

тических орбитах с высокостабильными часами. Точность данного эксперимента по детектированию гало волновой ТМ Галактики оказалась такой же или меньшей, чем у наземного эксперимента с двумя колоцированными часами различных типов. Данный результат связан с необходимостью использования в космическом эксперименте схемы компенсации нерелятивистского эффекта Доплера типа Gravity Probe A [49], которая приводит к уменьшению амплитуды полезного сигнала.

Рассмотренный эксперимент совместим с другими космическими проектами, требующими высокостабильных часов на эллиптических орбитах вокруг Земли и Солнца [30, 48, 55], в связи с чем представляет интерес дальнейшее исследование его особенностей. В частности, интересно получение ограничений на константы связи поля ϕ при учете гало частиц ТМ, которые могут конденсироваться вокруг Солнца и Земли за счет взаимодействия ϕ с полями обычной материи [18].

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Проект выполнен при поддержке гранта РФФИ 22-22-00861.

Приложение

ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЙ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрим набор данных $\{d_k\}$, полученных в моменты времени $\{t_k\}$, $k = 1, \dots, N$. Вектор $\mathbf{d}$ содержит сигнал $\mathbf{s}$ и шум $\mathbf{n}$: $d_k = \gamma s_k + n_k$, где γ — константа, подлежащая оценке. Мы полагаем, что сигнал и шум являются гауссовыми процессами с нулевым средним:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{n}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \det \mathcal{N}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{n}^T \mathcal{N}^{-1} \mathbf{n}\right), \\ p(\mathbf{s}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \det \mathcal{S}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathcal{S}^{-1} \mathbf{s}\right), \end{aligned} \quad (41)$$

где $\mathcal{N}$ и $\mathcal{S}$ — ковариационные матрицы шума и сигнала соответственно. Тогда вектор данных $\mathbf{d}$ также является гауссовым:

$$p(\mathbf{d} | \Gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \det \mathcal{D}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathcal{D}^{-1} \mathbf{d}\right), \quad (42)$$

где $\mathcal{D} = \Gamma \mathcal{S} + \mathcal{N}$ и параметром модели является $\Gamma \equiv \gamma^2$.

Следуя [15], применим теорему Байеса:

$$p(\Gamma | \mathbf{d}) = \frac{p(\Gamma) p(\mathbf{d} | \Gamma)}{p(\mathbf{d})}, \quad (43)$$

где $p(\Gamma)$ — априорное распределение, которое может быть взято равномерным для достаточно широкого интервала, а $p(\mathbf{d})$ — константа нормировки.

В ММП апостериорное распределение:

$$p(\Gamma | \mathbf{d}) = C \exp\left(-\frac{(\Gamma - \hat{\Gamma})^2}{2\hat{\sigma}_\Gamma^2}\right), \quad (44)$$

где $\hat{\Gamma}$ и $\hat{\sigma}_\Gamma$ — ММП-оценки, C — константа, не зависящая от Γ . Нашей целью является определить $\hat{\sigma}_\Gamma = \sigma_\gamma^2$ при условии $\hat{\Gamma} \rightarrow 0$. Для этого мы решаем следующие уравнения:

$$\left. \frac{d}{d\Gamma} \ln(p(\mathbf{d} | \Gamma)) \right|_{\Gamma=\hat{\Gamma}} = 0, \quad (45)$$

$$\left. \frac{d^2}{d\Gamma^2} \ln(p(\mathbf{d} | \Gamma)) \right|_{\Gamma=\hat{\Gamma}} = -\frac{1}{\hat{\sigma}_\Gamma^2}. \quad (46)$$

Здесь мы выразили апостериорное распределение $p(\Gamma | \mathbf{d})$ через $p(\mathbf{d} | \Gamma)$ с помощью (43).

Раскрывая (45), получаем:

$$0 = \frac{d}{d\Gamma} \mathbf{d}^T (\mathcal{N} + \Gamma \mathcal{S})^{-1} \mathbf{d} + \frac{d}{d\Gamma} \frac{\det(\mathcal{N} + \Gamma \mathcal{S})}{\det(\mathcal{N} + \Gamma \mathcal{S})}. \quad (47)$$

Дифференцируя $(\mathcal{N} + \Gamma \mathcal{S})^{-1}(\mathcal{N} + \Gamma \mathcal{S})$, нетрудно получить, что

$$\frac{d}{d\Gamma} (\mathcal{N} + \Gamma \mathcal{S})^{-1} = -(\mathcal{N} + \Gamma \mathcal{S})^{-1} \mathcal{S} (\mathcal{N} + \Gamma \mathcal{S})^{-1}. \quad (48)$$

С помощью известного правила дифференцирования определителя получаем также

$$\frac{d}{d\Gamma} \det(\mathcal{N} + \Gamma \mathcal{S}) = \det(\mathcal{N} + \Gamma \mathcal{S}) \text{tr}((\mathcal{N} + \Gamma \mathcal{S})^{-1} \mathcal{S}). \quad (49)$$

Используя уравнения (48) и (49), мы наконец получаем из (45):

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{d}^T (\mathcal{N} + \Gamma \mathcal{S})^{-1} \mathcal{S} (\mathcal{N} + \Gamma \mathcal{S})^{-1} \mathbf{d} - \\ &\quad - \text{tr}((\mathcal{N} + \Gamma \mathcal{S})^{-1} \mathcal{S}). \end{aligned} \quad (50)$$

Предполагая, что амплитуда сигнала Γ мала, получаем

$$(\mathcal{N} + \Gamma \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{N}^{-1} - \Gamma \mathcal{N}^{-1} \mathcal{S} \mathcal{N}^{-1}. \quad (51)$$

Производя аналогичные выкладки с (46), получаем:

$$\hat{\Gamma} = \frac{\hat{\sigma}_\Gamma^2}{2} \left(\mathbf{d}^T \mathcal{N}^{-1} \mathcal{S} \mathcal{N}^{-1} \mathbf{d} - \text{tr}(\mathcal{N}^{-1} \mathcal{S}) \right), \quad (52)$$

$$\frac{1}{\hat{\sigma}_\Gamma^2} = \left(\mathbf{d}^T \mathcal{N}^{-1} \mathcal{S} \mathcal{N}^{-1} \mathcal{S} \mathcal{N}^{-1} \mathbf{d} - \frac{1}{2} \text{tr}(\mathcal{N}^{-1} \mathcal{S} \mathcal{N}^{-1} \mathcal{S}) \right). \quad (53)$$

Приравнивая $\hat{\Gamma} = 0$, получаем итоговое выражение для оценки точности:

$$\frac{1}{\hat{\sigma}_{\Gamma}^2} = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathcal{N}^{-1} \mathcal{S} \mathcal{N}^{-1} \mathcal{S}), \quad (54)$$

из которого следует (30).

Формула (30) может быть использована и в частотной области (для этого надо лишь заменить операцию транспонирования на эрмитово сопряжение во всех выкладках, начиная с (41)). В случае стационарного сигнала ковариационная матрица в частотном пространстве является диагональной, что позволяет непосредственно получить из (30) формулу (15) из [15]. На первый взгляд может показаться, что между этими формулами есть различие на фактор $2^{1/4}$. Легко заметить, однако, что в [15] суммирование производится лишь до $N/2$, так как данные являются действительными, в то время как в нашем уравнении (30) матричные операции подразумевают суммирование до N .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *L. Hui*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **59**, 247 (2021), arXiv:2101.11735 [astro-ph.CO].
2. *K. Van Tilburg, N. Leefer, L. Bougas, and D. Budker*, Phys. Rev. Letters **115**, id. 011802 (2015), arXiv:1503.06886 [physics.atom-ph].
3. *A. Hees, J. Guéna, M. Abgrall, S. Bize, and P. Wolf*, Phys. Rev. Letters **117**(6), id. 061301 (2016), arXiv:1604.08514 [gr-qc].
4. *P. Wcisło, P. Ablewski, K. Beloy, S. Bilicki et al.*, Science Advances **4**(12), id. eaau4869 (2018).
5. *C.J. Kennedy, E. Oelker, J.M. Robinson, T. Bothwell, et al.*, Phys. Rev. Letters **125**(20), id. 201302 (2020), arXiv:2008.08773 [physics.atom-ph].
6. *S.M. Vermeulen, P. Relton, H. Grote, V. Raymond, et al.*, Nature **600**(7889), 424 (2021), arXiv:2103.03783 [gr-qc].
7. *D.E. Kaplan, A. Mitridate, and T. Trickle*, Phys. Rev. D **106**(3), id. 035032 (2022).
8. *L. Bernus, O. Minazzoli, A. Fienga, A. Hees, M. Gastineau, J. Laskar, P. Deram, and A. Di Ruscio*, Phys. Rev. D **105**(4), id. 044057 (2022).
9. *S. Schlamminger, K.Y. Choi, T.A. Wagner, J.H. Gundlach, and E. G. Adelberger*, Phys. Rev. Letters **100**, id. 041101 (2008), arXiv:0712.0607 [gr-qc].
10. *T.A. Wagner, S. Schlamminger, J.H. Gundlach, and E.G. Adelberger*, Classical and Quantum Gravity **29**(18), id. 184002 (2012), arXiv:1207.2442 [gr-qc].
11. *J. Bergé, P. Brax, G. Métris, M. Pernot-Borrás, P. Tomboul, and J.-P. Uzan*, Phys. Rev. Letters **120**(14), id. 141101 (2018), arXiv:1712.00483 [gr-qc].
12. *T. Bothwell, D. Kedar, E. Oelker, J.M. Robinson, S.L. Bromley, W. L. Tew, J. Ye, and C. J. Kennedy*, Metrologia **56**(6), id. 065004 (2019).
13. *K. Kim, A. Aeppli, T. Bothwell, and J. Ye*, Phys. Rev. Letters **130**(11), id. 113203 (2023).
14. *A. Arvanitaki, J. Huang, and K. Van Tilburg*, Phys. Rev. D **91**(1), id. 015015 (2015), arXiv:1405.2925 [hep-ph].
15. *A. Derevianko*, Phys. Rev. A **97**(4), id. 042506 (2018), arXiv:1605.09717 [physics.atom-ph].
16. *B.M. Roberts, G. Blewitt, C. Dailey, M. Murphy, et al.*, Nature Comm. **8**, id. 1195 (2017), arXiv:1704.06844 [hep-ph].
17. *V. Schkolnik, D. Budker, O. Fartmann, V. Flambaum, et al.*, Quantum Sci. Technology **8**(1), id. 014003 (2023), arXiv:2204.09611 [physics.atom-ph].
18. *A. Hees, O. Minazzoli, E. Savalle, Y.V. Stadnik, and P. Wolf*, Phys. Rev. D **98**(6), id. 064051 (2018), arXiv:1807.04512 [gr-qc].
19. *J. Veltmaat, B. Schwabe, and J.C. Niemeyer*, Phys. Rev. D **101**(8), id. 083518 (2020), arXiv:1911.09614 [astro-ph.CO].
20. *Y.-D. Tsai, J. Eby, and M.S. Safronova*, Nature Astron. **7**, 113 (2023), arXiv:2112.07674 [hep-ph].
21. *Y.A. El-Neaj, C. Alpigiani, S. Amairi-Pyka, H. Araújo, et al.*, EPJ Quantum Technology **7**(1), id. 6 (2020).
22. *C.M. Will*, Liv. Rev. Relativity **17**(1), 4 (2014).
23. *R.F.C. Vessot, M.W. Levine, E.M. Mattison, E.L. Blomberg*, Phys. Rev. Letters **45**, 2081 (1980).
24. *D.A. Litvinov, V.N. Rudenko, A.V. Alakoz, U. Bach, et al.*, Phys. Letters A **382**(33), 2192 (2018).
25. *P. Delva, N. Puchades, E. Schönmann, F. Dilssner, et al.*, Phys. Rev. Letters **121**(23), id. 231101 (2018), arXiv:1812.03711 [gr-qc].
26. *S. Herrmann, F. Finke, M. Lülß, O. Kichakova, et al.*, Phys. Rev. Letters **121**(23), id. 231102 (2018).
27. *P. Jetzer*, Intern. J. Modern Physics D **26**(5), 1741014 (2017).
28. *B. Altschul, Q.G. Bailey, L. Blanchet, K. Bongs, et al.*, Adv. Space Research **55**(1), 501 (2015), arXiv:1404.4307 [gr-qc].
29. *M.P. Heß, L. Stringhetti, B. Hummelsberger, K. Hausner, et al.*, Acta Astronautica, **69**, 929 (2011).
30. *D. Litvinov and S. Pilipenko*, Classical and Quantum Gravity **38**(13), id. 135010 (2021), arXiv:2108.09723 [gr-qc].
31. *A. Derevianko, K. Gibble, L. Hollberg, N.R. Newbury, C. Oates, M.S. Safronova, L.C. Sinclair, and N. Yu*, Quantum Sci. Technology **7**(4), id. 044002 (2022).
32. *J. Jaffe and R.F. Vessot*, Phys. Rev. D **14**(12), 3294 (1976).
33. *S. Turyshev, M. Shao, K. Nordtvedt, H. Dittus, et al.*, Exp. Astron. **27**, 27 (2009).
34. *W.-T. Ni*, Intern. J. Modern Physics D **17**(7), 921 (2008).
35. *Y.V. Stadnik and V.V. Flambaum*, Phys. Rev. Letters **115**(20), id. 201301 (2015).
36. *G. P. Centers, J.W. Blanchard, J. Conrad, N.L. Figueroa, et al.*, Nature Comm. **12**, id. 7321 (2021), arXiv:1905.13650 [astro-ph.CO].