

# НОРМА СМЕЩЕНИЯ ПРИ ВОЗМУЩАЮЩЕМ УСКОРЕНИИ, ИЗМЕНЯЮЩЕМСЯ ПО ЗАКОНУ ОБРАТНЫХ КВАДРАТОВ, В СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА, СВЯЗАННОЙ С ВЕКТОРОМ СКОРОСТИ

© 2025 г. Т. Н. Санникова

Крымская астрофизическая обсерватория Российской академии наук, пос. Научный, Крым, Россия  
e-mail: tnsannikova@crao.crimea.ru

Поступила в редакцию 22.07.2024 г.

После доработки 05.09.2024 г.

Принята в печать 11.09.2024 г.

Рассмотрена задача движения точки нулевой массы под действием притяжения к центральному телу и малого возмущающего ускорения  $\mathbf{P}' = \mathbf{P}/r^2$ , где  $r$  — расстояние до притягивающего центра, компоненты вектора  $\mathbf{P}$  полагаются постоянными в системе отсчета с осями, направленными по вектору скорости, главной нормали и вектору площадей. Ранее для данной задачи найдены уравнения движения в средних элементах и формулы перехода от оскулирующих элементов к средним в первом порядке малости; величинами второго порядка мы пренебрегаем. Если возмущающие силы малы, то оскулирующая орбита слабо отклоняется от средней. Разность  $d\mathbf{r}$  векторов положения на оскулирующей и средней орбитах является квазипериодической функцией времени. В данной работе получена евклидова (среднеквадратичная по средней аномалии) норма  $\|d\mathbf{r}\|^2$  смещения оскулирующей орбиты относительно средней. Оказалось, что  $\|d\mathbf{r}\|^2$  зависит только от компонентов вектора  $\mathbf{P}$  (положительно определенная квадратичная форма), большой полуоси (пропорционально второй степени) и эксцентриситета оскулирующего эллипса. Норма  $\|d\mathbf{r}\|^2$  получена в виде рядов по степеням эксцентриситета  $e$ . Полученное выражение пригодно до  $e_0 \approx 0.995862$ , при  $e > e_0$   $\varphi = \sqrt{\|d\mathbf{r}\|^2}$  может принимать комплексные значения. Результаты применены к задаче о движении модельных тел под действием возмущающего ускорения, обусловленного эффектом Ярковского. Также проведено сравнение результатов с аналогичными для нормы  $\|d\mathbf{r}\|^2$  в системе отсчета, связанной с радиусом-вектором.

**Ключевые слова:** эффект Ярковского, тангенциальное ускорение, среднеквадратичная норма, смещение оскулирующей орбиты от средней

DOI: 10.31857/S0004629925010075, EDN: HLSGTG

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В статье [1] сформулирована задача о движении точки нулевой массы  $\mathcal{A}$  под действием притяжения к центральному телу  $\mathcal{S}$  (например, к Солнцу) и возмущающего ускорения  $\mathbf{P}'$ , которое подчиняется закону обратных квадратов  $\mathbf{P}' = \mathbf{P}/r^2$ , где  $r = |\mathbf{r}|$  — модуль радиуса-вектора  $\mathbf{r} = \mathcal{S}\mathcal{A}$ . Компоненты  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, W$  вектора  $\mathbf{P}$  постоянны в системе  $\mathcal{O}$ , орты которой направлены по вектору скорости, главной нормали к оскулирующей орбите и бинормали (направленной по вектору площадей) соответственно.

Отношение модулей возмущающего ускорения  $|\mathbf{P}'|$  и вызванного притяжением к центральному телу основного ускорения  $\chi^2/r^2$  считается малым порядком  $\mu$ :

$$\max \frac{|\mathbf{P}'|}{\chi^2 r^{-2}} = \max \frac{|\mathbf{P}|}{\chi^2} = \mu \ll 1,$$

где  $\chi^2$  — произведение постоянной тяготения на массу  $\mathcal{S}$ . Величинами порядка  $\mu^2$  пренебрегается. В ра-

боте [1] к уравнениям движения описанной задачи применено осредняющее преобразование, найдены уравнения движения в средних элементах и формулы перехода от оскулирующих элементов к средним:

$$\epsilon_n = \bar{\epsilon}_n + u_n, \quad (1)$$

где  $\epsilon_n$  — шесть оскулирующих элементов;  $\bar{\epsilon}_n$  — шесть средних элементов;  $u_n$  — функции замены переменных, которые считаются функциями средних элементов  $\bar{\epsilon}_k$ , но в первом приближении безразлично, считать ли аргументы  $u_n$  средними или оскулирующими.

Явные выражения  $u_n$  для элементов орбиты  $\omega, e, i, \Omega, \sigma, M$  (среднее движение, эксцентриситет, наклон, долгота восходящего узла, аргумент перигелла и средняя аномалия соответственно) найдены в работе [1] и приведены в Приложении А (формулы (A1)). Там же приведена формула (A5) для функции  $u_7$  замены оскулирующей большой полуоси средней, поскольку далее в качестве основной системы элементов орбиты будем использовать

$a, e, i, \Omega, \sigma, M$  (большая полуось, эксцентриситет, наклон орбиты, долгота восходящего узла, аргумент перицентра и средняя аномалия соответственно). В слабовозмущенных задачах первые пять элементов медленно изменяются со временем, тогда как средняя аномалия  $M$  служит быстрой переменной.

Отклонение оскулирующей орбиты от средней наглядно можно представить как разность  $d\mathbf{r}$  векторов положения небесного тела на оскулирующей и средней орбитах. Если возмущающие силы малы, то оскулирующая орбита слабо отклоняется от средней, а  $d\mathbf{r}$  является квазипериодической функцией времени и быстро меняется, поэтому больший интерес представляет норма  $d\mathbf{r}$  как норма вектор-функции от  $M$ . Выбор средней аномалии в качестве переменной, по которой определяется норма, обусловлен тем, что по  $M$  сохраняется квазипериодичность функции  $d\mathbf{r}$ .

Норма разности  $d\mathbf{r}$  позволит оценить отклонение оскулирующей орбиты от средней вследствие периодических возмущений и покажет, нужно ли учитывать эти возмущения (точнее, отличия оскулирующих элементов от средних) или можно ограничиться вековым движением, которое дается осредненными уравнениями.

Наиболее часто в небесной механике используются чебышевская (равномерная) и евклидова (среднеквадратичная) нормы [2–4]. Для функции  $f$  —  $2\pi$ -периодической по  $M$  и непрерывной на отрезке  $[-\pi, \pi]$  скалярной или векторной функции от элементов орбиты — эти нормы имеют вид:

$$\langle f \rangle = \max_{M \in [-\pi, \pi]} |f(a, \dots, M)|,$$

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dM.$$

Аналитические выражения для чебышевской нормы можно получить лишь для простейших функций (см. примеры в работах [4, 5]). Напротив, для евклидовой нормы это удается часто.

В работе [4] выведены формулы для  $(d\mathbf{r})^2$ , выраженного через разности элементов  $u_n$ . С их помощью в статье [6] получена евклидова норма  $\|d\mathbf{r}\|^2$  смещения оскулирующей орбиты относительно средней при наличии малого возмущающего ускорения, обратно пропорционального квадрату расстояния до притягивающего центра в системе отсчета, связанной с радиусом-вектором. Данная статья посвящена определению нормы  $\|d\mathbf{r}\|^2$  в системе отсчета, связанной с вектором скорости. В заключении приведен сравнительный анализ этих норм.

## 2. НОРМА РАЗНОСТИ ОСКУЛИРУЮЩИХ И СРЕДНИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Запишем выражение (A5) для  $u_7$  и пять последних уравнений (A1) для  $u_2 - u_6$  как приращения элементов  $\delta e_n$  и выразим их через эксцентрическую аномалию  $E$ , учитывая соотношения, приведенные

в Приложении В. Затем с помощью средств компьютерной алгебры представим полученные выражения рядами по степеням эксцентриситета, поскольку исходные выражения (A1), (A5) являются сложными функциями от  $e$ . В Приложении С приведены разложения выражений (A1), (A5) с точностью до  $e^{10} - e^{12}$ , обеспечивающие соблюдение условия нулевого среднего (как требуется для функций замены переменных  $u_n$  согласно [1]), а также минимум три верных знака после запятой при вычислении  $\delta e_n$  в части, зависящей от эксцентриситета, при малых и умеренных  $e \leq 0.6$  (см. формулы (C1)). Однако для вычисления нормы смещения оскулирующей орбиты относительно средней использованы разложения выражений (A1), (A5) с точностью до 25-й степени эксцентриситета (ввиду их громоздкости мы не приводим их здесь).

Рассматривая выражения (C1), можно заметить, что они представляют собой ряды Фурье вида  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(e) \sin kE$  либо  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(e) \cos kE$ , где функции  $a_k(e)$  — ряды Маклорена по степеням эксцентриситета с рациональными коэффициентами, причем первый член ряда  $a_k(e)$  имеет порядок  $k - 2$  и более. Поэтому при сохранении членов до определенной степени эксцентриситета в рядах Фурье остается конечное число слагаемых.

Некоторые из выражений (C1) имеют особенности при  $e = 0$  или  $e = 1$ . Но поскольку осреднение по средней аномалии подразумевает эллиптичность оскулирующей орбиты, то есть  $0 < e < 1$ , то сингулярность при вычислениях не встречается.

В Приложении D приведены формулы для разности векторов положения на оскулирующей и средней орбитах, выраженной через разности элементов [4], и нормы (формулы (D1), (D2), (D3)).

Подставляя (C1) в (D2), и далее в (D1) средствами компьютерной алгебры получим для  $(d\mathbf{r})^2$  выражение вида

$$\begin{aligned} (d\mathbf{r})^2 = & \frac{\mathfrak{I}^2 a^2}{\chi^4} \sum_{k=0}^{\infty} a_{1k}(e) \cos kE + \\ & + \frac{\mathfrak{N}^2 a^2}{\chi^4} \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}(e) \cos kE + \\ & + \frac{W^2 a^2}{\chi^4} \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k}(e) \cos kE + \\ & + \frac{\mathfrak{I} \mathfrak{N} a^2}{\chi^4} \sum_{k=1}^{\infty} a_{4k}(e) \sin kE, \end{aligned} \quad (2)$$

где ряды Маклорена для коэффициентов  $a_{nk}(e)$  всегда начинаются с члена порядка  $e^k$ . На практике суммирование в (2) проводилось до  $k = 50$ .

Мы не приводим промежуточные выражения для функций (D2) и  $a_{nk}(e)$  для экономии места и сразу перейдем к вычислению нормы (D3).

Подставив (2) в (D3) получим:

$$\begin{aligned} \varrho^2 = \|\mathbf{dr}\|^2 = & \frac{\mathfrak{Z}^2 a^2}{\chi^4} \sum_{k=0}^{\infty} a_{1k}(e) \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{a} \cos kE dE + \\ & + \frac{\mathfrak{N}^2 a^2}{\chi^4} \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}(e) \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{a} \cos kE dE + \\ & + \frac{W^2 a^2}{\chi^4} \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k}(e) \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{a} \cos kE dE + \\ & + \frac{\mathfrak{Z}\mathfrak{N}a^2}{\chi^4} \sum_{k=1}^{\infty} a_{4k}(e) \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{a} \sin kE dE. \end{aligned} \quad (3)$$

Последнее слагаемое в (3) — нечетная функция  $E$ , она исчезает в результате интегрирования. В остальных случаях при интегрировании учтем [5, п. 3.6.3]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{a} dE &= 1, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{a} \cos E dE &= -\frac{e}{2}, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{a} \cos kE dE &= 0 \quad \text{при } k \geq 2. \end{aligned} \quad (4)$$

В итоге получим норму разности оскулирующих и средних элементов:

$$\begin{aligned} \varrho^2 = \|\mathbf{dr}\|^2 = & \frac{\mathfrak{Z}^2 a^2}{\chi^4} \left( a_{10}(e) - \frac{e}{2} a_{11}(e) \right) + \\ & + \frac{\mathfrak{N}^2 a^2}{\chi^4} \left( a_{20}(e) - \frac{e}{2} a_{21}(e) \right) + \\ & + \frac{W^2 a^2}{\chi^4} \left( a_{30}(e) - \frac{e}{2} a_{31}(e) \right) = \\ & = \frac{a^2}{\chi^4} (V_1 \mathfrak{Z}^2 + V_2 \mathfrak{N}^2 + V_3 W^2), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} V_1 = & \frac{1}{(1-e^2)^2} \left( 16 + \frac{1121e^2}{8} + \frac{10793e^4}{512} - \right. \\ & - \frac{239033e^6}{18432} - \frac{17713751e^8}{18874368} - \frac{16112611e^{10}}{37748736} - \\ & - \frac{222199537e^{12}}{1006632960} - \frac{15794064133e^{14}}{123312537600} - \\ & - \frac{78324446438359e^{16}}{969769255698432} - \frac{945456502286119e^{18}}{17455846602571776} - \\ & - \frac{135640061196163177e^{20}}{3562417673994240000} - \\ & - \frac{23949733051735938707e^{22}}{862105077106606080000} - \\ & \left. - \frac{256113538574688068647e^{24}}{12261049985516175360000} + O(e^{26}) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 = & \frac{1}{(1-e^2)^2} \left( 1 + \frac{29e^2}{8} - \frac{2221e^4}{288} + \frac{1907e^6}{512} - \right. \\ & - \frac{265501e^8}{491520} - \frac{5955551e^{10}}{58982400} - \frac{108054281e^{12}}{3853516800} - \\ & - \frac{347992909e^{14}}{46242201600} - \frac{80402703347e^{16}}{170467251978240} + \\ & + \frac{961519885723e^{18}}{454579338608640} + \frac{157193618149693e^{20}}{52384857115852800} + \\ & + \frac{12031971779882773e^{22}}{3771709712341401600} + \\ & \left. + \frac{7001336583337473239e^{24}}{226637845826025539200} + O(e^{26}) \right), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} V_3 = & \left( 1 - \frac{39e^2}{32} + \frac{101e^4}{576} + \frac{599e^6}{6144} + \frac{19889e^8}{307200} + \right. \\ & + \frac{86891e^{10}}{1843200} + \frac{145911e^{12}}{4014080} + \frac{14979701e^{14}}{513802240} + \\ & + \frac{286187473e^{16}}{11890851840} + \frac{402547717e^{18}}{19818086400} + \\ & + \frac{3098641663e^{20}}{177628774400} + \frac{233207333021e^{22}}{15347126108160} + \\ & \left. + \frac{300747020621e^{24}}{22455968071680} + O(e^{26}) \right). \end{aligned}$$

Выражения (5), (6) позволяют получить в числовом значении смещения  $\varrho$  не менее 2 верных знаков после запятой вплоть до  $e = 0.7$  по сравнению со значением, полученным путем численного интегрирования, как будет показано в разделе 3, но, в отличие от численного интегрирования, не требуют больших вычислительных ресурсов.

Исследуем поведение функций  $V_1$ ,  $V_2$  и  $V_3$  (6) на интервале  $e \in [0, 1)$ :

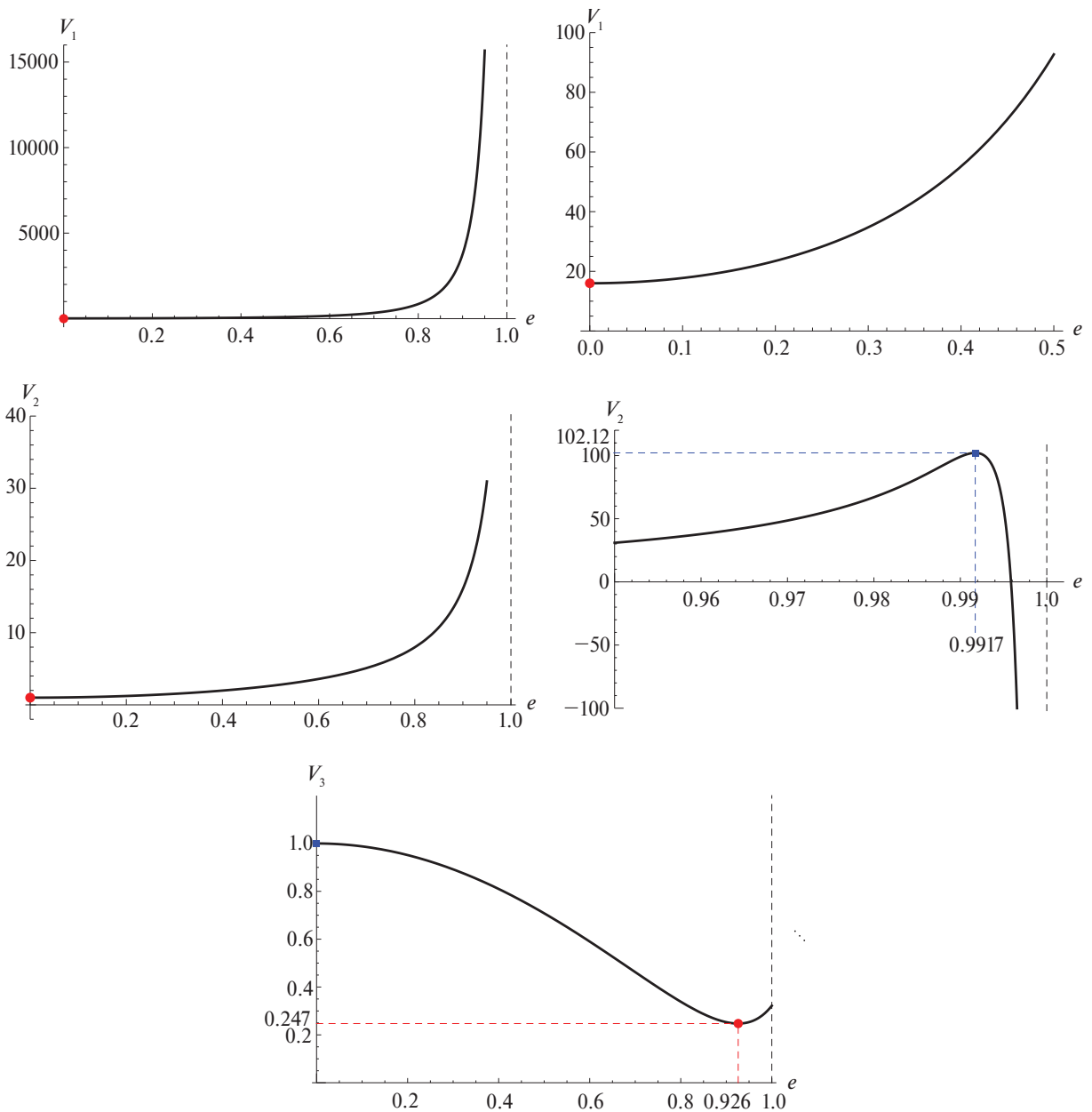
$\min(V_1) = 16$  при  $e = 0$ ,  $V_1 \rightarrow \infty$  при  $e \rightarrow 1$ ,  $V_1$  монотонно возрастает;

$\min(V_2) = 1$  при  $e = 0$ ,  $\max(V_2) \approx 102.12175$  при  $e \approx 0.991724$ ,  $V_2 \rightarrow -\infty$  при  $e \rightarrow 1$ ;

$\min(V_3) \approx 0.247374$  при  $e \approx 0.926173$ ,  $\max(V_3) = 1$  при  $e = 0$ .

Функция  $V_2 < 0$  при  $e > e_0 \approx 0.995862$ . Таким образом  $V_k > 0$  при  $e < e_0$ , следовательно, на интервале  $e \in [0, e_0]$  норма  $\varrho^2$  (5) положительна и  $\varrho$  — действительное число. Зависимость  $V_1$ ,  $V_2$  и  $V_3$  от  $e$  показана на рис. 1.

Как и в задаче с постоянным возмущающим ускорением  $\mathbf{P}'$ , представленной в работе [7],  $\varrho^2$  зависит только от компонентов вектора возмущающего ускорения  $\mathfrak{Z}$ ,  $\mathfrak{N}$ ,  $W$  (положительно определенная квадратичная форма), большой полуоси (пропорци-



**Рис. 1.** Значения  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  в зависимости от эксцентриситета  $e$  на интервале от 0 до 1. Верхние графики представляют  $V_1$  в разных масштабах. На левой панели сверху и в центре показаны значения  $V_1$  и  $V_2$  до  $e = 0.95$ . На графиках отмечены точки максимумов (синие квадратные маркеры) и точки минимумов (красные круглые маркеры)

онально второй степени) и эксцентриситета оскулирующего эллипса. От ориентации орбиты и положения точки  $A$  на ней  $\varphi^2$  не зависит.

Согласно работе [7] наибольшее значение  $\varphi^2$  для заданной орбиты при возмущающем ускорении  $\mathbf{P}'$  таким, что вектор  $\mathbf{P}$  находится внутри некоторого эллипсоида, ориентированного вдоль осей системы отсчета  $\mathcal{O}$ , равно:

$$\max \varphi^2 = \frac{a^2}{\chi^4} P^2 \max\{V_1, V_2, V_3\}, \quad (7)$$

где  $P = \sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{N}^2 + W^2} = \text{const}$ . Для  $e \in [0, 0.995859]$   $V_1 > V_2 \geq V_3$  (равенство достигается при  $e = 0$  и  $e \approx 0.995859$ ), при  $e \in (0.995859, e_0]$   $V_2 < V_3$ , на интервале  $e \in (e_0, 1.0)$  функция  $V_2(e)$  прини-

мает отрицательные значения, поэтому далее рассматриваем только интервал  $e \in (0, e_0]$ . С учетом сказанного выше выражение (7) дает

$$\begin{aligned} \max \varphi^2 &= \frac{a^2}{\chi^4} P^2 V_1(e), \\ \max \varphi &= \frac{a}{\chi^2} P \sqrt{V_1(e)}. \end{aligned} \quad (8)$$

### 3. СМЕЩЕНИЕ ОСКУЛИРУЮЩЕЙ ОРБИТЫ ОТНОСИТЕЛЬНО СРЕДНЕЙ ВСЛЕДСТВИЕ ЭФФЕКТА ЯРКОВСКОГО

В статье [8] рассмотрены модельные объекты с различными эксцентриситетами орбит от 0 до 0.99, и остальными орбитальными и теплофизическими характеристиками, как у астероида 101955 Bennu,

и найдены средние по орбите значения компонентов вектора  $\mathbf{P}$ , дрейфы элементов и смещение относительно невозмущенного положения в двух системах отсчета, связанных с радиусом-вектором и вектором скорости. Обращаясь к результатам работы [8], для этих модельных объектов вычислены смещение  $\varrho = \sqrt{\varrho^2}$  (5) оскулирующей орбиты относительно средней и максимальное значение  $\max \varrho$  (8). При вычислениях использованы константы

$$\chi^2 = 1.32712440041279419 \times 10^{20} \text{ м}^3/\text{с}^2,$$

$$1 \text{ а. е.} = 1.495978707 \times 10^{11} \text{ м},$$

$$1 \text{ сут} = 86400 \text{ с},$$

и те же исходные данные для астероида 101955 Bennu, как и в работе [8]. Для вычисления  $\varrho$  необходимо только значение большой полуоси  $a = 1.126391025894812 \text{ а. е.}$ , значения эксцентриситета указаны в табл. 1 для каждой модели, так же как значения тангенциального  $\mathfrak{T}$  и нормального  $\mathfrak{N}$  компонентов вектора  $\mathbf{P}$ . Согласно [8] среднее за орбитальный период значение компонента  $W = 0$ .

Норма смещения вычислена также путем численного интегрирования исходных выражений, приведенных в Приложении А, полагая в формулах (A2), (A3) и (A4) верхний предел суммирования по  $n, m, s$  равным 100. Коэффициенты Ганзена вычислены с помощью интегральной формулы, выраженной

через эксцентрическую аномалию  $E$  и приведенной в работе [9]. Также при численном интегрировании использованы значения наклона орбиты  $i = 6.03494377024794^\circ$  и аргумента перигея  $\sigma = 66.22306084084298^\circ$ , как и в работе [8].

В табл. 1 приведены смещения  $\varrho$  и  $\varrho^*$ , вычисленные с помощью формул (5), (6) и численного интегрирования соответственно, а также абсолютная  $\Delta\varrho = |\varrho - \varrho^*|$  и относительная погрешность  $\delta\varrho = \frac{|\varrho - \varrho^*|}{\varrho^*} \cdot 100\%$ , и максимальное значение  $\max \varrho$  (8), вычисленные при различных эксцентриситетах  $e$ . Видно, что при  $e \leq 0.7$   $\Delta\varrho$  не превышает 1 см, то есть формулы (5), (6) позволяют получить в числовом значении  $\varrho$  не менее 2 верных знаков после запятой вплоть до  $e = 0.7$  по сравнению со значением, полученным путем численного интегрирования. Вследствие отбрасывания членов порядка  $O(e^{26})$  в формулах (6) при вычислении  $\varrho$  получено немного завышенное значение по сравнению с  $\varrho^*$ . Относительная погрешность составляет 0.2% и менее для всех рассмотренных  $e$ . Однако необходимо помнить, что само значение  $\varrho^*$  имеет ограниченную точность, поскольку в исходных выражениях также содержатся ряды.

Таблица 1. Исходные данные и результаты

$e$	$\mathfrak{T}, 10^{-14}$ а.е. <sup>3</sup> /сут <sup>2</sup>	$\mathfrak{N}, 10^{-14}$ а.е. <sup>3</sup> /сут <sup>2</sup>	$\varrho, \text{ м}$	$\varrho^*, \text{ м}$	$\Delta\varrho, \text{ м}$	$\delta\varrho, \%$	$\max \varrho, \text{ м}$	$\varrho_{O^*}, \text{ м}$
0.001	-5.10168	-9.91079	129.185	129.185	$4.5 \cdot 10^{-9}$	$3.5 \cdot 10^{-9}$	253.901	129.185
0.01	-5.10155	-9.91054	129.245	129.245	$4.2 \cdot 10^{-11}$	$3.3 \cdot 10^{-11}$	254.029	129.231
0.05	-5.09849	-9.90457	130.680	130.680	$5.4 \cdot 10^{-13}$	$4.1 \cdot 10^{-13}$	257.147	130.351
0.10	-5.08887	-9.88585	135.127	135.127	$6.1 \cdot 10^{-12}$	$4.5 \cdot 10^{-12}$	266.802	133.848
0.20	-5.04976	-9.80969	152.479	152.479	$5.7 \cdot 10^{-14}$	$3.7 \cdot 10^{-14}$	304.430	147.865
0.30	-4.98212	-9.67805	180.585	180.585	$8.2 \cdot 10^{-11}$	$4.6 \cdot 10^{-11}$	365.370	171.674
0.40	-4.88179	-9.48280	219.968	219.968	$5.7 \cdot 10^{-10}$	$2.6 \cdot 10^{-10}$	450.989	206.987
0.50	-4.74156	-9.20998	273.527	273.527	$1.9 \cdot 10^{-7}$	$7.1 \cdot 10^{-8}$	567.932	258.152
0.60	-4.54897	-8.83547	348.406	348.405	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$2.9 \cdot 10^{-5}$	732.103	335.067
0.70	-4.28099	-8.31451	461.304	461.297	0.0071	0.0015	980.244	461.827
0.80	-3.88832	-7.55138	658.382	658.245	0.1369	0.0208	1413.488	711.424
0.85	-3.60997	-7.01056	831.777	831.343	0.4345	0.0523	1794.282	958.324
0.90	-3.22864	-6.26976	1136.522	1135.696	0.8257	0.0727	2462.726	1448.588
0.95	-2.62669	-5.10050	1879.287	1876.154	3.1327	0.1670	4089.474	2909.908
0.97	-2.23295	-4.33575	2678.000	2672.555	5.4447	0.2037	5836.915	4852.070
0.99	-1.53792	-2.98595	5562.831	5552.548	10.2828	0.1852	12143.297	14545.945

**Примечание.** Приведены: эксцентриситет  $e$ , тангенциальный  $\mathfrak{T}$  и нормальный  $\mathfrak{N}$  компоненты, смещения  $\varrho$  и  $\varrho^*$ , вычисленные с помощью формул (5), (6) и численного интегрирования, абсолютная  $\Delta\varrho$  и относительная  $\delta\varrho$  погрешности, максимальное значение  $\max \varrho$  (8), а также смещение  $\varrho_{O^*}$  в системе отсчета  $O^*$ , связанной с радиусом-вектором [6], при значениях компонентов возмущающего ускорения согласно [8]: радиальный  $S = 9.91079 \times 10^{-14} \text{ а.е.}^3/\text{сут}^2$ , трансверсальный  $T = -5.10168 \times 10^{-14} \text{ а.е.}^3/\text{сут}^2$  и бинормальный  $W = 0$ .

Из анализа результатов вычислений видно, что с ростом  $e$  увеличивается величина периодических возмущений, обусловленных эффектом Ярковского, хотя значения (по модулю) компонентов  $\mathfrak{Z}$ ,  $\mathfrak{Y}$  уменьшаются:  $\varrho = 129$  м для почти круговой орбиты и более 5.5 км при  $e = 0.99$ . Но в целом при малых возмущающих ускорениях, характерных для эффекта Ярковского, смещение оскулирующей орбиты относительно средней малó и им можно пренебречь, учитывая лишь вековые дрейфы элементов орбиты, как и было показано в работе [6].

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача движения точки нулевой массы под действием притяжения к центральному телу и малого возмущающего ускорения, обратно пропорционального квадрату расстояния до притягивающего центра в системе отсчета  $\mathcal{O}$  с осями, направленными по вектору скорости, главной нормали к оскулирующей орбите и бинормали. Получена евклидова (среднеквадратичная по средней аномалии) норма смещения  $\|\mathbf{dr}\|^2$ , где  $\mathbf{dr}$  представляет разность векторов положения на оскулирующей и средней орбитах, что позволяет оценить величину периодических возмущений. Оказалось, что  $\|\mathbf{dr}\|^2$  зависит только от компонентов вектора  $\mathbf{P}$  (положительно определенная квадратичная форма), большой полуоси (пропорционально второй степени) и эксцентриситета оскулирующего эллипса. Норма  $\|\mathbf{dr}\|^2$  получена в виде рядов по степеням эксцентриситета  $e$ . Полученное выражение пригодно только до  $e_0 \approx 0.995862$ , при  $e > e_0$   $\varrho = \sqrt{\|\mathbf{dr}\|^2}$  может принимать комплексные значения.

Результаты применены к задаче о движении модельных малых тел под действием возмущающего ускорения, возникающего вследствие эффекта Ярковского. Показано, что с ростом  $e$  увеличивается величина периодических возмущений, обусловленных эффектом Ярковского, хотя значения (по модулю) компонентов  $\mathfrak{Z}$ ,  $\mathfrak{Y}$  уменьшаются. Однако при малых возмущающих ускорениях, характерных для эффекта Ярковского, смещение оскулирующей орбиты относительно средней малó и им можно пренебречь, учитывая лишь вековые дрейфы элементов орбиты.

В заключение сравним полученные результаты с аналогичными для нормы смещения в задаче движения точки нулевой массы под действием притяжения к центральному телу и малого возмущающего ускорения  $\mathbf{P}'$ , обратно пропорционального квадрату расстояния до притягивающего центра в системе отсчета  $\mathcal{O}^*$  с осями, направленными по радиус-вектору, трансверсали и вектору площадей, при этом компоненты  $S$ ,  $T$ ,  $W$  вектора  $\mathbf{P}$  постоянны в системе  $\mathcal{O}^*$  [6]. Формулы главного результата (5) идентичны с точностью до замены компонентов возмущающего ускорения. Функции  $V_n(e)$  в обоих слу-

чаях — ряды по четным степеням эксцентриситета. Функции  $V_3(e)$  совпадают, поскольку компонент  $W$  одинаков для обеих систем отсчета. В системе  $\mathcal{O}^*$  функция  $V_1(e)$  является многочленом второй степени, тогда как в системе  $\mathcal{O}$  — бесконечным рядом,  $V_2(e)$  — ряды в обеих системах. Поскольку при нулевом эксцентриситете триедр  $(-\mathfrak{N}, \mathfrak{Z}, W)$  идентичен триедру  $(S, T, W)$  из работы [6], то  $V_1(0) = V_2^*(0)$ ,  $V_2(0) = V_1^*(0)$  и  $V_3(0) = V_3^*(0)$ , то есть свободные члены совпадают, как и должно быть. Здесь введено обозначение  $V_n^*$  для функций  $V_n$  из статьи [6], чтобы избежать путаницы.

В табл. 1 для сравнения приведены смещения  $\varrho$  и  $\varrho_{\mathcal{O}^*}$  в системах  $\mathcal{O}$  и  $\mathcal{O}^*$  соответственно. Очевидно, что величина смещения оскулирующей орбиты относительно средней не должна зависеть от выбора системы отсчета. Однако из табл. 1 видно, что рост  $\varrho_{\mathcal{O}^*}$  при больших  $e$  выражен сильнее, чем в системе  $\mathcal{O}$ . Это может свидетельствовать о завышении короткопериодических орбитальных возмущений для объектов на высоко эксцентрических орбитах при их расчете в системе  $\mathcal{O}^*$ .

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ

Данная статья выполнена за средства государственного задания, тема Рег. № 22022400207-0.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит анонимного рецензента за ценные комментарии, благодаря которым статья стала более полной и понятной.

#### ПРИЛОЖЕНИЯ

##### ПРИЛОЖЕНИЕ А. ФУНКЦИИ ЗАМЕНЫ ОСКУЛИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ СРЕДНИМИ

Явные выражения функций  $u_n$  в формулах перехода от оскулирующих элементов к средним (1), вычисленные в работе [1]:

$$u_1 = -\frac{6\omega}{\kappa^2(1-e)} \left[ \mathcal{F}_2\left(\frac{\theta}{2}, k\right) - \frac{1}{\pi} \mathbf{E}(k)M \right] \mathfrak{Z},$$

$$u_2 = \frac{4}{\kappa^2} \left\{ \mathcal{F}_1\left(\frac{\theta}{2}, k\right) - \frac{1}{\pi} \mathbf{K}(k)M - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{(1+e)} \left[ \mathcal{F}_3\left(\frac{\theta}{2}, k\right) - \frac{1}{\pi} \mathbf{D}(k)M \right] \right\} \mathfrak{Z} +$$

$$+ \frac{2\eta}{\kappa^2 e} \left[ \arctg \frac{\vartheta}{\eta} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi} (\eta^2 \mathbf{K}(e) - \mathbf{E}(e)) \right] \mathfrak{Y},$$

$$u_3 = \frac{1}{\kappa^2 \eta e} \left\{ \cos \sigma [\eta(\theta - M) - (E - M)] + \right.$$

$$\left. + \eta \sin \sigma \left[ \ln(1 + e \cos \theta) + 1 - \eta - \ln \frac{2\eta^2}{1 + \eta} \right] \right\} W,$$

$$u_4 = \frac{1}{\chi^2 \eta e \sin i} \left\{ \sin \sigma \left[ \eta(\theta - M) - (E - M) \right] - \right. \\ \left. - \eta \cos \sigma \left[ \ln(1 + e \cos \theta) + 1 - \eta - \ln \frac{2\eta^2}{1 + \eta} \right] \right\} W, \quad (A1)$$

$$u_5 = -\frac{2}{\chi^2 e^2} \left[ \vartheta - \frac{2\eta}{\pi} \mathbf{E}(e) \right] \mathfrak{Z} + \\ + \frac{1}{\chi^2} \left[ \frac{1}{\eta} \left( \mathcal{F}_1 \left( E + \frac{\pi}{2}, e \right) - \mathbf{K}(e) \left( 1 + \frac{2}{\pi} M \right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{e^2} \ln \frac{e \sin E + \sqrt{1 - e^2 \cos^2 E}}{\eta} \right] \mathfrak{H} - u_4 \cos i, \\ u_6 = \frac{2}{\chi^2 (1 - e)} \left\{ 2(1 - e) \left[ \arctg \frac{\vartheta}{\eta} - \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \mathbf{E}(e) - \right. \right. \\ \left. - \frac{\eta^2}{\pi} \mathbf{K}(e) + \frac{1}{e^2} \left( \frac{\eta}{2} \vartheta - \frac{1}{\pi} \mathbf{E}(e) \right) \right] + \\ + \frac{3\mathbf{E}(k)}{\pi} \left[ e \left( \cos E + \frac{e}{2} \right) - \frac{e^2}{4} \cos 2E \right] - \\ - \frac{3\mathbf{E}(k)}{\pi} \mathcal{I}(\theta - E) - 3\mathcal{I}H \left\} \mathfrak{Z} + \right. \\ \left. + \frac{\eta}{\chi^2} \left[ \mathcal{F}_1 \left( E + \frac{\pi}{2}, e \right) - \mathbf{K}(e) \left( 1 + \frac{2}{\pi} M \right) - \right. \right. \\ \left. - \frac{1}{e^2} \ln \frac{e \sin E + \sqrt{1 - e^2 \cos^2 E}}{\eta} \right] \mathfrak{H},$$

где  $\theta$  — истинная аномалия,  $E$  — эксцентриская аномалия,  $\omega, e, i, \Omega, \sigma, M$  — среднее движение, эксцентриситет, наклон орбиты, долгота восходящего узла, аргумент перицентра и средняя аномалия соответственно,

$$\vartheta = \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta} = (1 + e) \times \\ \times \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)} = \eta \sqrt{\frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E}},$$

$$\mathcal{I}(\theta - E) = -\frac{\beta(2 + \beta^2)}{1 + \beta^2} \left( \frac{e}{2} + \cos E \right) + \frac{2}{1 + \beta^2} \times \\ \times \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n + 1 - (n - 1)\beta^2}{n^2(n^2 - 1)} \beta^n \cos nE, \quad (A2)$$

$$\eta = \sqrt{1 - e^2}, \quad \beta = \frac{e}{(1 + \eta)}, \quad k = \frac{2\sqrt{e}}{(1 + e)},$$

$$\mathcal{I}H = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{n} \cos nM, \quad (A3) \\ C_n = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m B_m(k) S_n^{0m}(e) k^{2m}.$$

В (A3) коэффициенты  $S_n^{0m}(e) = X_n^{0m}(e) - X_{-n}^{0m}(e)$  можно найти в статьях [10–13], различные методики вычисления коэффициентов Ганзена  $X_k^{nm}$  изложены в работе [9], а  $B_m(k)$  можно представить рядом [14]:

$$B_m(k) = \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s + 1) \cdots (s + m)}{(s + m + 1) \cdots (s + 2m)} \times \\ \times \left[ \frac{(2s + 2m - 1)!!}{(2s + 2m)!!} \right]^2 \frac{k^{2s}}{2s + 2m - 1}. \quad (A4)$$

Здесь и ниже использованы стандартные обозначения для полных и неполных эллиптических интегралов в форме Лежандра:

$$\mathbf{K}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{h(x, k)}, \quad \mathbf{E}(k) = \int_0^{\pi/2} h(x, k) dx,$$

$$\mathbf{D}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x dx}{h(x, k)} = \frac{\mathbf{K}(k) - \mathbf{E}(k)}{k^2},$$

$$\mathcal{F}_1(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{dx}{h(x, k)}, \quad \mathcal{F}_2(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} h(x, k) dx,$$

$$\mathcal{F}_3(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{\sin^2 x dx}{h(x, k)} = \frac{\mathcal{F}_1(\varphi, k) - \mathcal{F}_2(\varphi, k)}{k^2},$$

где

$$h(x, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}.$$

Используя связь среднего движения и большой полуоси  $\omega = \chi a^{-3/2}$ ,  $d\omega = (-3/2)\chi a^{-5/2} da$ , вместо  $u_1$  получим выражение, относящееся к большой полуоси:

$$u_7 = \frac{4a}{\chi^2(1 - e)} \left[ \mathcal{F}_2 \left( \frac{\theta}{2}, k \right) - \frac{1}{\pi} \mathbf{E}(k) M \right] \mathfrak{Z}. \quad (A5)$$

*Замечание.* В [1] выражение для  $u_6$  обозначено буквой  $v$  и в нем допущена опечатка: в первых квадратных скобках пропущено слагаемое  $2\mathbf{E}(e)/\pi$ . Здесь мы приводим правильное выражение и далее используем его.

## ПРИЛОЖЕНИЕ В. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ФУНКЦИЯМИ ИСТИННОЙ И ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОЙ АНОМАЛИЙ

Переход от истинной аномалии к эксцентриской осуществляется с помощью соотношений [5, 15]:

$$\cos \theta = \frac{a}{r} (\cos E - e), \quad \sin \theta = \frac{a}{r} \eta \sin E, \\ r = a(1 - e \cos E),$$

$$\begin{aligned}
\ln(1 + e \cos \theta) - \ln \frac{2\eta^2}{1 + \eta} &= -\ln(1 - 2\beta \cos E + \beta^2) = \\
&= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n} \cos nE, \\
E - M &= e \sin E, \\
\theta - E &= 2 \arctg \frac{\beta \sin E}{1 - \beta \cos E} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n} \sin nE, \\
\theta - M &= \theta - E + E - M = e \sin E + 2 \arctg \frac{\beta \sin E}{1 - \beta \cos E}.
\end{aligned}$$

### ПРИЛОЖЕНИЕ С. ФУНКЦИИ $\delta\epsilon_e$

Функции замены переменных  $u_n$ , входящие в выражения (1), запишем как приращения элементов орбиты и представим в виде рядов:

$$\begin{aligned}
\delta\alpha &= \frac{a\mathfrak{A}}{\kappa^2(1 - e^2)^2} \times \\
&\times \left[ \left( 6e - 5e^3 - \frac{25e^5}{32} - \frac{29e^7}{256} - \frac{349e^9}{8192} - \frac{43e^{11}}{2048} \right) \times \right. \\
&\times \sin E + \\
&+ \left( \frac{5e^2}{4} - \frac{13e^4}{16} - \frac{113e^6}{512} - \frac{179e^8}{2048} - \frac{2845e^{10}}{65536} \right) \times \\
&\times \sin 2E + \\
&+ \left( \frac{e^3}{2} - \frac{7e^5}{32} - \frac{27e^7}{256} - \frac{115e^9}{2048} - \frac{1085e^{11}}{32768} \right) \sin 3E + \\
&+ \left( \frac{27e^4}{128} - \frac{21e^6}{512} - \frac{347e^8}{8192} - \frac{995e^{10}}{32768} \right) \sin 4E + \\
&+ \left( \frac{3e^5}{32} + \frac{e^7}{256} - \frac{25e^9}{2048} - \frac{875e^{11}}{65536} \right) \sin 5E + \\
&+ \left( \frac{65e^6}{1536} + \frac{25e^8}{2048} + \frac{5e^{10}}{131072} \right) \sin 6E + \\
&+ \left( \frac{5e^7}{256} + \frac{85e^9}{8192} + \frac{245e^{11}}{65536} \right) \sin 7E + \\
&+ \left( \frac{595e^8}{65536} + \frac{1855e^{10}}{262144} \right) \sin 8E + \\
&+ \left( \frac{35e^9}{8192} + \frac{287e^{11}}{65536} \right) \sin 9E + \\
&+ \left. \frac{1323e^{10}}{655360} \sin 10E + \frac{63e^{11}}{65536} \sin 11E \right], \\
\delta e &= \frac{\mathfrak{A}}{\kappa^2} \left[ \left( 2 + \frac{5e^2}{4} + \frac{7e^4}{32} + \frac{49e^6}{512} + \frac{445e^8}{8192} + \frac{2303e^{10}}{65536} \right) \times \right. \\
&\times \sin E +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \left( \frac{e}{2} + \frac{e^3}{4} + \frac{33e^5}{256} + \frac{5e^7}{64} + \frac{1715e^9}{32768} + \frac{2457e^{11}}{65536} \right) \sin 2E + \\
&+ \left( \frac{e^2}{4} + \frac{9e^4}{64} + \frac{45e^6}{512} + \frac{245e^8}{4096} + \frac{2835e^{10}}{65536} \right) \sin 3E + \\
&+ \left( \frac{3e^3}{32} + \frac{21e^5}{256} + \frac{65e^7}{1024} + \frac{805e^9}{16384} + \frac{40635e^{11}}{1048576} \right) \sin 4E + \\
&+ \left( \frac{3e^4}{64} + \frac{25e^6}{512} + \frac{175e^8}{4096} + \frac{4725e^{10}}{131072} \right) \sin 5E + \\
&+ \left( \frac{5e^5}{256} + \frac{5e^7}{192} + \frac{5215e^9}{196608} + \frac{3255e^{11}}{131072} \right) \sin 6E + \\
&+ \left( \frac{5e^6}{512} + \frac{245e^8}{16384} + \frac{2205e^{10}}{131072} \right) \sin 7E + \\
&+ \left( \frac{35e^7}{8192} + \frac{1015e^9}{131072} + \frac{10269e^{11}}{1048576} \right) \sin 8E + \\
&+ \left( \frac{35e^8}{16384} + \frac{567e^{10}}{131072} \right) \sin 9E + \\
&+ \left( \frac{63e^9}{65536} + \frac{1449e^{11}}{655360} \right) \sin 10E + \\
&+ \left. \frac{63e^{10}}{131072} \sin 11E + \frac{231e^{11}}{1048576} \sin 12E \right] + \\
&+ \frac{\mathfrak{B}}{\kappa^2} \left[ \frac{e}{2} - \frac{3e^3}{16} - \frac{9e^5}{128} - \frac{79e^7}{2048} - \frac{819e^9}{32768} - \frac{4665e^{11}}{262144} + \right. \\
&+ \left( 1 - \frac{3e^2}{8} - \frac{9e^4}{64} - \frac{79e^6}{1024} - \frac{819e^8}{16384} - \frac{4665e^{10}}{131072} \right) \times \\
&\times \cos E + \\
&+ \left( \frac{e^2}{24} + \frac{e^4}{384} - \frac{7e^6}{3072} - \frac{71e^8}{24576} - \frac{1061e^{10}}{393216} \right) \cos 3E + \\
&+ \left( \frac{3e^4}{640} + \frac{13e^6}{5120} + \frac{51e^8}{40960} + \frac{741e^{10}}{1310720} \right) \cos 5E + \\
&+ \left( \frac{5e^6}{7168} + \frac{165e^8}{229376} + \frac{1065e^{10}}{1835008} \right) \cos 7E + \\
&+ \left( \frac{35e^8}{294912} + \frac{427e^{10}}{2359296} \right) \cos 9E + \\
&+ \left. \frac{63e^{10}}{2883584} \cos 11E \right], \tag{C1}
\end{aligned}$$

$$\delta i = \frac{W}{\kappa^2} (L_1 \sin \sigma + L_2 \cos \sigma),$$

$$\delta \Omega = \frac{W}{\kappa^2 \sin i} (L_2 \sin \sigma - L_1 \cos \sigma), \text{ где}$$



$$\begin{aligned}
L_1 = & \left( \frac{e}{2} + \frac{e^3}{8} + \frac{e^5}{16} + \frac{5e^7}{128} + \frac{7e^9}{256} + \frac{21e^{11}}{1024} \right) + \\
& + \left( 1 + \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8} + \frac{5e^6}{64} + \frac{7e^8}{128} + \frac{21e^{10}}{512} \right) \cos E + \\
& + \left( \frac{e}{4} + \frac{e^3}{8} + \frac{5e^5}{64} + \frac{7e^7}{128} + \frac{21e^9}{512} + \frac{33e^{11}}{1024} \right) \cos 2E + \\
& + \left( \frac{e^2}{12} + \frac{e^4}{16} + \frac{3e^6}{64} + \frac{7e^8}{192} + \frac{15e^{10}}{512} \right) \cos 3E + \\
& + \left( \frac{e^3}{32} + \frac{e^5}{32} + \frac{7e^7}{256} + \frac{3e^9}{128} + \frac{165e^{11}}{8192} \right) \cos 4E + \\
& + \left( \frac{e^4}{80} + \frac{e^6}{64} + \frac{e^8}{64} + \frac{15e^{10}}{1024} \right) \cos 5E + \\
& + \left( \frac{e^5}{192} + \frac{e^7}{128} + \frac{9e^9}{1024} + \frac{55e^{11}}{6144} \right) \cos 6E + \\
& + \left( \frac{e^6}{448} + \frac{e^8}{256} + \frac{5e^{10}}{1024} \right) \cos 7E + \\
& + \left( \frac{e^7}{1024} + \frac{e^9}{512} + \frac{11e^{11}}{4096} \right) \cos 8E + \\
& + \left( \frac{e^8}{2304} + \frac{e^{10}}{1024} \right) \cos 9E + \\
& + \left( \frac{e^9}{5120} + \frac{e^{11}}{2048} \right) \cos 10E + \\
& + \frac{e^{10}}{11264} \cos 11E + \frac{e^{11}}{24576} \cos 12E, \\
L_2 = & \left( 1 - \frac{e^2}{4} - \frac{e^4}{4} - \frac{15e^6}{64} - \frac{7e^8}{32} - \frac{105e^{10}}{512} \right) \sin E + \\
& + \left( \frac{e}{4} + \frac{e^3}{8} + \frac{5e^5}{64} + \frac{7e^7}{128} + \frac{21e^9}{512} + \frac{33e^{11}}{1024} \right) \sin 2E + \\
& + \left( \frac{e^2}{12} + \frac{e^4}{16} + \frac{3e^6}{64} + \frac{7e^8}{192} + \frac{15e^{10}}{512} \right) \sin 3E + \\
& + \left( \frac{e^3}{32} + \frac{e^5}{32} + \frac{7e^7}{256} + \frac{3e^9}{128} + \frac{165e^{11}}{8192} \right) \sin 4E + \\
& + \left( \frac{e^4}{80} + \frac{e^6}{64} + \frac{e^8}{64} + \frac{15e^{10}}{1024} \right) \sin 5E + \\
& + \left( \frac{e^5}{192} + \frac{e^7}{128} + \frac{9e^9}{1024} + \frac{55e^{11}}{6144} \right) \sin 6E + \\
& + \left( \frac{e^6}{448} + \frac{e^8}{256} + \frac{5e^{10}}{1024} \right) \sin 7E + \\
& + \left( \frac{e^7}{1024} + \frac{e^9}{512} + \frac{11e^{11}}{4096} \right) \sin 8E + \\
& + \left( \frac{e^8}{2304} + \frac{e^{10}}{1024} \right) \sin 9E + \\
& + \left( \frac{e^9}{5120} + \frac{e^{11}}{2048} \right) \sin 10E + \\
& + \frac{e^{10}}{11264} \sin 11E + \frac{e^{11}}{24576} \sin 12E, \\
\delta\sigma = & \frac{\mathfrak{Z}}{\kappa^2} \left[ -1 + \frac{e^2}{8} + \frac{5e^4}{64} + \frac{57e^6}{1024} + \frac{699e^8}{16384} + \right. \\
& + \frac{4491e^{10}}{131072} + \frac{29809e^{12}}{1048576} - \\
& - \left( \frac{2}{e} - \frac{e}{4} - \frac{5e^3}{32} - \frac{57e^5}{512} - \frac{699e^7}{8192} - \right. \\
& - \frac{4491e^9}{65536} - \frac{29809e^{11}}{524288} \left. \right) \cos E - \\
& - \left( \frac{1}{2} + \frac{e^2}{8} + \frac{11e^4}{256} + \frac{15e^6}{1024} + \frac{87e^8}{32768} - \right. \\
& - \frac{393e^{10}}{131072} - \frac{48673e^{12}}{8388608} \left. \right) \cos 2E - \\
& - \left( \frac{e}{4} + \frac{7e^3}{64} + \frac{29e^5}{512} + \frac{131e^7}{4096} + \right. \\
& + \frac{1235e^9}{65536} + \frac{23521e^{11}}{2097152} \left. \right) \cos 3E - \\
& - \left( \frac{3e^2}{32} + \frac{9e^4}{128} + \frac{101e^6}{2048} + \frac{287e^8}{8192} + \right. \\
& + \frac{26665e^{10}}{1048576} + \frac{78947e^{12}}{4194304} \left. \right) \cos 4E - \\
& - \left( \frac{3e^3}{64} + \frac{23e^5}{512} + \frac{151e^7}{4096} + \frac{3851e^9}{131072} + \right. \\
& + \frac{49045e^{11}}{2097152} \left. \right) \cos 5E - \\
& - \left( \frac{5e^4}{256} + \frac{25e^6}{1024} + \frac{1555e^8}{65536} + \frac{5595e^{10}}{262144} + \right. \\
& + \frac{156469e^{12}}{8388608} \left. \right) \cos 6E - \\
& - \left( \frac{5e^5}{512} + \frac{235e^7}{16384} + \frac{2045e^9}{131072} + \frac{16013e^{11}}{1048576} \right) \cos 7E - \\
& - \left( \frac{35e^6}{8192} + \frac{245e^8}{32768} + \frac{4823e^{10}}{524288} + \frac{20713e^{12}}{2097152} \right) \cos 8E - \\
& - \left( \frac{35e^7}{16384} + \frac{553e^9}{131072} + \frac{5957e^{11}}{1048576} \right) \cos 9E -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{63e^8}{65536} + \frac{567e^{10}}{262144} + \frac{26943e^{12}}{8388608} \right) \cos 10E - \\
& - \left( \frac{63e^9}{131072} + \frac{2499e^{11}}{2097152} \right) \cos 11E - \\
& - \left( \frac{231e^{10}}{1048576} + \frac{2541e^{12}}{4194304} \right) \cos 12E - \\
& - \frac{231e^{11}}{2097152} \cos 13E - \frac{429e^{12}}{8388608} \cos 14E \Bigg] + \\
& + \frac{\mathfrak{N}}{\kappa^2} \left[ \left( \frac{1}{e} + \frac{11e}{8} + \frac{63e^3}{64} + \frac{831e^5}{1024} + \frac{11613e^7}{16384} + \right. \right. \\
& + \frac{83745e^9}{131072} + \frac{616011e^{11}}{1048576} \Bigg) \sin E + \\
& + \left( \frac{e^2}{8} + \frac{5e^4}{32} + \frac{171e^6}{1024} + \frac{699e^8}{4096} + \right. \\
& + \frac{22455e^{10}}{131072} + \frac{89427e^{12}}{524288} \Bigg) \sin 2E + \\
& + \left( \frac{e}{24} + \frac{5e^3}{128} + \frac{35e^5}{1024} + \frac{245e^7}{8192} + \right. \\
& + \frac{3465e^9}{131072} + \frac{99099e^{11}}{4194304} \Bigg) \sin 3E + \\
& + \left( \frac{3e^4}{256} + \frac{21e^6}{1024} + \frac{437e^8}{16384} + \frac{2035e^{10}}{65536} + \right. \\
& + \frac{287145e^{12}}{8388608} \Bigg) \sin 4E + \\
& + \left( \frac{3e^3}{640} + \frac{7e^5}{1024} + \frac{63e^7}{8192} + \frac{2079e^9}{262144} + \right. \\
& + \frac{33033e^{11}}{4194304} \Bigg) \sin 5E + \\
& + \left( \frac{5e^6}{3072} + \frac{15e^8}{4096} + \frac{4435e^{10}}{786432} + \frac{23335e^{12}}{3145728} \right) \sin 6E + \\
& + \left( \frac{5e^5}{7168} + \frac{45e^7}{32768} + \frac{495e^9}{262144} + \frac{4719e^{11}}{2097152} \right) \sin 7E + \\
& + \left( \frac{35e^8}{131072} + \frac{385e^{10}}{524288} + \frac{10983e^{12}}{8388608} \right) \sin 8E + \\
& + \left( \frac{35e^7}{294912} + \frac{77e^9}{262144} + \frac{1001e^{11}}{2097152} \right) \sin 9E + \\
& + \left( \frac{63e^{10}}{1310720} + \frac{819e^{12}}{5242880} \right) \sin 10E + \\
& + \left( \frac{63e^9}{2883584} + \frac{273e^{11}}{4194304} \right) \sin 11E + \\
& + \frac{77e^{12}}{8388608} \sin 12E + \frac{231e^{11}}{54525952} \sin 13E \Bigg] -
\end{aligned}$$

$$- \cos i \delta \Omega,$$

$$\begin{aligned}
\delta M = & \frac{\mathfrak{Z}}{\kappa^2(1-e^2)^2} \left[ 1 + \frac{23e^2}{8} - \frac{255e^4}{64} + \right. \\
& + \frac{111e^6}{1024} + \frac{57e^8}{16384} - \frac{75e^{10}}{131072} + \\
& + \left( \frac{2}{e} + \frac{23e}{4} - \frac{255e^3}{32} + \frac{111e^5}{512} + \right. \\
& + \frac{57e^7}{8192} - \frac{75e^9}{65536} \Bigg) \cos E + \\
& + \left( \frac{1}{2} - \frac{39e^2}{16} + \frac{447e^4}{256} + \frac{399e^6}{2048} + \right. \\
& + \frac{147e^8}{32768} - \frac{489e^{10}}{262144} \Bigg) \cos 2E + \\
& + \left( \frac{e}{4} - \frac{95e^3}{192} + \frac{133e^5}{768} + \frac{601e^7}{12288} + \right. \\
& + \frac{2699e^9}{196608} \Bigg) \cos 3E + \\
& + \left( \frac{3e^2}{32} - \frac{183e^4}{1024} + \frac{235e^6}{4096} + \right. \\
& + \frac{1143e^8}{65536} + \frac{6405e^{10}}{1048576} \Bigg) \cos 4E + \\
& + \left( \frac{3e^3}{64} - \frac{17e^5}{256} + \frac{91e^7}{20480} + \frac{3963e^9}{655360} \right) \cos 5E + \\
& + \left( \frac{5e^4}{256} - \frac{157e^6}{6144} - \frac{37e^8}{65536} + \frac{1015e^{10}}{524288} \right) \cos 6E + \\
& + \left( \frac{5e^5}{512} - \frac{1035e^7}{114688} - \frac{4875e^9}{1835008} \right) \cos 7E + \\
& + \left( \frac{35e^6}{8192} - \frac{3495e^8}{1048576} - \frac{6411e^{10}}{4194304} \right) \cos 8E + \\
& + \left( \frac{35e^7}{16384} - \frac{2191e^9}{2359296} \right) \cos 9E + \\
& + \left( \frac{63e^8}{65536} - \frac{3381e^{10}}{13107200} \right) \cos 10E + \\
& + \frac{63e^9}{131072} \cos 11E + \frac{231e^{10}}{1048576} \cos 12E \Bigg] + \\
& + \frac{\mathfrak{N}}{\kappa^2} \left[ \left( -\frac{1}{e} + \frac{9e}{8} - \frac{11e^3}{64} - \frac{55e^5}{1024} - \right. \right. \\
& - \frac{389e^7}{16384} - \frac{1581e^9}{131072} \Bigg) \sin E + \\
& + \left( \frac{e^2}{8} + \frac{e^4}{32} + \frac{11e^6}{1024} + \frac{15e^8}{4096} + \frac{87e^{10}}{131072} \right) \sin 2E -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{e}{24} + \frac{7e^3}{384} + \frac{29e^5}{3072} + \frac{131e^7}{24576} + \frac{1235e^9}{393216} \right) \sin 3E + \\
& + \left( \frac{3e^4}{256} + \frac{9e^6}{1024} + \frac{101e^8}{16384} + \frac{287e^{10}}{65536} \right) \sin 4E - \\
& - \left( \frac{3e^3}{640} + \frac{23e^5}{5120} + \frac{151e^7}{40960} + \frac{3851e^9}{1310720} \right) \sin 5E + \\
& + \left( \frac{5e^6}{3072} + \frac{25e^8}{12288} + \frac{1555e^{10}}{786432} \right) \sin 6E - \\
& - \left( \frac{5e^5}{7168} + \frac{235e^7}{229376} + \frac{2045e^9}{1835008} \right) \sin 7E + \\
& + \left( \frac{35e^8}{131072} + \frac{245e^{10}}{524288} \right) \sin 8E - \\
& - \left( \frac{35e^7}{294912} + \frac{553e^9}{2359296} \right) \sin 9E + \\
& + \frac{63e^{10}}{1310720} \sin 10E - \frac{63e^9}{2883584} \sin 11E \Big].
\end{aligned}$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ D

Согласно работе [4] разность оскулирующего и среднего радиуса-вектора может быть выражена через разности элементов орбиты:

$$\begin{aligned}
(d\mathbf{r})^2 &= \delta r^2 + r^2(\delta u + \cos i \delta \Omega)^2 + \\
&+ r^2(\sin u \delta i - \sin i \cos u \delta \Omega)^2,
\end{aligned} \quad (D1)$$

где  $u$  — аргумент широты,

$$\begin{aligned}
\delta r &= \frac{r}{a} \delta a + \frac{a^2}{r} (e - \cos E) \delta e + \frac{a^2}{r} e \sin E \delta M, \\
r(\delta u + \cos i \delta \Omega) &= \frac{a^2}{\eta r} (2 - e^2 - e \cos E) \times \\
&\times \sin E \delta e + r \delta \sigma + r \cos i \delta \Omega + \frac{a^2 \eta}{r} \delta M, \\
r(\sin u \delta i - \sin i \cos u \delta \Omega) &= a[(\cos E - e) \times \\
&\times \sin \sigma + \eta \sin E \cos \sigma] \delta i - \\
&- a \sin i [(\cos E - e) \cos \sigma - \\
&- \eta \sin E \sin \sigma] \delta \Omega.
\end{aligned} \quad (D2)$$

Евклидова (среднеквадратичная по средней аномалии) норма вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned}
\varrho^2 &= \|d\mathbf{r}\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (d\mathbf{r})^2 dM = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (d\mathbf{r})^2 (1 - e \cos E) dE = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (d\mathbf{r})^2 \frac{r}{a} dE.
\end{aligned} \quad (D3)$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *T.N. Sannikova and K.V. Kholshchevnikov*, Astron. Rep. 63(5), 420 (2019).
2. *В.А. Антонов, Е.И. Тимошкова, К.В. Холшевников*, Введение в теорию ньютоновского потенциала (М.: Наука, 1988).
3. *К.В. Холшевников, В.Ш. Шайдулин*, Вестн. СПбГУ. Сер. 1: Математика. Механика. Астрономия № 2, 86 (2009).
4. *N. Batmunkh, T.N. Sannikova, K.V. Kholshchevnikov, and V.Sh. Shaidulin*, Astron. Rep. 60(3), 366 (2016).
5. *К.В. Холшевников, В.Б. Титов*, Задача двух тел. Учебное пособие (СПб.: Изд. СПбГУ, 2007).
6. *T.N. Sannikova*, Astron. Rep. 68(3), 331 (2024).
7. *К.В. Холшевников, Н. Батмунх, К.И. Оськина, В.Б. Титов*, Астрон. журн. 97(4), 348 (2020).
8. *T.N. Sannikova*, Astron. Rep. 66(6), 500 (2022).
9. *А.М. Фоминов*, Труды ИПА РАН 5, 313 (2000).
10. *М.Ф. Субботин*, Введение в теоретическую астрономию (М.: Наука, 1968).
11. *Г.Н. Дубошин (ред.)*, Справочное руководство по небесной механике и астероидике. Изд-е 2-е. (М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1976).
12. *A. Cayley*, Mem. Roy. Astron. Soc. 29, 191 (1861).
13. *M.P. Jarnagin*, U.S. Nautical Almanac Office. Astron. Papers 18, 1060 (1965).
14. *А.М. Журавский*, Справочник по эллиптическим функциям (М.-Л.: Изд. АН СССР, 1941).
15. *И.С. Градштейн, И.М. Рыжик*, Таблицы интегралов, рядов и произведений (СПб.: БХВ-Петербург, 2011).

# DISPLACEMENT NORM IN THE PRESENCE OF AN INVERSE-SQUARE PERTURBING ACCELERATION IN THE REFERENCE FRAME ASSOCIATED WITH THE VELOCITY VECTOR

© 2025 T. N. Sannikova

*Crimean Astrophysical Observatory of the Russian Academy of Sciences, Nauchny, Crimea, Russia*

*e-mail: tnsannikova@craocrimea.ru*

The problem of motion of a zero-mass-point under the action of attraction to the central body and a small perturbing acceleration  $\mathbf{P}' = \mathbf{P}/r^2$  is considered, where  $r$  is the distance to the attracting center and components of the vector  $\mathbf{P}$  are assumed to be constant in a reference system with the axes directed along the velocity vector, the main normal and the angular momentum vector. Previously, for this problem, equations of motion in the mean elements and formulas for the transition from osculating elements to the mean ones in the first order of smallness were found; second-order quantities are neglected. If the perturbing forces are small, then the osculating orbit slightly deviates from the mean one. The difference  $d\mathbf{r}$  between the position vectors on the osculating and mean orbit is a quasi-periodic function of time. In this work, the Euclidean (root-mean-square over the mean anomaly) norm  $\|\mathbf{dr}\|^2$  of the displacement of the osculating orbit relative to the mean one is obtained. It turned out that  $\|\mathbf{dr}\|^2$  depends only on the components of the vector  $\mathbf{P}$  (positive definite quadratic form), the semi-major axis (proportional to the second power) and the eccentricity of the osculating ellipse. The norm  $\|\mathbf{dr}\|^2$  is obtained in the form of series in powers of eccentricity  $e$ . The resulting expression holds up to  $e_0 \approx 0.995862$ ; for  $e > e_0$ ,  $\vartheta = \sqrt{\|\mathbf{dr}\|^2}$  can take complex values. The results are applied to the problem of the motion of model bodies under the action of perturbing acceleration caused by the Yarkovsky effect. A comparison of the results with similar ones for the norm  $\|\mathbf{dr}\|^2$  in the reference system associated with the radius vector was also carried out.

**Keywords:** Yarkovsky effect, tangential acceleration, root-mean-square norm, displacement of the osculating orbit from the mean orbit