) &= \frac{4\rho_0^2}{\beta^2} \int_0^m \left(\frac{1}{\sqrt{1+\beta m^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\beta}} \right)^2 dm = \\ &= \frac{4\rho_0^2}{\beta^2(1+\beta)\sqrt{\beta}} \left[\sqrt{\beta}m - 2\sqrt{1+\beta}\varphi_1(m) + \right. \\ &\quad \left. +(1+\beta)\arctan(\sqrt{\beta}m) \right], \quad (81) \end{aligned}$$

где функция $\varphi_1(m)$ определена в равенстве (12). Далее, по формуле 71 вычисляем тензор

$$\begin{aligned} V_{11} &= -\pi^2 G a_1^3 a_2 a_3 A_1 \psi_1(1), \\ \psi_1(1) &= \psi_1(m=1). \quad (82) \end{aligned}$$

Здесь функция $\psi_1(m)$ определяется равенством (81), а A_1 — равенством (77).

Теперь вычислим тензоры I_{11} и I_{22} . Для этого выражение профиля из (11) подставим в формулу (70). Это нам даст:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \tilde{M} a_1^2 J_1(1), \\ I_{22} &= \tilde{M} a_2^2 J_1(1), \\ I_{11} + I_{22} &= \tilde{M} (a_1^2 + a_2^2) J_1(1), \quad (83) \end{aligned}$$

где

$$J_1(m) = \frac{\rho_0}{2\beta^2\sqrt{\beta}} \left[\frac{\sqrt{\beta}m(3+\beta m^2)}{\sqrt{1+\beta m^2}} - 3\varphi_1(m) \right]. \quad (84)$$

Здесь функция $\varphi_1(m)$ та же самая, что и в равенстве (81).

Итак, определив равенствами (82) и (83) тензоры V_{11} , I_{11} и I_{22} , вычисляем по формуле (79) значение U . Итак, все необходимые величины определены.

Таким образом, в случае “астрофизического” профиля можно проверить выполнение критерия (66), или (76).

5.2. Критерий неустойчивости ЭГ при аналоге профиля NFW

Пусть теперь ЭГ состоит только из БМ с аналогом профиля NFW, определяемого равенством (17). Поступим аналогично приведенному в подразделе 5.1. Определяем сначала функции

$$\begin{aligned} F_2(m^2) &= \int_{m^2}^1 \frac{K}{(1+\mu m)^2 \mu m} dm^2 = \\ &= \frac{2K}{\mu^2} \left(\frac{1}{1+\mu m} - \frac{1}{1+\mu} \right), \end{aligned} \quad (85)$$

$$\begin{aligned} \psi_2(m) &= \frac{4K^2}{\mu^4} \int_0^m \left(\frac{1}{1+\mu m} - \frac{1}{1+\mu} \right)^2 dm = \\ &= \frac{4K^2}{\mu^5(1+\mu)} \left[-2 \ln(1+\mu m) + \right. \\ &\quad \left. + \mu m \left(\frac{1}{1+\mu} + \frac{1+\mu}{1+\mu m} \right) \right]. \end{aligned} \quad (86)$$

Далее, тензор V_{11} также определяется равенством (71), но функция $\psi(m) \equiv \psi_2(m)$ – формулой (86). Затем по формуле (70), в которой $\rho(m)$ заменяется на аналог профиля NFW, вычисляем функцию $J(m) \equiv J_2(m)$:

$$\begin{aligned} J_2(m) &= \frac{K}{2\mu^5} \left[6 \ln(1+\mu m) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu m}{1+\mu m} (6+3\mu m-\mu^2 m^2) \right], \end{aligned} \quad (87)$$

после чего определяем тензоры I_{11} и I_{22} по формуле (70), заменив в ней $J(1)$ на $J_2(1)$.

5.3. Критерий неустойчивости эллиптической галактики при аналоге профиля Хернквиста

Наконец, положим, что ЭГ состоит только из БМ с аналогом профиля Хернквиста, определяемого равенством (23). Определяем сначала функции

$$\begin{aligned} F_3(m^2) &= \frac{M}{2\pi\bar{a}^3} \int_{m^2}^1 \frac{dm^2}{\bar{\mu}m(1+\bar{\mu}m)^3} = \\ &= \frac{M}{2\pi\bar{\mu}\bar{a}^3(1+\bar{\mu})^2} \frac{(1-m)(2+\bar{\mu}+\bar{\mu}m)}{(1+\bar{\mu}m)^2}, \end{aligned} \quad (88)$$

$$\begin{aligned} \psi_3(m) &= \frac{M^2}{4\pi^2\bar{\mu}^2\bar{a}^6(1+\bar{\mu})^4} \times \\ &\times \int_0^m \frac{(1-m)^2(2+\bar{\mu}+\bar{\mu}m)^2}{(1+\bar{\mu}m)^4} dm = \\ &= \frac{M^2}{4\pi^2\bar{\mu}^5\bar{a}^6(1+\bar{\mu})^4} \left[\bar{\mu}m - \frac{(1+\bar{\mu})^4}{3(1+\bar{\mu}m)^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(1+\bar{\mu})^2}{1+\bar{\mu}m} + \frac{(1+\bar{\mu})^4}{3} - 2(1+\bar{\mu})^2 \right], \end{aligned} \quad (89)$$

причем

$$\psi_3(1) = \frac{M^2(4+\bar{\mu})}{12\pi^2\bar{\mu}^2\bar{a}^6(1+\bar{\mu})^4}. \quad (90)$$

Далее, тензор V_{11} также определяется равенством (71), но функция $\psi_3(m)$ – формулой (89). Затем по формуле (70), в которой $\rho(m)$ заменяется на аналог профиля Хернквиста, вычисляем функцию $J(m) \equiv J_3(m)$:

$$\begin{aligned} J_3(m) &= \frac{M}{4\pi\bar{\mu}^5\bar{a}^3} \left\{ -6 \ln(1+\bar{\mu}m) + \right. \\ &\quad \left. + \bar{\mu}m \left[2 + \frac{4}{1+\bar{\mu}m} + \frac{\bar{\mu}m}{(1+\bar{\mu}m)^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (91)$$

после чего определяем тензоры I_{11} и I_{22} по формуле (70), заменив в ней $J(1)$ на $J_3(1)$.

5.4. Критерий неустойчивости ЭГ, состоящей из барионной массы и темной материи

Пусть теперь ЭГ состоит из барионной массы (БМ) с профилем $\rho_1(m)$ и темной материи (ТМ) с профилем $\rho_2(m)$. Рассмотрим два случая: а) в качестве профиля ТМ $\rho_2(m)$ берется аналог профиля NFW, б) в качестве $\rho_2(m)$ берется аналог профиля Хернквиста. В обоих случаях в качестве профиля БМ $\rho_1(m)$ берется “астрофизический” профиль (11). Далее, для удобства обозначим через $F_4(m^2)$, $\psi_4(m)$ и $J_4(m)$ функции $F(m^2)$, $\psi(m)$ и $J(m)$, соответствующие случаю а). В случае б) эти функции обозначим через $F_5(m^2)$, $\psi_5(m)$ и $J_5(m)$. Тогда согласно нашим обозначениям имеем

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad F_4(m^2) &= F_1(m^2) + F_2(m^2), \\ \psi_4(m) &= \psi_1(m) + \psi_2(m) + 2\psi_{12}(m), \\ J_4(m) &= J_1(m) + J_2(m), \end{aligned} \quad (92)$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad F_5(m^2) &= F_1(m^2) + F_3(m^2), \\ \psi_5(m) &= \psi_1(m) + \psi_3(m) + 2\psi_{13}(m), \\ J_5(m) &= J_1(m) + J_3(m), \end{aligned} \quad (93)$$

где функции $F_k(m^2)$, $\psi_k(m)$ и $J_k(m)$, ($k = 1, 2, 3$) определены выше, а

$$\begin{aligned}\psi_{12}(m) &= \int_0^m F_1(m^2) F_2(m^2) dm, \\ \psi_{13}(m) &= \int_0^m F_1(m^2) F_3(m^2) dm.\end{aligned}\quad (94)$$

Следовательно, нам остается вычислить только функции $\psi_{12}(m)$ и $\psi_{13}(m)$. Учитывая выражения (80), (85) и (88) функций $F_k(m^2)$, для $\psi_{12}(m)$ и $\psi_{13}(m)$ получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}\psi_{12}(m) &= \frac{4K\rho_0}{\beta\mu^2} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\beta+\mu^2}} \left[\ln \varphi_2(m) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \ln \varphi_2(m=0) \right] - \frac{\ln \varphi_1(m)}{(1+\mu)\sqrt{\beta}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m}{(1+\mu)\sqrt{1+\beta}} - \frac{\ln(1+\mu m)}{\mu\sqrt{1+\beta}} \right\}, \\ \psi_{13}(m) &= \frac{M\rho_0}{\pi\bar{\mu}\beta\bar{a}^3(1+\bar{\mu})^2} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{(1+\bar{\mu})^2\beta}{2\bar{\mu}\sqrt{(\beta+\bar{\mu}^2)^3}} \left[\ln \bar{\varphi}_2(m) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \ln \bar{\varphi}_2(m=0) \right] - \frac{\varphi_1(m)}{\bar{\mu}\sqrt{\beta}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1+\bar{\mu})^2}{(\beta+\bar{\mu}^2)} \left(1 - \frac{\sqrt{1+\beta m^2}}{1+\bar{\mu}m} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m(m-2-\bar{\mu})}{\sqrt{1+\beta}(1+\bar{\mu}m)} \right\},\end{aligned}$$

где функция $\varphi_1(m)$ определяется равенством (12), а

$$\begin{aligned}\varphi_2(m) &= \frac{\sqrt{\beta+\mu^2}\sqrt{1+\beta m^2} + \beta m - \mu}{\sqrt{\beta+\mu^2}\sqrt{1+\beta m^2} - \beta m + \mu}, \\ \bar{\varphi}_2(m) &= \frac{\sqrt{\beta+\bar{\mu}^2}\sqrt{1+\beta m^2} + \beta m - \bar{\mu}}{\sqrt{\beta+\bar{\mu}^2}\sqrt{1+\beta m^2} - \beta m + \bar{\mu}}.\end{aligned}$$

6. КРИТЕРИЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВАНДЕРВОРТА. СЛУЧАЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА

В случае сфероида Маклорена $a = b > c$ малые параметры μ и $\bar{\mu}$ определяются равенством (29), а

$$I = \frac{2ac}{e} \arcsin e, \quad e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2}, \quad (95)$$

$$\begin{aligned}A_1 = A_2 &= a^2 c \int_0^\infty \frac{du}{(u+a^2)^2 \sqrt{u+c^2}} = \\ &= \frac{1}{e^3} \left[\sqrt{1-e^2} \arcsin e - e(1-e^2) \right],\end{aligned}\quad (96)$$

$$\begin{aligned}A_3 &= a^2 c \int_0^\infty \frac{du}{(u+a^2)(u+c^2)\sqrt{u+c^2}} = \\ &= \frac{2}{e^3} \left(e - \sqrt{1-e^2} \arcsin e \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{11} = A_{12} &= a^2 c \int_0^\infty \frac{du}{(u+a^2)^3 \sqrt{u+c^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{4a^2 e^5} \left[3 \arcsin e - e(3+2e^2) \sqrt{1-e^2} \right].\end{aligned}\quad (97)$$

Критерий Вандерморта в этом случае запишется так:

$$\begin{aligned}t_e &\equiv \frac{\Omega^2 I_{11}}{2|V_{11}|} > \frac{1}{27} \frac{(1+S)^3}{(1+U)^2} \equiv t_1, \\ S &= 1 - \frac{a_1^2 A_{11}}{A_1}, \\ U &= \frac{I_{11}\Omega^2}{2V_{11}},\end{aligned}\quad (98)$$

где A_1 и A_{11} определяются равенствами (96) и (97), а тензоры I_{11} и V_{11} — формулами (69) и (70) соответственно. При этом функции $J(m)$ и $\psi(m)$, фигурирующие в выражениях I_{11} и V_{11} , также задаются формулами (69) и (70), в которых следует учесть $a_1 = a_2$ и тождество (73). Это связано с тем, что данные функции зависят только от профиля $\rho(m)$.

Теперь рассмотрим случай вытянутого сфероида $a > b = c$. В этом случае малые параметры μ и $\bar{\mu}$ определяются равенством (31). Кроме того,

$$I = \frac{c^2}{e} \ln \frac{1+e}{1-e}, \quad e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2}, \quad (99)$$

$$\begin{aligned}A_1 &= ac^2 \int_0^\infty \frac{du}{(u+c^2)(u+a^2)\sqrt{u+a^2}} = \\ &= \frac{1-e^2}{e^3} \left(\ln \frac{1+e}{1-e} - 2e \right),\end{aligned}\quad (100)$$

$$\begin{aligned}A_2 = A_3 &= ac^2 \int_0^\infty \frac{du}{(u+c^2)^2 \sqrt{u+a^2}} = \\ &= \frac{1-e^2}{2e^3} \left(\frac{2e}{1-e^2} - \ln \frac{1+e}{1-e} \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{12} = A_{13} &= ac^2 \int_0^\infty \frac{du}{(u+c^2)^2(u+a^2)\sqrt{u+a^2}} = \\ &= \frac{1}{2a^2 e^5} \left[2e(3-2e^2) - 3(1-e^2) \ln \frac{1+e}{1-e} \right].\end{aligned}\quad (101)$$

Критерий Вандерморта в этом случае тождествен неравенству (76). Однако в выражении параметров S и U , фигурирующих в этом неравенстве и определяемых равенством (77), следует учесть выражения (100) и (101) для величин A_1 и A_{12} . Тензоры I_{11} , I_{22} и V_{11} задаются также формулами (69) и (70) с учетом равенства $a_2 = a_3$ и выражений (100) и (101).

7. ПРИМЕРЫ И ВЫВОДЫ

Для применения полученных нами результатов рассмотрим 64 модельные эллиптические галактики (МЭГ) с параметрами, точно совпадающими с параметрами реальных галактик, имеющие форму слоисто-неоднородного сжатого (сферида Маклорена) или вытянутого сфероида, или слоисто-неоднородного трехосного эллипсоида Якоби с соответствующими профилями (см. выше). При этом полуоси этих галактик определены по значениям величин D_{25} и R_{25} из каталога [4].

Проверено, что выполняется необходимое условие: неравенство Пуанкаре для существования неоднородной галактики как фигуры равновесия для всех рассмотренных МЭГ. При этом нормированная угловая скорость для всех МЭГ как сфероидов Маклорена не превышает критического значения, т. е. $\tilde{\Omega}^2 < 0.37423$. Кроме того, установлено, что условие устойчивости для МЭГ, имеющих форму слоисто-неоднородного сжатого или вытянутого сфероида, по критерию (34) Пиблса–Острайкера выполняется. При этом значения параметра t из критерия устойчивости Пиблса–Острайкера (34) для слоисто-неоднородных вытянутых сфероидов оказались меньше, чем их значения для сжатых сфероидов, как и показано в книге [12]. Поэтому устойчивость (или неустойчивость) галактик, имеющих форму вытянутого сфероида, можно установить по другим критериям. Таковыми являются критерий выполнения неравенства (65) для отношения значений нормированных удельных угловых моментов сжатого и вытянутого сфероида (см. подраздел 4.9), или критерий Вандервортса (см. разделы 5 и 6).

Если установить устойчивость (или неустойчивость) в зависимости от выполнения неравенства (65), то при всех значениях параметра m_0 , удовлетворяющих неравенству $m_0 \geq \tilde{m}_0$, мы заключаем, что выполняется условие устойчивости таких галактик с соответствующими профилями. В противном случае вытянутый сфероид с соответствующими профилями будем считать неустойчивым. Следовательно, вытянутый сфероид с полуосями $a_0 = m_0 a$ и $c_0 = m_0 c$ будет устойчивым, если его полуоси удовлетворяют условию $a_0 > a_1 = \tilde{m}_0 a$ и $c_0 > c_1 = \tilde{m}_0 c$. В противном случае будем считать его неустойчивым. Как определяется параметр \tilde{m}_0 мы рассмотрели в подразделе 4.9, а полуоси a и c каждой конкретной галактики взяты из каталога [4]. Возможно, такое определение устойчивости (или неустойчивости) галактик, имеющих форму вытянутого сфероида, носят условный характер, так как является необходимым, но недостаточным условием устойчивости.

В табл. 3 приведены критические значения параметра \tilde{m}_0 , определяемые в зависимости от профилей $\rho_1(m)$ БМ и $\rho_2(m)$ ТМ для трех МЭГ. Значения a и c – большой и малой полуосей этих галактик – взяты из каталога Вокулера и др. [4]. Фигу-

рирующие в выражениях профилей $\rho_1(m)$ и $\rho_2(m)$ ключевые параметры – плотность в центре галактики ρ_0 , параметр β , нормализующий коэффициент K и радиус-шкала r_s , а также масса M определены в работах [1, 7, 8].

Далее, на рис. 2, 3 и 4 приведены графики функций $T_k(m_0)$ в зависимости от профилей плотности барионной массы (БМ) и темной материи (ТМ), параметра m_0 , а также от формы галактики МЭГ NGC 4472. Для краткости записи на рисунках через $T_k(m_0)$ обозначены:

$$T_k(m_0) = \{P_k(m_0), Q_k(m_0), \tilde{P}_n(m_0), \tilde{Q}_n(m_0)\}, \quad (102)$$

$$(k = 1, 2, 3; n = 1, 2),$$

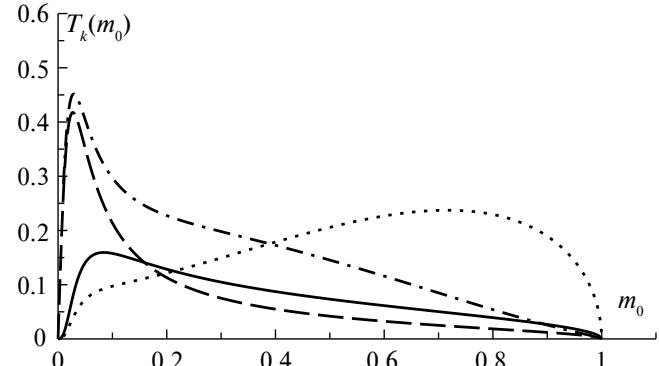


Рис. 2. График функций $T_k(m_0)$ в зависимости от параметра m_0 МЭГ NGC 4472. Сплошная линия соответствует функции $P_1(m_0) \equiv 10^{-3}\alpha_1(m_0)$, т. е. слоисто-неоднородному сжатому, а штриховая – функции $Q_1(m_0) \equiv 10^{-3}\beta_1(m_0)$ слоисто-неоднородному вытянутому сфероиду с “астрофизическим” профилем, пунктирная линия – функции $\tilde{P}_1(m_0) \equiv 10^{-3}\tilde{\alpha}_1(m_0)$ слоисто-неоднородному сжатому, а штрих-пунктирная линия – функции $\tilde{Q}_1(m_0) \equiv 10^{-3}\tilde{\beta}_1(m_0)$ или слоисто-неоднородному вытянутому сфероиду с суммарным профилем “астрофизическим” для БМ и аналогом профиля NFW для ТМ

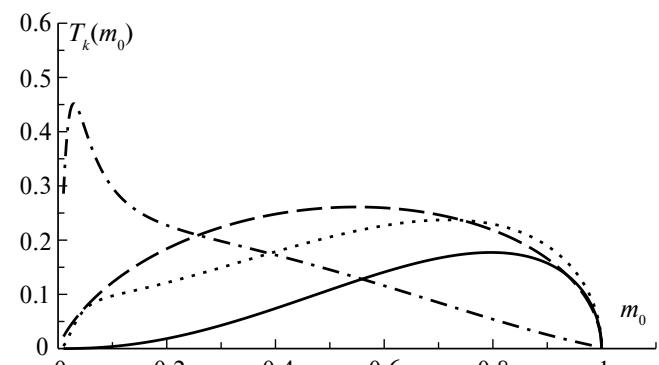


Рис. 3. График функций $T_k(m_0)$ в зависимости от параметра m_0 МЭГ NGC 4472. Сплошная линия соответствует функции $P_2(m_0) \equiv 10^{-3}\alpha_2(m_0)$, или слоисто-неоднородному сжатому, а штриховая – функции $Q_2(m_0) \equiv 10^{-3}\beta_2(m_0)$ слоисто-неоднородному вытянутому сфероиду с “астрофизическим” профилем. Пунктирная и штрих-пунктирная линии то же, что на рис. 2

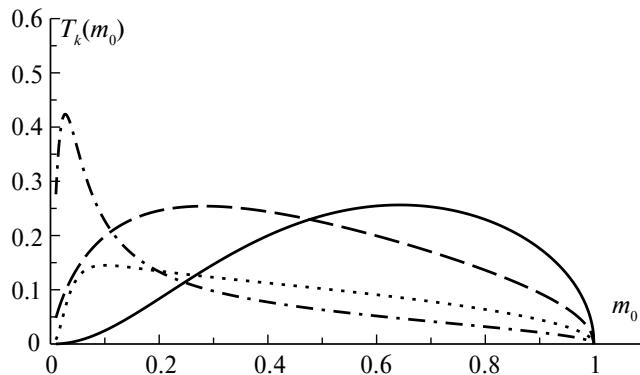


Рис. 4. График функций $T_k(m_0)$ в зависимости от параметра m_0 МЭГ NGC 4472. Сплошная линия соответствует функции $P_3(m_0) \equiv 10^{-3}\alpha_3(m_0)$ слоисто-неоднородному сжатому, а штриховая – функции $Q_3(m_0) \equiv 10^{-3}\beta_3(m_0)$ слоисто-неоднородному вытянутому сфероиду с аналогом профиля Хернквиста, пунктирная линия – функции $\tilde{P}_2(m_0) \equiv 10^{-3}\tilde{\alpha}_2(m_0)$ слоисто-неоднородному сжатому, а штрих-пунктирная линия – функции $\tilde{Q}_2(m_0) \equiv 10^{-3}\tilde{\beta}_2(m_0)$, или слоисто-неоднородному вытянутому сфероиду с суммарным профилем “астрофизическим” для БМ и аналогом профиля Хернквиста для ТМ

где

$$P_k(m_0) = 10^{-3}\alpha_k(m_0),$$

$$Q_k(m_0) = 10^{-3}\beta_k(m_0),$$

$$(k = 1, 2, 3)$$

$$\tilde{P}_n(m_0) = 10^{-3}\tilde{\alpha}_n(m_0),$$

$$\tilde{Q}_n(m_0) = 10^{-3}\tilde{\beta}_n(m_0),$$

$$n = (1, 2).$$

Кроме того, функции $\alpha_k(m_0), \beta_k(m_0)$ ($k = 1, 2, 3$) и $\tilde{\alpha}_n(m_0), \tilde{\beta}_n(m_0)$ ($n = 1, 2$) определены выше равенствами (48), (50), (53), (60) и (61) соответственно.

На рис. 2 сплошная линия соответствует функции $P_1(m_0) \equiv 10^{-3}\alpha_1(m_0)$, т. е. слоисто-неоднородному сжатому, а штриховая – функции $Q_1(m_0) \equiv 10^{-3}\beta_1(m_0)$ слоисто-неоднородному вытянутому сфероиду с “астрофизическим” профилем, пунктирная линия – функции $\tilde{P}_1(m_0) \equiv 10^{-3}\tilde{\alpha}_1(m_0)$ слоисто-неоднородному сжатому, а штрих-пунктирная линия – функции $\tilde{Q}_1(m_0) \equiv 10^{-3}\tilde{\beta}_1(m_0)$, или слоисто-неоднородному вытянутому сфероиду с суммарным профилем “астрофизическим” для БМ и аналогом профиля NFW для ТМ.

На рис. 3 сплошная линия соответствует функции $P_2(m_0) \equiv 10^{-3}\alpha_2(m_0)$, или слоисто-неоднородному сжатому, а штриховая – функции $Q_2(m_0) \equiv 10^{-3}\beta_2(m_0)$ слоисто-неоднородному вытянутому сфероиду с “астрофизическим” профилем. Обозначения пунктирной и штрих-пунктирной линий совпадают с обозначениями на рис. 2.

На рис. 4 сплошная линия соответствует функции $P_3(m_0) \equiv 10^{-3}\alpha_3(m_0)$ слоисто-неод-

нородному сжатому, а штриховая – функции $Q_3(m_0) \equiv 10^{-3}\beta_3(m_0)$ слоисто-неоднородному вытянутому сфероиду с аналогом профиля Хернквиста, пунктирная линия – функции $\tilde{P}_2(m_0) \equiv 10^{-3}\tilde{\alpha}_2(m_0)$ слоисто-неоднородному сжатому, а штрих-пунктирная линия – функции $\tilde{Q}_2(m_0) \equiv 10^{-3}\tilde{\beta}_2(m_0)$, или слоисто-неоднородному вытянутому сфероиду с суммарным профилем “астрофизическим” для БМ и аналогом профиля Хернквиста для ТМ.

Теперь о критерии неустойчивости Вандервортса (см. разделы 5 и 6). В случае вытянутого сфероида с соответствующими профилями согласно этому критерию имеем следующее. Если галактика состоит только из барионной массы с “астрофизическими” профилем, то только модельные галактики NGC 3610 и NGC 4660 являются неустойчивыми по критерию Вандервортса. Если же галактика с формой вытянутого сфероида состоит из БМ с “астрофизическими” профилем и ТМ с аналогом профиля NFW, то согласно этому критерию следующие 10 модельных эллиптических галактик (МЭГ) являются неустойчивыми: NGC 0661, 0680, 3610, 3641, 4278, 4283, 4434, 4473, 4660 и 5173. Наконец, в случае галактики с формой вытянутого сфероида, состоящей из БМ с “астрофизическими” профилем и ТМ с аналогом профиля Хернквиста, то следующие 5 МЭГ являются неустойчивыми: NGC 0680, 4283, 4434, 4473 и 4660.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены несколько новых моделей слоисто-неоднородной эллиптической галактики (ЭГ), имеющей форму либо трехосного эллипсоида, либо сжатого или вытянутого сфероида. При этом полагается, что ЭГ состоит из барионной массы (БМ) и темной материи (ТМ) с разными законами распределения плотности – профилями. Во всех моделях в качестве профиля БМ берется “астрофизический закон” распределения плотности, а в качестве профиля ТМ – один из аналогов профилей NFW и Хернквиста.

На основе этих моделей определены некоторые ключевые динамические параметры ЭГ: гравитационная (потенциальная) энергия и кинетическая энергия вращения, распределение углового момента и удельные угловые моменты в зависимости от профилей плотности.

В качестве примера взяты более шестидесяти модельных эллиптических галактик с параметрами, точно совпадающими с реально существующими. Проверено, что выполняется с достаточной гарантией необходимое условие: неравенство Пуанкаре для существования неоднородной ЭГ как фигуры равновесия. Кроме того, установлена устойчивость (неустойчивость) ЭГ как динамической системы согласно критерию Вандервортса и проверено выполнение критерия Пиблса–Острайкера. Найдены

критические значения параметра семейства сфероидов, определяющие границы устойчивости (или неустойчивости) динамической системы по значениям удельных угловых моментов в зависимости от профилей плотности.

Полученные результаты приведены в виде таблиц и рисунков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *C.A. Гасанов*, Астрон. журн. 98(9), 707 (2021).
2. *C.A. Гасанов*, Астрон. журн. 99(2), 91 (2022).
3. *C.A. Гасанов*, Астрон. журн. 101(2), 77 (2024).
4. *G. de Vaucouleurs, A. de Vaucouleurs, H.G. Corwin, R.J. Buta, G. Paturel, P. Fouqué*, Third Reference Catalogue of Bright Galaxies (N.Y.: Springer-Verlag, Vol. 2, 3, 1991).
5. *Б.П. Кондратьев*, Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями (М.: Мир, 2007).
6. *E. Hubble*, Astrophys. J. 71, 231 (1930).
7. *J.F. Navarro, C.S. Frenk, and S.D.M. White*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 275(3), 720 (1995).
8. *L. Hernquist*, Astrophys. J. 356, 359 (1990).
9. *J.P. Ostriker and P.J.E. Peebles*, Astrophys. J. 186, 467 (1973).
10. *В.Л. Поляченко, А.М. Фридман*, Равновесие и устойчивость гравитирующих систем (М.: Наука, 1976).
11. *P.O. Vandervoort*, Astrophys. J. 273, 511 (1983).
12. *Б.П. Кондратьев*, Теория потенциала и фигуры равновесия (Москва—Ижевск: РХД, 2003).
13. *A.J. Kalnajs*, Astrophys. J. 212, 637 (1977).
14. *J. Binney and S. Tremaine*, Galactic Dynamics (Princeton University Press, Series in Astrophysics, 2008).
15. *E.V. Polyachenko*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 357(2), 559 (2005).
16. *E.V. Polyachenko, V.L. Polyachenko and I.G. Shukhman*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 379(2), 573 (2007).
17. *S. Rozier, J.-B. Fouvry, P.G. Breen, A.L. Varri, C. Pichon, and D.C. Heggie*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 487(1), 711 (2019).
18. *it E.V. Polyachenko and I.G. Shukhman*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 451(1), 601 (2015).
19. *Б.П. Кондратьев*, Потенциалы и динамические модели эллипсоидальных гравитирующих систем, Кандидатская диссертация (М., 1982), 300 с.
20. *H. Poincaré*, Leçons sur les hypothèses cosmogoniques (Paris : Librairie Scientifique A. Hermann et fils, 1911).

ON THE STABILITY OF A LAYERED INHOMOGENEOUS ELLIPTICAL GALAXY AS DYNAMIC SYSTEM

© 2025 S. A. Gasanov

Lomonosov Moscow State University, Sternberg Astronomical Institute, Moscow, Russia

e-mail: gasanov@sai.msu.ru

In this paper, we consider several new models of a layered inhomogeneous elliptical galaxy (EG) having the shape either a triaxial ellipsoid or an oblate or prolate spheroid and consisting of baryonic mass (BM) and dark matter (DM) with different laws of density distribution — profiles. Based on these models, some key dynamic parameters of the EG were determined: gravitational (potential) energy and rotational kinetic energy, angular momentum distribution and specific angular momentum depending on density profiles. The equilibrium and stability (instability) of the EG as a dynamic system have been established according to known criteria. Critical values found parameters of the family of spheroids that determine the boundaries of stability (or instability) dynamic system based on the values of specific angular momentum depending on the density profiles. The results obtained were applied to sixty model EGs with parameters exactly matching those that actually exist and are presented in the form of tables and figures.

Keywords: elliptical galaxies, fundamental parameters, the equilibrium and stability (instability)