

# УСКОРЯЮЩИЙ ПОТЕНЦИАЛ И ПРОФИЛЬ ПЛОТНОСТИ ВТОРИЧНОЙ ПЛАЗМЫ В МАГНИТОСФЕРЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПУЛЬСАРОВ

© 2025 г. А. Ю. Истомин<sup>1,2</sup>, Ф. А. Князев<sup>1,2</sup>, В. С. Бескин<sup>2,1,\*</sup>

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),  
Долгопрудный, Россия

<sup>2</sup>Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук, Москва, Россия

\*e-mail: beskin@td.lpi.ru

Поступила в редакцию 03.06.2024 г.

После доработки 24.08.2024 г.

Принята в печать 11.09.2024 г.

В работе предложен новый метод определения ускоряющего потенциала над полярными шапками радиопульсаров с произвольным углом наклона магнитной оси к оси вращения. В основе подхода лежит концепция вакуумного зазора, высота и форма верхней границы которого находятся самосогласованно совместно с решением соответствующего уравнения Пуассона. В свою очередь, знание ускоряющего потенциала позволяет определить поперечные профили концентрации вторичной плазмы. Показано также, что влияние обратного комптоновского рассеяния на рассматриваемые процессы оказывается незначительным.

**Ключевые слова:** радиопульсары, ускоряющий потенциал, вторичная плазма

**DOI:** 10.31857/S0004629925010056, **EDN:** HLTVPN

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Накопленные за последние годы данные радиотелескопов MeerKAT [1, 2] и FAST [3] позволили значительно уточнить характеристики средних профилей интенсивности и поляризации радиоизлучения пульсаров, что, в свою очередь, потребовало построения более детальной теории генерации и распространения излучения в магнитосферах нейтронных звезд. В частности, модель “полого конуса” [4, 5], наиболее часто используемая для объяснения свойств наблюдаемых профилей излучения, оказывается излишне упрощенной, поскольку она не учитывает эффекты распространения излучения в магнитосфере нейтронной звезды, такие как рефракция, циклотронное поглощение и предельная поляризация [6].

В свою очередь, для исследования всех перечисленных выше эффектов необходимо иметь количественную модель распределения плотности вторичной электрон-позитронной плазмы, истекающей вдоль открытых силовых линий радиопульсара. Так как основным механизмом генерации плазмы в полярных областях нейтронной звезды является однофотонная конверсия  $\gamma$ -квантов, излученных первичными электронами и/или позитронами, ускоренными в области ненулевого продольного электрического поля, для построения соответствующей модели необходимо знать трехмерную структуру ускоряю-

щего потенциала в области над полярной шапкой нейтронной звезды.

Хотя классическая модель вакуумного зазора Рудермана–Сазерленда [7] служит хорошей отправной точкой для решения данной задачи, в своей традиционной формулировке она содержит существенную неопределенность — длина свободного пробега фотонов, а следовательно, и геометрия вакуумного зазора сама зависит от величины ускоряющего потенциала. Поэтому фактически данная модель может быть использована только для достаточно быстрых радиопульсаров, у которых высота зазора много меньше радиуса полярной шапки, и для которых электрическое поле в зазоре можно считать однородным. Тем более эту модель нельзя использовать для ортогональных пульсаров, угол наклона магнитной оси к оси вращения которых близок к  $90^\circ$ . Действительно, ускоряющий потенциал таких пульсаров не обладает осевой симметрией и, соответственно, не может быть описан в рамках классической модели [8]. Что же касается активно проводящихся в последние десять лет исследований в рамках частиц в ячейках (PIC) [9–13], то они в подавляющем большинстве (за исключением разве что работы [14]) не были направлены на поиск пространственного распределения вторичной плазмы над полярной шапкой.

В данной работе предлагается способ корректной постановки и решения задачи об определении

пространственной структуры ускоряющего потенциала, не предполагающий малость высоты зазора  $H_{\text{gap}}$  по сравнению с радиусом полярной шапки  $R_0$  и осесимметричность потенциала, что делает метод применимым и для ортогональных пульсаров. Последнее замечание особенно важно, так как благодаря возможности наблюдения обоих магнитных полюсов эти объекты особенно информативны [15]. Помимо этого, из-за малой величины и знакопеременности гольдрайховской плотности в пределах полярной шапки такие пульсары особенно чувствительны к выбору модели генерации плазмы и величине магнитного поля.

В разделе 2 сформулирована математическая постановка задачи, решаемой в работе. Раздел 3 посвящен вычислению высоты вакуумного зазора при фиксированном потенциале, решению уравнения Пуассона методом Physics Informed Neural Networks (PINN) и обсуждению результатов данных вычислений как для неортогональных, так и для ортогональных пульсаров. Раздел 4 посвящен обсуждению модели генерации вторичной плазмы и результатам ее применения к определенным ранее потенциалам. В разделе 5 подведены итоги данной работы.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Хотя результаты численного моделирования указывают на то, что процесс генерации частиц существенно нестационарен [13, 16], в качестве отправной точки мы выбрали модель стационарного вакуумного зазора [7]. Действительно, так как, согласно работам [13, 16], плазма периодически полностью покидает полярные области, модель Рудермана–Сазерленда позволяет описать начальный этап генерации вторичной плазмы. В данной работе, однако, не будет предполагаться условие  $H_{\text{gap}} \ll R_0$ , где

$$R_0 = f_*^{1/2} \sqrt{\frac{\Omega R}{c}} R \quad (1)$$

есть радиус полярной шапки. Здесь и далее  $R$ ,  $\Omega$  и  $\chi$  суть радиус, угловая скорость и угол наклона дипольного момента к оси вращения нейтронной звезды, а  $f_* \approx 1.59 (1 + 0.2 \sin^2 \chi)$  — безразмерная площадь полярной шапки [17, 18].

Стоит отметить, что в последующих вычислениях радиуса кривизны магнитного поля оно будет полагаться дипольным, хотя предлагаемый в работе метод может быть обобщен и для других конфигураций. Здесь мы, однако, рассмотрим упрощенную модель, которая тем не менее позволяет учесть все основные эффекты, связанные с кривизной магнитных силовых линий.

Перейдем теперь к определению электрического потенциала  $\psi$  в вакуумной области над полярными областями радиопульсара. В стационарном состо-

янии уравнение Пуассона для вращающейся нейтронной звезды имеет вид [7]

$$\Delta \psi = 4\pi(\rho_e - \rho_{\text{GJ}}), \quad (2)$$

где  $\rho_e$  — плотность заряда в магнитосфере, а

$$\rho_{\text{GJ}} = -\frac{\mathbf{B}}{2\pi c} \quad (3)$$

— плотность Гольдрайха–Джулиана [19], необходимая для экранировки продольного электрического поля.

Заметим, что на масштабе высоты зазора область открытых силовых линий мало отличается от цилиндрической, что позволяет пренебречь искривлением силовых линий при выборе расчетной области. Таким образом, можно ввести цилиндрические координаты  $r_m, \phi_m, z$  с центром на оси диполя. При этом везде ниже для величин  $r_m$  и  $z$  выбрана нормировка на радиус полярной шапки  $R_0$  (1), так что поверхность, отделяющая области открытых и замкнутых силовых линий, определяется условием  $r_m = 1$ . В то же время кривизну силовых линий необходимо учитывать при вычислениях правой части уравнения (2), так как при углах  $\chi \sim 90^\circ$  лидирующий по малому параметру  $\sqrt{\Omega R/c}$  осесимметричный (и независимый от кривизны магнитных силовых линий) вклад стремится к нулю.

В этом случае уравнение, определяющее потенциал  $\psi(r_m, \phi_m, z)$  в вакуумной области ( $\rho_e \ll \rho_{\text{GJ}}$ ), будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r_m} \frac{\partial}{\partial r_m} \left( r_m \frac{\partial \psi}{\partial r_m} \right) + \frac{1}{r_m^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi_m^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \\ & = -2 \frac{\Omega B_0 R_0^2}{c} \left( \cos \chi + \frac{3}{2} \frac{R_0}{R} r_m \sin \chi \sin \phi_m \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь мы воспользовались известным выражением для косинуса угла между осью вращения и магнитным полем  $\cos \theta_b \approx \cos \chi + (3/2)(R_0/R) r_m \sin \chi \sin \phi_m$ , справедливым для дипольных силовых линий.

Если высоту зазора  $H_{\text{gap}} = H_{\text{gap}}(r_m, \phi_m)$  считать заданной функцией, то граничные условия для уравнения (4) запишутся в виде

$$\psi(r_m, \phi_m, z = 0) = 0, \quad (5)$$

$$\psi(r_m = 1, \phi_m, z) = 0, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial z}(r_m, \phi_m, z) \right|_{z=H_{\text{gap}}(r_m, \phi_m)} = 0. \quad (7)$$

Иными словами, необходимо потребовать равенство нулю потенциала  $\psi$  на поверхности нейтронной звезды и на сепаратрисе, разделяющей открытые и замкнутые магнитные силовые линии, а также равенство нулю продольного электрического поля на верхней границе области ускорения  $z = H_{\text{gap}}$  [13, 20].

Однако для нахождения самой функции  $H_{\text{gap}}$  необходимо конкретизировать процесс рождения вторичной плазмы, что невозможно без знания

энергий первичных частиц, которые сами зависят от величины  $H_{\text{gap}}$ , так как ускоряющий потенциал  $\psi$  функционально зависит от высоты зазора:  $\psi = \psi[H_{\text{gap}}]$ . В итоге корректная постановка задачи состоит в одновременном самосогласованном определении двух функций:  $\psi(r_m, \phi_m, z)$  и  $H_{\text{gap}}(r_m, \phi_m)$ , таких что

$$\left. \frac{\partial \psi(r_m, \phi_m, z)}{\partial z} \right|_{z=H_{\text{gap}}[\psi]} = 0. \quad (8)$$

Для решения данной задачи мы использовали итеративный подход: по известной функции  $H_{\text{gap}}^{(i)}$  вычислялся потенциал  $\psi^{(i)}$  такой, что было выполнено условие (7), а далее, используя полученный потенциал, пересчитывалась высота зазора. Таким образом, выполнялась следующая итеративная процедура ( $0 < w < 1$  — некоторый вес, улучшающий сходимость схемы):

$$H_{\text{gap}}^{(i)} \rightarrow \psi^{(i)}, \quad (9)$$

$$H_{\text{gap}}^{(i+1)} = w H_{\text{gap}}[\psi^{(i)}] + (1 - w) H_{\text{gap}}^{(i)}.$$

При этом на каждом шаге итеративной схемы (9) необходимо было не только определять высоту зазора  $H_{\text{gap}}[\psi]$ , но и решать уравнение Пуассона (4) с граничными условиями (5), (6), (7), последнее из которых поставлено на границе, меняющейся в ходе итеративного процесса.

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЯЮЩЕГО ПОТЕНЦИАЛА

#### 3.1. Изгибное излучение

Для определения высоты зазора необходимо рассмотреть процесс поглощения первичных фотонов в сверхсильном магнитном поле и, соответственно, сам механизм генерации фотонов. Классическим источником  $\gamma$ -квантов необходимых энергий является изгибное излучение первичных частиц. В этом случае для высоты зазора  $H_{\text{gap}}$  можно записать следующее выражение:

$$H_{\text{gap}}(r_m, \phi_m) = \min(l_e + l_\gamma(l_e)), \quad (10)$$

где  $l_e$  — расстояние, пройденное первичной частицей до испускания фотона. Учитывая, что в данном процессе с ростом энергии первичной частицы растет как число испускаемых фотонов, так и их характерная энергия, можно считать, что первичный фотон может быть излучен в произвольной точке траектории частицы, что позволяет считать величину  $l_e$  произвольной.

Далее, для (безразмерной) длины свободного пробега фотона с энергией  $\epsilon_\gamma$ , движущегося в магнитном поле нейтронной звезды  $B$ , имеем следующее выражение [7, 21]:

$$l_\gamma \approx \frac{8}{3} \frac{1}{\Lambda} \frac{B_{\text{cr}}}{B} \frac{R_c(r_m, z)}{\epsilon_\gamma(l_e)}. \quad (11)$$

Здесь и далее все значения энергии нормированы на  $m_e c^2$ ,  $B_{\text{cr}} = m_e^2 c^3 / \hbar e \approx 4.4 \times 10^{13}$  Гс — швингеровское магнитное поле,  $R_c(r_m, z) \approx (4/3) R^2 / r_m$  — радиус кривизны магнитных силовых линий, а  $\Lambda = \Lambda_0 - 3 \ln \Lambda_0$ , где

$$\Lambda_0 = \ln \left[ \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\omega_B R_c}{c} \left( \frac{B_{\text{cr}}}{B} \right)^2 \epsilon_\gamma^{-2} \right] \sim 20 \quad (12)$$

есть безразмерный параметр, слабо (логарифмически) зависящий от параметров пульсара и энергии фотона [22].

Наконец, для упрощения вычислений ускоряющего потенциала предполагался моноэнергетический спектр изгибного излучения

$$\epsilon_\gamma = \epsilon_c = \frac{3 \lambda_e \gamma_e^3(l_e)}{2 R_c(r_m, z)}. \quad (13)$$

Действительно, хотя длина свободного пробега фотона (11) явным образом зависит от его энергии, в разделе 3.4 будет показано, что зависимость итогового ускоряющего потенциала от выбора численного коэффициента в формуле (13) заметно слабее. Здесь  $\lambda_e = \hbar / m_e c$  — приведенная комптоновская длина волны, а  $\gamma_e$  есть  $\gamma$ -фактор первичной частицы, определяющийся из ускоряющего потенциала согласно уравнению движения

$$m c^2 \frac{d\gamma_e}{dl} = e E_{\parallel} - F_{\text{CR}} - F_{\text{IC}}. \quad (14)$$

Последние два слагаемых соответствуют потерям на изгибное излучение и обратное комптоновское рассеяние. Вклад  $F_{\text{CR}}$ , однако, становится существенным лишь при  $\gamma \sim 10^8$ , что позволяет пренебречь им для большинства пульсаров. Вывод же о малости вклада комптоновского рассеяния можно сделать из сравнения длин свободного пробега первичных частиц, выполненного ниже в следующем подразделе 3.2. Таким образом, в большинстве случаев  $\gamma$ -фактор первичной частицы можно определять, не решая полное дифференциальное уравнение (14), а используя его решение в отсутствие потерь:

$$\gamma_e(l) = \frac{e\psi(l)}{m c^2}. \quad (15)$$

#### 3.2. Обратное комптоновское рассеяние

Как утверждалось в ряде работ [23, 24], для широкого диапазона параметров пульсаров ключевым механизмом, определяющим высоту зазора, может быть обратное комптоновское рассеяние (как нерезонансное, так и резонансное) тепловых фотонов на ультрарелятивистских первичных частицах. Ключевым отличием данного процесса от изгибного излучения является то, что с ростом энергии первичной частицы характерная энергия комптоновских фотонов растет, в то время как темп их рождения падает. Вследствие этого первичные частицы, обладающие энергией, достаточной, чтобы произвести

$\gamma$ -квант с необходимой для рождения пары энергией, могут иметь пренебрежимо малую вероятность испытать рассеяние. Фактически это означает, что необходимо явно учитывать конечность длины свободного пробега электрона, ограничивающую величину  $l_e$  в выражении (10) снизу.

Проанализировав зависимость данной величины от энергии, можно оценить влияние обратного комптоновского рассеяния на рассматриваемый процесс. Считая спектр излучения фотонов тепловым и изотропным в диапазоне  $\mu_{\min} \leq \mu \leq 1$  ( $\mu$  — косинус угла столкновения), можно записать следующее выражение для частоты актов рассеяния [25]:

$$R(\gamma_e) = \int_0^{+\infty} d\varepsilon \int_{\mu_{\min}}^1 d\mu \frac{c}{4\pi^3 \lambda_e^3} \frac{\varepsilon^2}{e^{\varepsilon/T} - 1} \times \\ \times (1 - \beta\mu) \sigma_{\text{tot}}(\gamma, \varepsilon'(\varepsilon, \mu)). \quad (16)$$

В данном выражении  $\varepsilon$  — энергия фотона до столкновения в системе отсчета пульсара (в единицах  $m_e c^2$ ),  $\varepsilon'$  — энергия фотона в системе отсчета покоя электрона,  $\sigma_{\text{tot}}$  — полное сечение рассеяния.

Так как электрон практически мгновенно разгоняется до  $\gamma$ -факторов  $\gamma \gtrsim 10^5$ , для нерезонансных фотонов необходимо использовать релятивистское сечение Клейна—Нишины. В то же время, так как циклотронный резонанс находится при энергиях  $\varepsilon' = \varepsilon_B = B/B_{\text{cr}} \ll 1$ , в нерезонансном случае можно не учитывать влияние магнитного поля и воспользоваться следующим выражением для сечения рассеяния ( $\sigma_T$  — томпсоновское сечение) [26]

$$\sigma_{\text{NR}} = \frac{3\sigma_T}{8} \frac{1}{\varepsilon'} \left[ \left(1 - \frac{2}{\varepsilon'} - \frac{2}{\varepsilon'^2}\right) \ln(1 + 2\varepsilon') + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} + \frac{4}{\varepsilon'} - \frac{1}{2(1 + 2\varepsilon')^2} \right]. \quad (17)$$

По этой же причине резонансное рассеяние можно рассматривать в томпсоновском пределе (уже учитывая наличие магнитного поля). В нем сечение рассеяния имеет вид [27]

$$\sigma = \frac{\sigma_T}{2} \left[ \frac{u^2}{(u+1)^2} + \frac{u^2}{(u-1)^2 + a^2} \right]. \quad (18)$$

Здесь  $u = \varepsilon'/\varepsilon_B$ ,  $a = 2\alpha/3\varepsilon_B$ , а  $\varepsilon_B = B/B_{\text{cr}}$ . Выделив в данном выражении резонансную часть, можно записать

$$\sigma_R = \frac{3\pi}{4\alpha_e} \sigma_T \delta(\varepsilon' - \varepsilon_B). \quad (19)$$

Для наших целей достаточно исследовать зависимость длины свободного пробега электрона от энергии, не рассматривая процесс ускорения электрона непосредственно, то есть считая, что  $l_e(\gamma_e) = c/R(\gamma_e)$ . Для нерезонансного рассеяния расчеты выполнялись численно, используя выражения (16), (17),

в то время как для резонансного случая можно получить аналитическое выражение [28]:

$$l_e^R = \frac{\lambda_e \gamma_e^2}{\varepsilon_B^2 \Theta \alpha_e (-\ln(1 - e^{-w}))}, \quad (20)$$

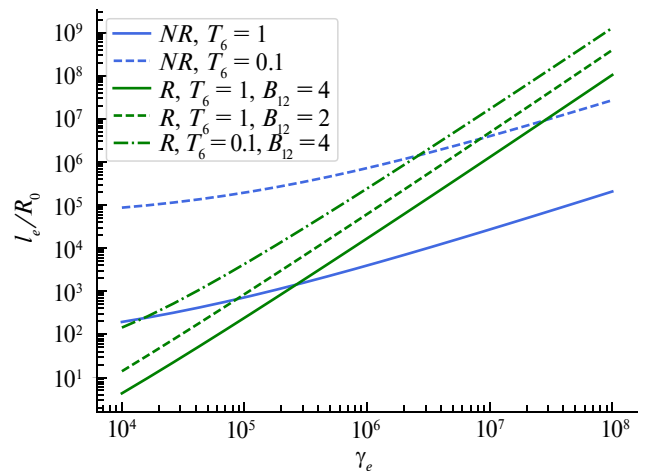
где  $\Theta = T/m_e c^2$ , а

$$w = \frac{\varepsilon_B}{\gamma_e \Theta (1 - \beta \mu_{\min})}. \quad (21)$$

Интересно сравнить полученные длины пробега с радиусом полярной шапки, являющимся характерным масштабом высоты зазора в случае преобладания изгибного механизма генерации первичных фотонов. Результаты вычислений представлены на рис. 1. Как можно видеть, даже при температуре  $10^6$  К длина свободного пробега в нерезонансном случае имеет порядок радиуса полярной шапки только при  $\gamma \lesssim 10^2$ , что позволяет не учитывать его при вычислении ускоряющего потенциала. В резонансном случае ответ уже не столь однозначен, так как при  $\gamma \sim 10^4$  энергии рассеянных фотонов могут быть достаточны для рождения пары вблизи звезды. Однако, как показали результаты численных расчетов, в пределах наблюдаемых параметров ортогональных пульсаров данным процессом также можно пренебречь.

### 3.3. Решение уравнения Пуассона методом PINN

Следующим шагом на пути к реализации итеративной схемы (9) является решение уравнения Пуассона в вакуумной области (4). Хотя для данного уравнения можно построить аналитическое решение в виде бесконечного ряда [22], данный подход не является предпочтительным, так как СЛАУ, определяющая коэффициенты разложения, имеет крайне большое число обусловленности в необходимой области параметров. Традиционные сеточные методы также плохо подходят для данной задачи



**Рис. 1.** Зависимость длин свободного пробега электрона от его  $\gamma$ -фактора для различных параметров пульсара. Зеленый цвет (три параллельные линии) соответствует резонансному рассеянию (R), синий (две полные кривые) — нерезонансному (NR)



в силу переменной формы трехмерной расчетной области.

В связи с этим для решения данного уравнения в частных производных был применен метод Physics Informed Neural Networks (PINN) основанный на использовании нейронных сетей. PINN является достаточно новой альтернативой традиционным методам решения уравнений в частных производных и в настоящее время все чаще и чаще применяется во множестве областей физики и астрофизики, таких, например, как космология [29], теория переноса излучения [30] и теория магнитосферы радиопульсаров [31, 32].

PINN представляют собой обыкновенную нейронную сеть той или иной архитектуры (как правило, выбирается полносвязная нейронная сеть), входными параметрами которой являются независимые переменные  $\mathbf{x}$ , а выходным — значение функции  $\mathcal{N}(\mathbf{x})$ , приближенно удовлетворяющей уравнению  $\hat{L}[\mathcal{N}(\mathbf{x})] = 0$ , где  $\hat{L}$  есть некоторый дифференциальный оператор. Для обучения в качестве loss-функции выбирается норма невязки дифференциального уравнения:  $\|\hat{L}[\mathcal{N}(\mathbf{x})]\| \rightarrow 0$ . При этом для вычисления производных искомой функции не нужно вводить дискретизацию пространства, так как их можно получить непосредственно в процессе обратного прохода по нейронной сети. Таким образом, в процессе обучения нейронная сеть будет приближаться к одному из решений соответствующего дифференциального уравнения. Что же касается граничных условий, то наиболее простым способом их учета является добавление соответствующих слагаемых в loss-функцию с некоторыми весами. Проблемой данного метода является, однако, необходимость балансировки весов для достижения минимизации всех слагаемых по отдельности.

Другой способ заключается в выполнении некоторого алгебраического преобразования с выходными данными нейронной сети так, чтобы ответ автоматически удовлетворял граничным условиям. Например, жесткого выполнения условий Дирихле на фиксированной границе  $\partial D$  области  $D$  можно достичь, введя функции  $f$  и  $g$  такие, что  $f|_{\mathbf{x} \in \partial D} = 0$ , а  $g|_{\mathbf{x} \in \partial D} = h_{BC}$ , где  $h_{BC}$  задает значения искомой функции на границе. Тогда функция  $g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})\mathcal{N}(\mathbf{x})$  будет удовлетворять граничным условиям независимо от вида функции  $\mathcal{N}(\mathbf{x})$ .

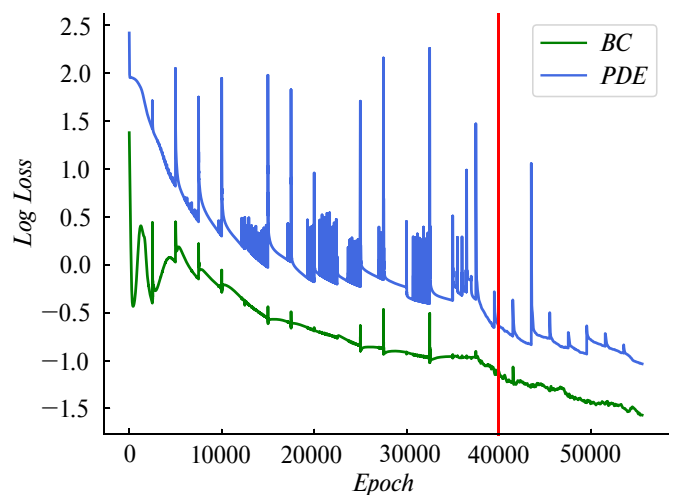
Основными преимуществами данного подхода по сравнению с традиционными численными методами является отсутствие расчетной сетки и, как следствие, большее удобство при работе в областях со сложной и переменной геометрией, а также меньшая чувствительность к размерности задачи. Недостатком данного метода как правило является меньшая точность результатов при больших временных затратах.

Важно также отметить, что в отличие от большинства других численных методов, предел точно-

сти которых при неограниченном времени расчетов приближается к машинному  $\epsilon$ , предел точности PINN определяется архитектурой сети и способом оптимизации. Тем не менее для многих астрофизических задач (в том числе и для рассматриваемой в данной работе) точность вычислений в первую очередь определяется физической моделью, а не выбором численного метода. В таких случаях способность PINN решать уравнения со сложными граничными условиями выходит на первый план.

В применении к рассматриваемой задаче данный метод использовался следующим образом. При фиксированной высоте вакуумного зазора делается  $N \sim 5000$  шагов оптимизации; далее, используя текущий вид потенциала, высота зазора пересчитывается и делаются следующие  $N$  шагов оптимизации. При этом веса нейронной сети, полученные на текущей итерации, используются как начальные значения весов на следующей. Процедура повторяется до тех пор, пока относительное изменение высоты зазора не станет меньше 1%. После этого происходит дополнительное обучение нейронной сети при фиксированной высоте зазора.

В качестве нейронной сети была выбрана полносвязная сеть, состоящая из 3-х промежуточных слоев (20, 20, 20). Для учета граничных условий на поверхностях  $r_m = 1$  и  $z = 0$  результат вычислений нейронной сети домножался на функцию  $f(r_m, z) = r_m \cdot z$ , в то время как граничное условие на верхней границе зазора учитывались введением дополнительного слагаемого в функцию ошибок. Для оптимизации использовался подход, предложенный в работе [33], заключающийся в первичном обучении с помощью стохастического градиентного спуска (ADAM) и последующего обучения методом LBFG-S (рис. 2). В то время как метод ADAM применялся непосредственно в итеративном про-



**Рис. 2.** Пример поведения функции ошибок. Скачки соответствуют смене граничных условий и выбору нового набора точек для обучения. Вертикальной красной линией отмечен момент переключения оптимизатора с ADAM на LBFG-S

цессе, метод LBFG-S использовался при дообучении с финальной высотой зазора. Данный подход мотивирован тем, что метод ADAM в значительно меньшей степени подвержен проблеме локальных минимумов, особенно актуальной на начальных этапах обучения, в то время как метод LBFG-S позволяет достичь более глубокой оптимизации. Таким образом используются сильные и нивелируются слабые стороны обоих методов, что позволило достичь заметно большей точности расчетов в рассматриваемой задаче.

### 3.4. Осесимметричный случай

При углах наклона осей  $\chi \lesssim 85^\circ$  источник в уравнении (4) фактически не зависит от угла  $\varphi_m$ . Поэтому для пульсаров, не являющихся ортогональными, задача становится осесимметричной и соответственно двумерной, что позволяет исключить из рассмотрения угол  $\varphi_m$ . Это в значительной степени упрощает как расчет, так и анализ результатов. В связи с этим, хотя основным фокусом работы и является применение изложенного выше метода к ортогональным пульсарам, в первую очередь был рассмотрен именно осесимметричный случай.

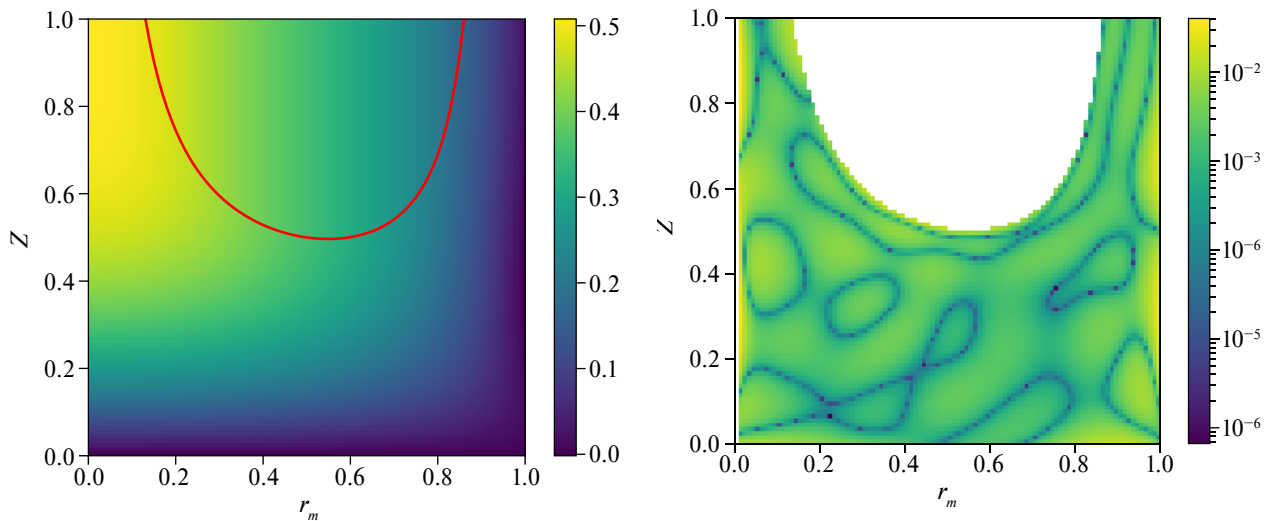
Как показано на рис. 3, описанный выше метод позволяет найти решение поставленной задачи с относительной невязкой порядка нескольких процентов, что является достаточно хорошей точностью. При этом геометрически полученные результаты воспроизводят некоторые свойства структуры, известной как “slot-gap” [34]. Стоит, однако, отметить, что в работе [34] рассматривалась стационарная модель со свободным выходом, когда плотности заряда  $\rho_e$  и  $\rho_{GJ}$ , входящие в уравнение (2), мало отличаются друг от друга. Однако в обоих случаях такая форма высоты зазора обусловлена тем, что вблизи магнитной оси рождение частиц затруднено вследствие малой кривизны магнитного поля, а на краю

полярной шапки ускоряющий потенциал стремится к нулю. Таким образом высота зазора должна обращаться в бесконечность при  $r_m \sim 0$  и  $r_m \sim 1$ . Также на рис. 4 представлены предельные значения ускоряющего потенциала (достигаемые на высоте вакуумного зазора), вычисленные с использованием различных характерных энергий в моноэнергетическом приближении синхротронного спектра (13). Как можно видеть, даже при изменении характерной энергии фотона в два раза, относительное изменение потенциала не превышает  $\sim (15-20)\%$ , что является допустимой погрешностью в рамках данной работы. Тем не менее в ходе дальнейшего развития модели, предполагаемого в последующих работах, влияние изгибного спектра будет учтено.

### 3.5. Неосесимметричный случай

На рис. 5 показаны примеры расчета ускоряющего потенциала для почти ортогональных пульсаров с углами наклона  $\chi = 88^\circ$  (верхний ряд) и  $\chi = 89.3^\circ$  (нижний ряд) для магнитного поля  $B_{12} = 1.5$  и периода  $P = 0.3$  с, характерного для интеримпульсных пульсаров. Приведены максимальные значения потенциала над полярной шапкой, срезы нормы невязки уравнения Пуассона на высоте  $0.5 R_0$ , а также высоты вакуумных зазоров в радиусах полярной шапки. Стоит отметить, что высота  $H_{\text{gap}} = 10 R_0$  фактически соответствует  $H_{\text{gap}} \rightarrow \infty$ .

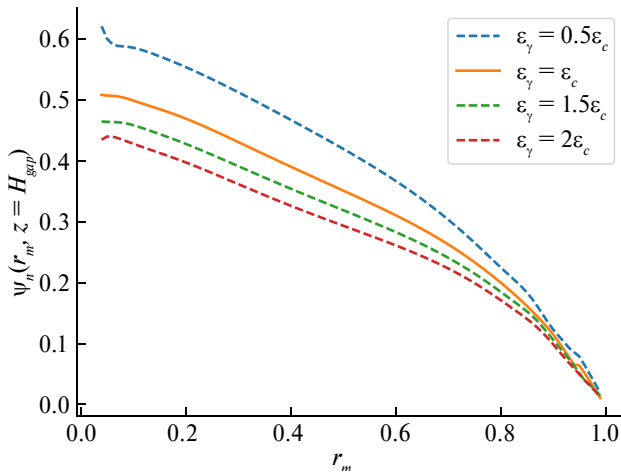
Как уже отмечалось, исследование таких пульсаров представляет особый интерес, поскольку для них электрический потенциал становится существенно неосесимметричным. Более того, в этом случае гольдрайховская плотность может менять знак в пределах полярной шапки, что влечет за собой и изменение направления ускоряющего поля. Происходит это, однако, в весьма узком диапазоне углов  $\chi$ .



(а) Потенциал, нормированный на величину  $\Omega B R_0^2 / (2c)$ . Красная линия соответствует высоте зазора  $H_{\text{gap}}(r_m)$

(б) Норма невязки решения уравнения Пуассона

Рис. 3. Пример вычисления ускоряющего потенциала для пульсара с  $\chi = 10^\circ$ ,  $B_{12} = 1.6$  и  $P = 0.5$  с



**Рис. 4.** Профили предельного ускоряющего потенциала, вычисленные с использованием различных характерных энергий изгибного излучения для пульсара с  $\chi = 10^\circ$ ,  $B_{12} = 1.6$  и  $P = 0.5$  с. Потенциал нормирован на величину  $\Omega B R_0^2 / (2c)$

Действительно, для того чтобы величина  $\cos \theta_b$  при характерных значениях  $P \approx 1$  с поменяла знак в пределах полярной шапки, необходимо, чтобы  $|\chi - \pi/2| \lesssim 3 R_0 / (2R) \sim 0.03$ , то есть  $88.5^\circ \lesssim \chi \lesssim 91.5^\circ$ . В результате, как показано на рис. 5, смена знака потенциала имеет место лишь для угла  $\chi = 89.3^\circ$ ; для угла  $\chi = 88^\circ$  знак потенциала не изменяется по всей поверхности полярной шапки.

Отметим наконец, что, как показано на рис. 5, значения ускоряющего потенциала оказываются заметно меньше, чем для неортогональных пульсаров. Это напрямую связано с малостью фактора  $\cos \theta_b$  в гольдрайховской плотности (3).

## 4. ПРОФИЛЬ ПЛОТНОСТИ ВТОРИЧНОЙ ПЛАЗМЫ

### 4.1. Метод расчета

Для изучения распределения плотности плазмы в пространстве удобно записать концентрацию в следующем виде:  $n = g(r_m, \varphi_m) \lambda n_{GJ}$ , где  $n_{GJ} = |\rho_{GJ}|/e$  — гольдрайховская концентрация, а  $\lambda$  — параметр множественности, определяемый усреднением величины  $n/n_{GJ}$  по полярной шапке. Такой вид записи мотивирован тем, что вдали от области генерации частиц функция  $g(r_m, \varphi_m)$  является постоянной на силовых линиях магнитного поля, то есть вся зависимость от высоты над полярной шапкой содержится в гольдрайховской плотности  $n_{GJ}$  (что следует из уравнения непрерывности).

Однако, поскольку для ортогональных пульсаров сама величина  $n_{GJ}$  существенно зависит от координат  $r_m, \varphi_m$ , в качестве нормировки нами была выбрана величина

$$n_0 = \frac{\Omega B}{2\pi c e} \sqrt{\frac{\Omega R}{c}}, \quad (22)$$

где последний множитель соответствует характерной величине  $\cos \theta_b$  на полярной шапке для ортогональных пульсаров. Таким образом, безразмерная величина  $\lambda$  характеризует эффективность генерации плазмы, а функция  $g(r_m, \varphi_m)$  определяет ее пространственное распределение.

Для расчета множественности плазмы нами использовалась следующая модель: первичные частицы, ускоренные в определенном в первой части нашей работы потенциале  $\psi(r_m, \varphi_m, z)$  до значений лоренц-факторов  $\gamma_e \sim 10^7$ , рождают первичные фотоны, которые, в свою очередь, поглощаясь в магнитном поле, дают начало синхротронному каскаду рождения пар [35, 36]. Считая, что длины свободного пробега фотонов много меньше расстояния от центра звезды до точки излучения [36], синхротронный каскад можно считать локальным в пространстве. Тогда, в рамках такой модели получаем следующее выражение для количества вторичных частиц, рожденных одной первичной частицей:

$$\lambda_1 = \int_0^\infty dz_e \int_0^\infty d\varepsilon_i n_\gamma(z_e, \varepsilon_i; r_m, \varphi_m) f_{SR}(z_e, \varepsilon_i; r_m). \quad (23)$$

Здесь  $z_e$  есть высота излучения изгибного фотона,  $z_a$  — высота его поглощения в магнитном поле, а  $n_\gamma$  — спектр первичных фотонов. Наконец, функция  $f_{SR}$  определяет число вторичных частиц, рожденных одним фотоном с энергией  $\varepsilon_i$ , поглощенным на высоте  $z_e$ . Для ее определения мы воспользуемся подходом, предложенным в работе [36], однако теперь вычисления будут проводиться с учетом зависимости всех величин от координат на полярной шапке.

Введя теперь равновесные объемные темпы рождения вторичных пар  $Q_p$  и фотонов  $Q_\gamma$ , можно записать следующее выражение для числа вторичных частиц  $f_{SR}$ :

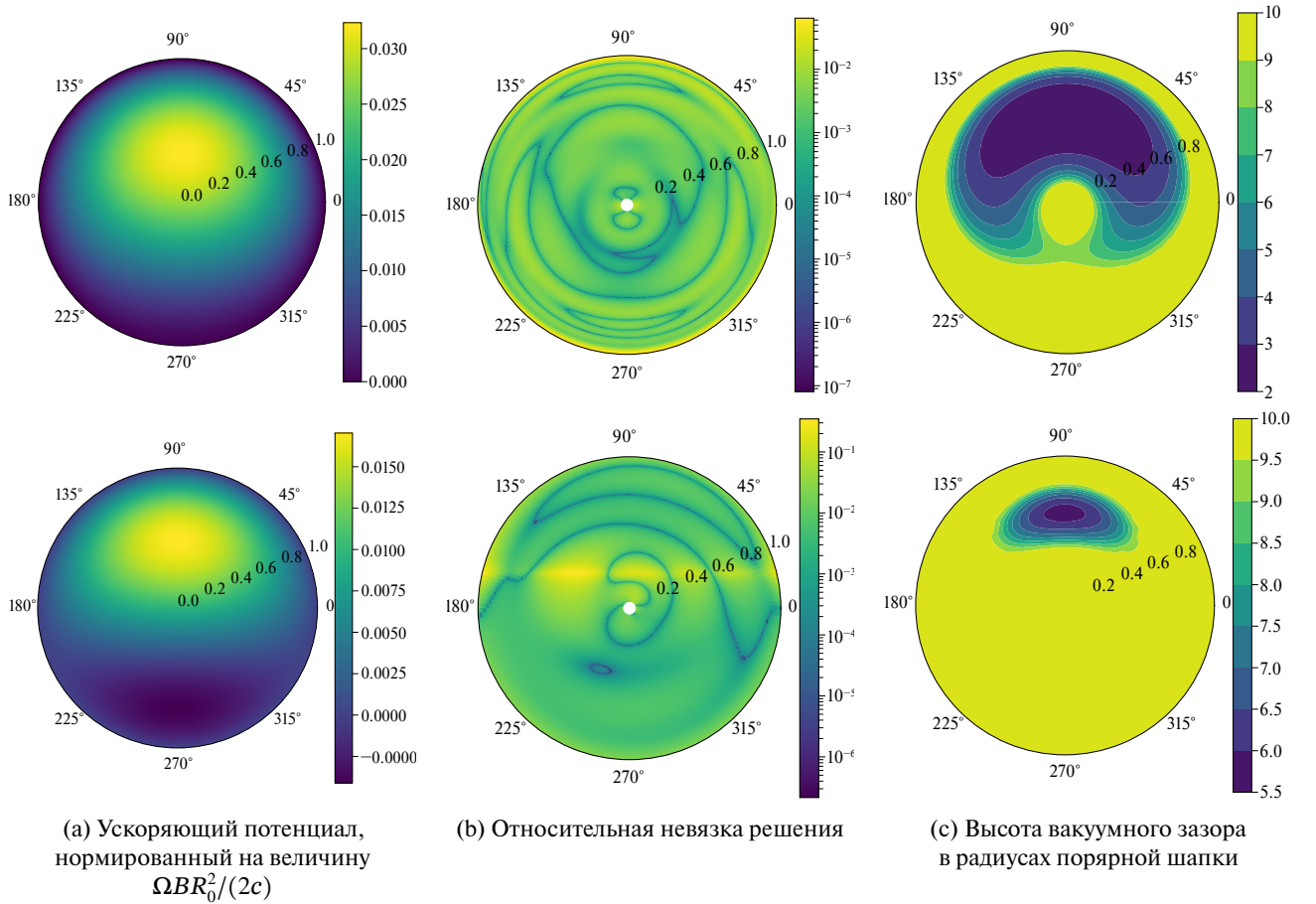
$$\begin{aligned} f_{SR}(\varepsilon_i) &= \int_0^\infty d\varepsilon Q_p(\varepsilon, \varepsilon_i) = \\ &= \int_0^\infty d\varepsilon (1 - e^{-\tau_\infty(\varepsilon)}) Q_\gamma(\varepsilon, \varepsilon_i), \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\tau_\infty$  является предельной оптической толщиной магнитосферы. В свою очередь, функцию  $Q_\gamma$  можно определить из интегрального уравнения [36]:

$$\begin{aligned} Q_\gamma(\varepsilon, \varepsilon_i) &= \int_0^\infty d\varepsilon' [1 - e^{-\tau_\infty(\varepsilon')}] \times \\ &\times \frac{1}{\varepsilon'} K\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right) [\delta(\varepsilon' - \varepsilon_i) + Q_\gamma(\varepsilon', \varepsilon)]. \end{aligned} \quad (25)$$

В этом уравнении функция  $K(\varepsilon/\varepsilon')$  имеет вид:

$$\begin{aligned} K\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right) &= \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \sqrt{\Lambda} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)^{-3/2} \times \\ &\times \left[ G\left(\Lambda \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right) - G\left((1 + a^2) \Lambda \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right) \right], \end{aligned} \quad (26)$$



**Рис. 5.** Примеры расчета ускоряющего потенциала для ортогональных пульсаров с  $B_{12} = 1.5$ ,  $P = 0.3$  с,  $\chi = 88^\circ$  для верхнего ряда и  $\chi = 89.3^\circ$  — для нижнего. Приведены максимальные значения потенциала над полярной шапкой, нормы невязки уравнения Пуассона на высоте  $0.5 R_0$ , а также высоты вакуумных зазоров в радиусах полярной шапки

где  $a = 3 B_{\text{cr}} / (4B \ln \Lambda)$ , а  $\Lambda$  определяется выражением (12). В свою очередь

$$G(t) = \int_t^\infty dx K_{5/3}(x) (x^{3/2} - t^{3/2}). \quad (27)$$

Решение данного уравнения несложно получить, вводя дискретизацию в логарифмическом масштабе и решая соответствующее матричное уравнение. На рис. 6 показаны примеры расчета спектра вторичных частиц в зависимости от местоположения формирования каскада. Как мы видим, с ростом высоты  $z$  формируется степенной спектр вторичных частиц. Этот хорошо известный факт [35, 36] подтверждает справедливость нашего рассмотрения.

Далее, для определения спектра первичных фотонов  $n_\gamma$ , как и при расчете потенциала, необходимо рассмотреть два источника: изгибное излучение и обратное комптоновское рассеяние. Для оценки вклада комптоновского рассеяния можно воспользоваться приближенными выражениями для темпа рождения пар (числа фотонов, рождаемых одной первичной частицей) [23]:

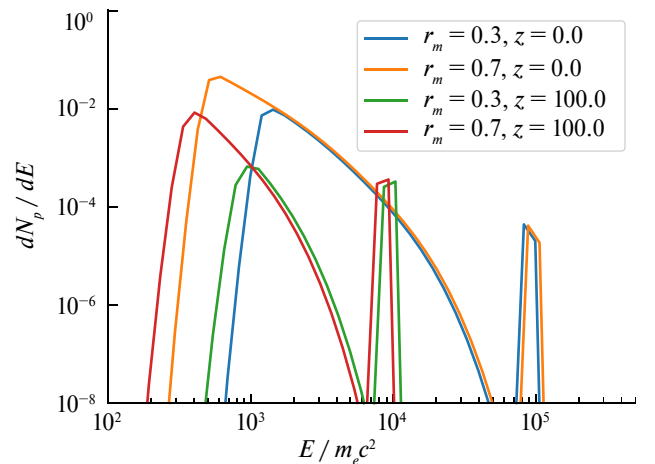
$$\dot{N}_{NR} \approx 1.5 \times 10^9 \gamma^{-1} T_6^2 \Delta\mu \text{ с}^{-1}, \quad (28)$$

$$\dot{N}_R \approx 10^{13} \gamma^{-2} B_{12} T_6 \text{ с}^{-1}, \quad (29)$$

$$\dot{N}_{CR} \approx \gamma \rho_8^{-1} \text{ с}^{-1}. \quad (30)$$

Здесь индексы NR, R и CR соответствуют нерезонансному комптоновскому рассеянию в пределе Клейна–Нишины, резонансному комптоновскому рассеянию и изгибному излучению.

Величина  $T_6$  является температурой полярной шапки в единицах  $10^6$  К,  $\rho_8$  — радиус кривиз-



**Рис. 6.** Спектр синхротронного каскада, запущенного фотоном с энергией  $\epsilon_\gamma = 10^6$  для различных значений  $r_m$  и  $z$



ны магнитных силовых линий в единицах  $10^8$  см, а  $\Delta\mu = 1 - \mu_{\min}$ . Сравнить эффективность генерации вторичной плазмы для трех механизмов можно, домножив величины  $\dot{N}$  на фактор  $f_{\text{SR}}(\varepsilon_\gamma(\gamma_e))$ , где механизм генерации первичных фотонов определяет вид  $\varepsilon_\gamma(\gamma_e)$ . Так, для изгибного излучения  $\varepsilon_\gamma \sim 3/2 \lambda_e/R_c \gamma_e^3$ , для нерезонансного обратного комптоновского рассеяния в пределе Клейна–Нишины  $\varepsilon_\gamma \sim \gamma_e$ , а для резонансного —  $\varepsilon_\gamma \sim 2\gamma_e\varepsilon_B$ . Учитывая, что характерный масштаб генерации вторичной плазмы есть масштаб спада магнитного поля, т. е. радиус звезды, величину  $\lambda_1$  можно оценить как  $\dot{N}(\gamma_e)f_{\text{SR}}R/c$ .

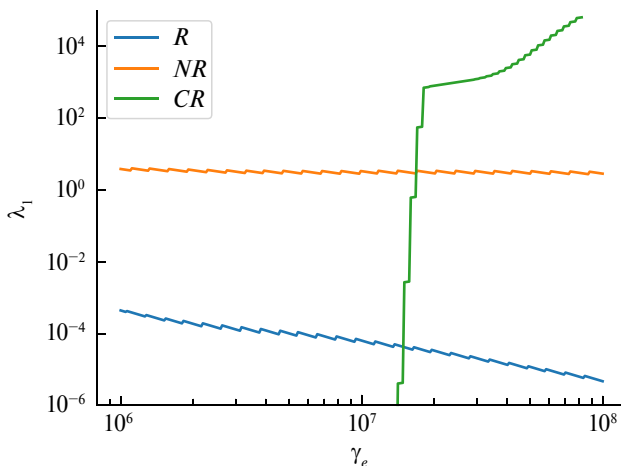
Результаты расчета для интересующих нас  $\gamma$ -факторов первичных частиц представлены на рис. 7. Как можно видеть, во всем интересующем нас диапазоне энергий обратным комптоновским рассеянием можно пренебречь. Более того, результаты для нерезонансного рассеяния, представленные на рис. 7, получены для  $\Delta\mu = 1$ , в то время как характерные значения  $\Delta\mu$  на высотах порядка радиуса звезды составляют  $(R_0/R)^2 \ll 1$ .

Поскольку же, как уже было сказано выше, масштаб генерации вторичной плазмы составляет несколько радиусов звезды, приведенная оценка на самом деле значительно завышена. Поэтому в данном разделе мы ограничимся рассмотрением только изгибного механизма. В этом случае концентрация первичных фотонов  $n_\gamma$  определяется спектром изгибного излучения

$$dN_\gamma^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^2}{cR_c(z)} \frac{\gamma_e F(\omega/\omega_c)}{\hbar\omega} d\omega dz \equiv n_\gamma d\omega dz, \quad (31)$$

где

$$F(t) = t \int_t^\infty K_{5/3}(x) dx \quad (32)$$



**Рис. 7.** Сравнение эффективности генерации вторичной плазмы для изгибного излучения и обратного резонансного и нерезонансного комптоновского рассеяния

и

$$\omega_c = \frac{3}{2} \frac{c}{R_c} \gamma_e^3. \quad (33)$$

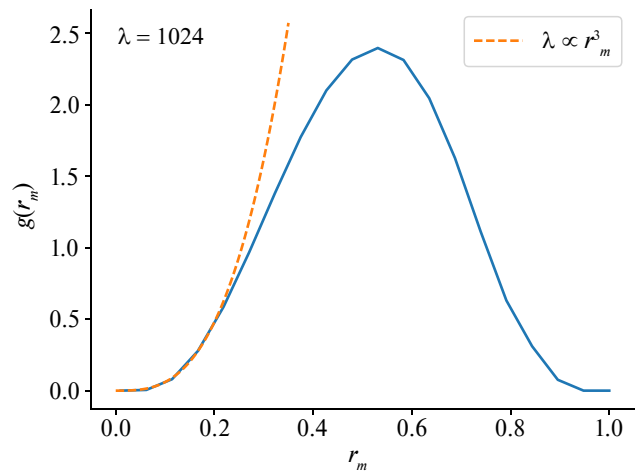
Определив количество частиц  $\lambda_1$ , рождаемых одной первичной частицей, можно найти и концентрацию вторичной плазмы, домножив  $\lambda_1$  на концентрацию первичных частиц, то есть на гольдрайховскую плотность. Тогда, согласно определению (22), имеем

$$\lambda g(r_m, \phi_m) = \lambda_1(r_m, \phi_m) \times \begin{cases} 1, & \chi < 85^\circ, \\ \frac{\cos \theta_b}{\sqrt{\frac{\Omega R}{c}}}, & \chi > 85^\circ. \end{cases} \quad (34)$$

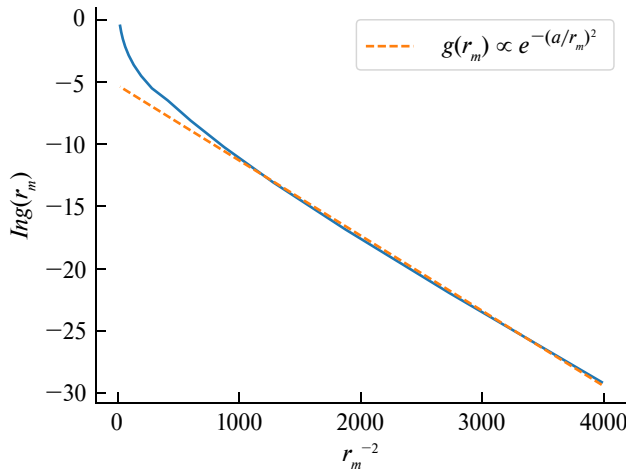
#### 4.2. Осесимметричный случай

Как и при определении ускоряющего потенциала, удобно отдельно рассматривать неортогональные и ортогональные пульсары. В осесимметричном случае полученные результаты интересно сравнить с работой [35], где аналогичные вычисления проводились, фактически, для пульсаров вблизи линии смерти (т. е. вся магнитосфера полагалось вакуумной). Хотя качественная форма полученных профилей совпадает с результатами данной работы, существует и несколько существенных отличий.

Прежде всего, оказалось, что энергии первичных фотонов, как правило, не хватает, чтобы запустить многоступенчатый синхротронный каскад. То есть величина  $f_{\text{SR}}$  близка к 1 для энергий изгибных фотонов. Соответственно, и множественность вторичной плазмы при одинаковых параметрах оказалась меньше, чем в работе [35]. Еще одно отличие касается асимптотического поведения профиля концентрации вблизи магнитной оси. В то время как в работе [35] на основании качественных соображений утверждалось, что с хорошей точностью можно положить  $g(r_m) \propto r_m^3$  при  $r_m \ll 1$ , в настоящей



**Рис. 8.** Профиль концентрации вторичной плазмы  $g(r_m)$  для пульсара с параметрами  $P = 0.5$  с,  $B_{12} = 1.0$ ,  $\chi = 10^\circ$ . Штриховой линией показано приближение  $g \propto r_m^3$



**Рис. 9.** Линеаризация поведения профиля концентрации в пределе  $r_m \rightarrow 0$ . Штриховой линией показана асимптотика  $g(r_m) \propto e^{-(a/r_m)^2}$ .

работе был получен результат  $g(r_m) \propto \exp[-a^2/r_m^2]$ ,  $a \ll 1$  (рис. 8, 9). Данная асимптотика следует из разложения спектра изгибного излучения (31) вблизи магнитной оси, который не был учтен в работе [35]. Стоит, однако, отметить, что полученная выше асимптотика применима лишь вблизи магнитной оси ( $r_m < 0.03$ ), в то время как кубическая зависимость лучше описывает профиль на больших масштабах  $0.03 < r_m < 0.2$ . Так что для практических целей следует пользоваться асимптотикой  $g(r_m) \propto r_m^3$ .

#### 4.3. Неосесимметричный случай

На рис. 10 показаны поперечные профили концентрации  $lg(r_m, \phi_m)$  для различных магнитных полей  $B_{12}$  и углов наклона  $\chi$  и для периода  $P = 0.3$  с, характерного для интеримпульсных пульсаров. Как можно видеть, для умеренных магнитных полей и углов  $\chi$ , мало отличающихся от  $90^\circ$ , генерация плазмы оказывается в значительной степени подавленной. При этом профили плотности в целом повторяют профили, определенные ранее в работе [20] в рамках качественного рассмотрения. Тем самым остается в силе и основной вывод этой статьи, касающийся статистики интеримпульсных пульсаров (наблюдаемое число интеримпульсных пульсаров говорит в пользу закона эволюции угла  $\chi$  в сторону углов  $\sim 90^\circ$ ).

Напомним, что для ортогональных пульсаров сама возможность генерации вторичной плазмы оказывается под вопросом. Действительно, при  $\chi \sim 90^\circ$  гольдрайховская плотность (3) значительно меньше, чем в неортогональном случае. Так как данная величина является источником в уравнении Пуассона (4), при прочих равных условиях ортогональные пульсары должны обладать заметно меньшим ускоряющим потенциалом, что должно сказаться на возможности генерации плазмы.

Особенно интересен этот вопрос в контексте необходимой для генерации вторичной плазмы ве-

личины магнитного поля, оценить которое невозможно без явного использования модели эволюции. Хотя для обыкновенных пульсаров выбор конкретной модели приводит лишь к различию на фактор  $\sim 2 - 3$ , для ортогональных пульсаров разница может быть заметно больше. Действительно, в то время как общепринятая МГД-модель эволюции [37–39] предсказывает магнитные поля, мало отличающиеся от стандартной оценки  $B_{12} \approx \dot{P}_{-15}^{1/2} P^{1/2}$ ,

$$B_{12}^{\text{MHD}} \approx \frac{\dot{P}_{-15}^{1/2} P^{1/2}}{\sqrt{1 + \sin^2 \chi}}, \quad (35)$$

в рамках BGI-модели, предложенной в работе [40], магнитное поле записывается в виде

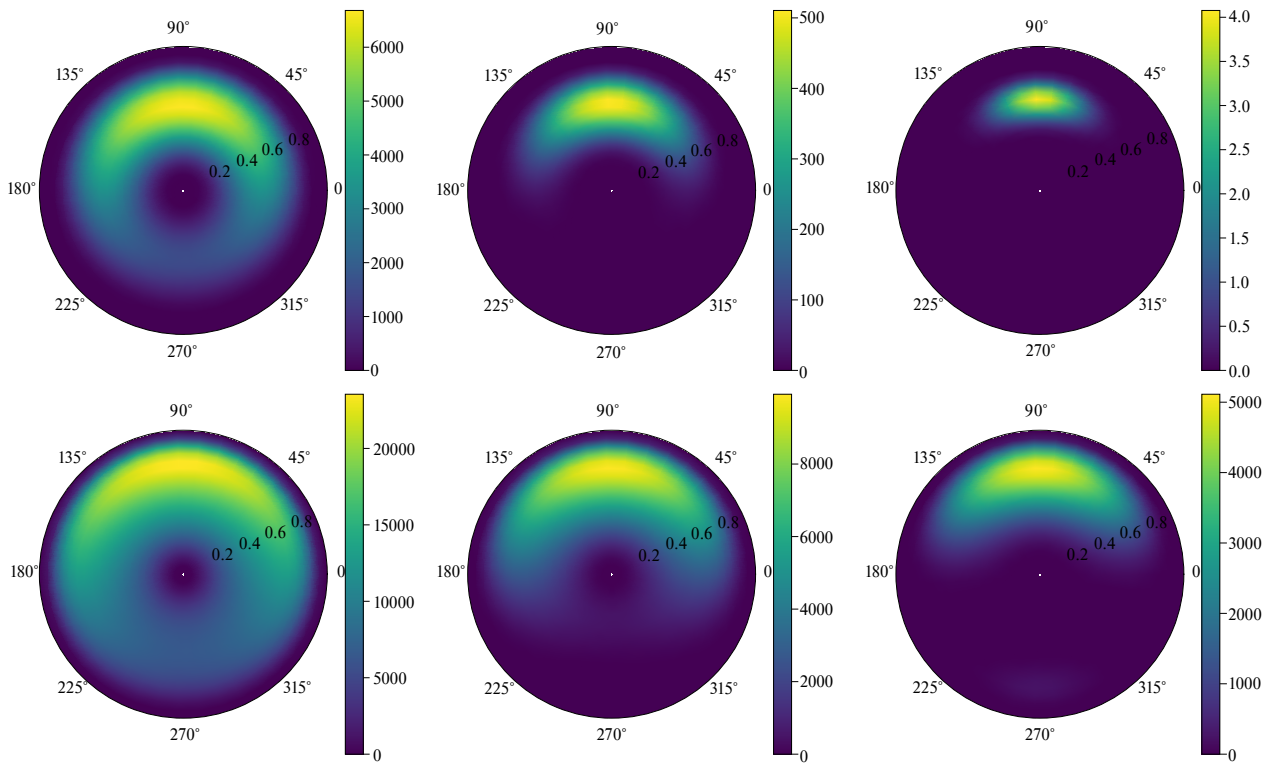
$$B_{12}^{\text{BGI}} \approx \frac{\dot{P}_{-15}^{1/2} P^{1/2}}{\sqrt{\cos^2 \chi + C}}, \quad (36)$$

где  $C \sim \sqrt{\Omega R/c} \ll 1$ . В результате соотношение (36) для ортогональных пульсаров приводит к оценке  $B_{12} \approx 10 P^{3/4} \dot{P}_{-15}^{1/2}$  [20], которая дает значения магнитного поля, в несколько раз большие, чем предсказывает модель МНД. А при больших магнитных полях условие генерации вторичных частиц для ортогональных пульсаров будет выполнено в большем диапазоне периодов. Иными словами, и здесь возникает указание на справедливость модели BGI.

Этот вопрос, однако, требует более детального анализа, выходящего за рамки настоящей работы. Соответственно, в данной работе не преследовалась и цель проводить расчеты для конкретных радиопульсаров, этому будет посвящена отдельная статья. В частности поэтому мы ограничились лишь обсуждением самой модели генерации вторичной плазмы для магнитных полей, превышающих стандартные оценки для интеримпульсных пульсаров, но не выходящих за пределы применимости нашей модели:  $B < B_{\text{cr}}$  [41]. В следующей статье предполагается также использовать эту модель для определения средних профилей наблюдаемого радиоизлучения.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе был предложен новый подход к определению ускоряющего потенциала над полярной шапкой нейтронной звезды. В его основе лежит концепция вакуумного зазора, высота которого предполагается зависимой от координат на полярной шапке и определяется самосогласованно с электрическим потенциалом. Для реализации данного подхода была построена численная процедура, заключающаяся в итеративном решении уравнения Пуассона в вакуумной области и пересчете ее верхней границы. Для решения трехмерного уравнения Пуассона в области с изменяющейся геометрией был успешно применен метод PINN.



**Рис. 10.** Поперечные профили концентрации  $\lambda g(r_m, \phi_m)$  для ортогональных пульсаров для различных магнитных полей и углов наклона

Важно отметить, что предложенный подход впервые позволил количественно определить структуру ускоряющего потенциала для ортогональных пульсаров, являющуюся для таких объектов существенно неосесимметричной. Используя данный метод и модель генерации вторичной электрон-позитронной плазмы были проведены расчеты поперечных профилей концентрации как для обыкновенных, так и для ортогональных пульсаров. Также было исследовано влияние обратного комптоновского рассеяния на рассматриваемые процессы и было показано, что даже при температуре полярной шапки  $T \sim 10^6$  К этим процессом можно пренебречь.

Далее, для ортогональных пульсаров было проведено предварительное исследование зависимости эффективности генерации электрон-позитронных пар от величины магнитного поля и угла наклона магнитной оси к оси вращения. Было показано, что для углов  $89^\circ \lesssim \chi \lesssim 91^\circ$  и умеренного магнитного поля  $B_{12} \sim 2$ , множественность вторичной плазмы оказывается на несколько порядков меньше, чем для обыкновенных пульсаров. В то же время, как хорошо известно [20], ортогональные радиопульсары наблюдаются, и оценки угла наклона магнитной оси к оси вращения для некоторых из этих объектов попадают в указанный диапазон.

Можно предложить несколько объяснений такому противоречию. В первую очередь, так как оценки углов наклона пульсаров имеют большую погрешность, может оказаться, что пульсары с такими углами просто не наблюдаются. Другим объяснением

может являться большее по сравнению с магнитодипольной оценкой магнитное поле, что в свою очередь предполагает уточнение модели эволюции пульсаров. Также не стоит исключать и возможную недипольность магнитного поля для таких объектов, также способную усилить процессы генерации вторичной плазмы. Таким образом, данное наблюдение мотивирует обратить большее внимание на светимости ортогональных пульсаров и оценки их углов наклона магнитной оси к оси вращения.

Наконец, отметим, что одним из основных приложений полученных результатов является изучение распространения радиоизлучения в магнитосфере нейтронной звезды. Действительно, как было показано в работах [6, 35, 42], эффекты преломления и поглощения играют существенную роль в формировании среднего профиля интенсивности. Таким образом, верификация моделей генерации радиоизлучения невозможна без учета реального поперечного профиля концентрации вторичной плазмы. Кроме того, информация о профилях плотности плазмы для ортогональных пульсаров позволит уточнить их функцию видимости, что необходимо для анализа статистики данных объектов [20].

Конечно, нельзя не отметить модельность решенной задачи. Действительно, многие численные [10, 13, 16] и аналитические [43] работы указывают на существенную нестационарность генерации вторичной плазмы. Таким образом, границы применимости предложенной модели требуют отдельного, детального исследования. Тем не менее



на данный момент не существует нестационарных моделей, позволяющих определить пространственное распределение вторичной плазмы над полярной шапкой. Тем интереснее будет сравнить результаты данной работы с нестационарными численными моделями, когда их точность станет достаточной для определения профиля плотности истекающей плазмы.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-22-00120).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *S. Johnston, M. Kramer, A. Karastergiou, M.J. Keith, L.S. Oswald, A. Parthasarathy, and P. Weltevrede*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 520(4), 4801 (2023).
2. *B. Posselt, A. Karastergiou, S. Johnston, A. Parthasarathy, et al.*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 508(3), 4249 (2021).
3. *P.F. Wang, J.L. Han, J. Xu, C. Wang, et al.*, Res. Astron. and Astrophys. 23(10), id. 104002 (2023).
4. *V. Radhakrishnan and D.J. Cooke*, Astrophys. Letters 3, 225 (1969).
5. *L. Oster and W. Sieber*, Astrophys. J. 210, 220 (1976).
6. *V.S. Beskin and A.A. Philippov*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 425(2), 814 (2012).
7. *M.A. Ruderman and P.G. Sutherland*, Astrophys. J. 196, 51 (1975).
8. *B.C. Бескин*, Успехи физ. наук 188(4), 377 (2018).
9. *A.N. Timokhin*, Astrophys. J. 408(1), L41 (2010).
10. *A.N. Timokhin and J. Arons*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 429(1), 20 (2013).
11. *A.A. Philippov and A. Spitkovsky*, Astrophys. J. 785, id. L33 (2014).
12. *A. Tchekhovskoy, A. Philippov, and A. Spitkovsky*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 457, 3384 (2016).
13. *A.N. Timokhin and A.K. Harding*, Astrophys. J. 810(2), id. 144 (2015).
14. *F. Cruz, T. Grismayer, A.Y. Chen, A. Spitkovsky, and L.O. Silva*, Astrophys. J. Letters 919(1), id. L4 (2021).
15. *L.I. Arzamasskiy, V.S. Beskin, and K.K. Pirov*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 466(2), 2325 (2017).
16. *A.A. Philippov, A. Spitkovsky, and B. Cerutti*, Astrophys. J. Letters 801(1), id. L19 (2015).
17. *V.S. Beskin, A.V. Gurevich, and I.N. Istomin*, Sov. J. Experim. Theoret. Phys. 58(2), 235 (1983).
18. *S.E. Gralla, A. Lupsasca, and A. Philippov*, Astrophys. J. 851(2), id. 137 (2017).
19. *P. Goldreich and W.H. Julian*, Astrophys. J. 157, 869 (1969).
20. *E.M. Novoselov, V.S. Beskin, A.K. Galishnikova, M.M. Rashkovetskiy, and A.V. Biryukov*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 494(3), 3899 (2020).
21. *P. Sturrock*, Astrophys. J. 164, 529 (1971).
22. *V.S. Beskin and P.E. Litvinov*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 510(2), 2572 (2022).
23. *J.A. Hirschman and J. Arons*, Astrophys. J. 554(1), 624 (2001).
24. *B. Zhang, G.J. Qiao, W.P. Lin, and J.L. Han*, Astrophys. J. 478(1), 313 (1997).
25. *G.R. Blumenthal and R.J. Gould*, Rev. Modern Physics 42(2), 237 (1970).
26. *В.Б. Бесептецкий, Е.М. Луфшниц, Л.П. Пумаевский*, Квантовая электродинамика (М.: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1989).
27. *H. Herold*, Phys. Rev. D 19(10), 2868 (1979).
28. *C. D. Dermer*, Astrophys. J. 360, 197 (1990).
29. *A.T. Chantada, S.J. Landau, P. Protopapas, C.G. Scoccola, and C. Garraffo*, Phys. Rev. D 107(6), id. 063523 (2023).
30. *S. Mishra and R. Molinaro*, J. Quant. Spectroscop. Radiative Transfer 270, id. 107705 (2021).
31. *P. Stefanou, J.F. Urbán, and J.A. Pons*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 526(1), 1504 (2023).
32. *I. Dimitropoulos, I. Contopoulos, V. Mpsketzis, and E. Chaniadakis*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 528(2), 3141 (2024).
33. *S. Markidis*, Frontiers in Big Data 4, id. 669097 (2021).  
<https://doi.org/10.3389/fdata.2021.669097>
34. *J. Arons*, Astrophys. J. 266, 215 (1983).
35. *V.S. Beskin, A.Yu. Istomin, and A.G. Mikhaylenko*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 526(2), 1633 (2023).
36. *J.A. Hirschman and J. Arons*, Astrophys. J. 560(2), 871 (2001).
37. *A. Spitkovsky*, Astrophys. J. 648(1), L51 (2006).
38. *C. Kalapotharakos, I. Contopoulos, and D. Kazanas*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 420(4), 2793 (2012).
39. *A. Tchekhovskoy, A. Philippov, and A. Spitkovsky*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 457(3), 3384 (2016).
40. *V.S. Beskin, A.V. Gurevich, and Ya.N. Istomin*, Physics of the Pulsar Magnetosphere (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993).
41. *Ya.N. Istomin and D.N. Sobyenin*, Astron. Letters 33(10), 660 (2007).
42. *S.A. Petrova and Y.E. Lyubarskii*, Astron. and Astrophys. 355, 1168 (2000).
43. *E.A. Tolman, A.A. Philippov, and A.N. Timokhin*, Astrophys. J. Letters 933(2), id. L37 (2022).

# ACCELERATION POTENTIAL AND DENSITY PROFILE OF SECONDARY PLASMA IN THE MAGNETOSPHERE OF ORTHOGONAL PULSARS

© 2025 A. Yu. Istomin<sup>1,2</sup>, F. A. Kniazev<sup>1,2</sup>, V. S. Beskin<sup>2,1,\*</sup>

<sup>1</sup>*Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russia*

<sup>2</sup>*P. N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

*\*e-mail: beskin@td.lpi.ru*

A new method for determining the accelerating potential above the polar caps of radio pulsars with an arbitrary inclination angle of the magnetic axis to the rotation axis is proposed. The approach is based on the concept of a vacuum gap, the height and shape of the upper boundary of which are found self-consistently together with the solution of the corresponding Poisson equation. In turn, knowledge of the accelerating potential allows one to determine the transverse profiles of the secondary plasma density. It is also shown that the influence of inverse Compton scattering on the processes under consideration is insignificant.

*Keywords:* radio pulsars, accelerating potential, secondary plasma