

Том 102, Номер 1

ISSN 0004-6299

Январь 2025



# АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



НАУКА

— 1727 —

# СОДЕРЖАНИЕ

---

Том 102, номер 1, 2025

---

Об устойчивости слоисто-неоднородной эллиптической галактики как динамической системы <i>С. А. Гасанов</i>	3
Синтез кривых блеска двойных систем со сталкивающимися ветрами <i>И. И. Антохин, Э. А. Антохина</i>	23
Трехмерная численная модель для исследования высыпания электронов в верхние атмосферы экзопланет типа Венеры <i>А. Г. Жилкин, В. И. Шематович, Г. Н. Цуриков, Д. В. Бисикало</i>	35
Активность звезды TOI-1408 и потеря вещества атмосферами ее экзопланет <i>И. С. Саванов</i>	49
Ускоряющий потенциал и профиль плотности вторичной плазмы в магнитосфере ортогональных пульсаров <i>А. Ю. Истомин, Ф. А. Князев, В. С. Бескин</i>	53
Влияние различных факторов на энергию солнечной вспышки <i>В. Л. Мерзляков</i>	66
Норма смещения при возмущающем ускорении, изменяющемся по закону обратных квадратов, в системе отсчета, связанной с вектором скорости <i>Т. Н. Санникова</i>	71

---

# CONTENTS

---

**Volume 102, No 1, 2025**

---

On the stability of a layered inhomogeneous elliptical galaxy as dynamic system <i>S. A. Gasanov</i>	3
Light curve synthesis for colliding wind binary systems <i>I. I. Antokhin, E. A. Antokhina</i>	23
3D numerical model for studying electron precipitation in the upper atmospheres of Venus-like exoplanets <i>A. G. Zhilkin, V. I. Shematovich, G. N. Tsurikov, D. V. Bisikalo</i>	35
Activity of the star TOI-1408 and mass loss by the atmospheres of its exoplanets <i>I. S. Savanov</i>	49
Acceleration potential and density profile of secondary plasma in the magnetosphere of orthogonal pulsars <i>A. Yu. Istomin, F. A. Kniazev, V. S. Beskin</i>	53
The different factors influence on the solar flares energy <i>V. L. Merzlyakov</i>	66
Displacement norm in the presence of an inverse-square perturbing acceleration in the reference frame associated with the velocity vector <i>T. N. Sannikova</i>	71

---

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ГАЛАКТИКИ КАК ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

© 2025 г. С. А. Гасанов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга, Москва, Россия

e-mail: gasanov@sai.msu.ru

Поступила в редакцию 14.05.2024 г.

После доработки 18.09.2024 г.

Принята в печать 14.10.2024 г.

В настоящей работе рассмотрены несколько новых моделей слоисто-неоднородной эллиптической галактики, имеющей форму либо трехосного эллипсоида, либо сжатого или вытянутого сфероида, и состоящей из барионной массы и темной материи с разными законами распределения плотности — профилями. На основе этих моделей определены некоторые ключевые динамические параметры ЭГ: гравитационная (потенциальная) энергия и кинетическая энергия вращения, распределение углового момента и удельные угловые моменты в зависимости от профилей плотности. Установлены равновесие и устойчивость (неустойчивость) ЭГ как динамической системы согласно известным критериям. Найдены критические значения параметра семейства сфероидов, определяющие границы устойчивости (или неустойчивости) динамической системы по значениям удельных угловых моментов в зависимости от профилей плотности. Полученные результаты применены к более шестидесяти модельным ЭГ с параметрами, точно совпадающими с реально существующими и приведены в виде таблиц и рисунков.

**Ключевые слова:** эллиптические галактики, фундаментальные параметры, равновесие и устойчивость (неустойчивость)

DOI: 10.31857/S0004629925010017, EDN: HLYULX

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] рассмотрены три новые модели слоисто-неоднородной эллиптической галактики (ЭГ), состоящей из барионной массы (БМ) и темной материи (ТМ). Согласно этим моделям, эллиптическая галактика вместе с гало (другой вариант — без него) считается двухслойным неоднородным эллипсоидом вращения — вытянутым сфероидом. На основе этих моделей определены ключевые динамические параметры ЭГ [1] и исследовано пространственное движение пассивно-гравитирующего тела (ПГТ) в гравитационном поле такой галактики [2]. Полученные результаты применены к модельным эллиптическим галактикам, параметры которых точно совпадают с параметрами реально существующих.

В работе [3] рассмотрены другие модели слоисто-неоднородной эллиптической галактики. Согласно этим моделям ЭГ состоит из БМ и ТМ и представляет собой либо слоисто-неоднородной трехосный эллипсоид с полуосями  $a > b > c$  (Модель I), либо слоисто-неоднородной сжатый сфероид — сфероид Маклорена,  $a = b > c$  (Модель II), либо слоисто-неоднородной вытянутый сфероид  $a > b = c$  (Модель III). При этом законом распределения плотности — профилем БМ — является

$\rho_1(m)$ , а профилем ТМ —  $\rho_2(m)$ . На основе этих моделей определены некоторые ключевые динамические параметры ЭГ и установлены соотношения: {масса-размеры}, {масса-дисперсия скоростей}, {размер-дисперсия скоростей-светимость (поверхностная яркость)}. Исследованы эволюционные сценарии образования ЭГ согласно этим моделям.

Упомянутые выше модели предназначены для решения задач небесной механики и частично астрофизики. Для получения точных результатов во всех моделях потенциалы в ряд не разлагаются, а берутся их точные выражения. При этом условные границы ЭГ определяются по значениям величин  $D_{25}$  и  $R_{25}$  [4].

Эти модели не могут претендовать на полноту охвата проблемы ТМ в целом, но сделана еще одна попытка исследовать влияние ТМ на кинематику и динамику ПГТ.

Во всех моделях в качестве профиля  $\rho_1(m)$  берется “астрофизический закон” распределения плотности. Такое название профиля дано в книге [5, стр. 354], он получается из закона распределения поверхностной яркости, открытого Хабблом [6], посредством решения интегрального уравнения Абе-ля. В качестве профиля  $\rho_2(m)$  использован один из

аналогов профилей NFW и Хернквиста, введенные нами в работах [1–3]. Эти профили названы аналогами, так как они получены из оригинальных профилей NFW [7] и Хернквиста [8] путем адаптации их к эллиптическим галактикам.

В настоящей работе на основе моделей I, II и III (см. [3]) найдены явные выражения полной гравитационной (потенциальной) энергии и кинетической энергии вращения ЭГ, распределения углового момента и удельного углового момента в зависимости от профилей плотности. Исследуется устойчивость динамической системы согласно критерию Пиблса–Острайкера [9], [10, с. 189], по критерию неустойчивости Вандерворта [11], а также по значениям удельных угловых моментов [12]. Найдены критические значения параметра семейства сфероидов, определяющие границы устойчивости (или неустойчивости) динамической системы по значениям удельных угловых моментов в зависимости от профилей плотности.

Следует отметить, что устойчивость звездных систем были исследованы в работах других авторов. В частности, в работе [13] устойчивость исследуется методом матричных уравнений, который в книге [14, стр. 419] назван матричным методом Калнайса. Аналогичные исследования по устойчивости звездных систем проведены в работах [15–17], а в работе [18] анализируется природа неустойчивости радиальной орбиты в сферически-симметричных бесстолкновительных звездных системах.

## 2. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ И КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ВРАЩЕНИЯ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ГАЛАКТИКИ. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ

Пусть эллиптическая галактика (ЭГ) представляет собой трехосный слоисто-неоднородный эллипсоид с полуосями  $a$ ,  $b$  и  $c$ , состоящий из барионной массы (БМ) и темной материи (ТМ). Под слоисто-неоднородным эллипсоидом подразумевается эллипсоид с гомотетическим (эллипсоидальным) законом распределения плотности — профилем. Положим, что  $\rho_1(m)$  и  $\rho_2(m)$  — законы распределения плотности БМ и ТМ данного эллипсоида соответственно. Эти профили являются функциями только параметра  $m$  семейства эллипсоидальных поверхностей

$$m^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \quad (a > b > c, \quad 0 \leq m \leq 1). \quad (1)$$

Здесь значение  $m = 0$  соответствует центру ЭГ, а  $m = 1$  — эллипсоидальной поверхности, которой ограничена ЭГ.

Полная гравитационная (потенциальная) энергия  $W$  и кинетическая энергия вращения  $T$  слоисто-неоднородного эллипсоида с полуосями  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , плотностью  $\rho(m)$  и массой  $M(m)$  в случае изо-

тропного давления определяются общей формулой [12, стр. 115, 120]

$$\begin{aligned} W &= -2A_0 J_0 \psi(1), \\ T &= A_0 J_1 \psi(1), \\ A_0 &= \frac{\pi G a b c}{2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\psi(m) = \int_0^m \rho(u) M(u) du^2, \quad (3)$$

$$M(m) = 4\pi a b c \int_0^m u^2 \rho(u) du, \quad (k = 1, 2),$$

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_0^\infty \frac{du}{\Delta(u)} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - c^2}} F(\varphi_0, n), \\ J_1 &= J_0 - 3c^2 K_0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$K_0 = \int_0^\infty \frac{du}{(c^2 + u) \Delta(u)} = \frac{2}{b^2 - c^2} \left[ -\frac{E(\varphi_0, n)}{\sqrt{a^2 - c^2}} + \frac{b}{ac} \right]. \quad (5)$$

Здесь  $F(\varphi_0, n)$ ,  $E(\varphi_0, n)$  — неполные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода. Кроме того, аргумент  $\varphi_0$  и модуль  $n$  этих интегралов, а также функция  $\Delta(u)$  равны

$$\begin{aligned} \sin \varphi_0 &= \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}, \quad n = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \\ \Delta(u) &= \sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь применим формулу (2) к слоисто-неоднородному промежуточному эллипсоиду, состоящему из барионной массы с профилем  $\rho_1(m)$ , массой  $M_1(m)$  и темной материи с профилем  $\rho_2(m)$ , массой  $M_2(m)$ . Для этого в указанной формуле вместо профиля  $\rho(m)$  и массы  $M(m)$  следует пользоваться общим профилем и общей массой, т. е. положить

$$\begin{aligned} \rho(m) &= \rho_1(m) + \rho_2(m), \\ M(m) &= M_1(m) + M_2(m). \end{aligned} \quad (7)$$

При этом массы  $M_1(m)$  и  $M_2(m)$  определяются по формуле (3) заменой профиля  $\rho(m)$  на соответствующий, а полная масса — при  $m = 1$ . Кроме того, формулу (2) в этом случае можно переписать в виде

$$\begin{aligned} W &= -2A_0 J_0 \psi(1), \\ T &= A_0 J_1 \psi(1), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\psi(m) = \sum_{n=1}^4 \psi_n(m),$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1(m) &= \int_0^m \rho_1(u) M_1(u) du^2, \\ \psi_2(m) &= \int_0^m \rho_1(u) M_2(u) du^2, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}\psi_3(m) &= \int_0^{m^2} \rho_2(u) M_1(u) du^2, \\ \psi_4(m) &= \int_0^{m^2} \rho_2(u) M_2(u) du^2.\end{aligned}\quad (10)$$

### 3. ЯВНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ЭНЕРГИЙ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПРОФИЛЕЙ

В этом разделе вычислим полные потенциальную энергию  $W$  и кинетическую энергию вращения  $T$  слоисто-неоднородной эллиптической галактики в зависимости от конкретных профилей  $\rho_1(m)$  барионной массы и  $\rho_2(m)$  темной материи, а также от формы галактики. Последовательно будем рассматривать следующие формы ЭГ:

- 1) трехосный эллипсоид  $a > b > c$ ,
- 2) сжатый сфероид  $a = b > c$  и
- 3) вытянутый сфероид  $a > b = c$ .

Очевидно, что трехосный эллипсоид представляет собой более сложную и общую форму, чем другие. Поэтому его следует рассмотреть более подробно; случаи 2) и 3) являются частными случаями первого.

#### 3.1. Эллиптическая галактика как слоисто-неоднородный трехосный эллипсоид

В качестве закона распределения плотности (профиля) для барионной массы (БМ) эллиптической галактики как слоисто-неоднородного трехосного эллипсоида возьмем “астрофизический закон” распределения плотности  $\rho_1(m)$ , связанный с профилем поверхностной яркостью  $I_1(m)$  [6] посредством интегрального уравнения Абеля:

$$\begin{aligned}\rho_1(m) &= \frac{\rho_0}{w^3}, \\ I_1(m) &= \frac{I_0}{w^2}, \\ w &= \sqrt{1 + \beta m^2},\end{aligned}\quad (11)$$

где  $m$  определяется равенством (1),  $\rho_0$  — плотность в центре эллиптической галактики,  $I_0$  — центральная поверхностная яркость, а параметр  $\beta \gg 1$  для каждой ЭГ выбирается отдельно и находится выравниванием данных фотометрии [19]. Если известен соответствующий профиль с поверхностной яркостью  $I_2(m)$ , то из интегрального уравнения Абеля аналогичным образом определяется профиль  $\rho_2(m)$ . Можно решить и обратную задачу: при заданном профиле  $\rho_2(m)$  с помощью упомянутого выше интегрального уравнения находится профиль  $I_2(m)$ .

Масса  $M_1(m)$  промежуточного эллипсоида, состоящего из БМ с профилем  $\rho_1(m)$ , вычисляется по

формуле (3) и равна

$$\begin{aligned}M_1(m) &= \frac{4\pi\rho_0 abc}{\beta\sqrt{\beta}} \left[ \varphi_1(m) - \frac{\sqrt{w^2 - 1}}{w} \right], \\ \varphi_1(m) &= \ln \left( w + \sqrt{w^2 - 1} \right),\end{aligned}\quad (12)$$

причем полная масса ЭГ с БМ равна  $M_1 \equiv M(m=1)$ , а  $w$  определен выше.

Если ЭГ состоит только из БМ, то

$$\begin{aligned}\psi_2(m) &= \psi_3(m) = \psi_4(m) \equiv 0, \\ \psi(m) &\equiv \psi_1(m) = 4\pi\rho_0^2 a b c f_1(m),\end{aligned}\quad (13)$$

где

$$\begin{aligned}f_1(m) &= \frac{1}{\beta^2\sqrt{\beta}} \left[ \arctg \sqrt{w^2 - 1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\varphi_1(m)}{w} + \frac{\sqrt{w^2 - 1}}{w^2} \right].\end{aligned}\quad (14)$$

Тогда подставив выражение (13) функции  $\psi(m)$  в формулу (8) для полной потенциальной энергии  $W$  и кинетической энергии вращения  $T$  такой галактики получим:

$$\begin{aligned}W &= -2W_0 J_0 \rho_0^2 f_1(1), \\ T &= W_0 J_1 \rho_0^2 f_1(1), \\ W_0 &= 2\pi^2 G a^2 b^2 c^2,\end{aligned}\quad (15)$$

где коэффициенты  $J_0, J_1$  определяются равенством (4), а функция  $f_1(m)$  — равенством (14).

Заметим, что из выражений энергий (2) и (15) следует, что отношение

$$t \equiv \frac{T}{|W|} = \frac{J_1}{2J_0} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{3c^2 K_0}{J_0} \right) \quad (16)$$

не зависит от распределения массы неоднородного эллипсоида, а зависит только от его формы или размеров.

Теперь положим, что ЭГ состоит из БМ и ТМ, причем профиль БМ  $\rho_1(m)$  определяется равенством (11). В качестве профиля ТМ будем рассматривать один из аналогов профилей NFW и Хернквиста, приведенных в работах [1–3]. Оригиналы этих профилей, рассмотренных в работах NFW [8] и Хернквиста [9], предназначены для сферически симметричных галактик. Для применения этих профилей к ЭГ мы внесли соответствующие изменения и назвали их аналогами этих профилей [1–3].

Сначала рассмотрим аналог профиля NFW [1–3]:

$$\begin{aligned}\rho_2(m) &= \frac{K}{g^2(g-1)}, \\ g &= 1 + \mu m, \\ \mu &= \frac{\sqrt[3]{abc}}{r_s},\end{aligned}\quad (17)$$

где  $r_s$  — радиус-шкала ЭГ. Масса промежуточного эллипсоида  $M_2(m)$  при этом будет равна

$$M_2(m) = 4\pi K r_s^3 \left( \ln g - \frac{g-1}{g} \right).$$

Далее, вычислив функции  $\psi_k(m)$  ( $k = 2, 3, 4$ ) с учетом выражения  $\psi_1(m)$  для энергий  $W$  и  $T$ , получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}W &= -2W_0 J_0 \Phi_7(1), \\ T &= W_0 J_1 \Phi_1(1),\end{aligned}\quad (18)$$

где коэффициенты  $J_0$ ,  $J_1$  и  $W_0$  приведены выше, а функция  $\Phi_1(m)$  равна

$$\begin{aligned}\Phi_1(m) &= \rho_0^2 N_1(m) + 2K\rho_0 N_2(m) + K^2 N_3(m), \\ N_1(m) &\equiv f_1(m).\end{aligned}\quad (19)$$

Здесь функция  $f_1(m)$  определяется равенством (14), а

$$\begin{aligned}N_2(m) &= \frac{1}{\beta \mu^3 w} \left[ \frac{g-1}{g} - \frac{\mu w}{\sqrt{\beta} g} \ln \varphi_1(m) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu w}{2\sqrt{\beta + \mu^2}} \ln \frac{\varphi_2(m)}{\varphi_2(0)} - \ln g \right],\end{aligned}\quad (20)$$

$$N_3(m) = \frac{1}{\mu^5} \left( 1 - \frac{1}{g^2} - \frac{\ln g^2}{g} \right), \quad (21)$$

причем функция  $\varphi_1(m)$  определена выше равенством (12), а

$$\begin{aligned}\varphi_2(m) &= \frac{w \sqrt{\mu^2 + \beta} + \beta m - \mu}{w \sqrt{\mu^2 + \beta} - \beta m + \mu}, \\ [14pt] \varphi_2(0) &= \varphi_2(m=0).\end{aligned}\quad (22)$$

Согласно аналогу профиля Хернквиста [1] имеем

$$\begin{aligned}\rho_2(m) &= \frac{M}{2\pi \bar{a}^3} \frac{1}{\bar{g}^3(\bar{g}-1)}, \\ M_2(m) &= \frac{M(\bar{g}-1)^2}{\bar{g}^2}, \\ \bar{g} &= 1 + \bar{\mu} m, \\ \bar{\mu} &= \frac{\sqrt[3]{abc}}{\bar{a}}.\end{aligned}\quad (23)$$

Здесь  $M$  — полная масса галактики, а  $\bar{a}$  — шкала масштабирования галактики.

Аналогично вычисляем энергии

$$\begin{aligned}W &= -2W_0 J_0 \Phi_2(1), \\ T &= W_0 J_1 \Phi_2(1),\end{aligned}\quad (24)$$

где  $W_0$  определен в (15), а

$$\begin{aligned}\Phi_2(m) &= \rho_0^2 H_1(m) + 2M\rho_0 H_2(m) + M^2 H_3(m), \\ H_1(m) &\equiv f_1(m).\end{aligned}\quad (25)$$

Здесь

$$\begin{aligned}H_2(m) &= \frac{1}{8\pi \bar{\mu}^2 \bar{a}^3} \left[ \frac{1}{(\bar{\mu}^2 + \beta)^{3/2}} \ln \frac{\varphi_2(m)}{\varphi_2(0)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2 \ln \varphi_1(m)}{\beta \sqrt{\beta} \bar{g}^2} + \frac{2\bar{\mu} \varphi_3(m)}{\beta(\bar{\mu}^2 + \beta)} \right],\end{aligned}\quad (26)$$

$$H_3(m) = \frac{(\bar{g}-1)^3(3+\bar{g})}{48\pi^2 \bar{\mu}^5 \bar{a}^6 \bar{g}^4}, \quad (27)$$

$$\varphi_3(m) = 1 + \frac{1}{w} + \frac{(\bar{g}-1)(2\beta + w^2 - 2)}{\bar{g}^2 w},$$

где функции  $\varphi_1(m)$  и  $\varphi_2(m)$  определены выше.

### 3.2. ЭГ как слоисто-неоднородный сжатый сфероид (сфероид Маклорена)

В этом случае соответствующие потенциальные энергии  $W$  и кинетические энергии вращения  $T$  также будут определяться формулами (15), (18) и (24). Однако коэффициенты  $J_0$ ,  $J_1$ ,  $W_0$ , а также параметры  $m$ ,  $\mu$ ,  $\bar{\mu}$  вычисляются иначе:

$$\begin{aligned}J_0 &= \frac{2}{ae} \arcsin e, \\ J_1 &= \frac{1}{ae^2} [a(3-2e^2)J_0 - 6\sqrt{1-e^2}], \\ e^2 &= 1 - \frac{c^2}{a^2}, \quad (a=b),\end{aligned}\quad (28)$$

$$\begin{aligned}W_0 &= 2\pi^2 G a^4 c^2, \\ m^2 &= \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}, \\ \mu &= \frac{\sqrt[3]{a^2 c}}{r_s}, \\ \bar{\mu} &= \frac{\sqrt[3]{a^2 c}}{\bar{a}}.\end{aligned}\quad (29)$$

### 3.3. ЭГ как слоисто-неоднородный вытянутый сфероид

В этом случае в соответствующих формулах (15), (18) и (24) для энергий  $W$  и  $T$  следует учесть

$$\begin{aligned}J_0 &= \frac{1}{ae} \ln \frac{1+e}{1-e}, \\ J_1 &= \frac{1}{2ae^2} [a(3-e^2)J_0 - 6],\end{aligned}\quad (30)$$

$$W_0 = 2\pi^2 G a^2 c^4,$$

$$b = c, \quad m^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{c^2},$$

$$\mu = \frac{\sqrt[3]{ac^2}}{r_s}, \quad \bar{\mu} = \frac{\sqrt[3]{ac^2}}{\bar{a}}.$$

#### 4. КРИТЕРИИ РАВНОВЕСИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

##### 4.1. Критерии равновесия

Для существования неоднородной ЭГ как фигуры равновесия должно удовлетворяться необходимое условие для угловой скорости вращения  $\Omega$  — неравенство Пуанкаре [20]:

$$\Omega^2 \leq 2\pi G \bar{\rho}, \quad (\Omega^2 \leq \pi G \rho_0, \quad \Omega^2 \leq 0.45\pi G \bar{\rho}). \quad (31)$$

Здесь  $G$  — гравитационная постоянная,  $\bar{\rho}$  — средняя плотность неоднородной эллиптической галактики. Выполнение неравенства Пуанкаре гарантирует направление полной силы тяжести внутрь и неотрицательность давления. В скобках указаны более строгие неравенства Крудели и Кондратьева соответственно [12, с. 325]. В неравенстве Крудели  $\rho_0$  — плотность в центре галактики и она убывает от центра к периферии. При этом о направлении силы тяжести речь не идет и согласно теореме вириала должно выполняться неравенство

$$2T + W < 0, \quad \text{или} \quad t \equiv \frac{T}{|W|} < \frac{1}{2}.$$

Здесь энергии  $W$  и  $T$  определены формулой (15).

Теперь рассмотрим сфероиды Маклорена, для которых нормированная угловая скорость вращения  $\tilde{\Omega}$  равна [12, стр. 357]:

$$\tilde{\Omega}^2 \equiv \frac{\Omega^2}{\pi G \bar{\rho}} = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e^3} \times$$

$$\times \left[ (3 - 2e^2) \arcsin e - 3e \sqrt{1 - e^2} \right], \quad (32)$$

$$\left( \tilde{\Omega}^2 = 0.37423 \right),$$

где в скобках указано значение  $\tilde{\Omega}^2$  критической конфигурации равновесия. Из (32) заключаем, что сфероид Маклорена — однопараметрическая фигура относительного равновесия; его характеристики зависят только от сжатия фигуры  $\epsilon$ , или от эксцентриситета  $e$ :

$$\epsilon = 1 - \frac{c}{a},$$

$$e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2} = 1 - (1 - \epsilon)^2.$$

Как указано в монографии [12, стр. 358], еще Симпсон и Даламбер заметили, что в интервале  $0 \leq \tilde{\Omega}^2 < 0.4493$  для каждого значения  $\tilde{\Omega}^2$  существуют два сфероиды сплюснутости. Однако это не значит, что чем быстрее вращение фигуры, тем сильнее она будет сжата с полюсов. На самом деле, чем

быстрее вращение фигуры, тем меньше сплюснутость, или сжатие. Сфероид с критическим сжатием  $\epsilon = 0.632$  вращается с максимально возможной для всей последовательности Маклорена угловой скоростью  $\Omega_{\max} = 0.6703$ . Оказывается, что нельзя заставить сфероид Маклорена вращаться быстрее. Кроме того, А. М. Ляпунов доказал, что при  $\Omega > \Omega_{\max} = 0.6703$  не существуют эллипсоидальных (или близких к ним) фигур равновесия. К такому выводу А. М. Ляпунов пришел при решении задачи, которую ему предложил П. Л. Чебышев: выяснить, могут ли существовать новые фигуры равновесия, вращающиеся быстрее указанного предела  $\Omega_{\max}$  [12, стр. 360].

##### 4.2. Критерии устойчивости

Сфероиды Маклорена остаются вековым образом устойчивыми вплоть до критической конфигурации со значением  $e = 0.81267$ , полученным как решение соответствующего уравнения. При  $\tilde{\Omega}^2 = 0.37423$  сфероид Маклорена становится неустойчивым в вековом отношении [12, стр. 362]. Установлено, что в точке  $e = 0.81267$  от последовательности сфероидов Маклорена ответвляется последовательность трехосных фигур равновесия, названных эллипсоидами Якоби [12, стр. 364]. Сами же сфероиды Маклорена в отсутствии диссипации остаются динамически устойчивыми вплоть до  $e = 0.95289$  [12, стр. 364].

По выражению Дарвина: при наличии диссипативных сил природа “делает посадку”, т. е. от сфероидов Маклорена в этой точке неизбежно происходит бифуркация эллипсоидов Якоби. Однако в книге [12, стр. 364] доказано, что никакой неизбежности делать в природе указанную посадку (по Дарвину) в точке  $\tilde{\Omega}^2 = 0.37423$  нет, если в жидкой фигуре сохраняется циркуляция. Кроме того, при дополнительном, не учтенном классиками условии сохранения циркуляции установлено, что [12, стр. 367]:

а) ответвление эллипсоидов в точке  $e = 0.81267$  невозможно;

б) точка динамической неустойчивости  $e = 0.95289$  сфероида Маклорена превращается в нейтральную точку по отношению к превращению сфероида в трехосный эллипсоид. Однако в точке  $e = 0.95289$  такое ответвление невозможно, поскольку в ней (и за ней) сфероиды Маклорена становятся уже динамически неустойчивыми.

Заметим, что еще Пуанкаре и Ляпунову было известно, что эллипсоид Якоби для параметров

$$\frac{b}{a} \leq 0.432232,$$

$$\frac{c}{a} \leq 0.345069, \quad (33)$$

$$\tilde{\Omega}^2 = \frac{\Omega^2}{\pi G \bar{\rho}} \geq 0.284030$$

имеет нейтральную точку относительно грушевидной моды. Ляпунов доказал, что начиная с этой точки эллипсоиды являются вековым образом неустойчивыми [12, стр. 364].

Критерием устойчивости изолированной осесимметричной конфигурации согласно гипотезе Пиблса—Острайкера [9] и [10, стр. 189] является выполнение неравенства для отношения  $t$  (см. выше)

$$t < t_{\text{crit}} \approx 0.14 \pm 0.03. \quad (34)$$

При этом критерий (34) Пиблса—Острайкера об устойчивости не применим к трехосному эллипсоиду как динамической системе. Если потенциал тела имеет квадратичную форму, то для установления устойчивости такой системы применяются другие формулы [12, с. 419], содержащие тензор дисперсии скоростей. Квадратичную форму потенциала имеет только однородный трехосный эллипсоид. Потенциал неоднородного трехосного эллипсоида имеет более сложную форму и содержит эллиптические интегралы.

Далее, положим, что ЭГ представляет собой слоисто-неоднородный сжатый ( $a = b > c$ ), или вытянутый сфероид ( $a > b = c$ ), состоящий из БМ и ТМ. Для БМ берется “астрофизический” профиль (11), а для ТМ — один из аналогов профилей NFW и Хернквиста.

В качестве примера взяты 60 модельных ЭГ, имеющих формы либо сжатого, либо вытянутого сфероиды с параметрами, точно совпадающими с реально существующими. Оказалось, что условие равновесия (32) выполняется: отношение  $\Omega^2 \pi G \rho_0$  составляет от 0.007 до 0.01 для обоих типов сфероидов.

Отношение (34) — критерий устойчивости Пиблса—Острайкера выполняется в случае сжатых сфероидов: параметр  $t$  изменяется от 0.0061 до 0.1068. Для установления устойчивости (или неустойчивости) вытянутых сфероидов можно пользоваться другим критерием, а именно: какое значение принимает отношение  $t_A = L_B/L_C$  удельных угловых моментов  $L_C$  сжатого и  $L_B$  вытянутого сфероидов. Значение  $t_A < 1$  соответствует устойчивости, а  $t_A > 1$  — наоборот.

Исходя из этих соображений ниже приведены формулы вычисления распределения углового момента и удельного углового момента в сфероиде Маклорена с полуосями  $a = b \geq c$  и в вытянутом сфероиде с полуосями  $a \geq b = c$ .

**Примечание 1.** Отметим, что параметр  $t$ , фигурирующий в критерии устойчивости (34) Пиблса—Острайкера не зависит от распределения вещества (от профиля  $\rho(m)$ ), а зависит, только от формы и размеров ЭГ. В то же самое время, удельные угловые моменты сжатого и вытянутого сфероидов ( $L_C$  и  $L_B$ ), а значит, и их отношение  $t_A$ , зависят и от формы и размеров ЭГ, и от распределения в них вещества.

#### 4.3. Распределение углового момента и удельный угловой момент в сфероиде Маклорена

В монографии [12] подробно описан метод получения формулы вычисления удельного углового момента  $l(R)$  сначала для однородного сфероиды Маклорена, а затем и для слоисто-неоднородного сфероиды Маклорена с плотностью  $\rho(m)$  методом синтеза элементарных оболочек [12, стр. 103]. Для применения этого метода к данному сфероиду в нем выделяется элементарная цилиндрическая оболочка с радиусом  $R_0 = m_0 a$  и единичной толщиной. Затем, применив к этой оболочке математический метод, примененный в [12, стр. 598], находим удельный угловой момент  $l(m_0)$  и параметр  $q$  для слоисто-неоднородного (состоящего из гомотетических слоев с постоянной сплюснутостью) сфероиды Маклорена с плотностью  $\rho(m)$  в виде

$$\begin{aligned} l(m_0) &= \frac{15m_0}{2a} L_T (1 - q_0^2) \Phi_1(m_0), \\ q_0^3 &= \frac{\Phi_2(m_0)}{\Phi_2(0)} \leq 1, \\ \Phi_2(0) &\equiv \Phi_2(m_0 = 0), \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1(m_0) &= \sqrt{1 - e^2} \int_{m_0}^1 \frac{m \rho(m) dm}{\sqrt{m^2 - m_0^2}} \geq 0, \\ \Phi_2(m_0) &= 3\sqrt{1 - e^2} \int_{m_0}^1 m \rho(m) \sqrt{m^2 - m_0^2} \times \\ &\quad \times dm \geq 0, \\ \Phi_2(0) &= 3\sqrt{1 - e^2} \int_0^1 m^2 \rho(m) dm > 0, \\ e^2 &= 1 - \frac{c^2}{a^2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Неотрицательность функций  $\Phi_1(m_0)$  и  $\Phi_2(m_0)$  очевидна, так как подынтегральные функции в формулах (36) положительны. Условие  $0 < q_0 \leq 1$  вытекает из неравенства  $0 < \Phi_2(m_0) < \Phi_2(0)$ , которое в свою очередь следует из неравенства  $m \rho(m) \sqrt{m^2 - m_0^2} \leq m^2 \rho(m)$ , выполняющегося для подынтегральных функций.

Далее, учтем, что полный угловой момент  $L_T$  слоисто-неоднородного сфероиды Маклорена с профилем  $\rho(m)$ , его полный момент инерции  $I_T$  относительно оси вращения  $Oz$ , а также полная масса  $M_T$  равны

$$\begin{aligned} L_T &= \Omega I_T, \\ I_T &= \frac{2M_T}{5} a^2, \\ M_T &= 4\pi a^2 c \int_0^1 m^2 \rho(m) dm. \end{aligned}$$

Тогда выражение (35) можно переписать в виде

$$\alpha(m_0) \equiv \frac{l(m_0)}{\Omega M_T} = 3m_0 a (1 - q_0^2) \Phi_1(m_0) > 0, \quad (37)$$

$$(0 < q_0 < 1),$$

где неотрицательные функции  $\Phi_1(m_0)$ ,  $\Phi_2(m_0)$  и параметр  $q_0$  определены выше.

#### 4.4. Распределение углового момента и удельный угловой момент в вытянутом сфероиде

Теперь об однородном вытянутом сфероиде, ограниченном сфероидальной поверхностью

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{r^2}{c^2} &= 1, \\ r^2 &= y^2 + z^2, \\ r^2 &= c^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right). \end{aligned} \quad (38)$$

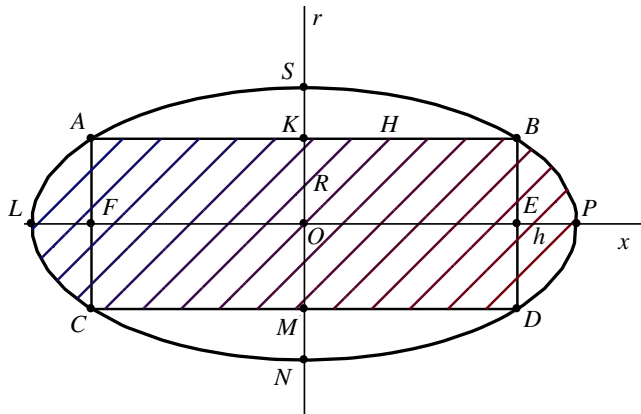
Пусть цилиндрическая поверхность с радиусом  $R$  выделяет в данном сфероиде объем  $V(R)$  (рис. 1).

Точки  $A(-H, R)$ ,  $B(H, R)$ ,  $C(-H, -R)$  и  $D(-H, R)$  находятся на поверхности данного сфероида, т. е. их координаты должны удовлетворять уравнению этой поверхности:

$$\begin{aligned} \frac{H^2}{a^2} + \frac{R^2}{c^2} &= 1, \quad H = aq, \\ q &= \sqrt{1 - \frac{R^2}{c^2}}, \quad R^2 = c^2(1 - q^2). \end{aligned} \quad (39)$$

По аналогии со сжатым сфероидом найдем объем заштрихованной части  $V(R)$  вытянутого сфероида с полуосями  $LO = OP = a$  и  $SO = ON = c$  (см. рис. 1). Этот объем равен сумме объемов цилиндра и двух сегментов:

$$V(R) = V_{\text{cyl}} + 2V_{\text{seg}}, \quad V_{\text{cyl}} = 2\pi R^2 H.$$



**Рис. 1.** Сечение вытянутого сфероида с полуосями  $LO = OP = a$  и  $SO = ON = c$ . Заштрихована площадь, состоящая из сечений цилиндра  $ABCD$  с радиусом  $R = BK = KD$ , высотой  $2H = FE$  и двух равных сфероидальных сегментов (точнее сегментов параболоида вращения) высотой  $h = LF = EP$

Здесь  $V_{\text{cyl}}$  — объем цилиндра с радиусом основания  $R = KO = OM$  и высотой  $2H = FE$ , а  $2V_{\text{seg}}$  — объем двух равных сегментов  $ALC$  и  $BPD$  с высотой  $h = LF = EP$  (см. рис. 1), образованных частями сфероида (39) и плоскостями  $x = H$  и  $x = a$ , а также  $x = -a$  и  $x = -H$ . Эти сегменты также можно считать параболоидами вращения.

Вычислим объем  $V_{\text{seg}}$  сегмента  $ALC$  (или  $BPD$ ) в силу равенств (38) и (39):

$$V_{\text{seg}} = \pi \int_H^a r^2 dx = \pi \int_H^a c^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \frac{\pi a c^2}{3} (2 - 3q + q^3).$$

Следовательно, для искомого объема  $V(R)$  находим

$$V(R) = V_{\text{cyl}} + 2V_{\text{seg}} = 2\pi H R^2 + \frac{4\pi a c^2}{3} \left( 1 - \frac{3}{2}q + \frac{1}{2}q^3 \right).$$

С учетом выражений  $H$  и  $R$  для  $V(R)$  окончательно находим

$$\begin{aligned} V(R) &= \frac{4\pi a c^2}{3} (1 - q^3) = V_T (1 - q^3), \\ V_T &= \frac{4}{3} \pi a c^2, \end{aligned}$$

где  $V_T$  — полный объем вытянутого сфероида.

Таким образом, масса заштрихованной части  $M(R)$  определится равенством

$$\begin{aligned} M(R) &= \rho V(R) = \rho V_T (1 - q^3) = M_T (1 - q^3), \\ q^3 &= 1 - \frac{M(R)}{M_T}, \end{aligned}$$

а масса  $M_{\text{seg}}$  сегмента  $ALCD$  (или  $BPD$ ) будет равна

$$\begin{aligned} M_{\text{seg}} &= \rho V_{\text{seg}} = \frac{\pi \rho}{3} a c^2 (2 - 3q + q^3) = \\ &= \frac{\pi \rho}{3} a c^2 (1 - q)^2 (2 + q). \end{aligned}$$

Теперь вычислим  $J_z$  — момент инерции заштрихованной части тела относительно оси  $Oz$ . По аналогии с случаем сфероида Маклорена он равен

$$J_z = J_{\text{cyl}} + 2J_{\text{seg}},$$

где  $J_{\text{cyl}}$  — момент инерции цилиндра с плотностью  $\rho$ , радиусом  $R$  и высотой  $2H$  относительно поперечной оси  $Oz$ , перпендикулярной к продольной оси  $Ox$  и проходящей через его центра масс, а  $J_{\text{seg}}$  — момент инерции одного из сфероидальных сегментов  $ALC$  (или  $BPD$ ) относительно той же оси.

Согласно [5] момент инерции  $J_{\text{cyl}}$  рассматриваемого цилиндра относительно поперечной оси, проходящей через его центр тяжести, равен

$$\begin{aligned} J_{\text{cyl}} &= \frac{M_{\text{cyl}}}{12} (4H^2 + 3R^2) = \\ &= \frac{\pi \rho R^2 H}{6} (4H^2 + 3R^2), \end{aligned} \quad (40)$$

$$(M_{\text{cyl}} = \rho V_{\text{cyl}} = 2\rho \pi R^2 H).$$

Остается вычислить момент инерции  $J_{Oz} \equiv J_{\text{seg}}$  сегмента  $Ba_1D$  (точнее параболоида вращения) с плот-

ностью  $\rho$  и радиусом основания круга с радиусом  $R$  относительно оси вращения  $Oz$  следующим образом. Вырежем мысленно в сегменте  $Ba_1D$  тонкий цилиндр с массой  $dm$ , находящийся от оси вращения  $Oz$  на расстоянии  $x$ . Согласно теореме Гюйгенса—Штейнера момент инерции  $dJ_{\text{seg}}$  такого цилиндра будет равен

$$dJ_{\text{seg}} = x^2 dm + \frac{r^2}{4} dm,$$

$$dm = \rho dV, \quad dV = \pi r^2 dx,$$

где второе слагаемое в выражении  $dJ_{\text{seg}}$  представляет собой момент инерции тонкого цилиндра (диска) относительно оси, проходящей через его диаметр. Для момента инерции всего сегмента получим

$$J_{\text{seg}} = \int_H^a x^2 dm + \frac{1}{4} \int_H^a r^2 dm =$$

$$= \pi \rho \int_H^a x^2 r^2 dx + \frac{\pi \rho}{4} \int_H^a r^4 dx.$$

Подставив в интегралы выражение  $r^2$  после интегрирования, находим

$$J_{\text{seg}} = \frac{2\pi \rho a c^2}{15} \left[ a^2 + c^2 - \frac{1}{2} q^3 (5 - 3q^2) a^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{q}{8} (15 - 10q^2 + 3q^4) c^2 \right].$$

Так как

$$J_{\text{cyl}} = \frac{\pi \rho R^2 H}{6} (4H^2 + 3R^2) =$$

$$= \frac{\pi \rho a c^2 q (1 - q^2)}{6} [4a^2 q^2 + 3(1 - q^2) c^2],$$

то искомый момент инерции  $J_z$  заштрихованной части тела относительно оси вращения  $Oz$  вытянутого сфероида будет равен

$$J_z = \frac{4\pi \rho a c^2 (a^2 + c^2)}{15} \times$$

$$\times \left[ 1 - \frac{5}{2} \frac{c^2}{a^2 + c^2} q^3 + \left( \frac{3}{2} A - \frac{a^2}{a^2 + c^2} \right) q^5 \right],$$

или

$$J_z = J_T \left[ 1 - \frac{5}{2} A q^3 + \frac{1}{2} (5A - 2) q^5 \right],$$

$$J_T = \frac{M_T}{5} (a^2 + c^2),$$

$$A = \frac{c^2}{a^2 + c^2},$$

где

$$r l M_T = \frac{4\pi \rho a c^2}{3},$$

$$q^3 = 1 - \frac{M(R)}{M_T} = c^3 \sqrt{(1 - R^2)^3}.$$

Здесь  $J_T$  — полный момент инерции вытянутого сфероида относительно оси  $Oz$ , а  $M_T$  — его полная масса.

Таким образом, распределение углового момента  $L(R) = \Omega J_z(R)$  в вытянутом сфероиде примет вид

$$L(R) = L_T \left[ 1 - \frac{5}{2} A q^3 + \frac{1}{2} (5A - 2) q^5 \right],$$

$$L_T = \Omega J_T = \frac{\Omega M_T}{5} (a^2 + c^2),$$

$$\Omega^2 = \frac{G M_T}{a^3},$$

где  $L_T$  — полный угловой момент вытянутого сфероида.

Заметим, что при  $A = 1$  выражение  $L(R)$  совпадает с его выражением для сжатого сфероида.

Для применения метода синтеза элементарных оболочек к вытянутому однородному сфероиду с угловым моментом  $L(R)$ , определяемым приведенным выше равенством, выделим мысленно в нем элементарную цилиндрическую оболочку с радиусом  $R_1 = m_1 c$  и единичной толщиной. Применив математический аппарат, приведенный в работе [5], найдем удельный угловой момент  $l(m_1)$  и параметр  $q_1$  для слоисто-неоднородного вытянутого сфероида (с постоянной сплюснутостью) с профилем  $\rho(m)$  в виде

$$l(m_1) = \frac{5m_1}{2c} L_T [3A - (5A - 2) q_1^2] \times$$

$$\times \Phi_1(m_1) > 0,$$

$$q_1^3 = \frac{\Phi_2(m_1)}{\Phi_2(0)} < 1,$$

или с учетом выражений  $L_T$  из (43), коэффициента  $A$  из (41) и тождества

$$(a^2 + c^2) [3A - (5A - 2) q_1^2] = 3c^2 - (3c^2 - 2a^2) q_1^2$$

имеем

$$\beta(m_1) \equiv \frac{l(m_1)}{\Omega M_T} = \frac{m_1}{2c} [3c^2 - (3c^2 - 2a^2) q_1^2] \Phi_1(m_1),$$

или

$$\beta(m_1) = \frac{m_1 a}{2\sqrt{1 - e^2}} [3 - 3e^2 - (1 - 3e^2) q_1^2] \times$$

$$\times \Phi_1(m_1) > 0,$$

$$(0 < q_1 < 1).$$

Функции  $\Phi_1(m_1)$  и  $\Phi_2(m_1)$ , фигурирующие в (44) и 45, определяются формулой 36.

Очевидно, что отношение функций  $\alpha(m_0)$  и  $\beta(m_1)$ , определяемых равенствами (37) и (45), имеет вид

$$\frac{\alpha(m_0)}{\beta(m_1)} = \frac{6\sqrt{1 - e^2}(1 - q_0^2)}{3 - 3e^2 - (1 - 3e^2) q_1^2} \frac{m_0}{m_1} \frac{\Phi_1(m_0)}{\Phi_1(m_1)} > 0,$$

$$(0 < q_0 < 1, 0 < q_1 < 1).$$

Кроме того, при  $m_0 = m_1$  имеем  $q_1 = q_0$ . Поэтому это соотношение зависит не только от параметра  $q_0$ ,

но и от эксцентриситета  $e$ , т. е. от формы и размеров сфероида:

$$\frac{\alpha(m_0)}{\beta(m_0)} = \frac{6\sqrt{1-e^2}(1-q_0^2)}{3-3e^2-(1-3e^2)q_0^2} > 0, \quad (46)$$

$$(0 < q_0 < 1).$$

Для определения устойчивости (или неустойчивости) рассмотрим далее, слоисто-неоднородные сфероид Маклорена и вытянутый сфероид, состоящие из барионной массы (БМ) и темной материи (ТМ) с известными профилями плотностей.

#### 4.5. Слоисто-неоднородные сфероиды с “астрофизическим” профилем

Рассмотрим сначала слоисто-неоднородные сфероид Маклорена и вытянутый сфероид, состоящие только из БМ с “астрофизическим” профилем 11. В этом случае в формуле (36) профиль  $\rho(m)$  заменяется на  $\rho_1(m)$  из (11) и вычисляются функции  $\Phi_1(m_0)$ ,  $\Phi_2(m_0)$  и  $\Phi_2(0)$ . Затем по формулам (35) и 37 определяются параметр  $q_0$  и нормированный удельный угловой момент  $\alpha(m_0)$  для слоисто-неоднородного сфероиды Маклорена с профилем  $\rho(m)$ , а по формулам (44) и (45) — параметр  $q_1$  и  $\beta(m_1)$  для слоисто-неоднородного вытянутого сфероиды с тем же профилем.

Итак, по формуле (36) в случае “астрофизического” профиля для функций  $\Phi_1(m_0)$ ,  $\Phi_2(m_0)$  и  $\Phi_2(0)$  находим

$$\Phi_1(m_0) = C_1 F_1(m_0) > 0,$$

$$C_1 = \frac{\rho_0 \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1+\beta}},$$

$$F_1(m_0) = \frac{\sqrt{1-m_0^2}}{1+\beta m_0^2} > 0,$$

$$\Phi_2(m_0) = C_2 F_2(m_0) > 0,$$

$$\Phi_2(0) = C_2 F_2(0) > 0,$$

$$C_2 = 3C_1,$$

где

$$F_2(m_0) = \frac{1}{2\beta\sqrt{\beta}} \left[ \sqrt{1+\beta} \ln \eta_1(m_0) - \right.$$

$$\left. -\sqrt{1+\beta} \ln(1+\beta m_0^2) - 2\sqrt{\beta} \sqrt{1-m_0^2} \right] > 0,$$

$$F_2(0) = \frac{1}{2\beta\sqrt{\beta}} \left[ \sqrt{1+\beta} \ln(\sqrt{\beta} + \sqrt{1+\beta})^2 - \right.$$

$$\left. -2\sqrt{\beta} \right] > 0,$$

а

$$\eta_1(m_0) = 1 + 2\beta - \beta m_0^2 + 2\sqrt{\beta} \sqrt{1+\beta} \sqrt{1-m_0^2}.$$

Теперь обозначим через  $\alpha_1(m_0)$  и  $\beta_1(m_1)$  нормированные удельные угловые моменты слоисто-неоднородного сфероиды Маклорена и вытянутого

сфероиды с “астрофизическим” профилем. Тогда в силу (37) и (45) для этих функций, а по формулам (35) и (44) для параметра  $q^3$  получим

$$\alpha_1(m_0) = A_1(q_0) m_0 F_1(m_0) > 0,$$

$$q_0^3 = \frac{F_2(m_0)}{F_2(0)} < 1, \quad (47)$$

$$\beta_1(m_1) = B_1(q_1) m_1 F_1(m_1) > 0,$$

$$q_1^3 = \frac{F_2(m_1)}{F_2(0)} < 1, \quad (48)$$

где функции  $F_1(m_0)$ ,  $F_2(m_0)$  и  $F_2(0)$  определены выше, а

$$A_1(q_0) = \frac{3a \rho_0 \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1+\beta}} (1-q_0^2) > 0,$$

$$B_1(q_1) = \frac{\rho_0 a}{2\sqrt{1+\beta}} [3-3e^2-(1-3e^2)q_1^2] > 0.$$

Легко проверить, что контрольные условия  $\Phi_1(1) \equiv F_1(1) = 0$  и  $\Phi_2(1) \equiv F_2(1) = 0$  удовлетворяются. Кроме того, при  $m_0 = m_1$  имеем  $q_1 = q_0$ , а отношение  $\alpha_1(m_0)/\beta_1(m_0)$  имеет точно такой же вид, что и (46).

#### 4.6. Слоисто-неоднородные сфероиды с аналогом профиля NFW

Теперь положим, что слоисто-неоднородные сфероид Маклорена и вытянутый сфероид состоят из БМ с аналогом профиля NFW. В этом случае в формуле (36) следует заменить профиль  $\rho(m)$  на аналог профиля NFW  $\rho_2(m)$ , определяемый равенством (17). После вычисления соответствующих интегралов в (36) находим функции  $\Phi_1(m_0)$ ,  $\Phi_2(m_0)$  и  $\Phi_2(0)$ :

$$\Phi_1(m_0) = D_1 N_1(m_0, \mu) > 0,$$

$$D_1 = K\sqrt{1-e^2},$$

$$N_1(m_0, \mu) = \frac{1}{2\mu u_0^3} \left[ h_2(m_0) - \frac{2\mu u_0 v_0}{1+\mu} \right] > 0, \quad (49)$$

$$\Phi_2(m_0) = D_2 N_2(m_0, \mu) > 0,$$

$$\Phi_2(0) = D_2 N_2(0, \mu) > 0,$$

$$D_2 = 3D_1,$$

где

$$N_2(m_0, \mu) = \frac{1}{\mu^3} \left[ -\frac{h_2(m_0)}{2u_0} - \frac{\mu v_0}{1+\mu} + \ln \frac{1+v_0}{m_0} \right] > 0,$$

$$N_2(0, \mu) = \frac{1}{\mu^3} \left( \ln(1+\mu) - \frac{\mu}{1+\mu} \right) > 0,$$

$$h_2(m_0) = \ln \frac{1+\mu m_0^2 + u_0 v_0}{1+\mu m_0^2 - u_0 v_0},$$

$$u_0 = \sqrt{1-\mu^2 m_0^2}, \quad v_0 = \sqrt{1-m_0^2}.$$

После чего по формулам (37) и (45) определяем нормированные удельные угловые моменты  $\alpha_2(m_0)$

для слоисто-неоднородного сфероиды Маклорена и  $\beta_2(m_1)$  для вытянутого сфероиды с аналогом профиля NFW, а по формулам (35) и 44 параметр  $q^3$ :

$$\begin{aligned}\alpha_2(m_0) &= A_2(q_0) m_0 N_1(m_0, \mu_0) > 0, \\ q_0^3 &= \frac{N_2(m_0, \mu_0)}{N_2(0, \mu_0)} < 1, \\ \mu_0 &= \frac{\sqrt[3]{a^2 c}}{r_s},\end{aligned}\quad (50)$$

$$\begin{aligned}\beta_2(m_1) &= B_2(q_1) m_1 N_1(m_1, \mu_1) > 0, \\ q_1^3 &= \frac{N_2(m_1, \mu_1)}{N_2(0, \mu_1)} < 1, \\ \mu_1 &= \frac{\sqrt[3]{a c^2}}{r_s},\end{aligned}\quad (51)$$

где функции  $N_1(m, \mu)$ ,  $N_2(m, \mu)$  определены выше, а

$$\begin{aligned}A_2(q_0) &= 3Ka\sqrt{1-e^2} (1-q_0^2) > 0, \\ B_2(q_1) &= \frac{Ka}{2} [3-3e^2 - (1-3e^2) q_1^2] > 0.\end{aligned}$$

Контрольные условия  $\Phi_1(1) \equiv N_1(1) = 0$  и  $\Phi_2(1) \equiv N_2(1) = 0$  удовлетворяются. Кроме того, при  $m_0 = m_1$  отношение  $\alpha_2(m_0)/\beta_2(m_0)$  по аналогии с (46) при  $m_0 = m_1$  имеет вид:

$$\frac{\alpha_2(m_0)}{\beta_2(m_0)} = \frac{6\sqrt{1-e^2}(1-q_0^2)}{3-3e^2-(1-3e^2)q_1^2} \frac{N_1(m_0, \mu_0)}{N_1(m_0, \mu_1)} > 0, \quad (52)$$

$(0 < q_0 < 1, 0 < q_1 < 1).$

Отличие отношения (52) от (46) связано с параметрами  $\mu_0$  и  $\mu_1$ , которые для сфероиды Маклорена и вытянутого сфероиды определяются по разному.

#### 4.7. Слоисто-неоднородные сфероиды с аналогом профиля Хернквиста

Пусть теперь слоисто-неоднородные сфероид Маклорена и вытянутый сфероид состоят из БМ с аналогом профиля Хернквиста. В этом случае в формулах (36) и (37) следует положить  $\rho(m) = \rho_2(m)$ , где аналог профиля Хернквиста  $\rho_2(m)$  определяется равенством (23). После вычисления интегралов в (36) находим функции  $\Phi_1(m_0)$ ,  $\Phi_2(m_0)$  и  $\Phi_2(0)$ :

$$\begin{aligned}\Phi_1(m_0) &= E_1 H_1(m_0, \bar{\mu}_0) > 0, \\ \Phi_2(m_0) &= E_2 H_2(m_0, \bar{\mu}_0) > 0, \\ \Phi_2(0) &= E_2 H_2(0, \bar{\mu}_0) > 0,\end{aligned}\quad (53)$$

$$\begin{aligned}H_1(m_0, \bar{\mu}_0) &= \frac{1}{4\bar{\mu}_0 \bar{u}_0^5} \text{Big}[(2 + \bar{\mu}_0^2 m_0^2) \bar{h}_2(m_0) - \\ &\quad - \frac{2\bar{\mu}_0 \bar{u}_0 \bar{v}_0}{(1 + \bar{\mu}_0)^2} (4 + 3\bar{\mu}_0 - \bar{\mu}_0^2 m^2)] > 0, \\ H_2(m_0, \bar{\mu}_0) &= \frac{1}{2\bar{\mu}_0(1 + \bar{\mu}_0)^2 \bar{u}_0^3} [(1 + \bar{\mu}_0 m_0^2) \bar{u}_0 \bar{v}_0 - \\ &\quad - \frac{m_0^2(1 + \bar{\mu}_0)^2}{2} \bar{h}_2(m_0)] > 0, \\ H_2(0, \bar{\mu}_0) &= \frac{1}{2\bar{\mu}_0(1 + \bar{\mu}_0)^2} > 0, \\ \bar{h}_2(m_0) &= \ln \frac{1 + \bar{\mu}_0 m_0^2 + \bar{u}_0 \bar{v}_0}{1 + \bar{\mu}_0 m_0^2 - \bar{u}_0 \bar{v}_0}, \\ E_1 &= \frac{M\sqrt{1-e^2}}{2\pi \bar{a}^3}, E_2 = 3E_1, \\ \bar{u}_0 &= \sqrt{1 - \bar{\mu}_0^2 m_0^2}, \quad \bar{v}_0 = \sqrt{1 - m_0^2}.\end{aligned}$$

Аналогичным образом определяем нормированные удельные угловые моменты  $\alpha_3(m_0)$  для слоисто-неоднородного сфероиды Маклорена и  $\beta_3(m_1)$  для вытянутого сфероиды с аналогом профиля Хернквиста, а также параметр  $\bar{q}^3$ :

$$\begin{aligned}\alpha_3(m_0) &= A_3(\bar{q}_0) m_0 H_1(m_0, \bar{\mu}_0) > 0, \\ \bar{q}_0^3 &= \frac{H_2(m_0, \bar{\mu}_0)}{H_2(0, \bar{\mu}_0)} < 1, \\ \bar{\mu}_0 &= \frac{\sqrt[3]{a^2 c}}{\bar{a}}, \\ \beta_3(m_1) &= B_3(\bar{q}_1) m_1 H_1(m_1, \bar{\mu}_1) > 0, \\ \bar{q}_1^3 &= \frac{H_2(m_1, \bar{\mu}_1)}{H_2(0, \bar{\mu}_1)} < 1, \\ \bar{\mu}_1 &= \frac{\sqrt[3]{a c^2}}{\bar{a}},\end{aligned}\quad (54)$$

где

$$\begin{aligned}A_3(\bar{q}_0) &= \frac{3Ma\sqrt{1-e^2}}{2\pi \bar{a}^3} (1 - \bar{q}_0^2) > 0, \\ B_3(\bar{q}_1) &= \frac{Ma}{4\pi \bar{a}^3} [3 - 3e^2 - (1 - 3e^2) \bar{q}_1^2] > 0.\end{aligned}$$

При этом отношение  $\alpha_3(m_0)/\beta_3(m_0)$  по аналогии с (46) при  $m_0 = m_1$  имеет вид:

$$\frac{\alpha_3(m_0)}{\beta_3(m_0)} = \frac{6\sqrt{1-e^2}(1-\bar{q}_0^2)}{3-3e^2-(1-3e^2)\bar{q}_1^2} \frac{H_1(m_0, \bar{\mu}_0)}{H_1(m_0, \bar{\mu}_1)} > 0, \quad (55)$$

$(0 < \bar{q}_0 < 1, 0 < \bar{q}_1 < 1).$

Отличие отношения (55) от (46) также объясняется с различием параметров  $\bar{\mu}_0$  и  $\bar{\mu}_1$ .

#### 4.8. Слоисто-неоднородные сфероиды, состоящие из барионной массой и темной материи

Заметим, что приведенные выше выражения  $\alpha_k(m_0)$  и  $\beta_k(m_0)$  соответствуют случаю, когда слоисто-неоднородный сфероид (сжатый и вытянутый) состоит, например, только из барионной массы (БМ) с профилем  $\rho(m)$ . Если данные сфероиды состоят из БМ и ТМ с профилями  $\rho_1(m)$  и  $\rho_2(m)$  соответственно, то в формуле (50) для функций  $\Phi_1(m_0)$  и  $\Phi_2(m_0)$  профиль  $\rho(m)$  следует заменить на сумму  $\rho_1(m) + \rho_2(m)$ . При этом в качестве профиля  $\rho_1(m)$  для БМ возьмем “астрофизический профиль”, а вместо профиля  $\rho_2(m)$  для ТМ один из аналогов профилей NFW и Хернквиста (см. раздел 3). В этом случае нормированные удельные угловые моменты слоисто-неоднородных сфероидов Маклорена и вытянутого сфероидов будут определяться иначе. По этой причине обозначим через  $\tilde{\alpha}_k(m_0)$ ,  $\tilde{\beta}_k(m_0)$  и  $\tilde{q}^3(m_0)$  соответствующие нормированные удельные угловые моменты и параметр. Ниже приведены соответствующие формулы для вычисления этих величин:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_k(m_0) &= 3m_0 a (1 - \tilde{q}_0^2) S_1(m_0) > 0, \\ \tilde{q}_0^3 &= \frac{S_2(m_0)}{S_2(0)} < 1,\end{aligned}\quad (56)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_k(m_1) &= \frac{m_1}{2c} [3c^2 - (3c^2 - 2a^2) \tilde{q}_1^2] S_1(m_1) > 0, \\ \tilde{q}_1^3 &= \frac{S_2(m_1)}{S_2(0)} < 1,\end{aligned}\quad (57)$$

где

$$\begin{aligned}S_1(m_0) &= \sqrt{1 - e^2} \int_{m_0}^1 \frac{m [\rho_1(m) + \rho_2(m)]}{\sqrt{m^2 - m_0^2}} dm \geq 0, \\ S_2(m_0) &= 3\sqrt{1 - e^2} \int_{m_0}^1 m [\rho_1(m) + \rho_2(m)] \times \\ &\times \sqrt{m^2 - m_0^2} dm \geq 0, \\ S_2(0) &\equiv S_2(m_0 = 0) \geq 0.\end{aligned}\quad (58)$$

Здесь для краткости приведены формулы для функций  $S_1(m_0)$  и  $S_2(m_0)$  с аргументом  $m_0$ . Эти же функции для аргумента  $m_1$  легко получаются из них заменой  $m_0$  на  $m_1$ .

Сначала для БМ возьмем “астрофизический профиль”, а для ТМ — аналог профиля NFW. В этом случае функции  $\tilde{\alpha}_1(m_0)$  и  $\tilde{\beta}_1(m_0)$  в силу формул (56) и (57) можно представить в виде:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_1(m_0) &= m_0 [A_1(q_0)F_1(m_0) + \\ &+ A_2(q_0)N_1(m_0, \mu_0)] \geq 0, \\ \tilde{\beta}_1(m_1) &= m_1 [B_1(q_1)F_1(m_1) + \\ &+ B_2(q_1)N_1(m_1, \mu_1)] \geq 0.\end{aligned}\quad (59)$$

Аналогично в случае аналога профиля Хернквиста:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_2(m_0) &= m_0 [A_1(q_0)F_1(m_0) + \\ &+ A_3(q_0)H_1(m_0, \bar{\mu}_0)] \geq 0, \\ \tilde{\beta}_2(m_1) &= m_1 [B_1(q_1)F_1(m_1) + \\ &+ B_3(q_1)H_1(m_1, \bar{\mu}_1)] \geq 0.\end{aligned}\quad (60)$$

Фигурирующие в равенствах (59) и (60) коэффициенты  $A_k(q)$ ,  $B_k(q)$  и функции  $F_k(m)$ ,  $N_k(m)$  и  $H_k(m)$  ( $k = 1, 2$ ) приведены выше.

Теперь определим параметры  $\tilde{q}_0^3$  и  $\tilde{q}_1^3$  по формулам (56) и (57). Для этого достаточно вычислить функции  $S_2(m_0)$  и  $S_2(0)$ . В случае “астрофизического профиля” для БМ и аналога профиля NFW для ТМ получим:

$$\begin{aligned}\tilde{q}_0^3 &= \frac{C_2 F_2(m_0) + D_2 N_2(m_0, \mu_0)}{C_2 F_2(0) + D_2 N_2(0, \mu_0)} < 1, \\ \tilde{q}_1^3 &= \frac{C_2 F_2(m_1) + D_2 N_2(m_1, \mu_1)}{C_2 F_2(0) + D_2 N_2(0, \mu_1)} < 1.\end{aligned}$$

В случае “астрофизического профиля” для БМ и аналога профиля Хернквиста для ТМ получаем:

$$\begin{aligned}\tilde{q}_0^3 &= \frac{C_2 F_2(m_0) + E_2 H_2(m_0, \bar{\mu}_0)}{C_2 F_2(0) + E_2 H_2(0, \bar{\mu}_0)} < 1, \\ \tilde{q}_1^3 &= \frac{C_2 F_2(m_1) + E_2 H_2(m_1, \bar{\mu}_1)}{C_2 F_2(0) + E_2 H_2(0, \bar{\mu}_1)} < 1,\end{aligned}$$

где коэффициенты  $C_k$ ,  $D_k$  и  $E_k$ , а также функции  $F_k(m_0)$ ,  $N_k(m_n, \mu_k)$  и  $H_k(m_n, \bar{\mu}_k)$  ( $n = 0, 1, k = 1, 2$ ) приведены выше.

Отношения функций  $\tilde{\alpha}_k(m_0)/\tilde{\beta}_k(m_0)$  при  $m_1 = m_0$  примут вид:

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{\alpha}_1(m_0)}{\tilde{\beta}_1(m_0)} &= \frac{A_1(\tilde{q}_0)F_1(m_0) + A_2(\tilde{q}_0)N_1(m_0, \mu_0)}{B_1(\tilde{q}_1)F_1(m_0) + B_2(\tilde{q}_1)N_1(m_0, \mu_1)} = \\ &= \frac{6\sqrt{1 - e^2}(1 - \tilde{q}_0^2)}{3 - 3e^2 - (1 - 3e^2)\tilde{q}_1^2} \times \\ &\times \frac{\rho_0 F_1(m_0) + K\sqrt{1 + \beta} N_1(m_0, \mu_0)}{\rho_0 F_1(m_0) + K\sqrt{1 + \beta} N_1(m_0, \mu_1)} > 0,\end{aligned}\quad (61)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{q}_0^3 &= \frac{\rho_0 F_2(m_0) + K\sqrt{1 + \beta} N_2(m_0, \mu_0)}{\rho_0 F_2(0) + K\sqrt{1 + \beta} N_2(0, \mu_0)} < 1, \\ \tilde{q}_1^3 &= \frac{\rho_0 F_2(m_0) + K\sqrt{1 + \beta} N_2(m_0, \mu_1)}{\rho_0 F_2(0) + K\sqrt{1 + \beta} N_2(0, \mu_1)} < 1,\end{aligned}\quad (62)$$

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{\alpha}_2(m_0)}{\tilde{\beta}_2(m_0)} &= \frac{A_1(\tilde{q}_0)F_1(m_0) + A_3(\tilde{q}_0)H_1(m_0, \bar{\mu}_0)}{B_1(\tilde{q}_1)F_1(m_0) + B_3(\tilde{q}_1)H_1(m_0, \bar{\mu}_1)} = \\ &= \frac{6\sqrt{1 - e^2}(1 - \tilde{q}_0^2)}{3 - 3e^2 - (1 - 3e^2)\tilde{q}_1^2} \times \\ &\times \frac{2\pi\bar{a}^3 \rho_0 F_1(m_0) + M\sqrt{1 + \beta} H_1(m_0, \bar{\mu}_0)}{2\pi\bar{a}^3 \rho_0 F_1(m_0) + M\sqrt{1 + \beta} H_1(m_0, \bar{\mu}_1)} > 0,\end{aligned}\quad (63)$$

а

$$\begin{aligned}\tilde{q}_0^3 &= \frac{2\pi\bar{a}^3\rho_0 F_2(m_0) + M\sqrt{1+\beta}H_2(m_0, \bar{\mu}_0)}{2\pi\bar{a}^3\rho_0 F_2(0) + M\sqrt{1+\beta}H_2(0, \bar{\mu}_0)} < 1, \\ \tilde{q}_1^3 &= \frac{2\pi\bar{a}^3\rho_0 F_2(m_0) + M\sqrt{1+\beta}H_2(m_0, \bar{\mu}_1)}{2\pi\bar{a}^3\rho_0 F_2(0) + M\sqrt{1+\beta}H_2(0, \bar{\mu}_1)} < 1.\end{aligned}\quad (64)$$

При этом если  $\mu_0 = \mu_1 \equiv \mu$  и  $\bar{\mu}_0 = \bar{\mu}_1 \equiv \bar{\mu}$ , то  $\tilde{q}_0 = \tilde{q}_1 \equiv \tilde{q}$  и эти соотношения упростятся:

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{\alpha}_1(m_0)}{\tilde{\beta}_1(m_0)} &= \frac{6\sqrt{1-e^2}(1-\tilde{q}^2)}{3-3e^2-(1-3e^2)\tilde{q}^2}, \\ \tilde{q}^3 &= \frac{\rho_0 F_2(m_0) + K\sqrt{1+\beta}N_2(m_0, \mu)}{\rho_0 F_2(0) + K\sqrt{1+\beta}N_2(0, \mu)} < 1, \\ \frac{\tilde{\alpha}_2(m_0)}{\tilde{\beta}_2(m_0)} &= \frac{6\sqrt{1-e^2}(1-\tilde{q}^2)}{3-3e^2-(1-3e^2)\tilde{q}^2}, \\ \tilde{q}^3 &= \frac{2\pi\bar{a}^3\rho_0 F_2(m_0) + M\sqrt{1+\beta}H_2(m_0, \bar{\mu})}{2\pi\bar{a}^3\rho_0 F_2(0) + M\sqrt{1+\beta}H_2(0, \bar{\mu})} < 1.\end{aligned}$$

Итак, мы рассмотрели два варианта слоисто-неоднородных сжатых и вытянутых сфероидов. Первый вариант соответствует случаю, когда эти сфероиды состоят только из БМ, а во втором варианте они состоят из БМ и ТМ. В первом варианте мы определили нормированные удельные угловые моменты  $\alpha_k(m_0)$  и  $\beta_k(m_0)$  слоисто-неоднородных сжатых и вытянутых сфероидов (табл. 1).

Во втором варианте эти величины обозначены как  $\tilde{\alpha}_k(m_0)$  и  $\tilde{\beta}_k(m_0)$  (табл. 2).

Величины  $\alpha_k(m_0)$ ,  $\beta_k(m_0)$ ,  $\tilde{\alpha}_k(m_0)$  и  $\tilde{\beta}_k(m_0)$  имеют размерность поверхностной плотности (в массах Солнца на квадратный парсек). При этом удельный угловой момент  $l(m_0)$  выражается в  $M_\odot^2/\text{пк}^2/\text{Муг}$ , где  $M_\odot$  — масса Солнца, а Муг — млн лет.

**Таблица 1.** Явные выражения нормированных удельных угловых моментов  $\alpha(m_0)$  и  $\beta(m_1)$  слоисто-неоднородных сжатых и вытянутых сфероидов в зависимости от профиля  $\rho(m)$  в соответствии с первым вариантом

$\rho(m)$	$\alpha(m_0)$	$\beta(m_1)$
$\frac{\rho_0}{(1+\beta m^2)^{3/2}}$	$A_1(q_0)m_0 F_1(m_0)$ $q_0^3 = \frac{F_2(m_0)}{F_2(0)}$	$B_1(q_1)m_1 F_1(m_1)$ $q_1^3 = \frac{F_2(m_1)}{F_2(0)}$
$\frac{K}{\mu m(1+\mu m)^2}$	$A_2(q_0)m_0 N_1(m_0, \mu_0)$ $q_0^3 = \frac{N_2(m_0, \mu_0)}{N_2(0, \mu_0)}, \mu_0 = \frac{\sqrt[3]{a^2 c}}{r_2}$	$B_2(q_1)m_1 N_1(m_1, \mu_1)$ $q_1^3 = \frac{N_2(m_1, \mu_1)}{N_2(0, \mu_1)}, \mu_1 = \frac{\sqrt[3]{a^2 c}}{r_s}$
$\frac{M}{2\pi\bar{a}} \frac{1}{\bar{\mu} m(1+\bar{\mu} m)^3}$	$A_3(\bar{q}_0)m_0 H_1(m_0, \bar{\mu}_0)$ $\bar{q}_0^3 = \frac{H_2(m_0, \bar{\mu}_0)}{H_2(0, \bar{\mu}_0)}, \bar{\mu}_0 = \frac{\sqrt[3]{a^2 c}}{\bar{a}}$	$B_3(\bar{q}_1)m_1 H_1(m_1, \bar{\mu}_1)$ $\bar{q}_1^3 = \frac{H_2(m_1, \bar{\mu}_1)}{H_2(0, \bar{\mu}_1)}, \bar{\mu}_1 = \frac{\sqrt[3]{a^2 c}}{\bar{a}}$

**Примечание.** Функции  $An()$ ,  $Bn()$ , ( $n = 1, 2, 3$ ),  $F_k()$ ,  $N_k()$ ,  $H_k()$  ( $k = 1, 2$ ) определяются соответствующими равенствами и приведены в тексте.

#### 4.9. Критические значения параметров $m_0$ и $m_1$

Очевидно, что при  $m_0 = m_1$  могут выполняться неравенства

$$\frac{\alpha_k(m_0)}{\beta_k(m_0)} > 1, \quad \frac{\tilde{\alpha}_n(m_0)}{\tilde{\beta}_n(m_0)} > 1, \quad (65)$$

$$0 \leq m_0 \leq 1, \quad k = 1, 2, 3, \quad n = 1, 2.$$

В этом случае будем считать, что имеет место устойчивость слоисто-неоднородного вытянутого сфероиды при соответствующих профилях (при одинаковой массе). Если же не выполняются неравенства (65), т. е. нормированные значения удельного углового момента вытянутого сфероиды  $\beta_k(m_0)$  и  $\tilde{\beta}_n(m_0)$  превышают аналогичные значения сфероиды Маклорена  $\alpha_k(m_0)$  и  $\tilde{\alpha}_n(m_0)$  соответственно, то имеет место неустойчивость вытянутого сфероиды.

Пусть при некотором значении  $m_0$  имеют место равенства  $\alpha_k(m_0) = \beta_k(m_0)$  и  $\tilde{\alpha}_n(m_0) = \tilde{\beta}_n(m_0)$ . Такое значение параметра  $m_0$  назовем критическим (или переходным) и обозначим его через  $\tilde{m}_0$ . Например, в случае “астрофизического профиля” в силу (47) и (48) получим:

$$\begin{aligned}\alpha_1(m_0) &= \beta_1(m_0), \\ q_0^2 &= q_1^2 = \frac{6\sqrt{1-e^2} + 3e^2 - 3}{6\sqrt{1-e^2} + 3e^2 - 1} = \\ &= 1 - \frac{2}{6\sqrt{1-e^2} + 3e^2 - 1}.\end{aligned}$$

При аналоге профиля NFW это условие в силу (52) примет вид:

$$\begin{aligned}\alpha_2(m_0) &= \beta_2(m_0), \\ 6\sqrt{1-e^2}(1-q_0^2)N_1(m_0, \mu_0) &= \\ &= [3-3e^2-(1-3e^2)q_1^2N_1(m_0, \mu_1)].\end{aligned}$$

**Таблица 2.** Явные выражения нормированных удельных угловых моментов  $\tilde{\alpha}(m_0)$  и  $\tilde{\beta}(m_1)$  слоисто-неоднородных сжатых и вытянутых сфероидов в зависимости от профиля  $\rho(m) = \rho_1(m) + \rho_2(m)$  в соответствии со вторым вариантом

$\rho_1(m) + \rho_2(m)$	$\tilde{\alpha}(m_0)$	$\tilde{\beta}(m_1)$
$\frac{\rho_0}{(1 + \beta m^2)^{3/2}} + \frac{K}{\mu m(1 + \mu m)^2}$	$m_0 [A_1(q_0)F_1(m_0) + A_2(q_0)N_1(m_0, \mu_0)]$ $\tilde{q}_0^3 = \frac{C_2 F_2(m_0) + D_2 N_2(m_0, \mu_0)}{C_2 F_2(0) + D_2 N_2(0, \mu_1)}$	$m_1 [B_1(q_1)F_1(m_1) + B_2(q_1)N_1(m_1, \mu_1)]$ $\tilde{q}_1^3 = \frac{C_2 F_2(m_1) + D_2 N_2(m_1, \mu_1)}{C_2 F_2(0) + D_2 N_2(0, \mu_0)}$
$\frac{\rho_0}{(1 + \beta m^2)^{3/2}} + \frac{M}{2\pi\bar{a}} \frac{1}{\bar{\mu}m(1 + \bar{\mu}m)^3}$	$m_0 [A_1(q_0)F_1(m_0) + A_2(q_0)N_1(m_0, \bar{\mu}_0)]$ $\tilde{q}_0^3 = \frac{C_2 F_2(m_0) + E_2 H_2(m_0, \bar{\mu}_0)}{C_2 F_2(0) + E_2 H_2(0, \bar{\mu}_1)}$	$m_1 [B_1(q_1)F_1(m_1) + B_2(q_1)N_1(m_1, \bar{\mu}_1)]$ $\tilde{q}_1^3 = \frac{C_2 F_2(m_1) + E_2 H_2(m_0, \bar{\mu}_1)}{C_2 F_2(0) + E_2 H_2(0, \bar{\mu}_0)}$

**Примечание.** Функции  $A_k()$ ,  $B_k()$ ,  $F_k()$ ,  $N_k()$  и  $H_k()$ , а также параметры  $\mu_k$ ,  $\bar{\mu}_k$  ( $k = 1, 2$ ) те же самые, что и в табл. 1. Коэффициенты  $C_2$ ,  $D_2$  и  $E_2$  приведены в тексте.

При аналоге профиля Хернквиста в силу (55) находим

$$\begin{aligned} \alpha_3(m_0) &= \beta_3(m_0), \\ 6\sqrt{1 - e^2} (1 - \tilde{q}_0^2) H_1(m_0, \bar{\mu}_0) &= \\ &= [3 - 3e^2 - (1 - 3e^2) \tilde{q}_1^2 H_1(m_0, \bar{\mu}_1)]. \end{aligned}$$

Наконец, при смешанных профилях в силу (61) и (63) получим:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1(m_0) &= \tilde{\beta}_1(m_0), \\ [6\sqrt{1 - e^2} (1 - \tilde{q}_0^2)] \times \\ &\times [\rho_0 F_1(m_0) + K \sqrt{1 + \beta} N_1(m_0, \mu_0)] = \\ &= [3 - 3e^2 - (1 - 3e^2) \tilde{q}_1^2] \times \\ &\times [\rho_0 F_1(m_0) + K \sqrt{1 + \beta} N_1(m_0, \mu_1)], \\ \tilde{\alpha}_2(m_0) &= \tilde{\beta}_2(m_0), \\ [6\sqrt{1 - e^2} (1 - \tilde{q}_0^2)] \times \\ &\times [2\pi\bar{a}^3 \rho_0 F_1(m_0) + M \sqrt{1 + \beta} H_1(m_0, \bar{\mu}_0)] = \\ &= [3 - 3e^2 - (1 - 3e^2) \tilde{q}_1^2] \times \\ &\times [2\pi\bar{a}^3 \rho_0 F_1(m_0) + M \sqrt{1 + \beta} H_1(m_0, \bar{\mu}_1)]. \\ \tilde{\alpha}_2(m_0) &= \tilde{\beta}_2(m_0), \\ [6\sqrt{1 - e^2} (1 - \tilde{q}_0^2)] \times \\ &\times [2\pi\bar{a}^3 \rho_0 F_1(m_0) + M \sqrt{1 + \beta} H_1(m_0, \bar{\mu}_0)] = \\ &= [3 - 3e^2 - (1 - 3e^2) \tilde{q}_1^2] \times \\ &\times [2\pi\bar{a}^3 \rho_0 F_1(m_0) + M \sqrt{1 + \beta} H_1(m_0, \bar{\mu}_1)]. \end{aligned}$$

Очевидно, что при  $m_0 \leq \tilde{m}_0$ , или  $m_0 > \tilde{m}_0$  неравенства в (65) либо будут выполняться, либо нет. В разделе 7 (табл. 3) найдено критическое значение  $\tilde{m}_0$  для некоторых модельных эллиптических галактик (МЭГ) и установлена устойчивость (неустой-

чивость) в смысле выполнения (или невыполнения) неравенства (65).

Таким образом, мы рассмотрели три критерия устойчивости эллипсоидальных тел: критерий Пиблса—Острайкера, выраженный неравенством (34), критерий (65) по значениям нормированного удельного углового момента и неравенство (33) для отношений полуосей такого тела и угловой скорости вращения. В следующих разделах рассмотрим критерии неустойчивости Вандерворта.

## 5. КРИТЕРИЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВАНДЕРВОРТА. СЛУЧАЙ ТРЕХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА

Критерий неустойчивости трехосного эллипсоида с полуосями  $a_1 \geq a_2 > a_3$  как динамической системы в работе [11] представлен в виде

$$t_e \equiv \frac{L^2}{2(I_{11} + I_{22})|W|} > \frac{(2 + P)^3}{27I} \frac{a_1^2 A_1}{Q^2}, \quad (66)$$

который назовем критерием Вандерворта. В левой части неравенства (66)  $L$  — угловой момент,  $I_{11}$  и  $I_{22}$  — тензоры момента инерции,  $W$  — гравитационная (потенциальная) энергия системы (см. ниже). В правой части неравенства (66) положено:

$$\begin{aligned} P &= -\frac{2V_{12:12}}{V_{11}}, \quad Q = 2 - P \frac{\Omega_P}{\Omega_L}, \\ \Omega_L &= \frac{L}{2I_{11}}, \quad \Omega_P = \frac{W_{12:12}}{V_{12:12}} \Omega, \end{aligned} \quad (67)$$

и

$$\begin{aligned} I &= a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{\Delta(u)}, \\ A_i &= a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{(u + a_i^2) \Delta(u)}, \\ \Delta^2(u) &= (a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u). \end{aligned} \quad (68)$$

**Таблица 3.** Критические значения параметра  $\tilde{m}_0$ , определяемые в зависимости от профилей  $\rho_1(m)$  БМ и  $\rho_2(m)$  ТМ для модельных эллиптических галактик (МЭГ), имеющих форму вытянутого сфероида с полуосями  $a$  и  $b = c$  [кпк]

МЭГ	Полуоси		Профили		Параметр $\tilde{m}_0$
	$a$	$b = c$	$\rho_1(m)$	$\rho_2(m)$	
NGC 4374 E1 (М 84)	17.373	15.131	$\frac{\rho_0}{(1 + \beta m^2)^{3/2}}$	0	0.15524
				$\frac{K}{\mu m(1 + \mu m)^2}$	0.16043
				$\frac{M}{2\pi\tilde{a}^3} \frac{1}{\bar{\mu}(1 + \bar{\mu})^3}$	0.15598
NGC 4406 E3 (М 86)	28.055	20.324	$\frac{\rho_0}{(1 + \beta m^2)^{3/2}}$	0	0.13422
				$\frac{K}{\mu m(1 + \mu m)^2}$	0.15211
				$\frac{M}{2\pi\tilde{a}^3} \frac{1}{\bar{\mu}(1 + \bar{\mu})^3}$	0.13498
NGC 4472 E2 (М 49)	25.450	22.069	$\frac{\rho_0}{(1 + \beta m^2)^{3/2}}$	0	0.15923
				$\frac{K}{\mu m(1 + \mu m)^2}$	0.16656
				$\frac{M}{2\pi\tilde{a}^3} \frac{1}{\bar{\mu}(1 + \bar{\mu})^3}$	0.16002

**Примечание.** В первой строке в столбце  $\rho_2(m)$  цифра 0 означает, что ЭГ состоит только из БМ с профилем  $\rho_1(m)$ . При  $m_0 > \tilde{m}_0$  вытянутый сфероид становится устойчивым, а при  $m_0 < \tilde{m}_0$  — неустойчивым согласно критерию (65).

Здесь для удобства использованы переобозначения:  
 $a_1 \equiv a$ ,  $a_2 \equiv b$  и  $a_3 \equiv c$ .

Далее, тензор момента инерции  $I_{ij}$  равен [5, 13]

$$\begin{aligned}
 I_{ij} &= \delta_{ij} \tilde{M} a_i^2 J(1), \\
 J(m) &= \int_0^m m^4 \rho(m) dm, \\
 \tilde{M} &= \frac{4}{3} \pi a_1 a_2 a_3,
 \end{aligned} \quad (69)$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. При этом из формул (68) и (69) следует

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^3 a_k^2 A_k &= I, \\
 1 - \frac{I_{33}}{I_{11}} &= 1 - \frac{a_3^2}{a_1^2} = e^2,
 \end{aligned} \quad (70)$$

$$I_{11} + I_{22} = \tilde{M} (a_1^2 + a_2^2) J(1).$$

Тензоры  $V_{ij}$ ,  $V_{ij;ij}$  и  $W_{12;12}$  в равенстве (67) определяются формулами [13]:

$$\begin{aligned}
 V_{ij} &= -V_0 a_i^2 A_i \delta_{ij} \psi(1), \\
 V_{ij;ij} &= V_0 a_i^2 (A_i - a_j^2 A_{ij}) \psi(1), \\
 V_0 &= \pi^2 G a_1 a_2 a_3, \\
 W_{12;12} &= \frac{1}{2} \Omega^2 I_{11},
 \end{aligned} \quad (71)$$

$$A_{ij} = a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{(u + a_i^2)(u + a_j^2) \Delta(u)}, \quad (72)$$

$$\psi(1) \equiv \psi(m=1),$$

$$\begin{aligned}
 \psi(m) &= \int_0^m [F(m^2)]^2 dm, \\
 F(m^2) &= \int_{m^2}^1 \rho(m^2) dm^2, \\
 m^2 &= \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2}.
 \end{aligned} \quad (73)$$

Очевидно, что для осесимметричного тела  $a_1 = a_2 > a_3$  имеют место равенства:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= A_2, & A_{12} &= A_{21}, \\
 I_{22} &= I_{11}, & V_{22} &= V_{11}, \\
 V_{12;12} &= V_{21;21}, & \Omega_L &= \Omega.
 \end{aligned} \quad (74)$$

Кроме того, для потенциальной энергии  $W$  и кинетической энергии вращения  $T$  помимо (2) можно пользоваться и другими формулами, приведенными в работе [13]:

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{V_{ii} I}{a_i^2 A_i} = -\pi^2 G a_1 a_2 a_3 I \psi(1), \\
 T &= \frac{\Omega L}{2}, & L &= \Omega (I_{11} + I_{22}).
 \end{aligned} \quad (75)$$

Коэффициент  $I$  и функция  $\psi(m)$  определены выше.

Если в (66) учесть выражения (75) для углового момента  $L$  и кинетической энергии вращения  $T$ , то выражение  $t_e$  будет точно совпадать с выражением  $t$  из (16), т. е.  $t_e \equiv t = T/|W|$ . Кроме того, с учетом выражений (75) для потенциальной энергии  $W$  и углового момента  $L$ , критерий (66) Вандерворта можно переписать в виде

$$t_e \equiv \frac{\Omega^2}{2} \frac{I_{11} + I_{22}}{|V_{11}|} > \frac{2}{27} \frac{(1+S)^3}{(1+U)^2} \equiv t_1, \quad (76)$$

где с учетом выражений  $L$ ,  $V_{11}$ ,  $V_{12;12}$ ,  $\Omega_P$  и  $\Omega_L$  величины  $P$  и  $Q$  представлены в виде:

$$\begin{aligned} P &= 2S, & Q &= 2(1+U), \\ S &= 1 - \frac{a_2^2 A_{12}}{A_1}, \\ U &= \frac{\Omega^2 I_{11}^2}{V_{11}(I_{11} + I_{22})}. \end{aligned} \quad (77)$$

Для проверки выполнения критерия неустойчивости — неравенства (76) — необходимо определить следующие величины:  $t_e$ ,  $A_1$ ,  $I$ ,  $S$  и  $U$ . Отношение  $t_e$  нам известно, так как полная гравитационная энергия  $W$  и кинетическая энергия вращения  $T$  определены выше формулой (2), причем для  $T$  имеем еще вторую формулу (75). Следовательно, остается определить четыре последние.

После вычисления интегралов в (68), (69) и (72) для  $I$ ,  $A_1$  и  $A_{12}$  получим:

$$\begin{aligned} I &= a_1 a_2 a_3 J_0, \\ A_1 &= \frac{2a_1 a_2 a_3}{(a_1^2 - a_2^2)\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} \times \\ &\times [F(\varphi_0, n) - E(\varphi_0, n)], \\ A_{12} &= -\frac{2a_3^2}{(a_1^2 - a_2^2)(a_2^2 - a_3^2)} + \\ &+ \frac{2a_1 a_2 a_3}{(a_1^2 - a_2^2)^2(a_2^2 - a_3^2)\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} \times \\ &\times [(a_1^2 + a_2^2 - 2a_3^2)E(\varphi_0, n) - \\ &- 2(a_2^2 - a_3^2)F(\varphi_0, n)]. \end{aligned} \quad (78)$$

Здесь  $J_0$  определяется равенством (4), а аргумент  $\varphi_0$  и модуль  $n$  эллиптических интегралов — равенством (6), в котором следует учесть обозначения  $a \equiv a_1$ ,  $b \equiv a_2$  и  $c \equiv a_3$ .

Вычисленные выше интегралы (78) и (79) позволяют определить отношение  $A_1/I$  и величину  $S$ . Остается вычислить величину  $U$ , которая содержит тензоры момента инерции  $I_{11}$ ,  $I_{22}$  и тензор  $V_{11}$ . Эти величины зависят исключительно от профиля плотности,

т. е. их можно вычислить только при заданном профиле  $\rho(m)$ . В подразделах 5.1, 5.2, 5.3 и 5.4 рассмотрены конкретные профили плотности  $\rho(m)$ , соответствующие современным требованиям к структуре галактик.

**Примечание 2.** Как мы выше отмечали (см. Примечание 1), отношение кинетической энергии вращения к модулю потенциальной энергии в критерии устойчивости Пиблса—Острайкера (34) не зависит от распределения вещества в галактике, т. е. от профиля  $\rho(m)$ , но зависит только от формы и размеров ЭГ. Однако согласно другому критерию устойчивости, отношение удельных угловых моментов сжатого и вытянутого сфероидов зависит и от формы и размеров ЭГ, и от распределения в них вещества. В силу критерия неустойчивости 76 Вандерворта отношения  $t_e$  и  $t_1$  (см. выше) также зависят от профиля  $\rho(m)$ .

### 5.1. Критерий неустойчивости ЭГ при “астрофизическом” профиле

Положим, что ЭГ состоит только из БМ, с “астрофизическим” профилем  $\rho(m)$ , определяемый равенством (11). Нам следует определить следующие величины. Сначала подставим выражение (11) в формулу (72) и находим функции  $F_1(m^2) \equiv F(m^2)$  и  $\psi_1(m^2) \equiv \psi(m^2)$ :

$$\begin{aligned} F_1(m^2) &= \int_{m^2}^1 \frac{\rho_0}{\sqrt{(1+\beta m^2)^3}} dm^2 = \\ &= \frac{2\rho_0}{\beta} \left( \frac{1}{\sqrt{1+\beta m^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\beta}} \right), \end{aligned} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} \psi_1(m) &= \frac{4\rho_0^2}{\beta^2} \int_0^m \left( \frac{1}{\sqrt{1+\beta m^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\beta}} \right)^2 dm = \\ &= \frac{4\rho_0^2}{\beta^2(1+\beta)\sqrt{\beta}} \left[ \sqrt{\beta} m - 2\sqrt{1+\beta} \varphi_1(m) + \right. \\ &\quad \left. + (1+\beta) \arctan(\sqrt{\beta} m) \right], \end{aligned} \quad (81)$$

где функция  $\varphi_1(m)$  определена в равенстве (12). Далее, по формуле 71 вычисляем тензор

$$\begin{aligned} V_{11} &= -\pi^2 G a_1^3 a_2 a_3 A_1 \psi_1(1), \\ \psi_1(1) &= \psi_1(m=1). \end{aligned} \quad (82)$$

Здесь функция  $\psi_1(m)$  определяется равенством (81), а  $A_1$  — равенством (77).

Теперь вычислим тензоры  $I_{11}$  и  $I_{22}$ . Для этого выражение профиля из (11) подставим в формулу (70). Это нам даст:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \tilde{M} a_1^2 J_1(1), \\ I_{22} &= \tilde{M} a_2^2 J_1(1), \\ I_{11} + I_{22} &= \tilde{M} (a_1^2 + a_2^2) J_1(1), \end{aligned} \quad (83)$$

где

$$J_1(m) = \frac{\rho_0}{2\beta^2\sqrt{\beta}} \left[ \frac{\sqrt{\beta} m (3 + \beta m^2)}{\sqrt{1 + \beta m^2}} - 3\varphi_1(m) \right]. \quad (84)$$

Здесь функция  $\varphi_1(m)$  та же самая, что и в равенстве (81).

Итак, определив равенствами (82) и (83) тензоры  $V_{11}$ ,  $I_{11}$  и  $I_{22}$ , вычисляем по формуле (79) значение  $U$ . Итак, все необходимые величины определены.

Таким образом, в случае “астрофизического” профиля можно проверить выполнение критерия (66), или (76).

### 5.2. Критерий неустойчивости ЭГ при аналоге профиля NFW

Пусть теперь ЭГ состоит только из БМ с аналогом профиля NFW, определяемого равенством (17). Поступим аналогично приведенному в подразделе 5.1. Определяем сначала функции

$$\begin{aligned} F_2(m^2) &= \int_{m^2}^1 \frac{K}{(1 + \mu m)^2 \mu m} dm^2 = \\ &= \frac{2K}{\mu^2} \left( \frac{1}{1 + \mu m} - \frac{1}{1 + \mu} \right), \\ \psi_2(m) &= \frac{4K^2}{\mu^4} \int_0^m \left( \frac{1}{1 + \mu m} - \frac{1}{1 + \mu} \right)^2 dm = \\ &= \frac{4K^2}{\mu^5(1 + \mu)} \left[ -2 \ln(1 + \mu m) + \right. \\ &\quad \left. + \mu m \left( \frac{1}{1 + \mu} + \frac{1 + \mu}{1 + \mu m} \right) \right]. \end{aligned} \quad (85)$$

Далее, тензор  $V_{11}$  также определяется равенством (71), но функция  $\psi(m) \equiv \psi_2(m)$  — формулой (86). Затем по формуле (70), в которой  $\rho(m)$  заменяется на аналог профиля NFW, вычисляем функцию  $J(m) \equiv J_2(m)$ :

$$\begin{aligned} J_2(m) &= \frac{K}{2\mu^5} \left[ 6 \ln(1 + \mu m) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu m}{1 + \mu m} (6 + 3\mu m - \mu^2 m^2) \right], \end{aligned} \quad (87)$$

после чего определяем тензоры  $I_{11}$  и  $I_{22}$  по формуле (70), заменив в ней  $J(1)$  на  $J_2(1)$ .

### 5.3. Критерий неустойчивости эллиптической галактики при аналоге профиля Хернквиста

Наконец, положим, что ЭГ состоит только из БМ с аналогом профиля Хернквиста, определяемого равенством (23). Определяем сначала функции

$$\begin{aligned} F_3(m^2) &= \frac{M}{2\pi\bar{a}^3} \int_{m^2}^1 \frac{dm^2}{\bar{\mu} m (1 + \bar{\mu} m)^3} = \\ &= \frac{M}{2\pi\bar{\mu}\bar{a}^3(1 + \bar{\mu})^2} \frac{(1 - m)(2 + \bar{\mu} + \bar{\mu} m)}{(1 + \bar{\mu} m)^2}, \end{aligned} \quad (88)$$

$$\begin{aligned} \psi_3(m) &= \frac{M^2}{4\pi^2\bar{\mu}^2\bar{a}^6(1 + \bar{\mu})^4} \times \\ &\times \int_0^m \frac{(1 - m)^2(2 + \bar{\mu} + \bar{\mu} m)^2}{(1 + \bar{\mu} m)^4} dm = \\ &= \frac{M^2}{4\pi^2\bar{\mu}^5\bar{a}^6(1 + \bar{\mu})^4} \left[ \bar{\mu} m - \frac{(1 + \bar{\mu})^4}{3(1 + \bar{\mu} m)^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(1 + \bar{\mu})^2}{1 + \bar{\mu} m} + \frac{(1 + \bar{\mu})^4}{3} - 2(1 + \bar{\mu})^2 \right], \end{aligned} \quad (89)$$

причем

$$\psi_3(1) = \frac{M^2(4 + \bar{\mu})}{12\pi^2\bar{\mu}^2\bar{a}^6(1 + \bar{\mu})^4}. \quad (90)$$

Далее, тензор  $V_{11}$  также определится равенством (71), но функция  $\psi_3(m)$  — формулой (89). Затем по формуле (70), в которой  $\rho(m)$  заменяется на аналог профиля Хернквиста, вычисляем функцию  $J(m) \equiv J_3(m)$ :

$$\begin{aligned} J_3(m) &= \frac{M}{4\pi\bar{\mu}^5\bar{a}^3} \left\{ -6 \ln(1 + \bar{\mu} m) + \right. \\ &\quad \left. + \bar{\mu} m \left[ 2 + \frac{4}{1 + \bar{\mu} m} + \frac{\bar{\mu} m}{(1 + \bar{\mu} m)^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (91)$$

после чего определяем тензоры  $I_{11}$  и  $I_{22}$  по формуле (70), заменив в ней  $J(1)$  на  $J_3(1)$ .

### 5.4. Критерий неустойчивости ЭГ, состоящей из барионной массы и темной материи

Пусть теперь ЭГ состоит из барионной массы (БМ) с профилем  $\rho_1(m)$  и темной материи (ТМ) с профилем  $\rho_2(m)$ . Рассмотрим два случая: а) в качестве профиля ТМ  $\rho_2(m)$  берется аналог профиля NFW, б) в качестве  $\rho_2(m)$  берется аналог профиля Хернквиста. В обоих случаях в качестве профиля БМ  $\rho_1(m)$  берется “астрофизический” профиль (11). Далее, для удобства обозначим через  $F_4(m^2)$ ,  $\psi_4(m)$  и  $J_4(m)$  функции  $F(m^2)$ ,  $\psi(m)$  и  $J(m)$ , соответствующие случаю а). В случае б) эти функции обозначим через  $F_5(m^2)$ ,  $\psi_5(m)$  и  $J_5(m)$ . Тогда согласно нашим обозначениям имеем

$$\begin{aligned} \text{а) } F_4(m^2) &= F_1(m^2) + F_2(m^2), \\ \psi_4(m) &= \psi_1(m) + \psi_2(m) + 2\psi_{12}(m), \\ J_4(m) &= J_1(m) + J_2(m), \end{aligned} \quad (92)$$

$$\begin{aligned} \text{б) } F_5(m^2) &= F_1(m^2) + F_3(m^2), \\ \psi_5(m) &= \psi_1(m) + \psi_3(m) + 2\psi_{13}(m), \\ J_5(m) &= J_1(m) + J_3(m), \end{aligned} \quad (93)$$

где функции  $F_k(m^2)$ ,  $\psi_k(m)$  и  $J_k(m)$ , ( $k = 1, 2, 3$ ) определены выше, а

$$\begin{aligned}\psi_{12}(m) &= \int_0^m F_1(m^2) F_2(m^2) dm, \\ \psi_{13}(m) &= \int_0^m F_1(m^2) F_3(m^2) dm.\end{aligned}\quad (94)$$

Следовательно, нам остается вычислить только функции  $\psi_{12}(m)$  и  $\psi_{13}(m)$ . Учитывая выражения (80), (85) и (88) функций  $F_k(m^2)$ , для  $\psi_{12}(m)$  и  $\psi_{13}(m)$  получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}\psi_{12}(m) &= \frac{4K\rho_0}{\beta\mu^2} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\beta+\mu^2}} \left[ \ln \varphi_2(m) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \ln \varphi_2(m=0) \right] - \frac{\ln \varphi_1(m)}{(1+\mu)\sqrt{\beta}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m}{(1+\mu)\sqrt{1+\beta}} - \frac{\ln(1+\mu m)}{\mu\sqrt{1+\beta}} \right\}, \\ \psi_{13}(m) &= \frac{M\rho_0}{\pi\bar{\mu}\beta\bar{a}^3(1+\bar{\mu})^2} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{(1+\bar{\mu})^2\beta}{2\bar{\mu}\sqrt{(\beta+\bar{\mu}^2)^3}} \left[ \ln \bar{\varphi}_2(m) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \ln \bar{\varphi}_2(m=0) \right] - \frac{\varphi_1(m)}{\bar{\mu}\sqrt{\beta}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1+\bar{\mu})^2}{(\beta+\bar{\mu}^2)} \left( 1 - \frac{\sqrt{1+\beta m^2}}{1+\bar{\mu}m} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m(m-2-\bar{\mu})}{\sqrt{1+\beta}(1+\bar{\mu}m)} \right\},\end{aligned}$$

где функция  $\varphi_1(m)$  определяется равенством (12), а

$$\begin{aligned}\varphi_2(m) &= \frac{\sqrt{\beta+\mu^2}\sqrt{1+\beta m^2} + \beta m - \mu}{\sqrt{\beta+\mu^2}\sqrt{1+\beta m^2} - \beta m + \mu}, \\ \bar{\varphi}_2(m) &= \frac{\sqrt{\beta+\bar{\mu}^2}\sqrt{1+\beta m^2} + \beta m - \bar{\mu}}{\sqrt{\beta+\bar{\mu}^2}\sqrt{1+\beta m^2} - \beta m + \bar{\mu}}.\end{aligned}$$

## 6. КРИТЕРИЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВАНДЕРВОРТА. СЛУЧАЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА

В случае сфероида Маклорена  $a = b > c$  малые параметры  $\mu$  и  $\bar{\mu}$  определяются равенством (29), а

$$I = \frac{2ac}{e} \arcsin e, \quad e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2}, \quad (95)$$

$$\begin{aligned}A_1 = A_2 &= a^2 c \int_0^\infty \frac{du}{(u+a^2)^2 \sqrt{u+c^2}} = \\ &= \frac{1}{e^3} \left[ \sqrt{1-e^2} \arcsin e - e(1-e^2) \right],\end{aligned}\quad (96)$$

$$\begin{aligned}A_3 &= a^2 c \int_0^\infty \frac{du}{(u+a^2)(u+c^2)\sqrt{u+c^2}} = \\ &= \frac{2}{e^3} \left( e - \sqrt{1-e^2} \arcsin e \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{11} = A_{12} &= a^2 c \int_0^\infty \frac{du}{(u+a^2)^3 \sqrt{u+c^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{4a^2 e^5} \left[ 3 \arcsin e - e(3+2e^2)\sqrt{1-e^2} \right].\end{aligned}\quad (97)$$

Критерий Вандерморта в этом случае запишется так:

$$\begin{aligned}t_e &\equiv \frac{\Omega^2 I_{11}}{2|V_{11}|} > \frac{1}{27} \frac{(1+S)^3}{(1+U)^2} \equiv t_1, \\ S &= 1 - \frac{a_1^2 A_{11}}{A_1}, \\ U &= \frac{I_{11} \Omega^2}{2V_{11}},\end{aligned}\quad (98)$$

где  $A_1$  и  $A_{11}$  определяются равенствами (96) и (97), а тензоры  $I_{11}$  и  $V_{11}$  — формулами (69) и (70) соответственно. При этом функции  $J(m)$  и  $\psi(m)$ , фигурирующие в выражениях  $I_{11}$  и  $V_{11}$ , также задаются формулами (69) и (70), в которых следует учесть  $a_1 = a_2$  и тождество (73). Это связано с тем, что данные функции зависят только от профиля  $\rho(m)$ .

Теперь рассмотрим случай вытянутого сфероида  $a > b = c$ . В этом случае малые параметры  $\mu$  и  $\bar{\mu}$  определяются равенством (31). Кроме того,

$$I = \frac{c^2}{e} \ln \frac{1+e}{1-e}, \quad e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2}, \quad (99)$$

$$\begin{aligned}A_1 &= ac^2 \int_0^\infty \frac{du}{(u+c^2)(u+a^2)\sqrt{u+a^2}} = \\ &= \frac{1-e^2}{e^3} \left( \ln \frac{1+e}{1-e} - 2e \right),\end{aligned}\quad (100)$$

$$\begin{aligned}A_2 = A_3 &= ac^2 \int_0^\infty \frac{du}{(u+c^2)^2 \sqrt{u+a^2}} = \\ &= \frac{1-e^2}{2e^3} \left( \frac{2e}{1-e^2} - \ln \frac{1+e}{1-e} \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{12} = A_{13} &= ac^2 \int_0^\infty \frac{du}{(u+c^2)^2 (u+a^2) \sqrt{u+a^2}} = \\ &= \frac{1}{2a^2 e^5} \left[ 2e(3-2e^2) - 3(1-e^2) \ln \frac{1+e}{1-e} \right].\end{aligned}\quad (101)$$

Критерий Вандерморта в этом случае тождественен неравенству (76). Однако в выражении параметров  $S$  и  $U$ , фигурирующих в этом неравенстве и определяемых равенством (77), следует учесть выражения (100) и (101) для величин  $A_1$  и  $A_{12}$ . Тензоры  $I_{11}$ ,  $I_{22}$  и  $V_{11}$  задаются также формулами (69) и (70) с учетом равенства  $a_2 = a_3$  и выражений (100) и (101).

## 7. ПРИМЕРЫ И ВЫВОДЫ

Для применения полученных нами результатов рассмотрим 64 модельные эллиптические галактики (МЭГ) с параметрами, точно совпадающими с параметрами реальных галактик, имеющие форму слоисто-неоднородного сжатого (сфероида Маклорена) или вытянутого сфероида, или слоисто-неоднородного трехосного эллипсоида Якоби с соответствующими профилями (см. выше). При этом полуоси этих галактик определены по значениям величин  $D_{25}$  и  $R_{25}$  из каталога [4].

Проверено, что выполняется необходимое условие: неравенство Пуанкаре для существования неоднородной галактики как фигуры равновесия для всех рассмотренных МЭГ. При этом нормированная угловая скорость для всех МЭГ как сфероидов Маклорена не превышает критического значения, т. е.  $\tilde{\Omega}^2 < 0.37423$ . Кроме того, установлено, что условие устойчивости для МЭГ, имеющих форму слоисто-неоднородного сжатого или вытянутого сфероида, по критерию (34) Пиблса—Острайкера выполняется. При этом значения параметра  $t$  из критерия устойчивости Пиблса—Острайкера (34) для слоисто-неоднородных вытянутых сфероидов оказались меньше, чем их значения для сжатых сфероидов, как и показано в книге [12]. Поэтому устойчивость (или неустойчивость) галактик, имеющих форму вытянутого сфероида, можно установить по другим критериям. Таковыми являются критерий выполнения неравенства (65) для отношения значений нормированных удельных угловых моментов сжатого и вытянутого сфероида (см. подраздел 4.9), или критерий Вандерворта (см. разделы 5 и 6).

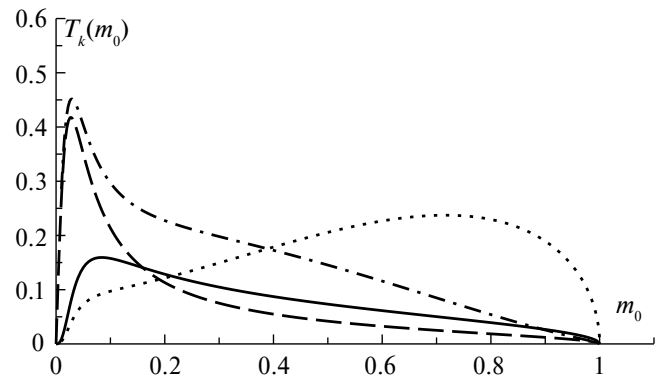
Если установить устойчивость (или не устойчивость) в зависимости от выполнения неравенства (65), то при всех значениях параметра  $m_0$ , удовлетворяющих неравенству  $m_0 \geq \tilde{m}_0$ , мы заключаем, что выполняется условие устойчивости таких галактик с соответствующими профилями. В противном случае вытянутый сферорид с соответствующими профилями будем считать неустойчивым. Следовательно, вытянутый сфероид с полуосями  $a_0 = m_0 a$  и  $c_0 = m_0 c$  будет устойчивым, если его полуоси удовлетворяют условию  $a_0 > a_1 = \tilde{m}_0 a$  и  $c_0 > c_1 = \tilde{m}_0 c$ . В противном случае будем считать его неустойчивым. Как определяется параметр  $\tilde{m}_0$  мы рассмотрели в подразделе 4.9, а полуоси  $a$  и  $c$  каждой конкретной галактики взяты из каталога [4]. Возможно, такое определение устойчивости (или неустойчивости) галактик, имеющих форму вытянутого сфероида, носит условный характер, так как является необходимым, но недостаточным условием устойчивости.

В табл. 3 приведены критические значения параметра  $\tilde{m}_0$ , определяемые в зависимости от профилей  $\rho_1(m)$  БМ и  $\rho_2(m)$  ТМ для трех МЭГ. Значения  $a$  и  $c$  — большой и малой полуосей этих галактик — взяты из каталога Вокулера и др. [4]. Фигу-

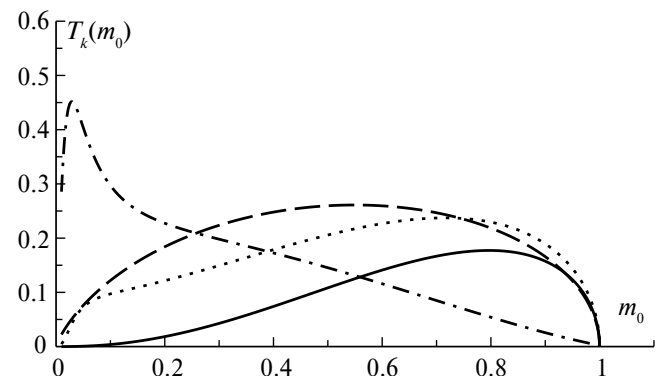
рирующие в выражениях профилей  $\rho_1(m)$  и  $\rho_2(m)$  ключевые параметры — плотность в центре галактики  $\rho_0$ , параметр  $\beta$ , нормализующий коэффициент  $K$  и радиус-шкала  $r_s$ , а также масса  $M$  определены в работах [1, 7, 8].

Далее, на рис. 2, 3 и 4 приведены графики функций  $T_k(m_0)$  в зависимости от профилей плотности барионной массы (БМ) и темной материи (ТМ), параметра  $m_0$ , а также от формы галактики МЭГ NGC 4472. Для краткости записи на рисунках через  $T_k(m_0)$  обозначены:

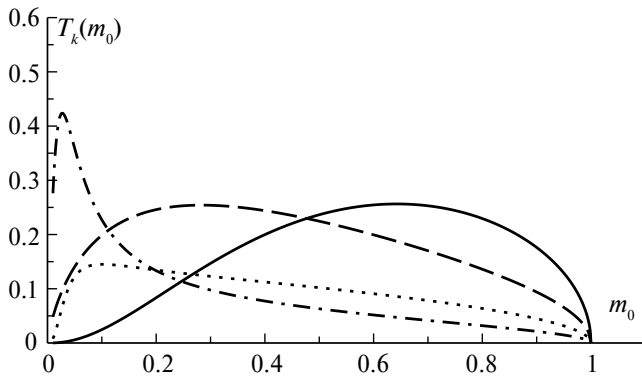
$$T_k(m_0) = \{P_k(m_0), Q_k(m_0), \tilde{P}_n(m_0), \tilde{Q}_n(m_0)\}, \quad (102) \\ (k = 1, 2, 3; n = 1, 2),$$



**Рис. 2.** График функций  $T_k(m_0)$  в зависимости от параметра  $m_0$  МЭГ NGC 4472. Сплошная линия соответствует функции  $P_1(m_0) \equiv 10^{-3}\alpha_1(m_0)$ , т. е. слоисто-неоднородному сжатому, а штриховая — функции  $Q_1(m_0) \equiv 10^{-3}\beta_1(m_0)$  слоисто-неоднородному вытянутому сфероиду с “астрофизическим” профилем, пунктирная линия — функции  $\tilde{P}_1(m_0) \equiv 10^{-3}\tilde{\alpha}_1(m_0)$  слоисто-неоднородному сжатому, а штрих-пунктирная линия — функции  $\tilde{Q}_1(m_0) \equiv 10^{-3}\tilde{\beta}_1(m_0)$  или слоисто-неоднородному вытянутому сфероиду с суммарным профилем “астрофизическим” для БМ и аналогом профиля NFW для ТМ



**Рис. 3.** График функций  $T_k(m_0)$  в зависимости от параметра  $m_0$  МЭГ NGC 4472. Сплошная линия соответствует функции  $P_2(m_0) \equiv 10^{-3}\alpha_2(m_0)$ , или слоисто-неоднородному сжатому, а штриховая — функции  $Q_2(m_0) \equiv 10^{-3}\beta_2(m_0)$  слоисто-неоднородному вытянутому сфероиду с “астрофизическим” профилем. Пунктирная и штрих-пунктирная линии то же, что на рис. 2



**Рис. 4.** График функций  $T_k(m_0)$  в зависимости от параметра  $m_0$  МЭГ NGC 4472. Сплошная линия соответствует функции  $P_3(m_0) \equiv 10^{-3}\alpha_3(m_0)$  слоисто-неоднородному сжатому, а штриховая — функции  $Q_3(m_0) \equiv 10^{-3}\beta_3(m_0)$  слоисто-неоднородному вытянутому сфероиду с аналогом профиля Хернквиста, пунктирная линия — функции  $\tilde{P}_2(m_0) \equiv 10^{-3}\tilde{\alpha}_2(m_0)$  слоисто-неоднородному сжатому, а штрих-пунктирная линия — функции  $\tilde{Q}_2(m_0) \equiv 10^{-3}\tilde{\beta}_2(m_0)$ , или слоисто-неоднородному вытянутому сфероиду с суммарным профилем “астрофизическим” для БМ и аналогом профиля Хернквиста для ТМ

где

$$P_k(m_0) = 10^{-3}\alpha_k(m_0),$$

$$Q_k(m_0) = 10^{-3}\beta_k(m_0),$$

$$(k = 1, 2, 3)$$

$$\tilde{P}_n(m_0) = 10^{-3}\tilde{\alpha}_n(m_0),$$

$$\tilde{Q}_n(m_0) = 10^{-3}\tilde{\beta}_n(m_0),$$

$$n = (1, 2).$$

Кроме того, функции  $\alpha_k(m_0)$ ,  $\beta_k(m_0)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) и  $\tilde{\alpha}_n(m_0)$ ,  $\tilde{\beta}_n(m_0)$  ( $n = 1, 2$ ) определены выше равенствами (48), (50), (53), (60) и (61) соответственно.

На рис. 2 сплошная линия соответствует функции  $P_1(m_0) \equiv 10^{-3}\alpha_1(m_0)$ , т. е. слоисто-неоднородному сжатому, а штриховая — функции  $Q_1(m_0) \equiv 10^{-3}\beta_1(m_0)$  слоисто-неоднородному вытянутому сфероиду с “астрофизическим” профилем, пунктирная линия — функции  $\tilde{P}_1(m_0) \equiv 10^{-3}\tilde{\alpha}_1(m_0)$  слоисто-неоднородному сжатому, а штрих-пунктирная линия — функции  $\tilde{Q}_1(m_0) \equiv 10^{-3}\tilde{\beta}_1(m_0)$ , или слоисто-неоднородному вытянутому сфероиду с суммарным профилем “астрофизическим” для БМ и аналогом профиля NFW для ТМ.

На рис. 3 сплошная линия соответствует функции  $P_2(m_0) \equiv 10^{-3}\alpha_2(m_0)$ , или слоисто-неоднородному сжатому, а штриховая — функции  $Q_2(m_0) \equiv 10^{-3}\beta_2(m_0)$  слоисто-неоднородному вытянутому сфероиду с “астрофизическим” профилем. Обозначения пунктирной и штрих-пунктирной линий совпадают с обозначениями на рис. 2.

На рис. 4 сплошная линия соответствует функции  $P_3(m_0) \equiv 10^{-3}\alpha_3(m_0)$  слоисто-неод-

нородному сжатому, а штриховая — функции  $Q_3(m_0) \equiv 10^{-3}\beta_3(m_0)$  слоисто-неоднородному вытянутому сфероиду с аналогом профиля Хернквиста, пунктирная линия — функции  $\tilde{P}_2(m_0) \equiv 10^{-3}\tilde{\alpha}_2(m_0)$  слоисто-неоднородному сжатому, а штрих-пунктирная линия — функции  $\tilde{Q}_2(m_0) \equiv 10^{-3}\tilde{\beta}_2(m_0)$ , или слоисто-неоднородному вытянутому сфероиду с суммарным профилем “астрофизическим” для БМ и аналогом профиля Хернквиста для ТМ.

Теперь о критерии неустойчивости Вандерворта (см. разделы 5 и 6). В случае вытянутого сфероиды с соответствующими профилями согласно этому критерию имеем следующее. Если галактика состоит только из барионной массы с “астрофизическим” профилем, то только модельные галактики NGC 3610 и NGC 4660 являются неустойчивыми по критерию Вандерворта. Если же галактика с формой вытянутого сфероиды состоит из БМ с “астрофизическим” профилем и ТМ с аналогом профиля NFW, то согласно этому критерию следующие 10 модельных эллиптических галактик (МЭГ) являются неустойчивыми: NGC 0661, 0680, 3610, 3641, 4278, 4283, 4434, 4473, 4660 и 5173. Наконец, в случае галактики с формой вытянутого сфероиды, состоящей из БМ с “астрофизическим” профилем и ТМ с аналогом профиля Хернквиста, то следующие 5 МЭГ являются неустойчивыми: NGC 0680, 4283, 4434, 4473 и 4660.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены несколько новых моделей слоисто-неоднородной эллиптической галактики (ЭГ), имеющей форму либо трехосного эллипсоида, либо сжатого или вытянутого сфероиды. При этом предполагается, что ЭГ состоит из барионной массы (БМ) и темной материи (ТМ) с разными законами распределения плотности — профилями. Во всех моделях в качестве профиля БМ берется “астрофизический закон” распределения плотности, а в качестве профиля ТМ — один из аналогов профилей NFW и Хернквиста.

На основе этих моделей определены некоторые ключевые динамические параметры ЭГ: гравитационная (потенциальная) энергия и кинетическая энергия вращения, распределение углового момента и удельные угловые моменты в зависимости от профилей плотности.

В качестве примера взяты более шестидесяти модельных эллиптических галактик с параметрами, точно совпадающими с реально существующими. Проверено, что выполняется с достаточной гарантией необходимое условие: неравенство Пуанкаре для существования неоднородной ЭГ как фигуры равновесия. Кроме того, установлена устойчивость (неустойчивость) ЭГ как динамической системы согласно критерию Вандерворта и проверено выполнение критерия Пиблса—Острайкера. Найдены

критические значения параметра семейства сфероидов, определяющие границы устойчивости (или неустойчивости) динамической системы по значениям удельных угловых моментов в зависимости от профилей плотности.

Полученные результаты приведены в виде таблиц и рисунков.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.А. Гасанов, Астрон. журн. 98(9), 707 (2021).
2. С.А. Гасанов, Астрон. журн. 99(2), 91 (2022).
3. С.А. Гасанов, Астрон. журн. 101(2), 77 (2024).
4. G. de Vaucouleurs, A. de Vaucouleurs, H.G. Corwin, R.J. Buta, G. Paturel, P. Fouqué, Third Reference Catalogue of Bright Galaxies (N.Y.: Springer-Verlag, Vol. 2, 3, 1991).
5. Б.П. Кондратьев, Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями (М.: Мир, 2007).
6. E. Hubble, Astrophys. J. 71, 231 (1930).
7. J.F. Navarro, C.S. Frenk, and S.D.M. White, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 275(3), 720 (1995).
8. L. Hernquist, Astrophys. J. 356, 359 (1990).
9. J.P. Ostriker and P.J.E. Peebles, Astrophys. J. 186, 467 (1973).
10. В.Л. Поляченко, А.М. Фридман, Равновесие и устойчивость гравитирующих систем (М.: Наука, 1976).
11. P.O. Vandervoort, Astrophys. J. 273, 511 (1983).
12. Б.П. Кондратьев, Теория потенциала и фигуры равновесия (Москва—Ижевск: РХД, 2003).
13. A.J. Kalnajs, Astrophys. J. 212, 637 (1977).
14. J. Binney and S. Tremaine, Galactic Dynamics (Princeton University Press, Series in Astrophysics, 2008).
15. E.V. Polyachenko, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 357(2), 559 (2005).
16. E.V. Polyachenko, V.L. Polyachenko and I.G. Shukhman, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 379(2), 573 (2007).
17. S. Rozier, J.-B. Fouvry, P.G. Breen, A.L. Varri, C. Pichon, and D.C. Heggie, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 487(1), 711 (2019).
18. E.V. Polyachenko and I.G. Shukhman, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 451(1), 601 (2015).
19. Б.П. Кондратьев, Потенциалы и динамические модели эллипсоидальных гравитирующих систем, Кандидатская диссертация (М., 1982), 300 с.
20. H. Poincaré, Leçons sur les hypothèses cosmologiques (Paris : Librairie Scientifique A. Hermann et fils, 1911).

## ON THE STABILITY OF A LAYERED INHOMOGENEOUS ELLIPTICAL GALAXY AS DYNAMIC SYSTEM

© 2025 S. A. Gasanov

Lomonosov Moscow State University, Sternberg Astronomical Institute, Moscow, Russia

e-mail: gasanov@sai.msu.ru

In this paper, we consider several new models of a layered inhomogeneous elliptical galaxy (EG) having the shape either a triaxial ellipsoid or an oblate or prolate spheroid and consisting of baryonic mass (BM) and dark matter (DM) with different laws of density distribution — profiles. Based on these models, some key dynamic parameters of the EG were determined: gravitational (potential) energy and rotational kinetic energy, angular momentum distribution and specific angular momentum depending on density profiles. The equilibrium and stability (instability) of the EG as a dynamic system have been established according to known criteria. Critical values found parameters of the family of spheroids that determine the boundaries of stability (or instability) dynamic system based on the values of specific angular momentum depending on the density profiles. The results obtained were applied to sixty model EGs with parameters exactly matching those that actually exist and are presented in the form of tables and figures.

**Keywords:** elliptical galaxies, fundamental parameters, the equilibrium and stability (instability)

# СИНТЕЗ КРИВЫХ БЛЕСКА ДВОЙНЫХ СИСТЕМ СО СТАЛКИВАЮЩИМИСЯ ВЕТРАМИ

© 2025 г. И. И. Антохин\*, Э. А. Антохина\*\*

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга, Москва, Россия

\*e-mail: igor@sai.msu.ru

\*\*e-mail: elant@sai.msu.ru

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 14.10.2024 г.

Принята в печать 14.10.2024 г.

Метод синтеза кривых блеска двойных систем в модели Роша является мощным и широко распространенным инструментом анализа. Однако в своем исходном виде он не подходит для анализа кривых блеска двойных систем, в которых один или оба компонента обладают мощными звездными ветрами. Ранее нами была предложена модель двойной системы, основанная на методе синтеза, и включающая ветер у одного из компонентов. В настоящей работе предложено обобщение модели на случай, когда ветер присутствует у обоих компонентов двойной системы. Поверхность, разделяющая два ветра (контактная поверхность), рассчитывается в рамках стационарной модели столкновения звездных ветров. При вычислении кривой блеска учитывается поглощение излучения компонентов в ветрах, а также в слоях охлаждения, находящихся по обе стороны контактной поверхности. Структура слоев охлаждения и их поверхностная плотность рассчитываются в рамках радиативного приближения. Алгоритм позволяет учесть асимметрию контактной поверхности, возникающую благодаря силе Кориолиса, а также (с привлечением заранее рассчитанных таблиц) радиативное замедление ветров в тесных двойных системах. Приведены результаты численных расчетов в различных тестовых моделях, наглядно показывающие необходимость учета влияния ветров компонентов на оптические кривые блеска в системах WR + WR, WR + O, O + O.

**Ключевые слова:** затменные двойные системы, звезды Вольфа–Райе, звездный ветер, столкновение звездных ветров, методы синтеза

DOI: 10.31857/S0004629925010027, EDN: HLWUQF

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Двойные системы являются одним из самых надежных источников информации о фундаментальных параметрах звезд — их массах, радиусах и светимостях. В настоящее время при исследовании двойных систем широко применяются методы синтеза кривых блеска и кривых лучевых скоростей. В отличие от геометрических методов, получивших наибольшее развитие в работе Рассела и Меррилла [1], метод синтеза основан на физической модели двойной системы, в которой формы звезд рассчитываются с учетом приливного взаимодействия и других эффектов. Поверхности звезд разбиваются на тысячи элементарных площадок, излучение каждой площадки рассчитывается с учетом физических эффектов: потемнения к краю, гравитационного потемнения, эффекта “отражения”, геометрических затмений и др. Суммарный поток излучения всех видимых площадок определяет поток от системы на данной фазе орбиты. Этот подход стал возможным с появлением первых общедоступных компью-

теров, и в начале 1970-х годов независимо рядом авторов были предложены алгоритмы синтеза кривых блеска двойных систем (см. [2–4] и др.). Наиболее популярной в настоящее время является модель и соответствующая компьютерная программа Вилсона и Девиннея [3, 5]. В ней формы поверхностей обоих компонентов системы вычисляются в модели Роша, учитывающей влияние приливных и центробежных сил на тела звезд-компонентов системы. Предполагается, что оба компонента обладают тонкими атмосферами. В дальнейшем методы синтеза совершенствовались и усложнялись, рядом авторов были предложены новые модели (подробные обзоры разработанных алгоритмов приведены в статье Вилсона [6] и книге Каллрафа и Милоне [7]). В настоящее время исследователями двойных систем активно используется пакет программ PHOEBE (PHysics Of Eclipsing BinariEs), предложенный в работах [8, 9], в его основе лежит алгоритм Вилсона–Девиннея [3, 5].

Однако описанные модели двойных систем, состоящих из компонентов с тонкими атмосфера-

ми, плохо применимы к системам, содержащим компоненты с мощными ветрами, например, звезды Вольфа—Райе (WR), поскольку игнорируют поглощение в ветрах таких звезд. Тем не менее иногда стандартный метод Вилсона—Девиннея используется в литературе для анализа кривых блеска систем с ветрами, например, в работах [10, 11]. В моделях некоторых авторов учитывается поглощение в звездном ветре одного компонента системы в предположении постоянства скорости ветра [12, 13]. Такое предположение упрощает расчеты, но в действительности скорость вещества в звездном ветре горячих звезд переменна, что может существенно повлиять на результаты анализа. В работе [14] авторы, анализируя кривые блеска системы V444 Cyg (WN5 + O6 V) с помощью модели Вилсона—Девиннея, сделали еще более простое предположение: они представили звездный ветер компонента WR в виде сферической оболочки с постоянной плотностью и радиусом, равным 0.49 радиуса орбиты. Такая аппроксимация совершенно неадекватна картине реального ветра WR с переменной плотностью и приводит к неправильной оценке меняющегося поглощения в ветре с фазой орбитального периода, а значит, к неверным теоретическим кривым блеска. Неудивительно, что авторы получили совершенно неадекватные оценки параметров звезды WR, противоречащие другим исследованиям ([15–17] и др.): радиус звезды WR переоценен более, чем в два раза, а ее температура недооценена также более, чем в два раза. Этот пример наглядно показывает необходимость адекватного моделирования ветров звезд для корректного решения кривых блеска и определения параметров двойных систем, включающих компоненты со звездными ветрами.

Отметим, что существует и принципиально другой метод анализа кривых блеска систем со звездами Вольфа—Райе, предложенный в работе [18], и усовершенствованный в последние годы [17, 19–21]. Метод заключается в использовании регуляризирующих алгоритмов для решения интегральных уравнений, описывающих затмения в системе. С этими алгоритмами получены надежные параметры ряда звезд WR в составе двойных систем, но они могут применяться лишь к сравнительно разделенным двойным системам, форма компонентов которых близка к сферической. Использование возможностей метода синтеза позволяет анализировать кривые блеска систем с приливно-деформированными компонентами.

Еще один метод анализа двойных систем, содержащих один компонент со звездным ветром, был предложен в статье [22]. В этой работе эмпирические моменты кривой блеска (вычисляемые как некие интегралы от наблюдаемой кривой [22]) сравниваются с модельными, получаемыми с использованием простых аналитических выражений для распре-

деления яркости звезд по диску и непрозрачности звездного ветра. Метод предполагает, что оба компонента системы имеют сферическую форму, эффект “отражения” не учитывается. Для определения эмпирических моментов кривой блеска требуется очень гладкая кривая, что достигается сплайн-аппроксимацией реальной наблюдаемой кривой. Таким образом, метод может быть применен только к кривым блеска, полученным с очень высокой точностью. Но даже в этом случае получаемые результаты могут рассматриваться лишь в качестве грубого приближения.

## 2. МОДЕЛЬ

Модель, учитывающая наличие звездного ветра у одного из компонентов двойной системы, была предложена нами в работах [23, 24] и использована для анализа очень массивной двойной системы с эллиптической орбитой WR 22 [25]. Эта модель представляла собой обобщение нашей модели синтеза кривых блеска тесных двойных систем в приближении Роша [26–28]. Перечислим ее основные особенности. Главный (первичный) компонент системы окружен звездным ветром. Основным отличием этой модели от стандартной модели синтеза является то, что для каждой элементарной площадки на вторичном компоненте вычисляется оптическая толща ветра первичного компонента вдоль луча зрения от этой площадки до наблюдателя. Эта оптическая толща учитывается при вычислении окончательного потока излучения от площадки. В оптическом континууме оптическую толщину вещества ветра первичной компоненты определяет электронное рассеяние. Поэтому ее величина вычислялась по формуле

$$\tau = \int_{z_0}^{\infty} \sigma_T n_e(z) dz, \quad (1)$$

где  $z$  — координата вдоль луча зрения,  $\sigma_T$  — сечение Томсоновского рассеяния,  $n_e(z)$  — электронная плотность ветра в точке  $z$  на луче зрения,  $z_0$  — координата на луче зрения площадки на поверхности вторичного компонента. Предполагая, что ветер первичного компонента сферически симметричен и используя уравнение неразрывности

$$n_e(r) = \frac{\dot{M}}{4\pi m_p \mu_e r^2 v(r)}, \quad (2)$$

где  $\dot{M}$  — скорость потери массы первичным компонентом,  $m_p$  — масса протона,  $\mu_e$  — электронный молекулярный вес ( $\mu_e \simeq 2/(1+X)$ ,  $X$  — содержание водорода),  $v(r)$  — скорость ветра на расстоянии  $r$  от главной звезды, получим

$$\tau = \tau_0 \int_{z_0/a}^{\infty} \frac{d(z/a)}{(r(z)/a)^2 v(r(z))/V_{\infty}}. \quad (3)$$

Величины  $z_0$  и  $r(z)$  легко вычисляются с использованием формул, описывающих орбиту двойной системы (см. [25]). В качестве закона изменения скорости ветра мы использовали общепринятый  $\beta$ -закон

$$v(r) = V_\infty \left(1 - \frac{R_*}{r}\right)^\beta, \quad (4)$$

где  $R_*$  — радиус первичного компонента,  $V_\infty$  — скорость ветра на бесконечности,  $\beta$  — параметр закона скорости ветра. Из сказанного очевидно, что

$$\tau_0 = \sigma_T n_0 a, \quad (5)$$

где  $a$  — размер главной полуоси системы,  $n_0$  — референсная электронная плотность (плотность ветра на расстоянии  $a$  от первичного компонента в предположении, что скорость ветра в этой точке равна  $V_\infty$ ), равная

$$n_0 = \frac{\dot{M}}{4\pi m_p \mu_e a^2 V_\infty}. \quad (6)$$

Очевидно, что поскольку оптическая толща ветра пропорциональна отношению  $\dot{M}$  к  $V_\infty$ , эти параметры не являются независимыми параметрами нашей модели. При прочих равных условиях, теоретические кривые блеска с отличающимися  $\dot{M}$  и  $V_\infty$ , но с одинаковым их отношением, будут идентичны. Из этого также следует, что изменение теоретической кривой блеска, например, при увеличении  $\dot{M}$ , может быть также достигнуто соответствующим уменьшением  $V_\infty$ .

В настоящей работе мы предлагаем дальнейшее развитие этой модели, которое учитывает наличие ветров вокруг обоих компонентов системы. В такой двойной системе звездные ветра неизбежно сталкиваются. Задача расчета взаимодействия ветров в общем случае крайне сложна. Зона взаимодействия нестационарна из-за влияния ряда неустойчивостей [29–31]. Помимо этого, структура слоев охлаждения за фронтом ударной волны сильно зависит от того, насколько эффективно охлаждение этого вещества из-за высвечивания внутренней энергии. Эффективность радиативного охлаждения в слое характеризуется параметром [29]

$$\chi = \frac{t_{\text{cool}}}{t_{\text{esc}}} = \frac{v_8^4 d_{12}}{\dot{M}_{-7}},$$

где  $v_8$  — скорость ветра в единицах 1000 км/с,  $d_{12}$  — расстояние между звездами в единицах  $10^{12}$  см,  $\dot{M}_{-7}$  — скорость потери массы звездой в единицах  $10^{-7} M_\odot/\text{год}$ ,  $t_{\text{cool}}$  — характерное время охлаждения,  $t_{\text{esc}} = d/v_s$  — характерное время оттекания горячего газа от апекса поверхности, разграничивающей два ветра (контактной поверхности, далее КП),  $v_s$  — скорость звука в слое охлаждения. Нестационарные газодинамические модели показывают, что в случае  $\chi \geq 3$  слой охлаждения находится в адиабатическом режиме, а в случае  $\chi \leq 3$  — в радиативном. В зависимости от параметров компонентов и их ветров в кон-

кретной двойной системе могут реализовываться различные ситуации: (i) оба слоя (расположенные по разные стороны КП) находятся в адиабатическом (как правило, это широкие двойные системы) или радиативном (тесные двойные системы) режимах; (ii) один слой в адиабатическом, второй в радиативном режиме; (iii) если орбита системы эллиптическая, в разных ее частях один и тот же слой охлаждения может находиться в разных режимах.

В первых работах по газодинамическому моделированию столкновения ветров в двойных системах (напр., [29]) предполагалось, что вплоть до момента столкновения вещество ветров компонентов движется так, как будто второго компонента не существует. Более того, чаще всего для упрощения расчетов предполагалось, что скорость каждого ветра постоянна и равна  $V_\infty$  для данного ветра. Однако такие модели очень сильно переоценивали рентгеновскую светимость и жесткость рентгеновских спектров, формируемых в слоях охлаждения. В действительности на элементарный объем вещества ветра данной звезды действует не только сила лучевого давления и гравитационного притяжения этой звезды, но и такие же силы со стороны второй звезды системы. Очевидно, что вдоль оси системы сила лучевого давления второй звезды направлена в противоположную сторону по отношению к силе лучевого давления первой звезды. Таким образом, излучение второй звезды замедляет ветер первой (и отклоняет его от радиальных траекторий для вещества, находящегося не на оси системы), и наоборот. Этот эффект радиативного торможения (radiative inhibition) был впервые рассмотрен в работе [32]. Он приводит к тому, что скорость ветров в момент столкновения может быть существенно меньше, чем в случае, когда радиативное торможение не учитывается. Как следствие, кинетическая энергия ветров, преобразующаяся в тепловую энергию газа за фронтом ударной волны, существенно уменьшается, что может объяснить несоответствие первых газодинамических моделей и рентгеновских наблюдений. Очевидно, этот эффект должен сильнее проявляться в тесных двойных системах. Авторы [33] рассмотрели тот же эффект в ситуации, когда ветер первой звезды системы имеет подавляюще больший момент по сравнению с ветром второй звезды. В традиционных моделях это означало, что баланса динамических давлений ветров не существует ни в одной точке на оси системы между компонентами, и ветер первой звезды сталкивается непосредственно с поверхностью второй. Однако в работе [33] было показано, что при определенных условиях вещество первого ветра может сильно замедляться вблизи поверхности второй звезды из-за того, что плотность ее излучения в этой области резко возрастает. Это приводит к увеличению плотности первого ветра, что, в свою очередь, приводит к увеличению лучевого давления второй звезды. Возника-

ет положительная обратная связь, и вещество первого ветра может остановиться вблизи поверхности второй звезды. В терминах КП это означает, что баланс давлений даже в условиях преобладания первого ветра может все-таки (при определенных условиях) достигаться вблизи поверхности второй звезды, и столкновения ветра первой звезды с поверхностью второй может не произойти. Этот эффект получил название “радиативная остановка” (radiative breaking).

Дальнейшее усложнение возникает из-за того, что орбитальное движение компонентов двойной системы приводит к закручиванию КП вокруг оси вращения системы. При расчетах во вращающейся системе координат это выражается в необходимости учета влияния сил Кориолиса на движение вещества ветров.

Учет перечисленных факторов при моделировании столкновения ветров в идеале требует создания нестационарной трехмерной модели. Такие модели требуют огромных компьютерных ресурсов, а расчеты даже на суперкомпьютерах занимают столь долгое время, что их невозможно использовать для поиска параметров конкретных двойных систем. Обычно такие модели (чаще всего двумерные) используются для расчетов рентгеновских спектров зоны взаимодействия ветров, для конкретной системы параметры не подбираются, а задаются равными некоторым предполагаемым значениям. Такие модели оказались относительно успешными в случае адиабатических ударных волн, когда размер зоны столкновения велик и она может быть успешно аппроксимирована пространственной сеткой модели, а перемешивание вещества относительно невелико. В случае радиативных ударных волн, когда толщина слоев охлаждения мала, в моделях возникают вычислительные проблемы, связанные с требуемым разрешением сетки. Кроме того, как было отмечено в работе [34], в случае радиативной ударной волны современные газодинамические модели, помимо вычислительных, сталкиваются с принципиальными трудностями. В значительной мере это связано с проблемой корректного учета степени перемешивания вещества за фронтом ударной волны.

Поскольку целью предлагаемой нами модели является возможность поиска за разумное время параметров компонентов двойной системы и параметров их ветров, мы следуем подходу, предложенному в нашей работе [34], а именно, вычисляем контактную поверхность и поверхностную плотность слоев охлаждения в рамках стационарной модели столкновения ветров. При этом форма КП воспроизводит усредненную по времени КП, вычисляемую в нестационарных газодинамических моделях. Дифференциальное уравнение, описывающее форму КП (см. [34, уравнение (6)]), представляет собой уравнение равенства динамических давлений двух ветров. Дифференциальные уравнения, позво-

ляющие вычислить поверхностную плотность слоев охлаждения, также приведены в [34].

Учет сил Кориолиса осуществляется аналогично тому, как это было выполнено в статье [35]. В этой работе авторы, с целью повышения эффективности вычислений, сравнили форму КП, получаемую в нестационарной газодинамической модели, с формой КП, вычисленной в рамках стационарного приближения. Оказалось, что (i) форма “стационарной” КП хорошо воспроизводит усредненную форму КП в газодинамической модели; (ii) КП может быть разделена на две части: симметричную “верхушку”, примыкающую к апексу КП и повернутую на некоторый угол из-за действия сил Кориолиса, и более далекие ветви, образующие спираль Архимеда вокруг центра масс системы. Спираль Архимеда возникает при баллистическом движении вещества во вращающейся системе координат. Угол поворота “верхушки” может быть оценен из соотношения [35]

$$\tan \theta = \frac{v_{\text{orb}}}{V_{\infty}},$$

где  $v_{\text{orb}}$  — орбитальная скорость второй звезды в системе координат с началом в центре первой звезды, а  $V_{\infty}$  — терминальная скорость более медленного ветра. Авторы [35] определили, что точка, в которой силы Кориолиса становятся значимыми, то есть симметричная “верхушка” переходит в спираль Архимеда, определяется условием, что скорость оттока вещества вдоль КП достигает 70–90% терминальной скорости более медленного ветра. Это условие обычно выполняется на расстоянии нескольких радиусов орбиты от апекса КП.

Таким образом, вместо трудоемких трехмерных газодинамических вычислений, которые к тому же страдают от вычислительных и теоретических проблем в случае радиативной ударной волны, мы можем использовать стационарную модель столкновения ветров, вычислять форму КП без учета сил Кориолиса, а затем поворачивать ее на угол  $\theta$ . При этом в случае известных параметров орбиты и терминальных скоростей ветров может быть использована фиксированная величина угла. В случае недостаточно хорошо известных параметров, величина угла  $\theta$  может использоваться как свободный параметр модели. Забегая вперед, отметим, что для большинства разумных величин параметров двойных систем, их компонентов и ветров, оптическая толща ветров за пределами “верхушки” КП очень мала. Поэтому в нашей модели мы вычисляем лишь верхушку КП и ее поворот из-за действия сил Кориолиса, и не учитываем баллистическую часть КП. Это существенно упрощает модель. Однако в экстремальных случаях (чрезвычайно тесные двойные системы с мощными ветрами) такое предположение может быть некорректным. В будущей версии модели будет включена баллистическая часть КП.

Учет влияния радиативного торможения на движение вещества в ветрах является трудоемкой задачей, в общем случае требующей решения трехмерных уравнений Навье—Стокса, включающих все действующие на элементарный объем вещества силы. В работе [36] эта задача была решена в стационарном приближении и в предположении, что движение вещества в ветрах компонентов осесимметрично относительно линии центров системы. Это позволило редуцировать задачу к системе двух дифференциальных уравнений в частных производных. Результатом решения является двумерное поле скоростей в ветрах звезд, позволяющее рассчитать (осесимметричную) КП. Авторы [36] отмечают, что единичный расчет двумерного поля скоростей при одном фиксированном наборе параметров модели занимает около 9 часов на одном ядре современного процессора. Очевидно, что непосредственное использование этого алгоритма в задаче минимизации невязок между моделью и наблюдениями не реалистично. Выходом из этой ситуации является предварительный расчет набора моделей (поля скоростей) на сетке параметров и последующая интерполяция этих результатов на текущие параметры модели в процессе поиска оптимальных параметров.

Необходимо сделать еще одно замечание. Излучение звезды с ветром в оптическом континууме формируется не только поверхностью основного тела звезды (определяемой условием гидростатического равновесия), но и рассеянным излучением ветра. Однако светимость такого рассеянного излучения на много порядков величин меньше светимости самой звезды, что подтверждается, например, эмпирическим распределением яркости по диску компоненты WR в системе V444 Cyg (WR + O), определенным методом решения некорректных задач [17]. Поэтому в нашей модели мы пренебрегаем этим эффектом.

Суммируя все сказанное выше, алгоритм, реализуемый в нашей модели двойной системы с двумя ветрами, состоит в следующем:

1. Формы поверхности компонентов системы вычисляются в модели Роша [26–28]. Орбита системы может быть круговой или эллиптической.

2. Излучение элементарной площадки на поверхности каждого компонента вычисляется стандартным для метода синтеза образом с учетом потемнения к краю, гравитационного потемнения, эффекта “отражения” [26–28]. Вычисляется монохроматический поток излучения; в примерах, приведенных ниже, использована длина волны  $\lambda$  4400 Å.

3. Контактная поверхность и поверхностная плотность слоев охлаждения вычисляется, как описано выше, посредством решения дифференциальных уравнений, представленных в нашей работе [34]. Поворот КП из-за влияния сил Кориолиса может быть задан фиксированным углом (при известных параметрах орбиты и ветров) или рассматриваться как свободный параметр модели. Для широких

систем, где радиативное торможение не играет существенной роли, поле скоростей ветров рассчитывается в соответствии с  $\beta$ -законом для каждого ветра. Для тесных систем предусмотрена возможность использования двумерных законов изменения скорости в ветрах компонентов путем интерполяции по таблице предварительно рассчитанных моделей, учитывающих радиативное торможение.

4. Для каждой элементарной площадки на поверхности данной звезды, видимой для наблюдателя, вычисляется точка пересечения луча зрения от этой площадки с КП (если таковая имеется). Оптическая толща ветра звезды 1 для площадок на звезде 2 вычисляется по формулам, приведенным выше, на интервале от точки пересечения до бесконечности. Также учитывается оптическая толща слоев охлаждения. Аналогично вычисляется оптическая толща ветра звезды 2 для элементарных площадок на звезде 1. Окончательный поток от каждой площадки вычисляется с учетом этой оптической толщи.

5. Как и в стандартной реализации метода синтеза, излучение всех площадок на обеих звездах системы суммируется с учетом геометрических затмений, давая в результате общий поток от системы на данной фазе орбитального периода.

### 3. МОДЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ БЛЕСКА

Учет радиативного торможения (особенно в тесных двойных системах) является критически важным при расчетах *рентгеновских* спектров и светимостей. Причиной является то, что рентгеновское излучение систем со сталкивающимися ветрами формируется в слоях охлаждения по обе стороны от контактной поверхности. Температура плазмы за фронтом ударной волны пропорциональна квадрату скорости набегающего ветра, и понижение скорости из-за радиативного торможения ветров радикально влияет на характеристики рентгеновского излучения. Как было отмечено в работе [32], радиативное торможение существенно меняет скорости обоих ветров в основном в области между компонентами системы, близкой к линии центров. Свойства ветров вдали от линии центров меняются значительно меньше.

В нашей модели мы рассматриваем *оптическое* излучение двойных систем со сталкивающимися ветрами. В оптическом диапазоне основными источниками излучения являются звезды-компоненты системы. Основная роль контактной поверхности — определить границу раздела между ветрами. Из сказанного в предыдущем параграфе следует, что форма КП может измениться только вблизи линии центров системы. Более того, на форму КП влияют не абсолютные скорости набегающих ветров, а соотношение их динамических моментов. Поскольку обе звезды системы замедляют ветер друг друга, это соотношение при учете радиативного замедления меняется не слишком сильно по сравнению со слу-

чаем, когда для обоих ветров используются стандартные  $\beta$ -законы. Поэтому можно ожидать, что форма КП в случае учета радиативного торможения изменится не слишком сильно, а значит его влияние на оптическое излучение системы не слишком велико.

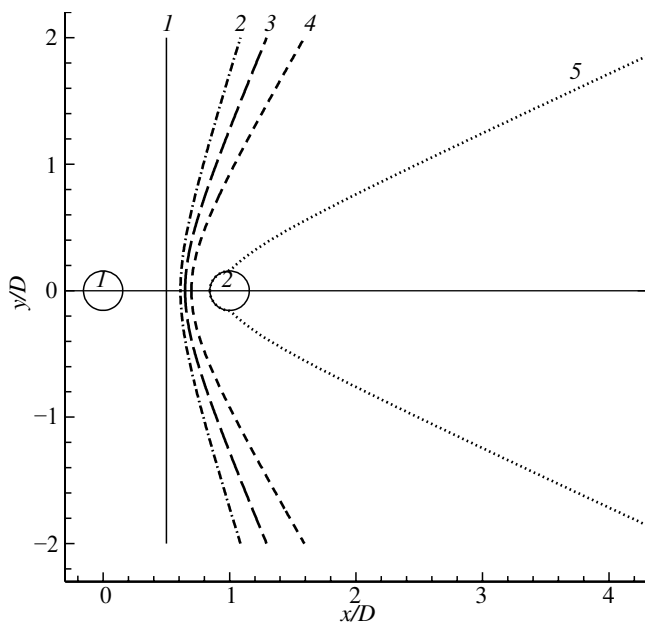
Учитывая то, что основной целью данной работы было продемонстрировать алгоритм, обеспечивающий инфраструктуру для вычисления оптических кривых блеска двойных систем со сталкивающимися ветрами, ниже мы показываем результаты только для моделей, в которых скорости ветров до момента столкновения вычислялись с использованием  $\beta$ -законов и без учета радиативного торможения. Как было отмечено выше, учет радиативного торможения представляет собой трудоемкую задачу, которую необходимо реализовывать отдельно от предлагаемого нами алгоритма. При наличии табулированных полей скоростей алгоритм предусматривает возможность их использования для расчета КП. Задача расчета полей скоростей ветров с учетом радиативного торможения будет являться предметом отдельной работы.

Перечислим входные параметры задачи синтеза теоретических кривых блеска двойных систем со звездными ветрами (подробное описание параметров приведено в работах [27, 28, 25], а также в нашей первой статье по расчету пробных модельных кривых блеска систем, содержащих два компонента с ветрами [37]). Стандартные входные параметры двойной системы и ее компонентов: орбитальный период  $P$ , наклонение орбиты  $i$ , эксцентриситет орбиты  $e$ , долгота периастра первой звезды  $\omega$ , массы звезд  $M_1, M_2$ , средние эффективные температуры звезд  $T_1, T_2$ , коэффициенты заполнения полостей Роша  $\mu_1, \mu_2$ , коэффициенты гравитационного потемнения  $\beta_g^1, \beta_g^2$ , коэффициенты асинхронности вращения звезд  $F_1, F_2$ , болометрические альбедо  $A_1, A_2$ , коэффициенты потемнения к краю  $(x, y)_1, (x, y)_2$ , эффективная длина волны монохроматической кривой блеска  $\lambda$ . Параметры ветров: темпы потери массы звездами  $\dot{M}_1, \dot{M}_2$ , скорости ветров на бесконечности  $V_{\infty,1}, V_{\infty,2}$ , параметры в законе скорости ветров  $\beta_1, \beta_2$ , средние электронные молекулярные веса вещества в ветрах  $\mu_{e,1}, \mu_{e,2}$ , угол поворота КП  $\theta$ . При анализе конкретной двойной системы многие параметры могут быть зафиксированы с учетом имеющейся информации о системе и физических характеристиках ее компонентов.

Коэффициенты заполнения полостей Роша  $\mu_1, \mu_2$  используются как свободные параметры в процессе поиска оптимального решения кривой блеска. Они однозначно определяют формы поверхностей звезд и, в частности, полярные радиусы компонентов. Однако в качестве характерного радиуса приливо-деформированной звезды разумно рассматривать радиус равнообъемной сферы. Посколь-

ку в приводимых ниже примерах мы не решали обратную задачу поиска оптимальных параметров модели по наблюдаемой кривой блеска, а лишь рассчитывали теоретические кривые по заданному набору параметров модели, в качестве входного параметра, описывающего радиус компонента, мы использовали не коэффициент заполнения для данного компонента, а его радиус, который считался радиусом равнообъемной сферы. Требуемый в модели коэффициент заполнения подбирался так, чтобы соответствовать этому радиусу. Ниже показаны результаты расчетов теоретических кривых блеска в нескольких моделях с параметрами, характерными для различных типов систем.

На рис. 1 показан набор контактных поверхностей для некоторой условной двойной системы со сталкивающимися ветрами. В качестве прототипа мы использовали модель системы с двумя идентичными звездами O5 V, параметры которых взяты из работы [38]: массы компонентов  $M_1 = M_2 = 37.28 M_\odot$ , радиусы  $R_1 = R_2 = 11.08 R_\odot$ , температуры  $T_1 = T_2 = 41\,540$  К, терминальные скорости ветров  $V_{\infty,1} = V_{\infty,2} = 2900$  км/с, параметры  $\beta$ -закона  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ . Период системы был принят равным 8 дней, что при заданных массах компонентов соответствует радиусу орбиты  $a = 70.84 R_\odot$ . Орбита полагалась круговой. Для того чтобы проиллюстрировать изменение формы КП



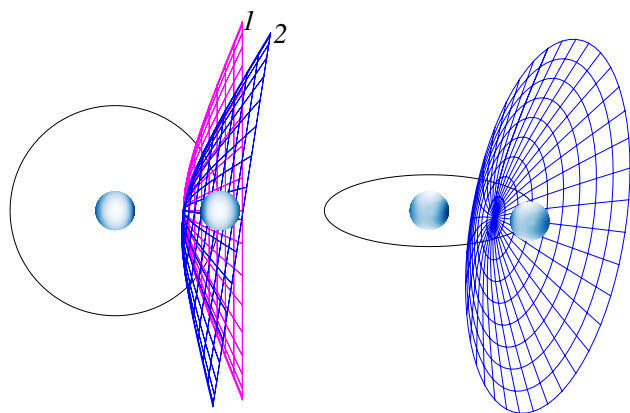
**Рис. 1.** Несколько контактных поверхностей (КП) для условной системы O5 V + O5 V (см. текст). Для избежания загромождения рисунка показаны не трехмерные поверхности, а их пересечения с плоскостью орбиты. Приливные искажения малы, поэтому компоненты системы показаны окружностями, номера внутри них обозначают номера звезд. Поворот КП из-за влияния сил Кориолиса и радиативное торможение не учитывались. Для поверхностей 1–5 соотношение темпов потери массы звездами  $\dot{M}_2/\dot{M}_1$  составляет 1.0, 0.5, 0.4, 0.3, 0.1 соответственно

при изменении соотношения мощности ветров, мы рассчитали КП для пяти моделей. В первой модели скорости потери массы обоими компонентами одинаковы  $\dot{M}_1 = \dot{M}_2 = 1.0 \times 10^{-6} M_{\odot}/\text{год}$ . В последующих моделях скорость потери массы второй звездой уменьшается (см. рис. 1). Эти модели несколько искусственны, поскольку значение  $\dot{M}$ , вообще говоря, связано с другими параметрами звезды. Они были выбраны с целью продемонстрировать влияние мощности ветров на форму КП, отделив его от влияния других параметров. В этом наборе моделей поворот КП из-за влияния сил Кориолиса не учитывался.

В моделях 1–4 контактная поверхность находится в пространстве между компонентами системы. В модели 5 ветер звезды 1 настолько преобладает над вторым ветром ( $\dot{M}_2/\dot{M}_1 = 0.1$ ), что в пространстве между звездами он полностью подавляет ветер второй звезды и сталкивается с ее поверхностью.

На рис. 2 показано влияние сил Кориолиса на поворот КП для модели 3. Угол поворота верхушки КП для данной модели составляет  $\theta = 8.8^\circ$ .

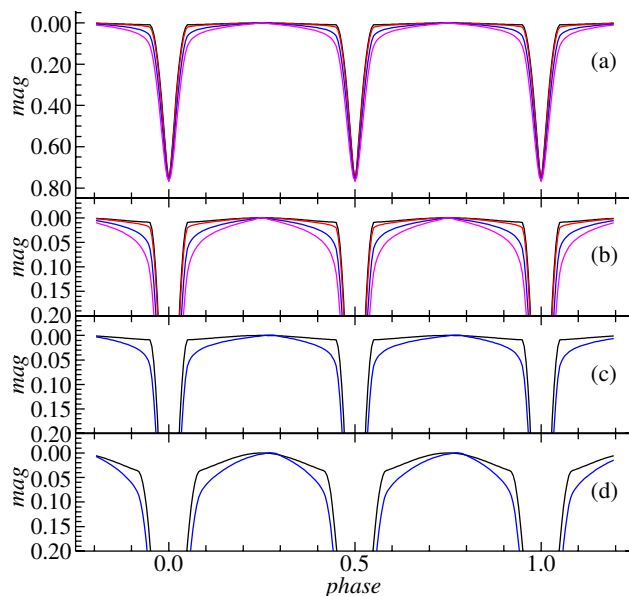
На рис. 3 (панели (а) и (б)) показана зависимость кривых блеска для модели 1 (идентичные звезды O5 V и их ветра) от скорости потери масс компонентами. На панели (б) показаны те же кривые блеска, что и на панели (а), но в увеличенном масштабе. Влияние сил Кориолиса в моделях, показанных на панелях (а), (б), не учитывалось. Для сравнения показана кривая блеска без учета поглощения излучения звезд ветрами. На внезатменных участках этой кривой блеск системы практически постоянен, поскольку система сравнительно разделенная,



**Рис. 2.** Влияние сил Кориолиса на угол поворота верхушки контактной поверхности (КП) для модели 3 (см. рис. 1). Слева: 3D модель системы при взгляде с полюса орбиты. Орбита системы показана черной окружностью, звезда номер 1 находится в центре орбиты. Орбитальное движение происходит против часовой стрелки. КП без учета сил Кориолиса помечена индексом “1”, КП с учетом сил Кориолиса — индексом “2”. Справа: КП 2 для угла наклона орбиты  $70^\circ$  и орбитальной фазы 0.7. Сетки на КП разрежены для ясности рисунков; плотность сеток в реальных расчетах намного выше

и приливные искажения компонентов малы. Угол наклона орбиты во всех моделях равен  $i = 90^\circ$ . Такой угол позволяет наиболее наглядно показать влияние поглощения в ветрах на кривую блеска, исключив другие факторы. Поскольку звезды и их ветра идентичны, на фазах квадратур (0.25 и 0.75) поглощение излучения звезды в ветре соседки отсутствует (лучи зрения от площадок на звезде к наблюдателю не пересекают КП), и общий блеск системы такой же, как в случае модели без ветров. В моменты соединений (фазы 0.0 и 0.5) происходит полное геометрическое затмение компонентов друг другом. Поэтому блеск системы на этих фазах также не зависит от наличия ветров. Таким образом, поглощение в ветрах компонентов проявляется только в изменении ширины минимумов. Как видно из рис. 3 (а, б), при скорости потери массы  $\dot{M}_{1,2} = 1 \times 10^{-6} M_{\odot}/\text{год}$ , характерной для звезд спектральных классов O, влияние поглощения в ветрах на кривую блеска минимально. При увеличении  $\dot{M}$  до значения  $1 \times 10^{-5} M_{\odot}/\text{год}$  (характерного для звезд WR) изменения становятся существенными.

На рис. 3 (с) для модели 1 с принятыми значениями  $\dot{M}_{1,2} = 5 \times 10^{-6} M_{\odot}/\text{год}$  показано влияние учета сил Кориолиса на кривую блеска. Оно проявляется в асимметрии минимумов, а также в смещении



**Рис. 3.** Влияние величины скорости потери массы  $\dot{M}$  на кривую блеска в модели 1. Верхняя сплошная черная кривая — кривая блеска двойной системы, в которой у компонентов нет ветров (а). Сверху вниз: сплошными цветными линиями показаны кривые блеска для  $\dot{M}_{1,2} = 1 \times 10^{-6} M_{\odot}/\text{год}$ ,  $5 \times 10^{-6} M_{\odot}/\text{год}$ ,  $10 \times 10^{-6} M_{\odot}/\text{год}$ . (б): Те же кривые блеска в увеличенном масштабе. Влияние сил Кориолиса в моделях, показанных на панелях (а) и (б), не учитывалось. (с): Влияние сил Кориолиса на асимметрию кривой блеска для модели 1 ( $P = 8^d$ ) при  $\dot{M}_{1,2} = 5 \times 10^{-6} M_{\odot}/\text{год}$ , см. текст. (д): Влияние сил Кориолиса на асимметрию кривой блеска для модели, аналогичной модели 1 с  $\dot{M}_{1,2} = 5 \times 10^{-6} M_{\odot}/\text{год}$ , но с периодом  $P = 4^d$

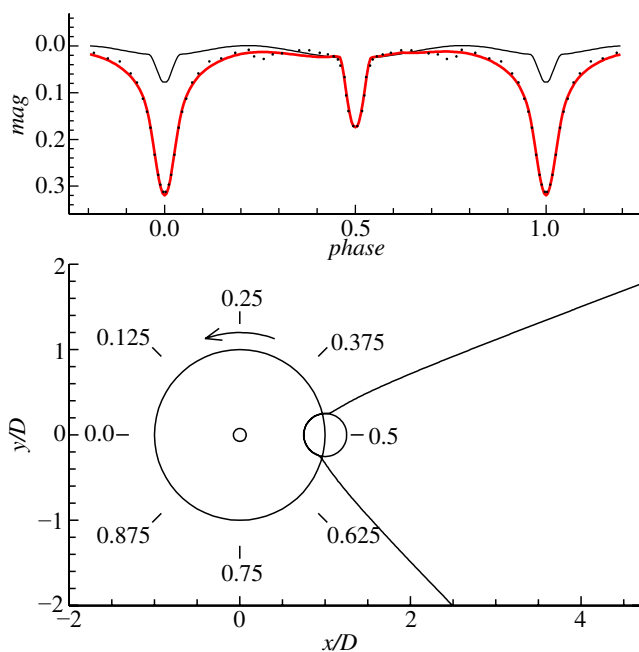
максимумов кривой блеска от фаз 0.25 и 0.75. Поскольку поворот КП из-за сил Кориолиса в данной модели невелик, асимметрия кривой блеска также мала. На панели (d) показана кривая блеска модели системы, параметры которой остались теми же, что в модели с панели (с), за исключением орбитального периода, который уменьшен до 4 дней. Как и на других панелях, для сравнения показана кривая блеска без учета поглощения в ветрах (верхняя кривая). Расстояние между компонентами в этой модели составляет  $44.63 R_{\odot}$ . При таком расстоянии компоненты системы испытывают заметное приливное искажение, что проявляется в эллипсоидальной переменности верхней кривой блеска на внезатменных участках. Асимметрия нижней кривой блеска (рассчитанной с учетом поглощения в ветрах и сил Кориолиса) выражена все еще довольно слабо, поскольку угол поворота КП составляет  $\theta = 11^{\circ}$ . Более выраженная асимметрия из-за влияния сил Кориолиса, очевидно, будет проявляться в очень тесных двойных системах.

Более интересно то, что, как видно из рис. 3 (d), поведение нижней кривой блеска (с учетом поглощения в ветрах) на внезатменных участках вполне может быть интерпретировано в модели без ветров как внезатменная эллипсоидальная переменность. Поскольку величина этой переменности заметно больше, чем истинная переменность из-за приливных искажений компонентов, анализ подобных кривых блеска с использованием стандартного метода синтеза (звезды с тонкими атмосферами) приведет к переоценке размеров звезд системы.

Представляется интересным проверить, какая кривая блеска будет получена с нашей моделью для одной из известных систем с компонентом WR. В качестве такой системы мы выбрали V444 Cyg, которая часто рассматривается как “Rosetta stone” систем WR + O. Система является затменной, что позволяет достаточно надежно определять параметры компонентов, и при этом сравнительно разделенной, что позволяет избежать трудностей, связанных с учетом приливных искажений звезд. Как следствие, система хорошо изучена по сравнению с подобными. Ее компонентами являются звезда WR подтипа WN5 и звезда O6 V. Орбита системы круговая, орбитальный период составляет 4.2 дня, угол наклона орбиты  $i \simeq 78^{\circ}$ , радиус орбиты  $a \simeq 40 R_{\odot}$  [15, 17]. Мы использовали типичные параметры звезды O6 V из работы [38]:  $M_O = 30.98 M_{\odot}$ ,  $R_O = 10.11 R_{\odot}$ ,  $T_{\text{eff},O} = 38\,867$  К. Параметры ветра также были приняты равными типичным для таких звезд [36]:  $\dot{M}_O = 1 \times 10^{-6} M_{\odot}/\text{год}$ ,  $V_{\infty,O} = 2900$  км/с,  $\beta_O = 1.0$ . Компонент WN5 является классической звездой WR с гелиевым ядром, поэтому ее радиус был принят равным  $R_{\text{WR}} = 3 R_{\odot}$  [39]. Из третьего закона Кеплера масса этого компонента при указанных выше параметрах орбиты и звезды O составляет  $M_{\text{WR}} = 17.75 M_{\odot}$ . Температура звезды WR опреде-

ляется наблюдательным отношением светимостей  $L_O/L_{\text{WR}} = 1.63$  [16] и при принятых выше параметрах составляет  $T_{\text{eff},\text{WR}} = 63\,030$  К. Терминальная скорость ветра WR была определена в работе [40] по ультрафиолетовым спектральным линиям в спектрах, полученных на спутнике IUE:  $V_{\infty,\text{WR}} = 2200$  км/с (взята скорость, определенная по линиям He II). Скорость потери массы звездой WR была определена по изменению орбитального периода в работе [41]:  $\dot{M}_{\text{WR}} = 7 \times 10^{-6} M_{\odot}/\text{год}$ . Ветра звезд WR ускоряются медленнее, чем звезд O, что соответствует большим значениям показателя  $\beta$  в  $\beta$ -законе скорости [17]. Поэтому значение этого показателя для звезды WR было принято равным  $\beta_{\text{WR}} = 1.5$  [17]. Наконец, химический состав (влияющий на величину среднего электронного молекулярного веса вещества в ветре  $\mu_e$ ) для звезды O был принят равным Солнечному. Для звезды WR, преобладающим элементом в которой является гелий, полностью ионизованный в ветре, мы приняли простое предположение, что содержание водорода  $X = 0$  (и, следовательно,  $\mu_e = 2$ ).

На рис. 4 показаны кривые блеска, полученные в нашей модели с указанными выше параметра-



**Рис. 4.** Вверху: кривые блеска модели, параметры которой аналогичны параметрам двойной системы V444 Cyg (WR + O) (подробнее см. текст). Точками показана наблюдаемая неректифицированная узкополосная кривая блеска на длине волны  $\lambda 4244 \text{ \AA}$ . Нижняя красная сплошная кривая — модельная кривая блеска с учетом поглощения в ветрах компонентов, рассчитанная на той же длине волны. Верхняя черная сплошная кривая — модельная кривая блеска с теми же параметрами звезд и орбиты, но без учета поглощения в ветрах. Внизу: проекция изображений звезд и контактной поверхности на плоскость орбиты. Звезда WR находится в центре орбиты. Показано направление орбитального вращения и фазы орбитального периода

ми. Красная сплошная кривая (нижняя) показывает кривую блеска с учетом поглощения в ветрах компонентов. Черная сплошная кривая (верхняя) получена при тех же параметрах модели, но без учета поглощения в ветрах. Для сравнения точками показана наблюдаемая кривая блеска V444 Cyg в узкополосном фильтре  $\lambda 4244 \text{ \AA}$  [17]. В нижней части рисунка показана геометрия системы и КП при взгляде с полюса орбиты. Как видно, ветер WR преобладает настолько, что сталкивается с поверхностью звезды О. Результаты, показанные на рисунке, позволяют сделать несколько выводов:

1. Теоретическая кривая блеска, полученная в нашей модели с учетом поглощения в ветрах, очень хорошо описывает наблюдаемую кривую блеска V444 Cyg. Это замечательный результат, учитывая, что поиск параметров модели не проводился, а использованные параметры орбиты, компонентов и их ветров взяты из нескольких независимых литературных источников.

2. Форма вторичного минимума практически не отличается в модели с учетом и без учета поглощения в ветрах. Причиной этого является то, что в данном минимуме звезда О находится впереди (наблюдатель смотрит на систему справа на нижней панели рисунка). Соответственно в этом минимуме происходит поглощение излучения звезды WR в ветре звезды О. Для данной конфигурации системы и ее компонентов, на фазе 0.5 происходит частичное геометрическое затмение, при этом центр диска WR находится внутри диска О, так что геометрически видимая часть диска WR невелика. К тому же ее излучение проходит через намного менее плотный ветер звезды О. В результате, поглощение излучения звезды WR в ветре звезды О незначительно. По этой же причине во вторичном минимуме не проявляется влияние поворота КП из-за сил Кориолиса (угол поворота для данной конфигурации системы составляет  $\theta = 12.36^\circ$ ). В главном минимуме влияние сил Кориолиса также пренебрежимо мало, поскольку угол раскрытия КП мал и для излучения звезды О на соответствующих фазах ветер звезды WR сферически симметричен (см. нижнюю панель рисунка).

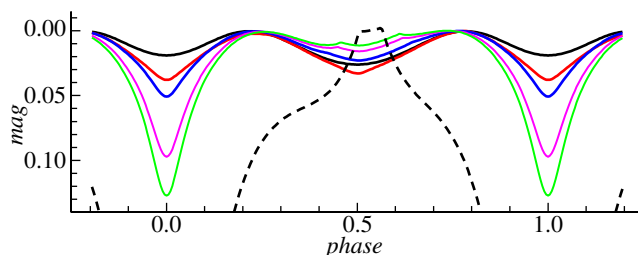
3. Теоретическая кривая блеска, полученная при тех же параметрах системы и ее компонентов, но без учета поглощения в ветрах (верхняя сплошная черная кривая), радикально отличается от кривой блеска в полной модели (нижняя сплошная красная кривая) на внезатменных участках и в главном минимуме. Интересно, что глубина главного минимума верхней кривой на рис. 4 существенно меньше, чем глубина вторичного минимума. Это связано с тем, что геометрия затмений и перекрываемой в них площади остается одинаковой в обоих минимумах. Поэтому поток, затмеваемый на фазах главного и вторичного минимумов, зависит от температуры соответствующего компонента. Поскольку температура звезды WR заметно выше, чем температура

звезды О, поток с одинаковой площади WR (затмеваемой во вторичном минимуме) заметно превышает поток О (затмеваемой в главном минимуме).

4. Рисунок 4 наглядно демонстрирует, что интерпретация кривой блеска системы WR + О стандартным методом синтеза в модели звезд с тонкими атмосферами приведет к радикально неверным параметрам компонентов.

Необходимо отметить, что, строго говоря, в системе с параметрами V444 Cyg могут играть существенную роль эффекты радиативного торможения и радиативной остановки. Поэтому полученные выше результаты следует рассматривать как предварительные. С другой стороны, как было отмечено выше, влияние радиативного торможения на форму КП, вероятно, не слишком велико. Что касается радиативной остановки, то даже в случае, если ветер WR остановится недалеко от поверхности звезды О, это существенно не изменит картину в целом. Ветер WR все еще преобладает, а плотность ветра О намного меньше плотности ветра WR. Небольшие изменения формы и положения КП, скорее всего, приведут к незначительным изменениям кривой блеска. Конечно, эти качественные аргументы требуют проверки в соответствующим образом адаптированной модели.

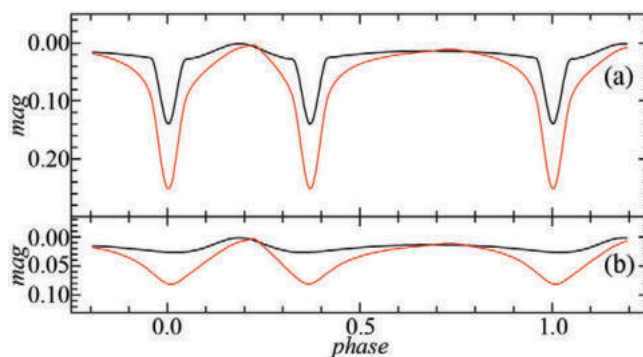
На рис. 5 представлен вариант предыдущей модели для угла наклона орбиты  $i = 70^\circ$ . При таком угле геометрических затмений тел звезд не происходит и оба затмения чисто атмосферные. Целью этого варианта было продемонстрировать изменение кривой блеска в зависимости от скорости потери массы звездой WR. Жирная черная кривая показывает кривую блеска без учета поглощения в ветрах.



**Рис. 5.** Теоретические кривые блеска, показывающие зависимость формы кривых от величины скорости потери массы первичным компонентом  $\dot{M}_1$  для случая чисто атмосферного затмения. Параметры системы и компонентов такие же, как для модели V444 Cyg, за исключением угла наклона орбиты (на данном рисунке  $i = 70^\circ$ ) и скорости потери массы звездой WR. Жирная черная линия показывает кривую блеска без учета поглощения в ветрах. Цветные тонкие линии, расположенные сверху вниз в главном минимуме, показывают кривые блеска, соответствующие скоростям потери массы  $\dot{M}_{WR} = (1, 2, 5, 7) \times 10^{-6} M_\odot/\text{год}$ . Штриховой линией показана кривая блеска в модели, где скорость потери массы звездой WR экстремально велика  $\dot{M}_{WR} = 5 \times 10^{-5} M_\odot/\text{год}$  (видна только верхняя часть кривой, см. текст)

Поскольку геометрические затмения отсутствуют, вся переменность в этой модели связана с меняющейся относительно наблюдателя ориентацией приливо деформированных тел компонентов системы (эллипсоидальная переменность), а также отчасти с эффектом “отражения”. Кривые блеска, показанные сплошными цветными линиями (сверху вниз в главном минимуме), соответствуют скоростям потери массы  $\dot{M}_{WR} = (1, 2, 5, 7) \times 10^{-6} M_{\odot}/\text{год}$ . Поведение этих кривых блеска в области главного минимума не вызывает вопросов: чем больше скорость потери массы звездой WR, тем больше поглощение излучения звезды O в главном минимуме. Поведение кривой блеска во вторичном минимуме на первый взгляд нелогично. Если при минимальной  $\dot{M}_{WR} = 1 \times 10^{-6} M_{\odot}/\text{год}$  кривая блеска в этом минимуме проходит ниже кривой в модели без ветров, то с увеличением  $\dot{M}_{WR}$  она начинает проходить все выше и выше. Объясняется это тем, что во всех вариантах модели, кроме минимального  $\dot{M}_{WR}$ , ветер WR сталкивается с поверхностью звезды O, а угол раскрытия конуса КП достаточно мал. В результате даже на орбитальных фазах 0.3–0.4 излучение звезды O поглощается в ветре WR (смотри нижнюю панель рис. 4). Для того чтобы продемонстрировать это наглядно, мы рассчитали модель с экстремально большим значением  $\dot{M}_{WR} = 5 \times 10^{-5} M_{\odot}/\text{год}$ . Соответствующая кривая блеска показана на рисунке штриховой линией (видна только верхняя часть кривой, поскольку глубина главного минимума составляет  $0.63^m$ ). Форма крыльев главного минимума ясно показывает, что поглощение излучения звезды O в ветре WR продолжается вплоть до орбитальной фазы  $\sim 0.4$ . В этой модели оно настолько велико, что полностью маскирует эллипсоидальную переменность. В других, не столь экстремальных моделях, поглощение на указанных фазах также присутствует. Оно заметно понижает относительную высоту максимумов на фазах  $\sim 0.2$  и  $\sim 0.8$ , уменьшая тем самым амплитуду переменности во вторичном минимуме (разницу звездных величин в максимумах и на фазе 0.5). При этом повышение уровня кривых блеска в области фазы 0.5 является следствием нормировки теоретических кривых блеска на максимум. В случае, если бы кривые рисовались в абсолютных единицах, уровень блеска на фазе 0.5 для больших значений  $\dot{M}_{WR}$  примерно совпадал бы с уровнем референсной кривой блеска без учета ветров, а максимумы на фазах  $\sim 0.2$  и  $\sim 0.8$  находились бы ниже максимумов референсной кривой блеска.

На рис. 6 показаны кривые блеска системы с эллиптической орбитой. Для простоты в качестве компонентов системы рассмотрены две идентичные звезды, параметры которых совпадают с параметрами звезды O6 V в модели для V444 Cyg, за исключением скорости потери массы, которая была увеличена до  $\dot{M}_{1,2} = 5 \times 10^{-6} M_{\odot}/\text{год}$  для того, чтобы влияние ветров было более выражено. Период систе-



**Рис. 6.** Теоретические кривые блеска для системы с эксцентричной орбитой ( $e = 0.2$ ) (см. текст). (a): угол наклона орбиты  $i = 75^\circ$ . (b): угол наклона орбиты  $i = 65^\circ$ . На обеих панелях черные (верхние) кривые блеска показывают модели без учета поглощения в ветрах компонентов. Красные (нижние) кривые получены при учете поглощения в звездных ветрах

мы остался таким же (4.2 дня), а эксцентриситет орбиты и долгота периастра первого компонента приняты равными  $e = 0.2$  и  $\omega = 0.0$ . На панели (a) верхней черной кривой показана референсная кривая блеска системы без учета поглощения в ветрах для угла наклона орбиты  $i = 75^\circ$ . При этом угле наблюдаются частичные геометрические затмения. Фаза периастра равна 0.187, вблизи нее наблюдается эллипсоидальная переменность. Вблизи апоастра (на фазах после вторичного минимума) эта переменность практически отсутствует. Нижняя красная кривая показывает кривую блеска с учетом поглощения в ветрах и сил Кориолиса. Влияние сил Кориолиса на поворот КП проявляется в асимметрии максимума кривой блеска с учетом поглощения в ветрах в районе орбитальной фазы 0.22. На нижней панели рис. 6 показаны аналогичные кривые блеска для угла наклона орбиты  $i = 65^\circ$ . Геометрические затмения отсутствуют, и вся переменность обусловлена эллипсоидальными изменениями и поглощением в ветрах.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена модель и соответствующий алгоритм, который позволяет рассчитывать оптические кривые блеска двойных систем со сталкивающимися ветрами. Вычисления, выполненные для ряда теоретических моделей с параметрами, характерными для реальных систем, наглядно показывают, что учет поглощения в ветрах необходим для получения максимально точных параметров систем, их компонентов и ветров. Определение параметров таких систем классическим методом синтеза в модели Роша без учета ветров неизбежно приводит к значительным погрешностям в получаемых параметрах.

Представленная модель будет использоваться в наших дальнейших работах по анализу кривых блеска систем WR + WR, WR + O, O + O. Наиболее

интересными кандидатами являются чрезвычайно массивные системы (с суммарными массами, превышающими  $130 M_{\odot}$ ) WR20a (WN6 + WN6), NGC 3603-A1 (WN6 + N6), WR21 (Of/WN + O) и др.

Отдельное исследование будет посвящено разработке по возможности эффективного вычислительного алгоритма, который позволит рассчитывать поля скоростей в ветрах компонентов с учетом радиативного торможения и радиативной остановки.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа И. И. Антохина (разработка алгоритма учета двух звездных ветров в двойной системе) поддержана грантом Российского научного фонда 23-12-00092. Работа Э. А. Антохиной (реализация модели Роша, моделирование кривых блеска) поддержана Междисциплинарной научно-образовательной школой МГУ им. М. В. Ломоносова “Фундаментальные и прикладные космические исследования”.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *H.N. Russell and J.E. Merrill*, The determination of the elements of eclipsing binaries (Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1952).
2. *G. Hill and J.B. Hutchings*, *Astrophys. J.* 162, 265 (1970).
3. *R.E. Wilson and E.J. Devinney*, *Astrophys. J.* 166, 605 (1971).
4. *D.B. Wood*, *Astron. J.* 76, 701 (1971).
5. *R.E. Wilson*, *Astrophys. J.* 234, 1054 (1979).
6. *R.E. Wilson*, *Publ. Astron. Soc. Pacific* 106, 921 (1994).
7. *J. Kallrath and E.F. Milone*, *Eclipsing Binary Stars: Modeling and Analysis*. (New York: Springer Verlag, 2nd ed. 2009).
8. *A. Prša and T. Zwitter*, *Astrophys. J.* 628(1), 426 (2005).
9. *A. Prša, K.E. Conroy, M. Horvat, H. Pablo, et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* 227(2), id. 29 (2016).
10. *A.Z. Bonanos, K.Z. Stanek, A. Udalski, L. Wyrzykowski, et al.*, *Astrophys. J. Letters* 611(1), L33 (2004).
11. *A.F.J. Moffat, V. Poitras, S.V. Marchenko, M.M. Shara, D.R. Zurek, E. Bergeron, and E.A. Antokhina*, *Astron. J.* 128(6), 2854 (2004).
12. *I.B. Pustynnik and L. Einasto*, *Soviet Astron. Letters* 10, 215 (1984).
13. *E.A. Antokhina and A.M. Cherepashchuk*, *Soviet Astron.* 32, 531 (1988).
14. *F.Z. Eris and F. Ekmekci*, *Astron. Nachricht.* 332(6), 616 (2011).
15. *A.M. Cherepashchuk, J.A. Eaton, and Kh.F. Khaliullin*, *Astrophys. J.* 281, 774 (1984).
16. *A.M. Cherepashchuk, G. Koenigsberger, S.V. Marchenko, and A.F.J. Moffat*, *Astron. and Astrophys.* 293, 142(1995).
17. *I.I. Antokhin and A.M. Cherepashchuk*, *Astron. Rep.* 45(5), 371 (2001).
18. *А.В. Гончарский, А.М. Чепенашук и А.Г. Ягола*, Некорректные задачи астрофизики (М.: Наука, 1985).
19. *I.I. Antokhin and A.M. Cherepashchuk*, *Astron. Rep.* 51(6), 486 (2007).
20. *I.I. Antokhin*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 420(1), 495 (2012).
21. *I.I. Antokhin*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 463(2), 2079 (2016).
22. *C. Perrier, J. Breysacher, and G. Rauw*, *Astron. and Astrophys.* 503(3), 963 (2009).
23. *E.A. Antokhina, I.I. Antokhin, and A.M. Cherepashchuk*, *Astron. Astrophys. Trans.* 28(1), 3 (2013).
24. *E.A. Antokhina, I.I. Antokhin, and A.M. Cherepashchuk*, *Bull. Crimean Astrophys. Observ.* 109(1), 54 (2013).
25. *G. Lenoir-Craig, I.I. Antokhin, E.A. Antokhina, N. St-Louis, and A.F.J. Moffat*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 510(1), 246 (2022).
26. *Э.А. Антохина*, *Астрон. журн.* 65(6), 1164 (1988).
27. *Э.А. Антохина*, *Астрон. журн.* 73(4), 532 (1996).
28. *E.A. Antokhina, A.F.J. Moffat, I.I. Antokhin, J.-F. Bertrand, and R. Lamontagne*, *Astrophys. J.* 529(1), 463 (2000).
29. *I.R. Stevens, J.M. Blondin, and A.M.T. Pollock*, *Astrophys. J.* 386, 265 (1992).
30. *J.M. Pittard*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 300(2), 479 (1998).
31. *E.R. Parkin, J.M. Pittard, M.F. Corcoran, and K. Hamaguchi*, *Astrophys. J.* 726(2), id. 105 (2011).
32. *I.R. Stevens and A.M.T. Pollock*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 269, 226 (1994).
33. *K.G. Gayley, S.P. Owocki, and S.R. Cranmer*, *Astrophys. J.* 475(2), 786 (1997).
34. *I.I. Antokhin, S.P. Owocki, and J.C. Brown*, *Astrophys. J.* 611(1), 434 (2004).
35. *E.R. Parkin and J.M. Pittard*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 388(3), 1047 (2008).
36. *E. Mossoux and G. Rauw*, *Astron. and Astrophys.* 646, id. A89 (2021).
37. *E.A. Antokhina and I.I. Antokhin*, *INASAN Sci. Rep.* 8, 58 (2023).
38. *F. Martins, D. Schaerer, and D.J. Hillier*, *Astron. and Astrophys.* 436(3), 1049 (2005).
39. *D. Schaerer and A. Maeder*, *Astron. and Astrophys.* 263(1–2), 129 (1992).
40. *D.N. Brown and S.N. Shore*, in *New Insights in Astrophysics: 8 Years of UV Astronomy with IUE*, Proc. Intern. Symp. co-sponsored by NASA, ESA and SERC, held at University College London, 14–16 July 1986; edited by E.J. Rolfe and R. Wilson, *ESA Special Publ.* 263, 353 (1986).

41. *I.I. Antokhin, S.V. Marchenko, and A.F.J. Moffat*, in Wolf-Rayet stars: binaries; colliding winds; evolution, IAU Symp. held in La Biodola, Elba, Italia, May 2–6, 1994, edited by K.A. van der Hucht and P.M. Williams (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers), IAU Symp. 163, 520 (1995).

## LIGHT CURVE SYNTHESIS FOR COLLIDING WIND BINARY SYSTEMS

© 2025 I. I. Antokhin\*, E. A. Antokhina\*\*

*Lomonosov Moscow State University, Sternberg Astronomical Institute, Moscow, Russia*

\*e-mail: [igor@sai.msu.ru](mailto:igor@sai.msu.ru)

\*\*e-mail: [elant@sai.msu.ru](mailto:elant@sai.msu.ru)

The synthesis method which allows one to compute light curves of binary systems in the Roche model is a powerful and widely used analysis tool. However, in its original form, it is not suitable for the analysis of light curves of binary systems in which one or both components have powerful stellar winds. Previously, we proposed a model of a binary system based on the synthesis method and including one component with a wind. In the current paper, we propose a generalization of the model to the case when both components of the binary system have winds. The surface separating the two winds (the contact surface) is calculated within the framework of a steady state model of stellar wind collision. When calculating the light curve, the absorption of stellar radiation in the winds, as well as in the cooling layers located on both sides of the contact surface, is taken into account. The structure of the cooling layers and their surface density are calculated in the radiative shock limit. The algorithm allows one to take into account the asymmetry of the contact surface caused by the Coriolis force, as well as (using pre-calculated tables) the radiative inhibition of the winds in close binary systems. The results of numerical calculations in various test models are presented, clearly demonstrating the need to take into account the influence of the winds on optical light curves in WR + WR, WR + O, O + O systems.

*Keywords:* eclipsing binary systems, Wolf-Rayet stars, stellar wind, wind-wind collision, synthesis methods

# ТРЕХМЕРНАЯ ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЫСЫПАНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ВЕРХНИЕ АТМОСФЕРЫ ЭКЗОПЛАНЕТ ТИПА ВЕНЕРЫ

© 2025 г. А. Г. Жилкин<sup>1,\*</sup>, В. И. Шематович<sup>1</sup>, Г. Н. Цуриков<sup>1</sup>, Д. В. Бисикало<sup>2,1</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение Российской академии наук Институт астрономии,  
Москва, Россия

<sup>2</sup>Национальный центр физики и математики, Саров, Россия

\* e-mail: zhilkin@inasan.ru

Поступила в редакцию 28.06.2024 г.

После доработки 11.09.2024 г.

Принята в печать 11.09.2024 г.

В работе представлена трехмерная численная модель обтекания плазмой солнечного ветра планеты земного типа, не обладающей собственным магнитным полем. Модель основана на приближении многокомпонентной магнитной гидродинамики и учитывает процессы ионизации и рекомбинации. Валидация численной модели проведена на примере магнитосферы Венеры. Наша модель, в частности, позволяет рассчитать структуру и параметры высыпания электронов в ионосферу планеты. Разработанную модель предполагается использовать для исследования наблюдательных проявлений потенциального биомаркера NO в атмосферах экзопланет без собственного магнитного поля.

**Ключевые слова:** Венера, численное моделирование, МГД, ионосфера, магнитосфера, взаимодействие с солнечным ветром

**DOI:** 10.31857/S0004629925010034, **EDN:** HLVJYZ

## 1. ВВЕДЕНИЕ

### 1.1. Магнитосфера Венеры

Интерес к Венере во многом обусловлен ее разительными отличиями от Земли, несмотря на схожие размеры и положение в Солнечной системе. Очевидно, что ее история включала в себя события и процессы, которые были (а в некоторых случаях и остаются) совершенно иными, или резко отличались от тех, что происходили на нашей родной планете и в ее космическом окружении. У Венеры, подобно Марсу, отсутствует собственное магнитное поле, и, соответственно, ее верхние атмосфера и ионосфера напрямую взаимодействуют с плазмой солнечного ветра.

Главной особенностью взаимодействия плазмы солнечного ветра [1, 2] с немагнитными планетами является формирование полости в солнечном ветре, так называемой индуцированной магнитосферы. Индуцированная магнитосфера является препятствием для сверхзвукового потока плазмы и, следовательно, перед планетой должна формироваться головная (отошедшая) ударная волна. Возле подсолнечной точки индуцированная магнитосфера отделена от плазмы солнечного ветра магнитным барьером — областью с увеличенным магнитным полем. Внешняя граница магнитного барьера примерно соответствует границе индуцированной магнитосферы. Индуцированная магнитосфера наполне-

на ионами планетного происхождения. Планетные ионы присутствуют также и в областях термализованного солнечного ветра (magnetosheath) и невозмущенного солнечного ветра.

Головная ударная волна вызывает замедление потока солнечного ветра от сверхзвуковой к дозвуковой скорости (см., напр., [3]). Граница между замедленным потоком солнечного ветра и индуцированной магнитосферой, часто называемая границей индуцированной магнитосферы (IMB), не полностью препятствует проникновению плазмы солнечного ветра в атмосферу. Гиро-радиусы частиц солнечного ветра достаточно велики по сравнению с размерами IMB, что позволяет частицам плазмы двигаться по спирали вдоль сжатого магнитного поля и непосредственно взаимодействовать с верхними слоями венерианской атмосферы. Это уникальное свойство малого размера индуцированной магнитосферы позволяет электронам и протонам солнечного ветра проникать в атмосферу Венеры.

Высыпание заряженных и нейтральных частиц в верхнюю атмосферу Венеры существенно отличается от высыпания в верхнюю атмосферу Земли. В случае Земли сильное магнитное поле планеты защищает нейтральную атмосферу от прямого воздействия плазмы солнечного ветра, и только в области магнитных каспов возможно проникновение заря-

женных частиц с высокими кинетическими энергиями на высоты нейтральной атмосферы. В отличие от Земли на Венере граница между солнечным ветром и отражающим препятствием, границей индуцированной магнитосферы IMB, расположена достаточно близко к планете. Следовательно, пересекающие IMB электроны и ионы солнечного ветра могут непосредственно взаимодействовать с нейтральной атмосферой.

Результатом данных особенностей во взаимодействии плазмы солнечного ветра с атмосферами Земли и Венеры является различие в характеристиках выпадающих частиц. Протоны и тяжелые ионы из кольцевого тока Земли ускоряются до энергий порядка десятков кэВ в магнитосфере, удерживаются сильным внутренним магнитным полем и попадают в нейтральную атмосферу лишь в высоких широтах [4, 5]. В околопланетном пространстве Венеры отсутствует кольцевой ток, поэтому энергии протонов не превышают нескольких кэВ.

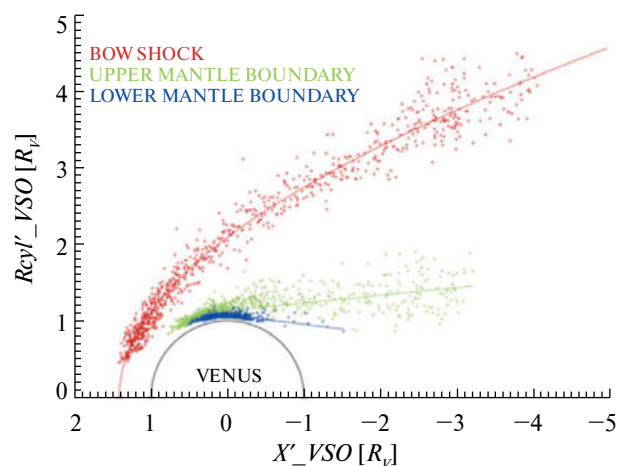
Наведенное магнитное поле у планет без внутреннего магнитного поля обычно является слабым с типичными значениями напряженности порядка десятков нТл. Очевидно, что относительная важность столкновительных процессов между выпадающими частицами и компонентами нейтральной атмосферы также отличается для Венеры и Земли из-за различия как в характеристиках выпадающих частиц, так и в составе нейтральной атмосферы [3]. Атмосфера Венеры непосредственно и глобально подвержена влиянию солнечного ветра и, собственно, прямое воздействие ветра представляет собой один из способов передачи энергии от Солнца к атмосфере планеты с течением времени, что, возможно, изменяет ее структуру и химический состав.

Исследуя, что происходит сегодня, можно ограничить возможные долгосрочные последствия воздействия солнечного ветра, чтобы разрешить продолжающуюся дискуссию о планетных магнитных полях как о “щитах” [5], защищающих атмосферы планет от их потери. Более того, такие исследования позволяют узнать больше о самых разных способах взаимодействия планетных тел со своими центральными звездами, что дает представление, в частности, о возможных воздействиях звездных ветров родительской звезды на свою экзопланетную систему [6].

Рассмотрим имеющиеся экспериментальные данные для плазменного окружения Венеры [7]. На основании данных прямых плазменных измерений инструмента ASPERA-4 (Analyzer of Space Plasma and Energetic Atoms) на борту космического аппарата ESA Venus Express (VEX) в работах [8, 9] установлено, что протоны солнечного ветра могут проникать в атмосферу Венеры лишь до высот границы индуцированной магнитосферы или так называемой ионопаузы, расположенной в условиях низкой солнечной активности в диапазоне высот от 300 до 500 км. С точки зрения частиц магнитный барьер

перекрывает переходную область, называемую мантией, где наблюдается смесь ионов солнечного ветра и планетарных ионов [9]. Верхняя граница мантии характеризуется внезапным и сильным уменьшением количества энергичных электронов. Эта граница верхней мантии также называется границей индуцированной магнитосферы (IMB). На рис. 1 показаны наблюдения головной ударной волны, а также верхней и нижней границ мантии.

Численные модели взаимодействия солнечного ветра с ионосферой Венеры можно условно разделить на три типа. К наиболее простым относятся гидродинамические модели (см., напр., [10]), в которых обтекание Венеры плазмой солнечного ветра описывается без учета магнитного поля. В МГД моделях учитывается магнитное поле ветра, наведенное магнитное поле ионосферы, а в многокомпонентных вариантах также процессы ионизации, рекомбинации и перезарядки [11–18]. Наконец, к третьей группе можно отнести гибридные модели [19–22]. В основе гибридной модели [23] лежат уравнения движения отдельных ионов и квазигидродинамические уравнения для электронов и нейтралов. При этом для электронов используется приближение безмассовой жидкости. Это позволяет выразить напряженность электрического поля, которое возникает за счет движения электронов в магнитном поле и градиента давления электронов. Столкновениями ионов и электронов пренебрегается, но учитываются столкновения ионов с нейтралами. В нашей недавней работе [24] мы проводили сравнение этих



**Рис. 1.** Две границы — головная ударная волна (красная кривая) и граница индуцированной магнитосферы (IMB; зеленая кривая), и плазменного окружения Венеры по данным анализатора массы ионов (ASPERA-4/IMA) и электронного спектрометра (ASPERA-4/ELS) за первые 19 месяцев измерений на борту КА Venus Express [9]. Пересечения BS (красные кружки) были приведены к конической функции. Точки пересечения UMB (зеленые ромбы) и LMB (синие треугольники) были приближены окружностями на дневной стороне и линейной регрессией на ночной стороне. Рисунок заимствован из обзорной статьи [7]

моделей для магнитосферы Марса. В данной работе для моделирования магнитосферы Венеры мы используем трехмерную численную модель, основанную на приближении многокомпонентной магнитной гидродинамики.

### 1.2. Мотивация

Данная работа продолжает наши исследования [25–29], посвященные поиску молекул, которые могут являться потенциальными биомаркерами в атмосферах экзопланет земного типа. Решение этой задачи, в свою очередь, важно при исследовании потенциально обитаемых миров. Ранее в работах [30, 31] было показано, что одним из определяющих условий потенциальной обитаемости<sup>1</sup> является наличие у экзопланеты  $N_2 - O_2$  доминантной атмосферы. Такой состав атмосферы может свидетельствовать о геологической и биологической активности на планете. В работе [31], в свою очередь, были выделены основные молекулы-индикаторы  $N_2 - O_2$  атмосферы (а, следовательно, и потенциальные биомаркеры), которые можно обнаружить с помощью существующих и планируемых космических обсерваторий. Это молекулы NO, NO<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>O и  $N_2 - O_2$  димеры.

В упомянутых выше наших работах [28, 29], мы рассмотрели молекулу NO в качестве перспективного биомаркера и определили возможность ее обнаружения в предполагаемых  $N_2 - O_2$  атмосферах экзопланет земного типа в ближнем УФ диапазоне длин волн с помощью планируемой к запуску обсерватории Спектр-УФ [35, 36]. По результатам расчетов было определено, что регистрация спектральных признаков данной молекулы ( $\gamma$ -полосы NO, 203–248 нм) в атмосферах типичных суперземель и суб-нептунов<sup>2</sup> возможна, если они находятся в ЗПО у родительских звезд спектральных классов G и K, поток в жестком УФ (XUV) диапазоне у которых в 5 и более раз превышает XUV поток Солнца. Важным условием надежного обнаружения NO является наличие у экзопланеты расширенной верхней атмосферы с высоким содержанием данной молекулы. Эти факторы приводят к большему наблюдаемому ослаблению потока родительской звезды,  $\Delta F \approx R_{pl}^2/R_{st}^2 = f(\lambda)$ , где  $R_{pl}$  и  $R_{st}$  — радиусы планеты и звезды соответственно, при спектральных наблюдениях экзопланеты во время первичного транзита.

<sup>1</sup> В целом, существует большое количество условий потенциальной обитаемости (см., напр., [32, рис. 1]) экзопланет земного типа. Среди них выделяют необходимое, но не достаточное условие: планета должна находиться в зоне потенциальной обитаемости (ЗПО) у своей родительской звезды [33]. Выполнение этого условия подразумевает [34], что на планете должна существовать вода в жидкой форме, а в ее атмосфере должен отсутствовать сильный парниковый эффект.

<sup>2</sup> В предположении, что у этих планет сформировалась вторичная  $N_2 - O_2$  атмосфера.

Источники и процессы формирования окиси азота в верхней  $N_2 - O_2$  атмосфере хорошо изучены из наблюдений атмосферы Земли (см., напр., [37, 38]). Наиболее значимым источником образования NO в полярных областях являются высыпания высокоэнергичных электронов магнитосферного происхождения в верхнюю атмосферу. Высыпания приводят к диссоциации молекулярного азота электронным ударом,  $N_2 + e^-(E) \rightarrow N(^2D, ^4S) + N(^4S) + e^-(E')$ , где  $E$  и  $E'$  — энергии электронов до и после столкновения. Образованные в этой реакции атомы азота в основном  $N(^4S)$  и метастабильном  $N(^2D)$  электронных состояниях являются основными компонентами химии нечетного азота, которая определяется жесткой системой химических реакций, описывающей производство и потерю окиси азота [37, 38]. Согласно решению этой системы [39, 40], основным каналом образования NO являются реакции  $N(^4S)$  и  $N(^2D)$  с молекулярным кислородом  $O_2$ ,  $N(^2D, ^4S) + O_2 \rightarrow NO + O$ .

Существует также нетепловой канал образования молекулы NO. Диссоциация  $N_2$  электронным ударом может приводить к образованию надтепловых атомов азота  $N_{hot}(^4S)$  с избытком кинетической энергии [41, 42]. Реакция  $N_{hot}(^4S) + O_2 \rightarrow NO + O$ , в свою очередь, является дополнительной в жесткой системе реакций химии нечетного азота и может существенно изменить решение этой системы [43–47].

Ранее мы разработали несколько моделей, позволяющих описать влияние высыпаний электронов в  $N_2 - O_2$  атмосферу экзопланеты земного типа с собственным магнитным полем. Это модели кинетики и переноса энергичных электронов [25] и надтепловых атомов азота [26] в атмосфере. А также модель химии нечетного азота с молекулярной и турбулентной диффузией [27]. Результаты расчетов по этим моделям показали, что для экзопланет, находящихся в ЗПО у более активных родительских звезд, чем Солнце, и соответственно подверженных более частым и сильным возмущениям со стороны звездного ветра, вклад высыпания электронов в образования NO может быть очень существенным. Так, например, непрерывные высыпания с потоком энергии электронов  $Q_e = 100 \text{ эрг} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{см}^{-2}$  могут приводить к увеличению концентрации NO на 1 и 3 порядка величины в тепловом и нетепловом каналах образования этой молекулы соответственно.

Тем не менее рост концентрации молекулы NO при высыпаниях электронов в атмосферу планеты с собственным магнитным полем локализован строго в полярных областях. Несмотря на другие, менее существенные источники пополнения NO в экваториальных областях и средних широтах<sup>3</sup>, среднее

<sup>3</sup> К этим источникам относятся, во-первых, мягкое рентгеновское излучение звезды, под воздействием которого образуются высокоэнергичные фотоэлектроны. Эти фотоэлек-

распределение концентрации этой молекулы в атмосфере меньше, чем в наиболее “активных” полярных областях. Поэтому интересным с точки зрения наблюдательных проявлений потенциального биомаркера NO представляется исследование высыпаний электронов в атмосферы экзопланет земного типа без собственного магнитного поля (т. е. планеты типа Венеры). Диффузные высыпания электронов, которые могут формироваться в  $N_2 - O_2$  атмосферах таких экзопланет, потенциально могут приводить к существенному и равномерному по полусфере росту концентрации NO. Наличие таких процессов на экзоплантах, в свою очередь, может расширить наши возможности для обнаружения этой молекулы на планируемой к запуску обсерватории Спектр-УФ.

Основные цели данной работы следующие. 1. Построение трехмерной МГД модели взаимодействия звездного ветра с атмосферой экзопланеты земного типа, не обладающей собственным магнитным полем (экзопланеты типа Венеры). 2. Валидация этой модели на примере атмосферы Венеры. 3. Исследование структуры и параметров электронных высыпаний в ее атмосферу. Эта работа является нашим первым шагом в исследовании наблюдательных проявлений потенциального биомаркера NO в атмосферах экзопланет без собственного магнитного поля. В дальнейшем построенная модель будет использована для того, чтобы определить возможность обнаружения спектральных признаков этой молекулы в  $N_2 - O_2$  атмосферах подобных экзопланет с помощью обсерватории Спектр-УФ.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 приведено описание основных уравнений трехмерной численной модели. Используемый численный метод кратко описан в разделе 3. В разделе 4 представлены результаты нашего трехмерного численного моделирования структуры магнитосферы Венеры. В Заключение сформулированы основные выводы по работе.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для описания процесса обтекания Венеры плазмой солнечного ветра будем использовать многокомпонентную МГД модель [49], которую мы применяли ранее для аналогичной задачи в случае Марса [24]. Рассмотрим многокомпонентную плазму, состоящую из электронов (e), ионов (i) различных сортов и нейтралов (n) различных сортов. Будем помечать все ионные компоненты индексом  $\alpha$ . При этом мы рассматриваем только однозарядные ионы. Заряженный компонент плазмы определяется

троны впоследствии также “возбуждают” химию нечетного азота в результате диссоциации  $N_2$  электронным ударом [48]. Данный источник приводит к образованию NO в экваториальных областях. И, во-вторых, горизонтальный перенос молекулы NO из полярных областей в средние широты [38].

ионным компонентом и безмассовой электронной жидкостью. Считаем, что средняя скорость  $\mathbf{v}_\alpha$  ионов различных сортов является одинаковой и равной  $\mathbf{v}_i$ . Концентрация  $n_e$  и средняя скорость  $\mathbf{v}_e$  электронов определяются из условия квазинейтральности плазмы и выражения для плотности тока соответственно. Температура заряженного компонента выражается через температуры ионов  $T_i$  и электронов  $T_e$ . В рамках описываемой модели  $T_i$  и  $T_e$  отдельно не определяются и поэтому считаются одинаковыми. Структура нейтрального компонента предполагается заданной.

В этом приближении картина течения определяется следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_i) = K_\alpha - L_\alpha, \quad (1)$$

$$\rho_i \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i \right] = -\nabla P_c + \rho_i \mathbf{g} - \frac{\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})}{4\pi} + \mathbf{R}_{in} - K_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_n), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}), \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_i \epsilon_c) + \nabla \cdot (\rho_i \epsilon_c \mathbf{v}_i) + P_c \nabla \cdot \mathbf{v}_i = A_{in} + Q_{in}. \quad (4)$$

Здесь  $\rho_\alpha$  — плотность ионов сорта  $\alpha$ ,  $\rho_i$  — полная плотность ионов,  $P_c$  и  $\epsilon_c$  — давление и удельная внутренняя энергия заряженного компонента,  $\mathbf{B}$  — магнитное поле,  $\mathbf{g}$  — удельная сила гравитации планеты,  $K_\alpha$ ,  $L_\alpha$ ,  $K_i$  — функции источников, описывающие процессы ионизации и рекомбинации,  $\mathbf{R}_{in}$  — сила трения между ионами и нейтрами,  $A_{in}$  и  $Q_{in}$  — функции нагрева, обусловленные работой сил трения и обменом энергией между ионами и нейтрами. Давление  $P_c$ , удельная внутренняя энергия  $\epsilon_c$  и температура  $T_i$  удовлетворяют уравнениям состояния идеального газа,

$$P_c = P_e + P_i = \frac{2k_B \rho_i T_i}{m_i}, \quad (5)$$

$$\epsilon_c = \frac{2k_B T_i}{(\gamma - 1)m_i},$$

где  $P_e$  и  $P_i$  — парциальные давления электронов и ионов,  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $m_i$  — средняя масса ионов,  $\gamma = 5/3$  — показатель адиабаты. Плотности и функции источников связаны соотношениями

$$\rho_i = \sum_\alpha \rho_\alpha, \quad K_i = \sum_\alpha K_\alpha. \quad (6)$$

Обменные члены определяются следующими выражениями:

$$\mathbf{R}_{in} = -\eta_{in} \rho_i \rho_n (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_n), \quad (7)$$

$$A_{in} = \frac{m_n}{m_i + m_n} \eta_{in} \rho_i \rho_n (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_n)^2, \quad (8)$$

$$Q_{\text{in}} = -\frac{3k_B}{m_i + m_n} \eta_{\text{in}} \rho_i \rho_n (T_i - T_n), \quad (9)$$

где  $\rho_n$ ,  $T_n$  и  $m_n$  — плотность, температура и средняя масса нейтралов соответственно, а  $\eta_{\text{in}}$  — коэффициент столкновений.

Отметим, что уравнения (2) и (4) описывают изменение скорости и внутренней энергии заряженного компонента плазмы. Они получаются суммированием соответствующих уравнений для электронов и ионов. При этом, как указывалось выше, электроны рассматриваются, как безмассовая жидкость и, следовательно, в полученных уравнениях импульс электронов можно не учитывать. Однако электронный компонент учитывается при вычислении давления и внутренней энергии плазмы. При выводе уравнения индукции (3) мы пренебрегли давлением электронов (батареинный эффект) и эффектом Холла.

С учетом условия квазинейтральности плазмы можно написать

$$n_e = n_i, \quad \mathbf{j} = en_e (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e), \quad (10)$$

где  $e$  — элементарный заряд,  $n_i$  — концентрация ионов,  $\mathbf{j}$  — плотность тока. Используя уравнение Максвелла, из второго уравнения находим

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_i - \frac{c}{4\pi en_e} \nabla \times \mathbf{B}, \quad (11)$$

где  $c$  — скорость света.

Ионосфера планеты формируется процессами ионизации, происходящими в верхней атмосфере. Эксперименты, а также численные расчеты показывают, что на дневной стороне Венеры нейтральная корона состоит в основном из атомов водорода, гелия и кислорода [50]. При этом каждый компонент имеет холодную (тепловую) и горячую (надтепловую) фракции. Структура нейтральной короны существенно различается для дневной и ночной стороны [51, 52]. В нашей модели мы будем использовать описание нейтральной короны для дневной стороны Венеры.

Концентрация некоторого нейтрального компонента в верхней атмосфере на расстоянии  $r$  от центра планеты с хорошей точностью может быть описана выражением

$$n = n_1 \exp \left[ -\eta_1 \left( 1 - \frac{R_{\text{pl}}}{r} \right) \right] + n_2 \exp \left[ -\eta_2 \left( 1 - \frac{R_{\text{pl}}}{r} \right) \right], \quad (12)$$

**Таблица 1.** Параметры высотных профилей (12) концентрации нейтральных компонентов в верхней атмосфере Венеры

Компонент	$n_1, \text{см}^{-3}$	$\eta_1$	$T_1, \text{K}$	$n_2, \text{см}^{-3}$	$\eta_2$	$T_2, \text{K}$
H	$3.1 \times 10^5$	34.4	189	$6.1 \times 10^2$	5.4	1215
He	$1.2 \times 10^7$	74.8	348	$5.0 \times 10^3$	10.0	2600
O	$3.3 \times 10^{12}$	332.8	312	$4.1 \times 10^5$	16.3	6402

где коэффициенты

$$\eta = \frac{GM_{\text{pl}}}{R_{\text{pl}}} \frac{m}{k_B T}, \quad (13)$$

$R_{\text{pl}}$ ,  $M_{\text{pl}}$  — радиус и масса планеты,  $G$  — гравитационная постоянная,  $m$  — масса атома. Параметры этих распределений с учетом сравнения с экспериментальными данными представлены в табл. 1.

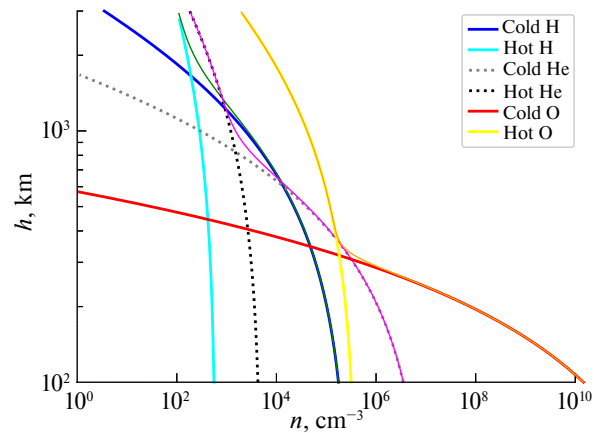
Сами профили показаны на рис. 2. Как видно из рисунка, основной вклад в нейтральную корону Венеры дает атомарный кислород. При этом на высотах до 300 км доминирует холодная фракция, а на больших высотах — горячая. В нашей модели корону планеты будем считать гидростатической. Это означает, что скорость нейтралов  $\mathbf{v}_n$  следует положить равной нулю. Температура нейтралов  $T_n$  определяется с помощью усреднения по всем нейтральным компонентам с учетом наличия горячей и холодной фракций.

Коэффициент столкновений между ионами и нейтрами определяется выражением

$$\eta_{\text{in}} \rho_i \rho_n = \sum_{\alpha, \beta} \eta_{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta, \quad (14)$$

где суммирование проводится по всем сортам ионов  $\alpha$  и нейтралов  $\beta$ . Частный коэффициент столкновений [53],

$$\eta_{\alpha\beta} = \frac{\langle \sigma v \rangle_{\alpha\beta}}{m_\alpha + m_\beta}, \quad (15)$$



**Рис. 2.** Модельные высотные профили концентрации атомарного водорода, гелия и кислорода в нейтральной короне Венеры

где  $\langle \sigma v \rangle_{\alpha\beta}$  — усредненный по скоростям темп столкновений ( $\sigma$  — сечение взаимодействия,  $v$  — относительная скорость сталкивающихся частиц). Упругие столкновения ионов с нейтрами можно описать в приближении максвелловских молекул, при котором эффективное сечение взаимодействия обратно пропорционально величине относительной скорости [54]. Дело в том, что в поле иона происходит поляризация нейтрального атома и у него возникает дипольный момент. Поэтому взаимодействие описывается потенциалом, обратно пропорциональным четвертой степени расстояния между частицами. Расчеты приводят к следующему выражению для темпа столкновений:

$$\langle \sigma v \rangle_{\alpha\beta} = 2.21\pi \sqrt{\frac{\gamma_\beta e^2}{\mu_{\alpha\beta}}}, \quad (16)$$

где  $\mu_{\alpha\beta}$  — приведенная масса иона и нейтрала, а коэффициент  $\gamma_\beta$  описывает поляризуемость нейтрального атома. Эта величина для атомов водорода, гелия и кислорода равна  $0.67 \times 10^{-24} \text{ см}^3$ ,  $0.21 \times 10^{-24} \text{ см}^3$  и  $0.77 \times 10^{-24} \text{ см}^3$  соответственно [54].

Процессы ионизации и рекомбинации описываются формулой

$$A + h\nu \rightleftharpoons A^+ + e^-, \quad (17)$$

где  $A$  — любой из атомов Н, Не, О. Таким образом, в нашей модели рассматривается следующий ионный состав:  $\text{H}^+$ ,  $\text{He}^+$ ,  $\text{O}^+$ . Уравнения химической кинетики имеют вид:

$$\dot{n}_A = -k_{\text{ph}} n_A + k_{\text{rec}} n_e n_{A^+}, \quad (18)$$

$$\dot{n}_{A^+} = k_{\text{ph}} n_A - k_{\text{rec}} n_e n_{A^+}, \quad (19)$$

где  $k_{\text{ph}}$  — скорость фотоионизации,  $k_{\text{rec}}$  — коэффициент рекомбинации. Коэффициенты рекомбинации зависят от температуры [55] и приведены в табл. 2. Скорость фотоионизации атомов данного сорта определяется выражением

$$k_{\text{ph}} = \int_0^{\lambda_0} \sigma(\lambda) f_\lambda e^{-\tau(\lambda)} d\lambda, \quad (20)$$

где  $\lambda$  — длина волны,  $\sigma(\lambda)$  — сечение взаимодействия фотона с атомом,  $f_\lambda$  — поток входящего ионизирующего излучения [количество фотонов/(с · см<sup>3</sup>)],  $\tau(\lambda)$  — оптическая толщина,  $\lambda_0$  — порог ионизации. Для расчетов мы использовали поток излучения  $f_\lambda$  для спокойного Солнца.

**Таблица 2.** Коэффициенты рекомбинации и параметры для расчета скоростей ионизации (21)

Компонент	$k_{\text{rec}}, \text{ см}^3/\text{с}$	$k_0, 10^{-7} \text{ с}^{-1}$	$a$	$b$
Н	$2.52 \times 10^{-10} T^{-0.75}$	1.81	0.5	3.0
Не	$9.08 \times 10^{-11} T^{-0.64}$	1.07	1.5	2.0
О	$1.40 \times 10^{-10} T^{-0.66}$	5.21	1.5	2.0

Для ускорения трехмерных вычислений мы для каждого сорта нейтральных атомов аппроксимировали выражение (20) аналитической формулой вида [56]

$$k_{\text{ph}} = \frac{k_0}{1 + a\tau^b}, \quad (21)$$

где

$$\tau = \frac{\sigma_{\text{XUV}}}{\cos \chi} \int_r^\infty n_n(r') dr', \quad (22)$$

$\sigma_{\text{XUV}} = 6.3 \times 10^{-18} \text{ см}^2$ ,  $\chi$  — зенитный угол. Полученные значения коэффициентов  $k_0$ ,  $a$  и  $b$  для атомов Н, Не, О приведены в табл. 2. В расчетах принималось, что на сфере данного радиуса  $r$  вокруг планеты скорость ионизации  $k_{\text{ph}}$  должна составлять не меньше 10% от значения в направлении на Солнце ( $\chi = 0$ ).

В уравнении движения ионов (2) последние два слагаемых в правой части имеют схожую структуру. Однако сила трения  $\mathbf{R}_{\text{in}}$  определяется упругими столкновениями ионов с нейтрами, а последнее слагаемое описывает изменение средней скорости ионов  $\mathbf{v}_i$  за счет процессов фотоионизации. Чтобы сравнить вклад этих членов необходимо сравнить соответствующие частоты. Частота упругих столкновений  $\nu_{\text{in}} = \eta_{\text{in}} \rho_n$ , а для последнего слагаемого роль соответствующей частоты играет скорость фотоионизации  $k_{\text{ph}}$ . Отношение этих частот  $\nu_{\text{in}}/k_{\text{ph}} = n_n/10^2 \text{ см}^{-3}$ . Отсюда видно, что последний член в правой части (2) начинает доминировать над упругими столкновениями в области  $n_n \lesssim 10^2 \text{ см}^{-3}$ . Это условие выполняется на высотах между ионопаузой и ударной волной.

Поскольку магнитное поле солнечного ветра в область  $r < R_{\text{pl}}$  проникать не может, то в модели необходимо учесть наведенное магнитное поле Венеры  $\mathbf{B}_{\text{pl}}$ . Для описания наведенного поля можно использовать аналитическое решение задачи о магнитном поле идеально проводящего шара, помещенного в однородное внешнее магнитное поле (см., напр., [57]). Во внутренней области  $r < R_{\text{pl}}$  наведенное магнитное поле  $\mathbf{B}_{\text{pl}} = -\mathbf{B}_w$  и, следовательно, полное поле  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_w + \mathbf{B}_{\text{pl}} = 0$ . Во внешней области  $r \geq R_{\text{pl}}$  наведенное поле является дипольным, и поэтому можно написать

$$\mathbf{B}_{\text{pl}} = \frac{\mu_{\text{pl}}}{r^3} [3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}], \quad (23)$$

где магнитный момент  $\mu_{\text{pl}} = R_{\text{pl}}^3 B_w/2 = 1.7 \times 10^{22} \text{ Гс} \cdot \text{см}^3$ , а единичные векторы  $\mathbf{d} = -\mathbf{B}_w/B_w$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ . Вектор магнитного момента наведенного поля  $\mu_{\text{pl}} = \mu_{\text{pl}} \mathbf{d}$  коллинеарен магнитному полю ветра  $\mathbf{B}_w$ , но имеет противоположное направление.

Наведенное поле магнитосферы планеты определяется внешним межпланетным полем, как по величине, так и по направлению. При изменении внешнего поля изменяется и наведенное поле. В противоположность этому, собственное поле пла-

неты не зависит от внешнего и определяется источниками, распределенными в ее недрах. Поэтому магнитосфера с наведенным магнитным полем существенно образом зависит от свойств ионосферы планеты, где формируются экранирующие токи, индуцирующие наведенное поле.

### 3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Планету будем описывать однородным идеально проводящим шаром с радиусом  $R_{pl} = 6051$  км, центр которого расположен в начале координат. Вектор, определяющий удельную силу гравитации, в области  $r \geq R_{pl}$  равен

$$\mathbf{g} = -\frac{GM_{pl}}{r^3} \mathbf{r}, \quad (24)$$

где масса планеты  $M_{pl} = 4.87 \times 10^{27}$  г. Удобно ввести глобальную декартову систему координат, начало которой располагается в центре планеты. При этом ориентация осей выбирается следующим образом: ось  $X$  направлена от центра Солнца к центру Венеры, ось  $Y$  направлена вдоль орбитального движения планеты, а ось  $Z$  дополняет систему до правой тройки базисных векторов.

Параметры солнечного ветра в окрестности Венеры мы задавали на основе МГД модели из работы [58]. На орбите Венеры эта модель в системе отсчета, в которой планета покоится, дает следующие значения параметров: концентрация протонов  $n_w = 23.2 \text{ см}^{-3}$ , температура  $T_w = 2.3 \times 10^5$  К, радиальная скорость ветра  $v_x = 394$  км/с, азимутальная скорость ветра  $v_y = -33.9$  км/с, радиальный компонент магнитного поля  $B_x = 1.2 \times 10^{-4}$  Гс = 12 нТл, азимутальный компонент магнитного поля  $B_y = -9.1 \times 10^{-5}$  Гс = -9.1 нТл. Вертикальные компоненты скорости  $v_z$  и магнитного поля  $B_z$  в силу экваториальной симметрии считались равными нулю. В использованной нами расчетной области все эти параметры рассматривались как постоянные.

С учетом параметров солнечного ветра можно определить плотность плазмы  $\rho_w = 3.9 \times 10^{-23}$  г/см<sup>3</sup>, скорость обтекания  $v_w = 395$  км/с и полное магнитное поле  $B_w = 1.5 \times 10^{-4}$  Гс = 15 нТл. Скорость звука в плазме солнечного ветра в окрестности Венеры составляет величину  $c_w = 61.6$  км/с. Соответствующее число Маха получается равным  $v_w/c_w = 6.4$ . Альфвеновская скорость  $u_w = B_w/\sqrt{4\pi\rho_w} = 68.2$  км/с, а альфвеновское число Маха  $v_w/u_w = 5.8$ . Из этих оценок следует, что обтекание Венеры солнечным ветром происходит в сверхзвуковом и сверхальфвеновском режимах. Поэтому вокруг Венеры должна возникать ударная волна.

В нашей численной модели используется композитная сферическая сетка, состоящая из трех одинаковых областей или секторов (тернарная сферическая сетка) [59]. Напомним, что глобальная сферическая система координат содержит особенность

на полярной оси, где азимутальный угол становится неопределенным. При использовании композитных сеток в каждой области вводится своя локальная система координат, не содержащая особенностей. Полное решение во всей пространственной области строится путем сшивки локальных решений на границах областей с помощью преобразований координат. Достоинствами тернарной сферической сетки являются одинаковая конфигурация секторов, относительно небольшое их количество, достаточно короткие границы между секторами и простые законы преобразования локальных координат.

Для численного решения уравнений многокомпонентной магнитной гидродинамики мы использовали разностную схему Роу—Эйнфельдта—Ошера [61, 49] (см. также монографию [60]). В разностной схеме помимо уравнений (1) для отдельных компонентов ионов решается также уравнение для полной ионной плотности  $\rho_i$ . Эта схема имеет первый порядок аппроксимации по времени и третий по пространству. Адаптация разностной схемы к сферическим координатам на тернарной сферической сетке описана в работе [59]. Источниковые члены в уравнениях учитываются локальным образом на отдельных этапах численного алгоритма.

Моделирование проводилось в расчетной области  $R_{pl} \leq r \leq 5R_{pl}$ . Сетка задавалась неоднородной по радиальной координате  $r$ , сгущающейся к поверхности планеты. Минимальный размер ячейки составлял  $\Delta r_{\min} = 0.005 R_{pl} = 30$  км. В начальный момент времени расчетная область заполнялась солнечным ветром. На поверхности планеты  $r = R_{pl}$  устанавливалась твердая граница, на которой скорость плазмы  $v_i = 0$ . На участках внешней границы, через которые солнечный ветер втекал в расчетную область, задавались постоянные граничные условия с учетом параметров ветра. На участках, через которые плазма покидала расчетную область, применялись условия свободного вытекания. Расчет продолжался до достижения квазистационарного состояния, когда основные параметры течения переставали существенно изменяться со временем.

В начальных условиях магнитное поле задавалось в виде суперпозиции поля ветра и магнитного поля, наведенного токами в ионосфере. Используемая формула для наведенного магнитного поля (23) предполагает, что планета представляет собой идеально проводящий шар. Следует подчеркнуть, что это условие используется нами только при задании начальных условий. В результате расчета мы получаем квазистационарное решение, в котором это условие в общем случае может и не выполняться, если, например, в численной модели учитывается конечная проводимость плазмы. В использованном нами уравнении индукции (3) эффекты диффузии магнитного поля отсутствуют. Однако в разностной схеме присутствует численная диффузия,

которая приводит к частичному нарушению этого условия.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

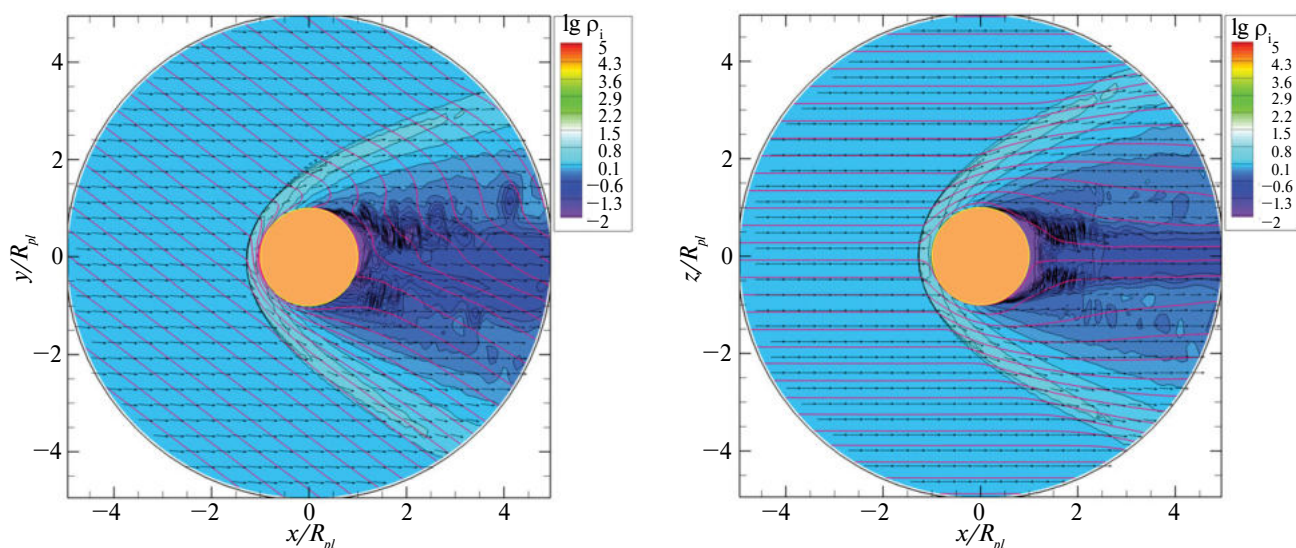
Для сравнения мы провели расчет структуры магнитосферы Венеры без учета ионосферы. Результат расчета демонстрирует рис. 3, на котором представлены распределения плотности ионов  $\rho_i$  (цвет, изолинии), скорости  $v_i$  (стрелки) и магнитного поля  $\mathbf{B}$  (линии) в орбитальной (левая панель) и вертикальной (правая панель) плоскостях. Планете соответствует закрашенный кружок. Из рисунка следует, что в результате обтекания Венеры солнечным ветром вокруг планеты формируется ударная волна. В подсолнечной точке ударная волна находится от поверхности Венеры на расстоянии  $H_{sw} = 1700$  км. Эта величина близка к значению 1900 км, измеренному вблизи минимума солнечной активности [8]. На ночной стороне формируется разреженная турбулентная область, которая соответствует магнитосферному хвосту. Магнитосфера Венеры создается наведенным магнитным полем. Обтекание солнечным ветром приводит к возникновению перед планетой области сгущения магнитных силовых линий или магнитному барьеру. Граница магнитного барьера определяет положение магнитопаузы, но она не является четко выраженной. В вертикальной плоскости течение плазмы происходит вдоль магнитных силовых линий и поэтому положение магнитопаузы вообще не определяется.

Результат расчета структуры магнитосферы Венеры с учетом нейтральной короны представлен на рис. 4. Качественная картина течения не изменилась. Вокруг планеты устанавливается ударная волна, положение которой в подсолнечной точ-

ке  $R_{sh} = 1.37 R_{pl}$  соответствует высоте  $H_{sh} = 2200$  км. Это значение также оказывается весьма близким к экспериментальной величине 1900 км [8].

Однако следует отметить, что непосредственные измерения положения ударной волны [62] приводят к значениям в подсолнечной точке  $1.23 R_{pl} \leq R_{sh} \leq 1.42 R_{pl}$ , а на терминаторе  $1.98 R_{pl} \leq R_{sh} \leq 2.17 R_{pl}$ . На рис. 1 положение ударной волны определено по более полной выборке данных. Ее граница (сплошная красная линия) получена на основе модели, в которой соответствующая кривая аппроксимируется конической функцией, близкой к параболе [63–65]. Из модели, представленной на рис. 1, следует, что положение ударной волны в подсолнечной точке  $R_{sh} = 1.355 R_{pl}$  соответствует высоте  $H_{sh} = 2510$  км. Заметим также, что модель ударной волны на рис. 1 является осесимметричной и получена путем усреднения результатов измерений по всем направлениям вокруг линии, соединяющей центры Венеры и Солнца. В этой модели положение ударной волны на терминаторе  $R_{sh} = 2.088 R_{pl}$  соответствует высоте  $H_{sh} = 6584$  км.

Наша численная модель является трехмерной и в ней положение ударной волны на терминаторе зависит от направления. Это обусловлено наличием азимутальной скорости ветра, а также азимутального компонента межпланетного магнитного поля. Из полученных нами результатов следует, что положение ударной волны на терминаторе лежит в пределах  $1.97 R_{pl} \leq R_{sh} \leq 2.40 R_{pl}$ . При этом минимум и максимум достигаются на линии орбитального движения планеты. В вертикальной плоскости положение удар-



**Рис. 3.** Результат трехмерного моделирования структуры магнитосферы Венеры без учета нейтральной короны. Показаны распределения плотности ионов  $\rho_i$  (цвет, изолинии), скорости  $v_i$  (стрелки) и магнитного поля  $\mathbf{B}$  (линии) в орбитальной (слева) и вертикальной (справа) плоскостях. Плотность выражена в единицах  $\rho_w = 3.9 \times 10^{-23}$  г/см<sup>3</sup>. Закрашенный кружок соответствует радиусу Венеры

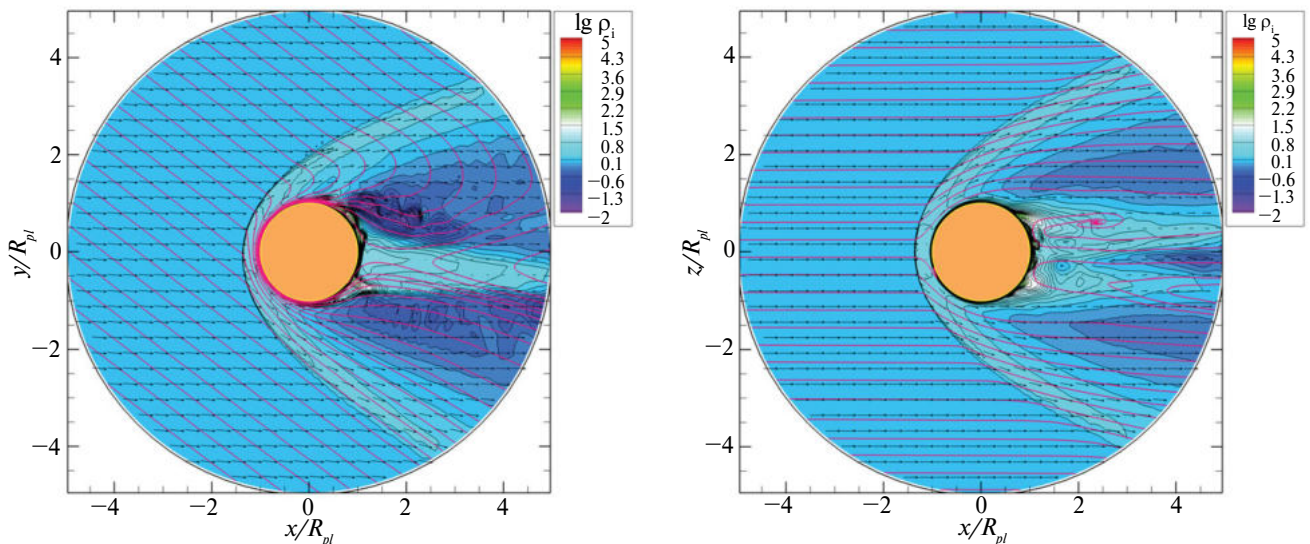


Рис. 4. То же самое, что и на рис. 3, но с учетом нейтральной короны

ной волны находится в более узком интервале  $2.21 R_{pl} \leq R_{sh} \leq 2.24 R_{pl}$ .

В полученном численном решении формируется тонкий и достаточно плотный магнитный барьер. Образовавшиеся ионы скапливаются вокруг планеты и постепенно сносятся в область разрежения на ночной стороне. Таким образом, турбулентный шлейф в магнитосферном хвосте состоит в основном из ионов магнитосферного происхождения.

Распределение концентрации ионов водорода и кислорода показаны на левой и правой панелях рис. 5 соответственно. Наибольший вклад дают ионы кислорода. Однако ионов водорода также формируется достаточно много, особенно вблизи ночной поверхности. Как видно из рисунка, все эти ионы главным образом

сносятся солнечным ветром в турбулентный шлейф и формируют магнитосферный хвост Венеры.

Структура ионосферы Венеры, полученная в ходе трехмерного моделирования, представлена на левой панели рис. 6, а также на рис. 7 и 8. На дневной стороне ионосферный слой оказывается тонким и плотным. Вдоль него сгущаются магнитные силовые линии, обволакивая собой поверхность Венеры и формируя магнитный барьер. Толщина ионосферного слоя приблизительно составляет 100 км. Основной вклад определяется ионами  $O^+$ . Ионов  $H^+$  и  $He^+$  оказывается на 2–3 порядка меньше.

В области за ударной волной плазма сильно нагревается до температур порядка  $1.8 \times 10^6$  К в подсолнечной точке и  $7 \times 10^5$  К на терминаторе (см.

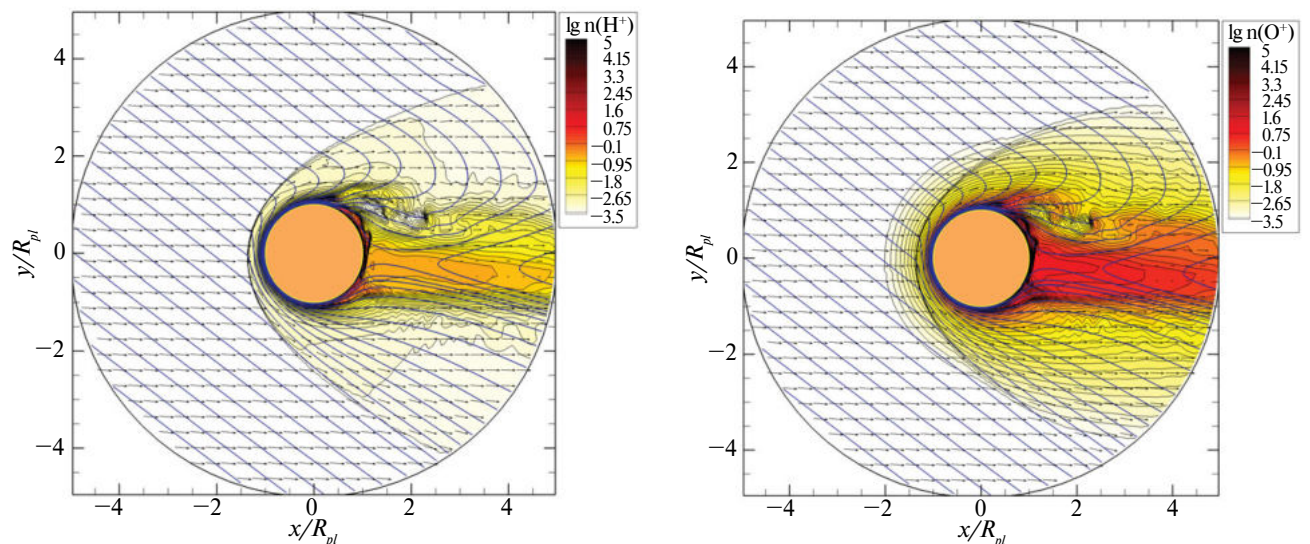
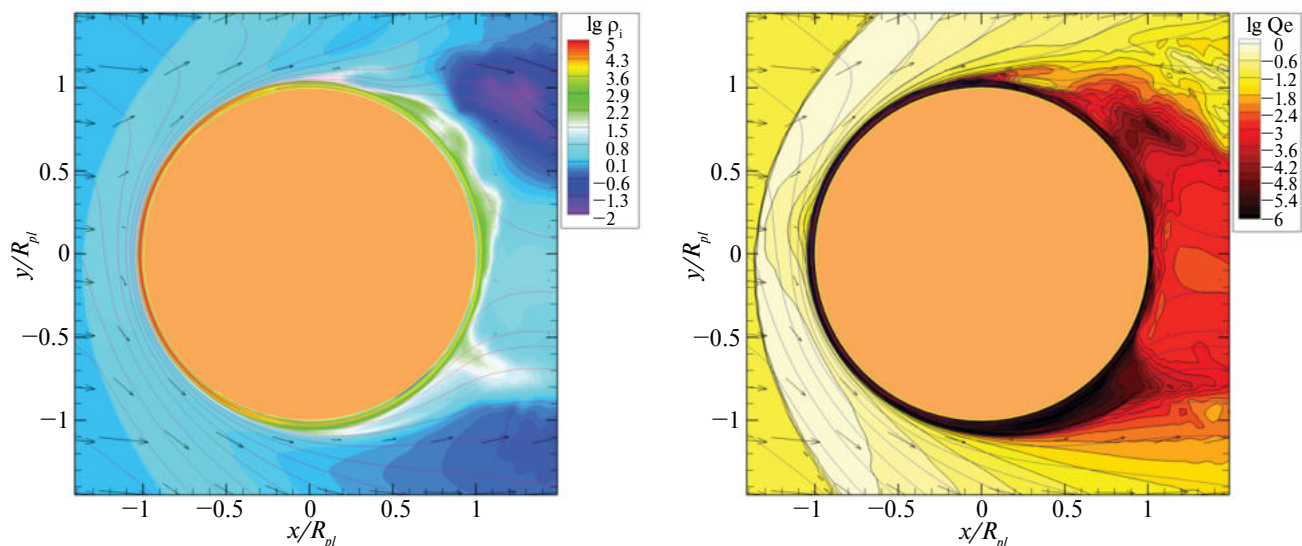
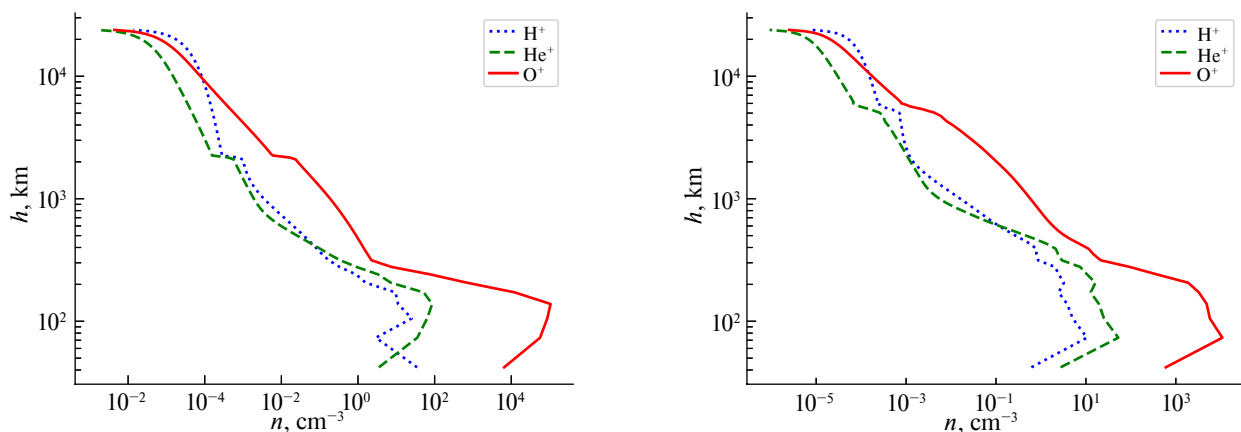


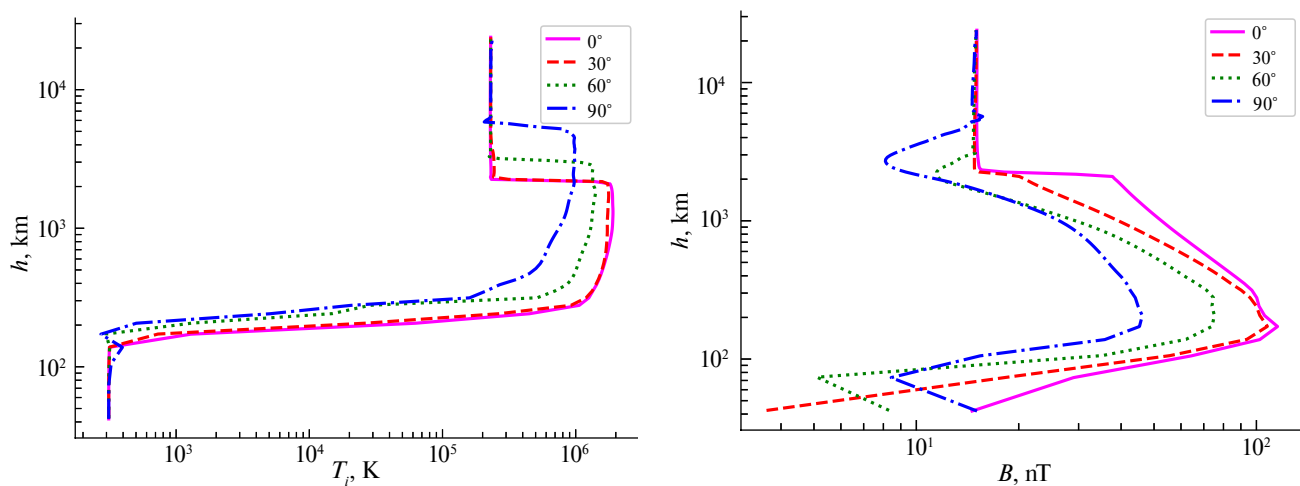
Рис. 5. Распределения концентрации ионов водорода (слева) и кислорода (справа) (цвет, изолинии), скорости  $v_i$  (стрелки) и магнитного поля  $\mathbf{B}$  (линии) в орбитальной плоскости Венеры. Закрашенный кружок соответствует радиусу Венеры



**Рис. 6.** Распределения плотности ионов  $\rho_i$  (цвет, слева), потока энергии электронов  $Q_e$  (справа, цвет, изолинии), скорости  $v_i$  (стрелки) и магнитного поля  $B$  (линии) в орбитальной плоскости вблизи поверхности Венеры (слева). Плотность выражена в единицах  $\rho_w = 3.9 \times 10^{-23} \text{ г/см}^3$ , а поток энергии электронов в единицах  $\text{эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ . Закрашенный кружок соответствует радиусу Венеры



**Рис. 7.** Высотные профили концентрации ионов  $n_\alpha$  в орбитальной плоскости ( $\theta = 90^\circ$ ) в направлении на Солнце ( $\varphi = 180^\circ$ , слева) и орбитального движения Венеры ( $\varphi = 90^\circ$ , справа)



**Рис. 8.** Высотные профили температуры ионов  $T_i$  (слева) и магнитного поля  $B$  (справа) для различных направлений  $\varphi$  в орбитальной плоскости ( $\theta = 90^\circ$ ) Венеры

левую панель на рис. 8). На высотах от 200 км до 100 км происходит резкое снижение температуры до величины порядка 300 К, которая соответствует температуре нейтральной верхней атмосферы. Положение ионопаузы, отделяющей ионосферную плазму Венеры от плазмы солнечного ветра, можно ассоциировать с верхней границей магнитного барьера. Из нашего расчета следует, что в подсолнечной точке высоту ионопаузы можно оценить величиной в 300 км, что хорошо согласуется с экспериментальными данными [8]. Магнитное поле на высоте 180 км достигает максимальных значений 115 нТл в подсолнечной точке и 45 нТл на терминаторе. На границе магнитного барьера величина поля составляет значение порядка 100 нТл в подсолнечной точке и 40 нТл на терминаторе. На ночной стороне ионосфера Венеры оказывается более разженной и тянется на большую высоту.

Плотность потока энергии электронов

$$Q_e = m_e n_e v_e \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{k_B T_e}{m_e} + \frac{v_e^2}{2} \right), \quad (25)$$

где температура электронов в нашей модели  $T_e = T_i$ . Распределение абсолютного значения  $Q_e$  этой величины вблизи поверхности Венеры в орбитальной плоскости показана на правой панели рис. 6. Как видно из рисунка наибольшее значение этой величины  $Q_e = 1 \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$  достигается в области за ударной волной. Эта область заполнена плазмой солнечного ветра, а также ионами магнитосферного происхождения. Непосредственно у поверхности поток энергии электронов падает до нуля. На дневной стороне Венеры в верхней части ионосферы имеется достаточно узкий слой, где поток энергии электронов составляет значения порядка  $Q_e = 0.1 \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ . Этот слой определяется магнитосферными электронами, высыпавшимися в ионосферу.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для исследования процесса обтекания планеты без собственного магнитного поля (типа Венеры) плазмой солнечного ветра представлена трехмерная численная модель. В основе модели лежит приближение многокомпонентной магнитной гидродинамики. Учитываются процессы ионизации и рекомбинации. Источником ионов является нейтральная корона планеты, состоящая из атомов водорода, гелия и кислорода. При этом каждый нейтральный компонент имеет как холодную (тепловую), так и горячую (надтепловую) фазы. В нейтральной короне Венеры на дневной стороне доминируют атомы кислорода.

Наша модель позволяет получить достаточно высокое пространственное разрешение, поскольку уравнения решаются в сферических координатах. Для устранения особенности глобальной сферической системы координат на полярной оси в нашем

численном коде используется тернарная сферическая сетка [59], состоящая из трех одинаковых секторов. В каждом секторе вводится локальная сферическая система координат, не имеющая особенностей. Полное решение строится путем сшивки локальных решений на границах секторов с помощью преобразований координат. Численное решение уравнений многокомпонентной магнитной гидродинамики находится с помощью разностной схемы Роу—Эйнфельдта—Ошера [61, 49], имеющей повышенный порядок аппроксимации.

Результаты расчетов дают картину течения в окрестности Венеры, хорошо согласующуюся как с имеющимися данными измерений, так и с численными результатами других авторов. Магнитосфера Венеры является наведенной, поскольку планета не имеет собственного магнитного поля. Взаимодействие солнечного ветра с Венерой приводит к тому, что вокруг планеты устанавливается ударная волна, положение которой в подсолнечной точке соответствует высоте 2200 км. На дневной стороне вблизи поверхности Венеры формируется тонкий и достаточно плотный магнитный барьер. Положение ионопаузы, отделяющей ионосферную плазму Венеры от плазмы солнечного ветра, определяется верхней границей магнитного барьера. В подсолнечной точке высота ионопаузы получилась равной примерно 300 км, что также согласуется с экспериментальными данными. Максимальные значения магнитного поля порядка 100 нТл достигаются на высотах 180 км, соответствующим внутренней границе магнитного барьера. На ночной стороне Венеры образовавшиеся ионы формируют турбулентный шлейф, тянущийся далеко за планетой. Поэтому плазма в магнитосферном хвосте состоит в основном из ионов ионосферного происхождения.

Недостатком нашей численной модели является использование предположения равенства температур ионов  $T_i$  и электронов  $T_e$ . В разреженных областях магнитосферы, например, в области за ударной волной, эти температуры могут достаточно сильно различаться. Поскольку одной из основных целей нашей работы является расчет интенсивности высыпания электронов в ионосферу планеты, то данное обстоятельство для нас представляется важным. Поэтому в дальнейшем мы планируем провести модификацию представленной здесь численной модели, которая позволит температуры ионов и электронов рассчитывать отдельно.

Тем не менее разработанная модель позволяет делать выводы о качественной картине высыпания электронов в верхнюю атмосферу Венеры. Согласно полученным результатам, высыпание энергичных электронов в атмосферу происходит равномерно по всей дневной полусфере планеты. При этом, как поток энергии высыпавшихся электронов (см. рис. 6, правая панель), так и их средняя кинетическая энергия (см. рис. 8, левая панель)

распределены практически равномерно от подсолнечной точки до терминатора. В условиях спокойного солнечного ветра в этой области поток  $Q_e \approx 0.1$  эрг·см<sup>-2</sup>·с<sup>-1</sup> в верхней части ионосферы, а средняя кинетическая энергия изменяется от 0.07 до 0.2 кэВ. Представленная картина, в свою очередь, качественно похожа на диффузные высыпания энергичных электронов на Марсе [66, 67], магнитное поле которого локализовано и является слабым по сравнению с магнитным полем Земли. Для атмосферы Земли, т. е. планеты с сильным собственным магнитным полем, процесс высыпания энергичных электронов в атмосферу отличается от представленных выше. Сами высыпания локализованы строго в полярных областях.

Таким образом, полученный результат важен для дальнейшего исследования экзопланет земного типа без собственного магнитного поля. Такого рода диффузные высыпания во вторичные N<sub>2</sub> – O<sub>2</sub> верхние атмосферы экзопланет могут приводить к равномерному по полусфере образованию молекулы NO, которая, в свою очередь, является потенциальным биомаркером. Различные возмущения со стороны звездного ветра приведут к интенсификации высыпания электронов, что может способствовать существенному росту концентрации данной молекулы в атмосфере. Реализация данных процессов в атмосферах экзопланет может расширить наши возможности [29] для обнаружения потенциального биомаркера NO с помощью планируемой к запуску обсерватории Спектр-УФ. В дальнейшем мы планируем использовать разработанную модель для непосредственной проверки этой гипотезы.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 22-12-00364).

### БЛАГОДАРНОСТИ

Работа была выполнена с использованием вычислительных средств МСЦ РАН.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. O.L. Vaisberg, J.G. Luhmann, and C.T. Russell, *J. Geophys. Res.* 95, 14841 (1990).
2. C.T. Russell, J.G. Luhmann, and R.J. Strangeway, *Planet. Space Sci.* 54(13–14), 1482 (2006).
3. A.F. Nagy, D. Winterhalter, K. Sauer, T.E. Cravens, *et al.*, *Space Sci. Rev.* 111(1), 33 (2004).
4. T.E. Moore and J.L. Horwitz, *Rev. Geophys.* 45(3), id. RG3002 (2007).
5. R. Ramstad and S. Barabash, *Space Sci. Rev.* 217(2), id. 36 (2021).
6. В.И. Шематович, И.Ф. Шайхисламов, А.Г. Жилкин, И.С. Саванов, Г.Н. Цуриков, Д.В. Бисикало, *ФИЗМАТ* 1, 33 (2023).
7. Y. Futaana, G. Stenborg Wieser, S. Barabash, and J.G. Luhmann, *Space Sci. Rev.* 212(3–4), 1453 (2017).
8. T.L. Zhang, M. Delva, W. Baumjohann, H.-U. Auster, *et al.*, *Nature* 450(7170), 654 (2007).
9. C. Martinecz, A. Boesswetter, M. Fränz, E. Roussos, *et al.*, *J. Geophys. Res. Planet* 114(E9), id. E00B30 (2009).
10. J.R. Spreiter and S.S. Stahara, *J. Geophys. Res.* 85, 7715 (1980).
11. J.E. McGary and D.H. Pontius, *J. Geophys. Res.* 99(A2), 2289 (1994).
12. S. Cable and R.S. Steinolfson, *J. Geophys. Res.* 100(A11), 21645 (1995).
13. T. Tanaka and K. Murawski, *J. Geophys. Res.* 102(A9), 19805 (1997).
14. T. Tanaka, *Adv. Space Res.* 26(10), 1577 (2000).
15. E. Kallio, J.G. Luhmann, and J.G. Lyon, *J. Geophys. Res.* 103(A3), 4723 (1998).
16. R. Bauske, A.F. Nagy, T.I. Gombosi, D.L. De Zeeuw, K.G. Powell, and J.G. Luhmann, *J. Geophys. Res.* 103(A10), 23625 (1998).
17. N. Terada, H. Shinagawa, T. Tanaka, K. Murawski, and K. Terada, *J. Geophys. Res. Space Physics* 114(A9), id. A09208 (2009).
18. Y.J. Ma, A.F. Nagy, C.T. Russell, R.J. Strangeway, H.Y. Wei, and G. Toth, *J. Geophys. Res. Space Physics* 118(1), 321 (2013).
19. N. Terada, S. Machida, and H. Shinagawa, *J. Geophys. Res. Space Physics* 107(A12), id. 1471 (2002).
20. N. Terada, H. Shinagawa, and S. Machida, *Adv. Space Res.* 33(2), 161 (2004).
21. E. Kallio, R. Jarvinen, and P. Janhunen, *Planet. Space Sci.* 54(13–14), 1472 (2006).
22. E. Kallio, T.L. Zhang, S. Barabash, R. Jarvinen, *et al.*, *Planet. Space Sci.* 56(6), 796 (2008).
23. A.P. Matthews, *J. Comput. Phys.* 112(1), 102 (1994).
24. A.G. Zhilkin, D.V. Bisikalo, and V.I. Shematovich, *Astron. Rep.* 66(3), 245 (2022).
25. D.V. Bisikalo, V.I. Shematovich, and B. Hubert, *Universe* 8(8), id. 437 (2022).
26. V.I. Shematovich, D.V. Bisikalo, and G.N. Tsurikov, *Atmosphere* 14(7), id. 1092 (2023).
27. V.I. Shematovich, D.V. Bisikalo, G.N. Tsurikov, and A.G. Zhilkin, *Astron. Rep.* 68 (2024), in print.
28. G.N. Tsurikov and D.V. Bisikalo, *Astron. Rep.* 67(2), 125 (2023).
29. G.N. Tsurikov and D.V. Bisikalo, *Astron. Rep.* 67(11), 1123 (2023).
30. H. Lammer, L. Sproß, J.L. Grenfell, M. Scherf, L. Fossati, M. Lendl, and P.E. Cubillos, *Astrobiology* 19(7), 927 (2019).
31. L. Sproß, M. Scherf, V.I. Shematovich, D.V. Bisikalo, and H. Lammer, *Astron. Rep.* 65(4) 275 (2021).
32. V.S. Meadows and R.K. Barnes, in *Handbook of Exoplanets*, edited by H.J. Deeg and J.A. Belmonte

- (Springer Intern. Publ. AG, part of Springer Nature, 2018), id. 57.
33. S.-S. Huang, Publ. Astron. Soc. Pacific 71(422), 421 (1959).
  34. J.F. Kasting, D.P. Whitmire, and R.T. Reynolds, Icarus 101(1), 108 (1993).
  35. A.A. Boyarchuk, B.M. Shustov, I.S. Savanov, M.E. Sachkov, et al., Astron. Rep. 60(1), 1 (2016).
  36. B.M. Shustov, M.E. Sachkov, S.G. Sichevsky, R.N. Arkhangel'sky, et al., Solar System Res. 55(7), 677 (2021).
  37. C.A. Barth, D.N. Baker, K.D. Mankoff, and S.M. Bailey, Geophys. Res. Letters 28(8), 1463 (2001).
  38. C.A. Barth, K.D. Mankoff, S.M. Bailey, and S.C. Solomon, J. Geophys. Res. Space Physics 108(A1), id. 1027 (2003).
  39. J.C. Gérard and C.A. Barth, J. Geophys. Res. 82(4), 674 (1977).
  40. C.A. Barth, Planet. Space Sci. 40(2–3), 315 (1992).
  41. P.C. Cosby, J. Chemical Physics 98(12), 9544 (1993).
  42. C.W. Walter, P.C. Cosby, and H. Helm, J. Chemical Physics 99(5), 3553 (1993).
  43. V.I. Shematovich, D.V. Bisikalo, and J.C. Gérard, Geophys. Res. Letters 18(9), 1691 (1991).
  44. J.C. Gérard, V.I. Shematovich, and D.V. Bisikalo, Geophys. Res. Letters 18(9), 1695 (1991).
  45. V.I. Shematovich, D.V. Bisikalo, and J.C. Gérard, Ann. Geophysicae 10(10), 792 (1992).
  46. J.C. Gérard, V.I. Shematovich, and D.V. Bisikalo, The Upper Mesosphere and Lower Thermosphere: A Review of Experiment and Theory, edited by R.M. Johnson and T.L. Killeen (Washington, D.C., AGU); Geophys. Monograph Ser. 87, 235 (1995).
  47. J.C. Gérard, D.V. Bisikalo, V.I. Shematovich, and J.W. Duff, J. Geophys. Res. 102(A1), 285 (1997).
  48. C.A. Barth, S.M. Bailey, and S.C. Solomon, Geophys. Res. Letters 26(9), 1251 (1999).
  49. A.G. Zhilkin and D.V. Bisikalo, Universe 7(11), id. 422 (2021).
  50. J.G. Luhmann, Space Science Reviews 44(3–4), 241 (1986).
  51. J.-Y. Chaufray, J.-L. Bertaux, E. Quémerais, E. Villard, and F. Leblanc, Icarus 217(2), 767 (2012).
  52. J.-Y. Chaufray, J.-L. Bertaux, E. Quémerais, F. Leblanc, and S. Sulis, Icarus 262, 1 (2015).
  53. Б.Н. Гершман, Динамика ионосферной плазмы (М.: Наука, 1974).
  54. R.W. Schunk and A.F. Nagy, Ionospheres: physics, plasma physics, and chemistry (Cambridge Univ. Press, 2009).
  55. A. Garcia Muñoz, Planet. Space Sci. 55(10), 1426 (2007).
  56. А.Г. Жилкин, Ю.Г. Гладышева, В.И. Шематович, Д.В. Бусикало, Астрон. журн. 100(12), 1190 (2023).
  57. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред (М.: Физматлит, 2003).
  58. E.J. Weber and L. Davis, Jr., Astrophys. J. 148, 217 (1967).
  59. A.G. Zhilkin, Astron. Rep. 67(4), 307 (2023).
  60. Д.В. Бусикало, А.Г. Жилкин, А.А. Боярчук, Газодинамика тесных двойных звезд (М.: Физматлит, 2013).
  61. А.Г. Жилкин, А.В. Соболев, Д.В. Бусикало, М.М. Габдеев, Астрон. журн. 96(9), 748 (2019).
  62. I. Whittaker, G. Guymier, M. Grande, B. Pinter, et al., J. Geophys. Res. 115(A9), id. A09224 (2010).
  63. С.А. Романов, В.Н. Смирнов, О.Л. Вайсберг, Космич. исслед. 16(5), 746 (1978).
  64. J.A. Slavin, R.E. Holzer, J.R. Spreiter, and S.S. Stahara, J. Geophys. Res. 89(A5), 2708 (1984).
  65. C.T. Russell, E. Chou, J.G. Luhmann, P. Gazis, L.H. Brace, and W.R. Hoegy, J. Geophys. Res. 93(A6), 5461 (1988).
  66. N.M. Schneider, J.I. Deighan, S.K. Jain, A. Stiepen, et al., Science 350(6261), id. 0313 (2015).
  67. J.-C. Gérard, L. Soret, V.I. Shematovich, D.V. Bisikalo, and S.W. Bougher, Icarus 288, 284 (2017).

## 3D NUMERICAL MODEL FOR STUDYING ELECTRON PRECIPITATION IN THE UPPER ATMOSPHERES OF VENUS-LIKE EXOPLANETS

© 2025 A. G. Zhilkin<sup>1,\*</sup>, V. I. Shematovich<sup>1</sup>, G. N. Tsurikov<sup>1</sup>, D. V. Bisikalo<sup>2,1</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Astronomy of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*National center of physics and mathematics, Sarov, Russia*

\**e-mail: zhilkin@inasan.ru*

The paper presents a three-dimensional numerical model of solar wind plasma flow around a terrestrial planet that does not have its own magnetic field. The model is based on the approximation of multicomponent magnetohydrodynamics and takes into account ionization and recombination processes. The numerical model is validated using the example of the magnetosphere of Venus. Our model, in particular, allows us to calculate the structure and parameters of electron precipitation into the planet's ionosphere. The developed model is supposed to be used to study observational manifestations of the potential biomarker NO in the atmospheres of exoplanets without their own magnetic field.

**Keywords:** Venus, numerical simulation, MHD, ionosphere, magnetosphere, interaction with solar wind

# АКТИВНОСТЬ ЗВЕЗДЫ TOI-1408 И ПОТЕРЯ ВЕЩЕСТВА АТМОСФЕРАМИ ЕЕ ЭКЗОПЛАНЕТ

© 2025 г. И. С. Саванов

Федеральное государственное бюджетное учреждение Российской академии наук Институт астрономии,  
Москва, Россия

e-mail: isavanov@inasan.rssi.ru

Поступила в редакцию 29.08.2024 г.

После доработки 20.09.2024 г.

Принята в печать 14.10.2024 г.

В статье рассмотрены свойства мультипланетной системы TOI-1408, состоящей из горячего юпитера (планета (b),  $(1.86 \pm 0.02) M_{\text{Jup}}$ ,  $(2.4 \pm 0.5) R_{\text{Jup}}$ ) и субнептуна (планета (c),  $(2.22 \pm 0.06) R_{\oplus}$ ,  $(7.6 \pm 0.2) M_{\oplus}$ ), обращающихся вокруг звезды спектрального класса F. Также измерения лучевых скоростей свидетельствуют в пользу существования дополнительного небесного тела с периодом обращения несколько тысяч дней. Система TOI-1408 позволяет изучать процессы миграции планет типа горячий юпитер в случаях, когда менее массивная планета (c) находится ближе к звезде, чем более массивная (b). По архивным измерениям блеска TOI-1408 (проект DASCH) мы сделали оценки величины возможной циклической долговременной переменности объекта (около  $10\,500^d$ ). Анализ переменности блеска TOI-1408 по данным архива Kamogata Wide-field Survey (KWS) привел к обнаружению в спектре мощности пиков, соответствующих периоду вращения около  $7.5^d$ , ранее найденному в работе [1]. Получены оценки величин оттока вещества из атмосфер планет, которые были установлены для двух значений параметра  $\log R'_{\text{HK}}$  ( $-4.94$  и  $-4.59$ ), соответствующих максимумам бимодального распределения этого параметра для малоактивных и активных звезд спектрального класса F. Потеря вещества атмосферы планеты (b) (горячего юпитера) может достигать  $2.3 \times 10^{11}$  г/с, а субнептуна — планеты (c) —  $2.7 \times 10^{10}$  г/с для величины  $\log R'_{\text{HK}} = -4.59$ . Полученные нами данные достаточно хорошо согласуются с результатами для экзопланет соответствующих типов (в том числе для горячего юпитера HD 189733 b и теплого непуна GJ 436 b).

**Ключевые слова:** экзопланеты, атмосферы, потеря вещества, активность, циклы

**DOI:** 10.31857/S0004629925010047, **EDN:** HLVHNY

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время внимание многих групп ученых стали привлекать многопланетные системы, являющиеся объектами с большим разнообразием происходящих в них явлений, важных для исследования межпланетных взаимодействий, формирования и миграции планет, сравнительной планетологии и др. (см. [2] и ссылки в [3]). Авторы [1] сообщили об изучении системы TOI-1408, содержащей планеты типа горячий юпитер, субнептун и, возможно, третье тело (период обращения которого может быть порядка тысячи дней). Эта система, по мнению авторов [1], заслуживает особого интереса, поскольку ее наблюдения позволяют изучать процессы миграции планет, как горячих юпитеров, так и субнептунов, например, в случаях, когда менее массивная планета (c) находится ближе к звезде, чем более массивная (b).

В нашей статье мы выполнили исследование проявлений активности звезды TOI-1408, а также

получили оценки величины возможного оттока вещества из атмосфер двух ее планет.

## 2. ПРОЯВЛЕНИЯ АКТИВНОСТИ TOI-1408

Согласно работе [1] эффективная температура TOI-1408 (BD+72 969/TIC 364186197) равна  $T_{\text{eff}} = 6117 \pm 31$  К, ускорение силы тяжести  $\log g = 4.10 \pm 0.06$ , радиус  $R/R_{\odot} = 1.53 \pm 0.02$  и масса  $M/M_{\odot} = 1.31 \pm 0.01$ . Объект отождествлен с источником Gaia EDR3 2275130045974715904, его параллакс составляет  $\pi = 7.1641 \pm 0.0102$  mas. TOI-1408 является достаточно яркой звездой спектрального класса F8, блеск в фильтре  $V$  составляет  $9.27^m$ . В работе [1] были детально рассмотрены наблюдения TOI-1408 из архива космической миссии TESS. Данные были получены для 12 секторов и содержат 61 транзитов планеты (b) и 114 транзитов планеты (c). Авторы [1] также выполнили определение периода вращения звезды  $P$ , который составил  $7.5^d \pm 0.62^d$ . К сожалению

нию, данные архива TESS не позволяют сделать заключение о долговременной переменности звезды.

Мы провели независимый анализ переменности блеска TOI-1408 по данным многолетнего обзора Kamogata Wide-field Survey (KWS)<sup>1</sup>. В обзоре представлены наблюдения звезды в фильтрах *V* и *Ic* в интервале наблюдений в целом с августа 2017 г. по сентябрь 2021 г., (4 года), но фактически только в сезоны 2017–2018 гг. Мы проанализировали данные в фильтре *V*, всего было рассмотрено 317 оценок блеска. Представленные на рис. 1 (вверху) данные не могут дать ответ о присутствии цикличности в изменении блеска. На нижней диаграмме рис. 1 приведен спектр мощности для интервала 1–15 суток, включающего величину вероятного периода вращения *P* звезды. Наше внимание привлекли два пика, соответствующие величинам *P* около 7.5<sup>d</sup> (подробнее см. в работе [1]).

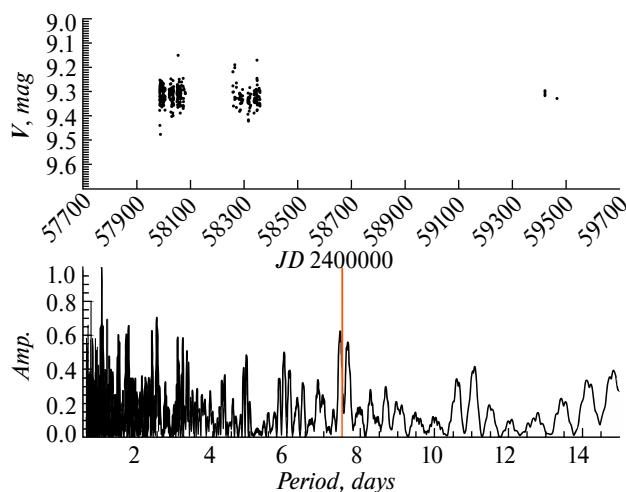
Наше исследование циклов активности звезды было продолжено на основе данных отсканированных фотопластинок проекта Digital Access to a Sky Century Harvard (DASCH) [4], которые предоставляют широкие возможности для анализа долговременной активности звезды на продолжительном временном интервале. Имеющиеся в архиве данные для TOI-1408 охватывают интервал наблюдений длительностью в 93 года (с 1896.8 г. по 1989.9 г.) (рис. 2). Всего нами было рассмотрено 4272 измерений блеска звезды в системе, близкой к фотометрической в фильтре *B*. К сожалению, несмотря на то что данные многочисленны, их разброс велик, точность в ряде случаев невысока и также имеется характер-

ный для DASCH пробел в данных в интервале с 1952 по 1967 г. Тем не менее на основе построенного спектра мощности для блеска TOI-1408 можно предположить существование длительного цикла активности  $P_{\text{cycl}}$  порядка 10 500<sup>d</sup> (28.8 лет) (см. рис. 2, нижняя диаграмма, вертикальная темная линия). На этом рисунке вертикальными светлыми линиями также отмечены пики, соответствующие годовичному и месячному периодам. Также на рис. 2 вертикальной темной линией обозначено положение, соответствующее периоду вращения звезды, но никаких деталей в этой области не имеется.

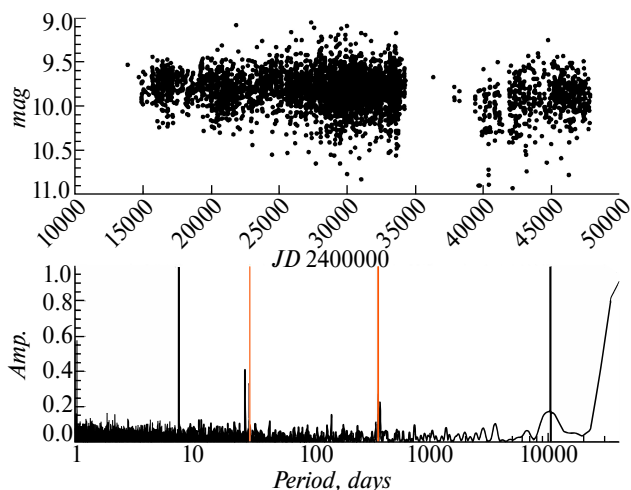
Возраст системы был оценен в работе [1] и составил  $2.7 \pm 0.3$  млрд лет. С учетом всех неопределенностей, можно сделать заключение, что, скорее всего, TOI-1408 не принадлежит к числу старых звезд и может обладать умеренной активностью.

Авторы работы [1] не приводят информацию об уровне хромосферной активности TOI-1408, поэтому мы выполнили оценку величины индекса  $\log R'_{\text{HK}}$ , необходимого в дальнейшем для определения величины оттока вещества из атмосферы экзопланеты косвенным образом. Мы использовали данные работы [5], касающиеся распределения величин этого параметра для звезд спектрального класса F. Согласно [5], для них распределение  $\log R'_{\text{HK}}$  имеет два пика (возможно, первый из них раздвоен, но это раздвоение может быть и артефактом) с максимумами для величин порядка  $-4.94 \text{ dex}$  ( $-4.83 \text{ dex}$ ) у малоактивных звезд и  $-4.59 \text{ dex}$  у активных. Скорее всего, у рассматриваемой нами звезды величи-

<sup>1</sup> <http://kws.cetus-net.org>



**Рис. 1.** Верхняя панель: фотометрические наблюдения TOI-1408 в фильтре *V* по данным обзора Kamogata Wide-field Survey (KWS). Внизу — спектр мощности для интервала периодов 1–15<sup>d</sup>. Вертикальная светлая (красная) линия соответствует величине периода вращения 7.5 суток



**Рис. 2.** Вверху — кривая блеска TOI-1408 по данным проекта Digital Access to a Sky Century@Harvard (DASCH) в 1896.8–1989.9 гг. Внизу — спектр мощности для диапазона периодов 1–14 000<sup>d</sup>. Вертикальными темными линиями отмечены длительный цикл активности  $P_{\text{cycl}}$  порядка 10 500<sup>d</sup> (28.8 лет) и 7.5<sup>d</sup> (возможное положение пика для  $P_{\text{rot}}$ ). Вертикальными светлыми (красными) линиями отмечены пики, соответствующие положениям, близким к годовичному и месячному периодам

на параметра  $\log R'_{\text{HK}}$  характерна для малоактивных звезд, тем не менее мы выполнили расчеты для двух значений этого параметра.

### 3. ПОТЕРЯ ВЕЩЕСТВА АТМОСФЕРЫ ПЛАНЕТ TOI-1408

Как указывалось выше [1], TOI-1408 обладает двумя планетами: одной — типа горячий юпитер TOI-1408 b с параметрами:  $P = 4.42^d$ ,  $M = (1.86 \pm 0.02) M_{\text{Jup}}$ ,  $R = (2.4 \pm 0.5) R_{\text{Jup}}$ , и другой, TOI-1408 c — типа субнептуна с параметрами:  $P = 2.17^d$ ,  $R = (2.22 \pm 0.06) R_{\oplus}$  и массой  $M = (7.6 \pm 0.2) M_{\oplus}$ .

Для подсчета потери вещества атмосферами планет  $\dot{M}_{\text{loss}}$  нами была использована аппроксимационная формула (см., напр., [7, 6]), соответствующая модели потери атмосферы с ограничением по энергии. В ней предполагается, что поток жесткого УФ-излучения поглощается в тонком слое радиуса  $R_{\text{XUV}}$  с оптической толщиной для звездных XUV-фотонов, равной единице, а также включен учет приливного эффекта:

$$\dot{M} = \frac{\epsilon_{\text{XUV}} \pi F_{\text{XUV}} R_p^2 R_{\text{XUV}}^2}{GM_p K_{\text{tide}}(\xi)}, \quad (1)$$

где  $\epsilon_{\text{XUV}}$  — параметр эффективности нагрева ( $\epsilon_{\text{XUV}} = 0.2 \pm 0.1$  для мининептунов и суперземель);  $G$  — гравитационная постоянная;  $F_{\text{XUV}}$  — поток XUV-фотонов;  $R_p$  — радиус планеты;  $M_p$  — масса планеты;  $R_{\text{XUV}}$  — радиус поглощения XUV-фотонов;  $K_{\text{tide}}(\xi)$  — приливный параметр. Подробности использования соотношения (1) можно найти во многих литературных источниках, в том числе в работах [7, 6, 8, 9].

Основные данные о планетах системы TOI-1408 нами были взяты из работы [1]. Для оценки величины  $F_{\text{XUV}}$  (потока XUV-фотонов) были использованы полученные в работе [10] аналитические зависимости, связывающие величину  $F_{\text{XUV}}$  и параметр  $\log R'_{\text{HK}}$  для звезд спектральных классов от F до M. В таблице представлены результаты расчетов по соотношению (1) величин  $\dot{M}_{\text{loss}}$  у планет TOI-1408 для принятых величин параметра  $\log R'_{\text{HK}}$ .

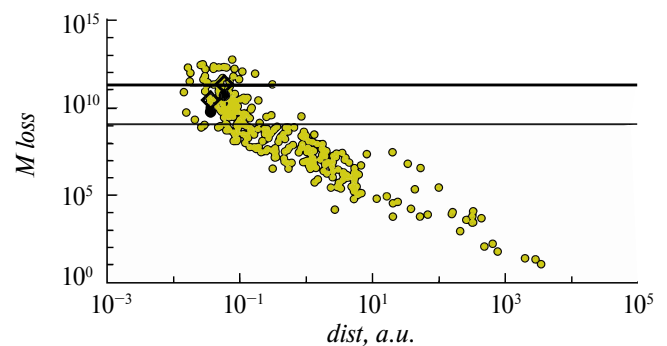
### 4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрены свойства мультипланетной системы TOI-1408, состоящей из горячего юпитера и субнептуна, обращающихся вокруг звезды спектрального класса F. Свойства планет тако-

вы: горячий юпитер, TOI-1408 b имеет период обращения  $P = 4.42^d$ ,  $M = (1.86 \pm 0.02) M_{\text{Jup}}$ ,  $R = (2.4 \pm 0.5) R_{\text{Jup}}$ , транзиты имеют V-образную форму. Радиус внутренней планеты (c) (субнептуна) составляет  $(2.22 \pm 0.06) R_{\oplus}$ , а масса  $(7.6 \pm 0.2) M_{\oplus}$ . Также измерения лучевых скоростей свидетельствуют в пользу существования дополнительного небесного тела с периодом обращения несколько тысяч дней. По мнению авторов работы [1] система TOI-1408 интересна, поскольку позволяет изучать процессы миграции планет типа горячий юпитер в случаях, когда менее массивная планета (c) находится ближе к звезде, чем более массивная (b). По архивным измерениям блеска TOI-1408 (проект DASCH) мы сделали оценки величины возможной циклической долговременной переменности объекта. Анализ переменности блеска TOI-1408 по данным Kamogata Wide-field Survey (KWS) указал на наличие в спектре мощности пиков, соответствующих величине  $P$  около  $7.5^d$ , ранее найденного в работе [1].

Вычисления величины оттока вещества из атмосфер планет было проведено для двух значений параметра  $\log R'_{\text{HK}}$  ( $-4.94$  и  $-4.59$ ), соответствующих максимумам бимодального распределения этого параметра для малоактивных и активных звезд спектрального класса F. Потеря вещества атмосферы планеты (b) (горячего юпитера) может достигать  $2.3 \times 10^{11}$  г/с, а субнептуна — планеты (c) —  $2.7 \times 10^{10}$  г/с для величины  $\log R'_{\text{HK}} = -4.59$ .

На рис. 3 представлено сопоставление полученных нами данных о потере вещества атмосферами планет системы с результатами исследования [11] (см. рис. 11 в [11]). Авторы работы [11] опубликовали сведения о скорости потери вещества для 287 экзопланет на основе новых измерений рентгеновской светимости звезд с планетными системами по данным миссии eROSITA. Мы сопоставили наши результаты с данными из статьи [11], в том



**Рис. 3.** Зависимость потери вещества атмосферами экзопланет от расстояния до звезды по данным [11] (светлые кружки). Темные кружки — величины  $\dot{M}_{\text{loss}}$  для планет TOI-1408 при значениях параметра  $\log R'_{\text{HK}} = -4.94$ , ромбы — при  $\log R'_{\text{HK}} = -4.59$ . Уровни величин  $\dot{M}_{\text{loss}}$  для горячего юпитера HD 189733 b и теплого непуна GJ 436 b ограничены толстой и тонкой горизонтальными линиями соответственно

**Таблица.** Результаты расчетов по соотношению (1) величин  $\dot{M}_{\text{loss}}$  у планет TOI-1408

$\log R'_{\text{HK}}$	$\dot{M}_{\text{loss}}$	
	Planet (b)	Planet (c)
-4.94	5.0E+10	5.8E+9
-4.59	2.3E+11	2.7E+10

числе для горячего юпитера HD 189733 b и тепло-го непуна GJ 436 b (уровни величин  $M_{\text{loss}}$  для них на рис. 3 ограничены толстой и тонкой горизонтальными линиями соответственно). Полученные нами данные достаточно хорошо согласуются с результатами, найденными для экзопланет соответствующих типов. Учитывая значительную величину возможного оттока вещества из атмосфер планет, TOI-1408 может быть включена в число приоритетных объектов для наблюдений с УФ космическим телескопом Спектр–УФ [12, 13].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Korth, P. Chaturvedi, H. Parviainen, I. Carleo, *et al.*, *Astrophys. J. Letters* 971(2), id. L28 (2024).
2. L.M. Weiss, G.W. Marcy, E.A. Petigura, B.J. Fulton, *et al.*, *Astron. J.* 155(1), id. 48 (2018).
3. I.S. Savanov, *Astrophys. Bull.* 78(4), 588 (2023).
4. J. Grindlay, S. Tang, E. Los, and M. Servillat, *New Horizons in Time Domain Astronomy IAU Symp.* 285, 29 (2012).
5. J. Gomes da Silva, N.C. Santos, V. Adibekyan, S.G. Sousa, *et al.*, *Astron. and Astrophys.* 646, id. A77 (2021).
6. N.V. Erkaev, Yu.N. Kulikov, H. Lammer, F. Selsis, D. Langmayr, G.F. Jaritz, and H.K. Biernat, *Astron. and Astrophys.* 472(1), 329 (2007).
7. T.T. Koskinen, P. Lavvas, C. Huang, G. Bergsten, R.B. Fernandes, and M.E. Young, *Astrophys. J.* 929(1), id. 52 (2022).
8. E.S. Kalinicheva, V.I. Shematovich, and I.S. Savanov, *Astron. Rep.* 66(12), 1318 (2022).
9. I.S. Savanov and V.I. Shematovich, *Astrophys. Bull.* 76(4), 450 (2021).
10. A.G. Sreejith, L. Fossati, A. Youngblood, K. France, and S. Ambily, *Astron. and Astrophys.* 644, id. A67 (2020).
11. G. Foster, K. Poppenhaeger, N. Ilic, and A. Schwöpe, *Astron. and Astrophys.* 661, id. A23 (2022).
12. B.M. Shustov, M.E. Sachkov, S.G. Sichevsky, A.S. Shugarov, *et al.*, *INASAN Sci. Rep.* 5(5), 306 (2020).
13. M. Sachkov, A.I. Gómez de Castro, B. Shustov, S. Sichevsky, and A. Shugarov, *Space Telescopes and Instrumentation 2022: Ultraviolet to Gamma Ray*, *Proc. SPIE* 12181, id. 121812S (2022).

## ACTIVITY OF THE STAR TOI-1408 AND MASS LOSS BY THE ATMOSPHERES OF ITS EXOPLANETS

© 2025 I. S. Savanov

*Institute of Astronomy of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

*e-mail: isavanov@inasan.rssi.ru*

We consider the properties of the multiplanetary system TOI-1408, consisting of a hot Jupiter (planet (b),  $(1.86 \pm 0.02) M_{\text{Jup}}$ ,  $(2.4 \pm 0.5) R_{\text{Jup}}$ ) and a sub-neptune (planet (c),  $(2.22 \pm 0.06) R_{\oplus}$ ,  $(7.6 \pm 0.2) M_{\oplus}$ ) orbiting a star of spectral class F. Measurements of radial velocities indicate the existence of an additional celestial body with an orbital period of several thousand days. The TOI-1408 system makes it possible to study the migration processes of hot Jupiter-type planets in cases where a less massive planet (c) is closer to the star than a more massive one (b). Based on archival measurements of the TOI-1408 brightness (DASCH project), we made estimates of the length of the possible cyclic long-term variability of the object (equal to about 10 500 days). The analysis of the brightness variability of TOI-1408 according to the Kamogata Wide-field Survey (KWS) archive led to the detection of peaks in the power spectrum corresponding to a rotation period of about 7.5 days. Estimates of the mass loss of the planets atmospheres were obtained, which were established for two values of the parameter  $\log R'_{\text{HK}}$  (–4.94 and –4.59) corresponding to the maxima of the bimodal distribution of this parameter for low and high activity for stars of spectral class F. The mass loss of planet (b) (hot Jupiter) can reach  $2.3 \times 10^{11}$  g/s, and of the sub-neptune — planet (c) —  $2.7 \times 10^{10}$  g/s for the value  $\log R'_{\text{HK}} = -4.59$ . The obtained data are in good agreement with the results for exoplanets of the corresponding types (including for hot Jupiter HD 189733 b and warm Neptune GJ 436 b).

**Keywords:** exoplanets, atmospheres, mass loss, activity, cycles

# УСКОРЯЮЩИЙ ПОТЕНЦИАЛ И ПРОФИЛЬ ПЛОТНОСТИ ВТОРИЧНОЙ ПЛАЗМЫ В МАГНИТОСФЕРЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПУЛЬСАРОВ

© 2025 г. А. Ю. Истомин<sup>1,2</sup>, Ф. А. Князев<sup>1,2</sup>, В. С. Бескин<sup>2,1,\*</sup>

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),  
Долгопрудный, Россия

<sup>2</sup>Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук, Москва, Россия

\*e-mail: beskin@td.lpi.ru

Поступила в редакцию 03.06.2024 г.

После доработки 24.08.2024 г.

Принята в печать 11.09.2024 г.

В работе предложен новый метод определения ускоряющего потенциала над полярными шапками радиопульсаров с произвольным углом наклона магнитной оси к оси вращения. В основе подхода лежит концепция вакуумного зазора, высота и форма верхней границы которого находятся самосогласованно совместно с решением соответствующего уравнения Пуассона. В свою очередь, знание ускоряющего потенциала позволяет определить поперечные профили концентрации вторичной плазмы. Показано также, что влияние обратного комптоновского рассеяния на рассматриваемые процессы оказывается незначительным.

**Ключевые слова:** радиопульсары, ускоряющий потенциал, вторичная плазма

**DOI:** 10.31857/S0004629925010056, **EDN:** HLTVFN

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Накопленные за последние годы данные радиотелескопов MeerKAT [1, 2] и FAST [3] позволили значительно уточнить характеристики средних профилей интенсивности и поляризации радиоизлучения пульсаров, что, в свою очередь, потребовало построения более детальной теории генерации и распространения излучения в магнитосферах нейтронных звезд. В частности, модель “полого конуса” [4, 5], наиболее часто используемая для объяснения свойств наблюдаемых профилей излучения, оказывается излишне упрощенной, поскольку она не учитывает эффекты распространения излучения в магнитосфере нейтронной звезды, такие как рефракция, циклотронное поглощение и предельная поляризация [6].

В свою очередь, для исследования всех перечисленных выше эффектов необходимо иметь количественную модель распределения плотности вторичной электрон-позитронной плазмы, истекающей вдоль открытых силовых линий радиопульсара. Так как основным механизмом генерации плазмы в полярных областях нейтронной звезды является однофотонная конверсия  $\gamma$ -квантов, излученных первичными электронами и/или позитронами, ускоренными в области ненулевого продольного электрического поля, для построения соответствующей модели необходимо знать трехмерную структуру ускоряю-

щего потенциала в области над полярной шапкой нейтронной звезды.

Хотя классическая модель вакуумного зазора Рудермана–Сазерленда [7] служит хорошей отправной точкой для решения данной задачи, в своей традиционной формулировке она содержит существенную неопределенность — длина свободного пробега фотонов, а следовательно, и геометрия вакуумного зазора сама зависит от величины ускоряющего потенциала. Поэтому фактически данная модель может быть использована только для достаточно быстрых радиопульсаров, у которых высота зазора много меньше радиуса полярной шапки, и для которых электрическое поле в зазоре можно считать однородным. Тем более эту модель нельзя использовать для ортогональных пульсаров, угол наклона магнитной оси к оси вращения которых близок к  $90^\circ$ . Действительно, ускоряющий потенциал таких пульсаров не обладает осевой симметрией и, соответственно, не может быть описан в рамках классической модели [8]. Что же касается активно проводящихся в последние десять лет исследований в рамках частиц в ячейках (PIC) [9–13], то они в подавляющем большинстве (за исключением разве что работы [14]) не были направлены на поиск пространственного распределения вторичной плазмы над полярной шапкой.

В данной работе предлагается способ корректной постановки и решения задачи об определении

пространственной структуры ускоряющего потенциала, не предполагающий малость высоты зазора  $H_{\text{gap}}$  по сравнению с радиусом полярной шапки  $R_0$  и осесимметричность потенциала, что делает метод применимым и для ортогональных пульсаров. Последнее замечание особенно важно, так как благодаря возможности наблюдения обоих магнитных полюсов эти объекты особенно информативны [15]. Помимо этого, из-за малой величины и знакопеременности гольдрайховской плотности в пределах полярной шапки такие пульсары особенно чувствительны к выбору модели генерации плазмы и величине магнитного поля.

В разделе 2 сформулирована математическая постановка задачи, решаемой в работе. Раздел 3 посвящен вычислению высоты вакуумного зазора при фиксированном потенциале, решению уравнения Пуассона методом Physics Informed Neural Networks (PINN) и обсуждению результатов данных вычислений как для неортогональных, так и для ортогональных пульсаров. Раздел 4 посвящен обсуждению модели генерации вторичной плазмы и результатам ее применения к определенным ранее потенциалам. В разделе 5 подведены итоги данной работы.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Хотя результаты численного моделирования указывают на то, что процесс генерации частиц существенно нестационарен [13, 16], в качестве отправной точки мы выбрали модель стационарного вакуумного зазора [7]. Действительно, так как, согласно работам [13, 16], плазма периодически полностью покидает полярные области, модель Рудермана–Сазерленда позволяет описать начальный этап генерации вторичной плазмы. В данной работе, однако, не будет предполагаться условие  $H_{\text{gap}} \ll R_0$ , где

$$R_0 = f_*^{1/2} \sqrt{\frac{\Omega R}{c}} R \quad (1)$$

есть радиус полярной шапки. Здесь и далее  $R$ ,  $\Omega$  и  $\chi$  суть радиус, угловая скорость и угол наклона дипольного момента к оси вращения нейтронной звезды, а  $f_* \approx 1.59 (1 + 0.2 \sin^2 \chi)$  — безразмерная площадь полярной шапки [17, 18].

Стоит отметить, что в последующих вычислениях радиуса кривизны магнитного поля оно будет полагаться дипольным, хотя предлагаемый в работе метод может быть обобщен и для других конфигураций. Здесь мы, однако, рассмотрим упрощенную модель, которая тем не менее позволяет учесть все основные эффекты, связанные с кривизной магнитных силовых линий.

Перейдем теперь к определению электрического потенциала  $\psi$  в вакуумной области над полярными областями радиопульсара. В стационарном состо-

янии уравнение Пуассона для вращающейся нейтронной звезды имеет вид [7]

$$\Delta \psi = 4\pi(\rho_e - \rho_{\text{GJ}}), \quad (2)$$

где  $\rho_e$  — плотность заряда в магнитосфере, а

$$\rho_{\text{GJ}} = -\frac{\mathbf{B}}{2\pi c} \quad (3)$$

— плотность Гольдрайха–Джулиана [19], необходимая для экранировки продольного электрического поля.

Заметим, что на масштабе высоты зазора область открытых силовых линий мало отличается от цилиндрической, что позволяет пренебречь искривлением силовых линий при выборе расчетной области. Таким образом, можно ввести цилиндрические координаты  $r_m, \phi_m, z$  с центром на оси диполя. При этом везде ниже для величин  $r_m$  и  $z$  выбрана нормировка на радиус полярной шапки  $R_0$  (1), так что поверхность, отделяющая области открытых и замкнутых силовых линий, определяется условием  $r_m = 1$ . В то же время кривизну силовых линий необходимо учитывать при вычислениях правой части уравнения (2), так как при углах  $\chi \sim 90^\circ$  лидирующий по малому параметру  $\sqrt{\Omega R/c}$  осесимметричный (и независимый от кривизны магнитных силовых линий) вклад стремится к нулю.

В этом случае уравнение, определяющее потенциал  $\psi(r_m, \phi_m, z)$  в вакуумной области ( $\rho_e \ll \rho_{\text{GJ}}$ ), будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r_m} \frac{\partial}{\partial r_m} \left( r_m \frac{\partial \psi}{\partial r_m} \right) + \frac{1}{r_m^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi_m^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \\ & = -2 \frac{\Omega B_0 R_0^2}{c} \left( \cos \chi + \frac{3}{2} \frac{R_0}{R} r_m \sin \chi \sin \phi_m \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь мы воспользовались известным выражением для косинуса угла между осью вращения и магнитным полем  $\cos \theta_b \approx \cos \chi + (3/2)(R_0/R) r_m \sin \chi \sin \phi_m$ , справедливым для дипольных силовых линий.

Если высоту зазора  $H_{\text{gap}} = H_{\text{gap}}(r_m, \phi_m)$  считать заданной функцией, то граничные условия для уравнения (4) запишутся в виде

$$\psi(r_m, \phi_m, z = 0) = 0, \quad (5)$$

$$\psi(r_m = 1, \phi_m, z) = 0, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial z}(r_m, \phi_m, z) \right|_{z=H_{\text{gap}}(r_m, \phi_m)} = 0. \quad (7)$$

Иными словами, необходимо потребовать равенство нулю потенциала  $\psi$  на поверхности нейтронной звезды и на сепаратрисе, разделяющей открытые и замкнутые магнитные силовые линии, а также равенство нулю продольного электрического поля на верхней границе области ускорения  $z = H_{\text{gap}}$  [13, 20].

Однако для нахождения самой функции  $H_{\text{gap}}$  необходимо конкретизировать процесс рождения вторичной плазмы, что невозможно без знания

энергий первичных частиц, которые сами зависят от величины  $H_{\text{gap}}$ , так как ускоряющий потенциал  $\psi$  функционально зависит от высоты зазора:  $\psi = \psi[H_{\text{gap}}]$ . В итоге корректная постановка задачи состоит в одновременном самосогласованном определении двух функций:  $\psi(r_m, \phi_m, z)$  и  $H_{\text{gap}}(r_m, \phi_m)$ , таких что

$$\left. \frac{\partial \psi(r_m, \phi_m, z)}{\partial z} \right|_{z=H_{\text{gap}}[\psi]} = 0. \quad (8)$$

Для решения данной задачи мы использовали итеративный подход: по известной функции  $H_{\text{gap}}^{(i)}$  вычислялся потенциал  $\psi^{(i)}$  такой, что было выполнено условие (7), а далее, используя полученный потенциал, пересчитывалась высота зазора. Таким образом, выполнялась следующая итеративная процедура ( $0 < w < 1$  — некоторый вес, улучшающий сходимость схемы):

$$H_{\text{gap}}^{(i)} \rightarrow \psi^{(i)}, \quad (9)$$

$$H_{\text{gap}}^{(i+1)} = w H_{\text{gap}}[\psi^{(i)}] + (1 - w) H_{\text{gap}}^{(i)}.$$

При этом на каждом шаге итеративной схемы (9) необходимо было не только определять высоту зазора  $H_{\text{gap}}[\psi]$ , но и решать уравнение Пуассона (4) с граничными условиями (5), (6), (7), последнее из которых поставлено на границе, меняющейся в ходе итеративного процесса.

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЯЮЩЕГО ПОТЕНЦИАЛА

#### 3.1. Изгибное излучение

Для определения высоты зазора необходимо рассмотреть процесс поглощения первичных фотонов в сверхсильном магнитном поле и, соответственно, сам механизм генерации фотонов. Классическим источником  $\gamma$ -квантов необходимых энергий является изгибное излучение первичных частиц. В этом случае для высоты зазора  $H_{\text{gap}}$  можно записать следующее выражение:

$$H_{\text{gap}}(r_m, \phi_m) = \min(l_e + l_\gamma(l_e)), \quad (10)$$

где  $l_e$  — расстояние, пройденное первичной частицей до испускания фотона. Учитывая, что в данном процессе с ростом энергии первичной частицы растет как число испускаемых фотонов, так и их характерная энергия, можно считать, что первичный фотон может быть излучен в произвольной точке траектории частицы, что позволяет считать величину  $l_e$  произвольной.

Далее, для (безразмерной) длины свободного пробега фотона с энергией  $\epsilon_\gamma$ , движущегося в магнитном поле нейтронной звезды  $B$ , имеем следующее выражение [7, 21]:

$$l_\gamma \approx \frac{8}{3} \frac{1}{\Lambda} \frac{B_{\text{cr}}}{B} \frac{R_c(r_m, z)}{\epsilon_\gamma(l_e)}. \quad (11)$$

Здесь и далее все значения энергии нормированы на  $m_e c^2$ ,  $B_{\text{cr}} = m_e^2 c^3 / \hbar e \approx 4.4 \times 10^{13}$  Гс — швингеровское магнитное поле,  $R_c(r_m, z) \approx (4/3) R^2 / r_m$  — радиус кривизны магнитных силовых линий, а  $\Lambda = \Lambda_0 - 3 \ln \Lambda_0$ , где

$$\Lambda_0 = \ln \left[ \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\omega_B R_c}{c} \left( \frac{B_{\text{cr}}}{B} \right)^2 \epsilon_\gamma^{-2} \right] \sim 20 \quad (12)$$

есть безразмерный параметр, слабо (логарифмически) зависящий от параметров пульсара и энергии фотона [22].

Наконец, для упрощения вычислений ускоряющего потенциала предполагался моноэнергетический спектр изгибного излучения

$$\epsilon_\gamma = \epsilon_c = \frac{3 \lambda_e \gamma_e^3(l_e)}{2 R_c(r_m, z)}. \quad (13)$$

Действительно, хотя длина свободного пробега фотона (11) явным образом зависит от его энергии, в разделе 3.4 будет показано, что зависимость итогового ускоряющего потенциала от выбора численного коэффициента в формуле (13) заметно слабее. Здесь  $\lambda_e = \hbar / m_e c$  — приведенная комптоновская длина волны, а  $\gamma_e$  есть  $\gamma$ -фактор первичной частицы, определяющийся из ускоряющего потенциала согласно уравнению движения

$$m c^2 \frac{d\gamma_e}{dl} = e E_{\parallel} - F_{\text{CR}} - F_{\text{IC}}. \quad (14)$$

Последние два слагаемых соответствуют потерям на изгибное излучение и обратное комптоновское рассеяние. Вклад  $F_{\text{CR}}$ , однако, становится существенным лишь при  $\gamma \sim 10^8$ , что позволяет пренебречь им для большинства пульсаров. Вывод же о малости вклада комптоновского рассеяния можно сделать из сравнения длин свободного пробега первичных частиц, выполненного ниже в следующем подразделе 3.2. Таким образом, в большинстве случаев  $\gamma$ -фактор первичной частицы можно определять, не решая полное дифференциальное уравнение (14), а используя его решение в отсутствие потерь:

$$\gamma_e(l) = \frac{e\psi(l)}{m c^2}. \quad (15)$$

#### 3.2. Обратное комптоновское рассеяние

Как утверждалось в ряде работ [23, 24], для широкого диапазона параметров пульсаров ключевым механизмом, определяющим высоту зазора, может быть обратное комптоновское рассеяние (как нерезонансное, так и резонансное) тепловых фотонов на ультрарелятивистских первичных частицах. Ключевым отличием данного процесса от изгибного излучения является то, что с ростом энергии первичной частицы характерная энергия комптоновских фотонов растет, в то время как темп их рождения падает. Вследствие этого первичные частицы, обладающие энергией, достаточной, чтобы произвести

$\gamma$ -квант с необходимой для рождения пары энергией, могут иметь пренебрежимо малую вероятность испытать рассеяние. Фактически это означает, что необходимо явно учитывать конечность длины свободного пробега электрона, ограничивающую величину  $l_e$  в выражении (10) снизу.

Проанализировав зависимость данной величины от энергии, можно оценить влияние обратного комптоновского рассеяния на рассматриваемый процесс. Считая спектр излучения фотонов тепловым и изотропным в диапазоне  $\mu_{\min} \leq \mu \leq 1$  ( $\mu$  — косинус угла столкновения), можно записать следующее выражение для частоты актов рассеяния [25]:

$$R(\gamma_e) = \int_0^{+\infty} d\varepsilon \int_{\mu_{\min}}^1 d\mu \frac{c}{4\pi^3 \lambda_e^3} \frac{\varepsilon^2}{e^{\varepsilon/T} - 1} \times \\ \times (1 - \beta\mu) \sigma_{\text{tot}}(\gamma, \varepsilon'(\varepsilon, \mu)). \quad (16)$$

В данном выражении  $\varepsilon$  — энергия фотона до столкновения в системе отсчета пульсара (в единицах  $m_e c^2$ ),  $\varepsilon'$  — энергия фотона в системе отсчета покоя электрона,  $\sigma_{\text{tot}}$  — полное сечение рассеяния.

Так как электрон практически мгновенно разгоняется до  $\gamma$ -факторов  $\gamma \gtrsim 10^5$ , для нерезонансных фотонов необходимо использовать релятивистское сечение Клейна—Нишины. В то же время, так как циклотронный резонанс находится при энергиях  $\varepsilon' = \varepsilon_B = B/B_{\text{cr}} \ll 1$ , в нерезонансном случае можно не учитывать влияние магнитного поля и воспользоваться следующим выражением для сечения рассеяния ( $\sigma_T$  — томпсоновское сечение) [26]

$$\sigma_{\text{NR}} = \frac{3\sigma_T}{8} \frac{1}{\varepsilon'} \left[ \left(1 - \frac{2}{\varepsilon'} - \frac{2}{\varepsilon'^2}\right) \ln(1 + 2\varepsilon') + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} + \frac{4}{\varepsilon'} - \frac{1}{2(1 + 2\varepsilon')^2} \right]. \quad (17)$$

По этой же причине резонансное рассеяние можно рассматривать в томпсоновском пределе (уже учитывая наличие магнитного поля). В нем сечение рассеяния имеет вид [27]

$$\sigma = \frac{\sigma_T}{2} \left[ \frac{u^2}{(u+1)^2} + \frac{u^2}{(u-1)^2 + a^2} \right]. \quad (18)$$

Здесь  $u = \varepsilon'/\varepsilon_B$ ,  $a = 2\alpha/3\varepsilon_B$ , а  $\varepsilon_B = B/B_{\text{cr}}$ . Выделив в данном выражении резонансную часть, можно записать

$$\sigma_R = \frac{3\pi}{4\alpha_e} \sigma_T \delta(\varepsilon' - \varepsilon_B). \quad (19)$$

Для наших целей достаточно исследовать зависимость длины свободного пробега электрона от энергии, не рассматривая процесс ускорения электрона непосредственно, то есть считая, что  $l_e(\gamma_e) = c/R(\gamma_e)$ . Для нерезонансного рассеяния расчеты выполнялись численно, используя выражения (16), (17),

в то время как для резонансного случая можно получить аналитическое выражение [28]:

$$l_e^R = \frac{\lambda_e \gamma_e^2}{\varepsilon_B^2 \Theta \alpha_e (-\ln(1 - e^{-w}))}, \quad (20)$$

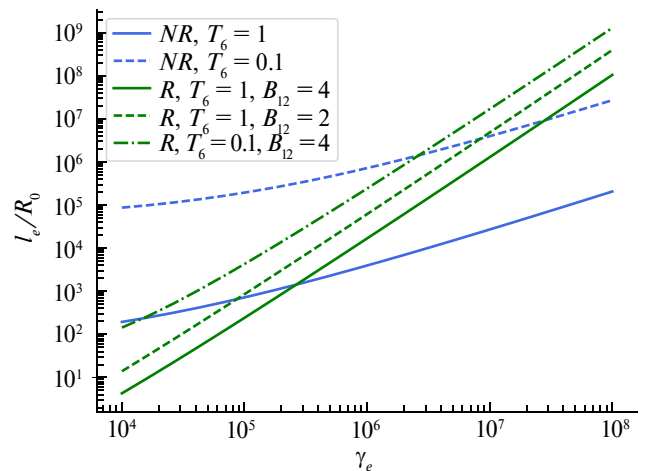
где  $\Theta = T/m_e c^2$ , а

$$w = \frac{\varepsilon_B}{\gamma_e \Theta (1 - \beta \mu_{\min})}. \quad (21)$$

Интересно сравнить полученные длины пробега с радиусом полярной шапки, являющимся характерным масштабом высоты зазора в случае преобладания изгибного механизма генерации первичных фотонов. Результаты вычислений представлены на рис. 1. Как можно видеть, даже при температуре  $10^6$  К длина свободного пробега в нерезонансном случае имеет порядок радиуса полярной шапки только при  $\gamma \lesssim 10^2$ , что позволяет не учитывать его при вычислении ускоряющего потенциала. В резонансном случае ответ уже не столь однозначен, так как при  $\gamma \sim 10^4$  энергии рассеянных фотонов могут быть достаточны для рождения пары вблизи звезды. Однако, как показали результаты численных расчетов, в пределах наблюдаемых параметров ортогональных пульсаров данным процессом также можно пренебречь.

### 3.3. Решение уравнения Пуассона методом PINN

Следующим шагом на пути к реализации итеративной схемы (9) является решение уравнения Пуассона в вакуумной области (4). Хотя для данного уравнения можно построить аналитическое решение в виде бесконечного ряда [22], данный подход не является предпочтительным, так как СЛАУ, определяющая коэффициенты разложения, имеет крайне большое число обусловленности в необходимой области параметров. Традиционные сеточные методы также плохо подходят для данной задачи



**Рис. 1.** Зависимость длин свободного пробега электрона от его  $\gamma$ -фактора для различных параметров пульсара. Зеленый цвет (три параллельные линии) соответствует резонансному рассеянию (R), синий (две пологие кривые) — нерезонансному (NR)

в силу переменной формы трехмерной расчетной области.

В связи с этим для решения данного уравнения в частных производных был применен метод Physics Informed Neural Networks (PINN) основанный на использовании нейронных сетей. PINN является достаточно новой альтернативой традиционным методам решения уравнений в частных производных и в настоящее время все чаще и чаще применяется во множестве областей физики и астрофизики, таких, например, как космология [29], теория переноса излучения [30] и теория магнитосферы радиопульсаров [31, 32].

PINN представляют собой обыкновенную нейронную сеть той или иной архитектуры (как правило, выбирается полносвязная нейронная сеть), входными параметрами которой являются независимые переменные  $\mathbf{x}$ , а выходным — значение функции  $\mathcal{N}(\mathbf{x})$ , приближенно удовлетворяющей уравнению  $\hat{L}[\mathcal{N}(\mathbf{x})] = 0$ , где  $\hat{L}$  есть некоторый дифференциальный оператор. Для обучения в качестве loss-функции выбирается норма невязки дифференциального уравнения:  $\|\hat{L}[\mathcal{N}(\mathbf{x})]\| \rightarrow 0$ . При этом для вычисления производных искомой функции не нужно вводить дискретизацию пространства, так как их можно получить непосредственно в процессе обратного прохода по нейронной сети. Таким образом, в процессе обучения нейронная сеть будет приближаться к одному из решений соответствующего дифференциального уравнения. Что же касается граничных условий, то наиболее простым способом их учета является добавление соответствующих слагаемых в loss-функцию с некоторыми весами. Проблемой данного метода является, однако, необходимость балансировки весов для достижения минимизации всех слагаемых по отдельности.

Другой способ заключается в выполнении некоторого алгебраического преобразования с выходными данными нейронной сети так, чтобы ответ автоматически удовлетворял граничным условиям. Например, жесткого выполнения условий Дирихле на фиксированной границе  $\partial D$  области  $D$  можно достичь, введя функции  $f$  и  $g$  такие, что  $f|_{\mathbf{x} \in \partial D} = 0$ , а  $g|_{\mathbf{x} \in \partial D} = h_{BC}$ , где  $h_{BC}$  задает значения искомой функции на границе. Тогда функция  $g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})\mathcal{N}(\mathbf{x})$  будет удовлетворять граничным условиям независимо от вида функции  $\mathcal{N}(\mathbf{x})$ .

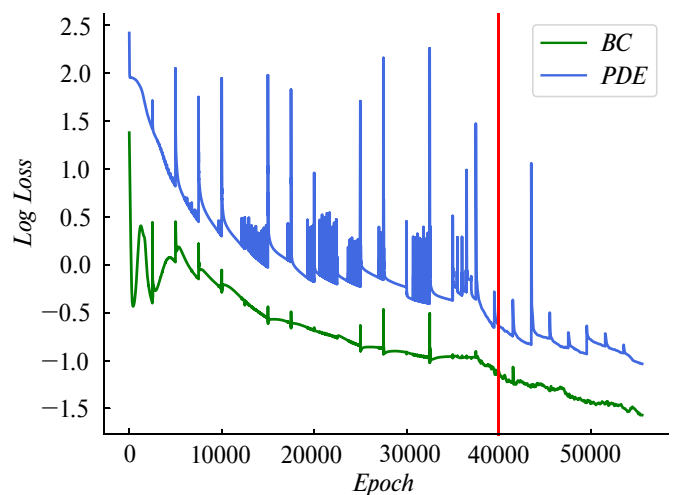
Основными преимуществами данного подхода по сравнению с традиционными численными методами является отсутствие расчетной сетки и, как следствие, большее удобство при работе в областях со сложной и переменной геометрией, а также меньшая чувствительность к размерности задачи. Недостатком данного метода как правило является меньшая точность результатов при больших временных затратах.

Важно также отметить, что в отличие от большинства других численных методов, предел точно-

сти которых при неограниченном времени расчетов приближается к машинному  $\epsilon$ , предел точности PINN определяется архитектурой сети и способом оптимизации. Тем не менее для многих астрофизических задач (в том числе и для рассматриваемой в данной работе) точность вычислений в первую очередь определяется физической моделью, а не выбором численного метода. В таких случаях способность PINN решать уравнения со сложными граничными условиями выходит на первый план.

В применении к рассматриваемой задаче данный метод использовался следующим образом. При фиксированной высоте вакуумного зазора делается  $N \sim 5000$  шагов оптимизации; далее, используя текущий вид потенциала, высота зазора пересчитывается и делаются следующие  $N$  шагов оптимизации. При этом веса нейронной сети, полученные на текущей итерации, используются как начальные значения весов на следующей. Процедура повторяется до тех пор, пока относительное изменение высоты зазора не станет меньше 1%. После этого происходит дополнительное обучение нейронной сети при фиксированной высоте зазора.

В качестве нейронной сети была выбрана полносвязная сеть, состоящая из 3-х промежуточных слоев (20, 20, 20). Для учета граничных условий на поверхностях  $r_m = 1$  и  $z = 0$  результат вычислений нейронной сети домножался на функцию  $f(r_m, z) = r_m \cdot z$ , в то время как граничное условие на верхней границе зазора учитывались введением дополнительного слагаемого в функцию ошибок. Для оптимизации использовался подход, предложенный в работе [33], заключающийся в первичном обучении с помощью стохастического градиентного спуска (ADAM) и последующего обучения методом LBFG-S (рис. 2). В то время как метод ADAM применялся непосредственно в итеративном про-



**Рис. 2.** Пример поведения функции ошибок. Скачки соответствуют смене граничных условий и выбору нового набора точек для обучения. Вертикальной красной линией отмечен момент переключения оптимизатора с ADAM на LBFG-S

цессе, метод LBFG-S использовался при дообучении с финальной высотой зазора. Данный подход мотивирован тем, что метод ADAM в значительно меньшей степени подвержен проблеме локальных минимумов, особенно актуальной на начальных этапах обучения, в то время как метод LBFG-S позволяет достичь более глубокой оптимизации. Таким образом используются сильные и нивелируются слабые стороны обоих методов, что позволило достичь заметно большей точности расчетов в рассматриваемой задаче.

### 3.4. Осесимметричный случай

При углах наклона осей  $\chi \lesssim 85^\circ$  источник в уравнении (4) фактически не зависит от угла  $\varphi_m$ . Поэтому для пульсаров, не являющихся ортогональными, задача становится осесимметричной и соответственно двумерной, что позволяет исключить из рассмотрения угол  $\varphi_m$ . Это в значительной степени упрощает как расчет, так и анализ результатов. В связи с этим, хотя основным фокусом работы и является применение изложенного выше метода к ортогональным пульсарам, в первую очередь был рассмотрен именно осесимметричный случай.

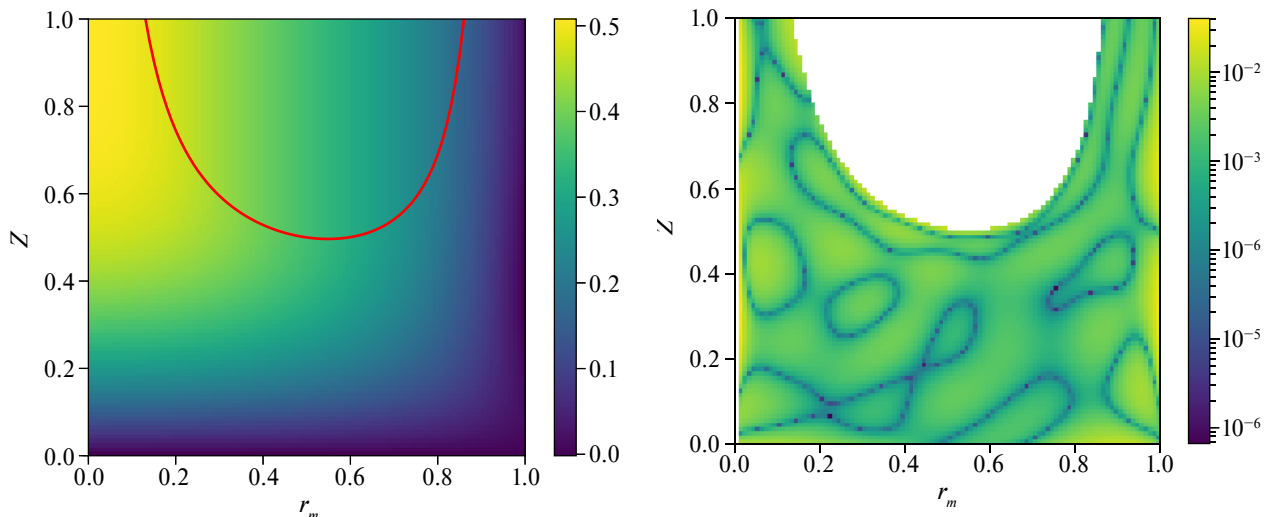
Как показано на рис. 3, описанный выше метод позволяет найти решение поставленной задачи с относительной невязкой порядка нескольких процентов, что является достаточно хорошей точностью. При этом геометрически полученные результаты воспроизводят некоторые свойства структуры, известной как “slot-gap” [34]. Стоит, однако, отметить, что в работе [34] рассматривалась стационарная модель со свободным выходом, когда плотности заряда  $\rho_e$  и  $\rho_{GJ}$ , входящие в уравнение (2), мало отличаются друг от друга. Однако в обоих случаях такая форма высоты зазора обусловлена тем, что вблизи магнитной оси рождение частиц затруднено вследствие малой кривизны магнитного поля, а на краю

полярной шапки ускоряющий потенциал стремится к нулю. Таким образом высота зазора должна обращаться в бесконечность при  $r_m \sim 0$  и  $r_m \sim 1$ . Также на рис. 4 представлены предельные значения ускоряющего потенциала (достигаемые на высоте вакуумного зазора), вычисленные с использованием различных характерных энергий в моноэнергетическом приближении синхротронного спектра (13). Как можно видеть, даже при изменении характерной энергии фотона в два раза, относительное изменение потенциала не превышает  $\sim (15\text{--}20)\%$ , что является допустимой погрешностью в рамках данной работы. Тем не менее в ходе дальнейшего развития модели, предполагаемого в последующих работах, влияние изгибного спектра будет учтено.

### 3.5. Неосесимметричный случай

На рис. 5 показаны примеры расчета ускоряющего потенциала для почти ортогональных пульсаров с углами наклона  $\chi = 88^\circ$  (верхний ряд) и  $\chi = 89.3^\circ$  (нижний ряд) для магнитного поля  $B_{12} = 1.5$  и периода  $P = 0.3$  с, характерного для интеримпульсных пульсаров. Приведены максимальные значения потенциала над полярной шапкой, срезы нормы невязки уравнения Пуассона на высоте  $0.5 R_0$ , а также высоты вакуумных зазоров в радиусах полярной шапки. Стоит отметить, что высота  $H_{\text{gap}} = 10 R_0$  фактически соответствует  $H_{\text{gap}} \rightarrow \infty$ .

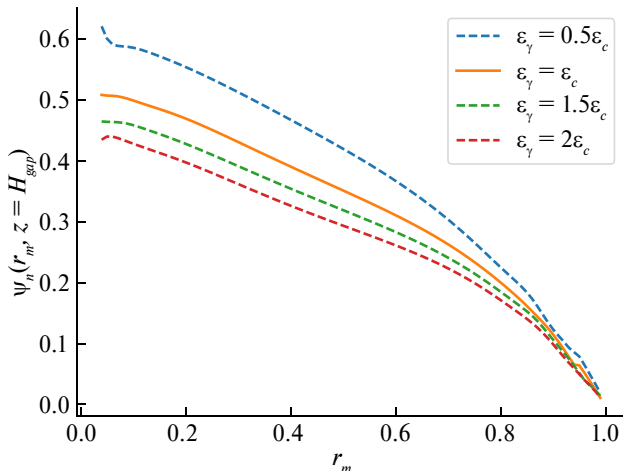
Как уже отмечалось, исследование таких пульсаров представляет особый интерес, поскольку для них электрический потенциал становится существенно неосесимметричным. Более того, в этом случае гольдрайховская плотность может менять знак в пределах полярной шапки, что влечет за собой и изменение направления ускоряющего поля. Происходит это, однако, в весьма узком диапазоне углов  $\chi$ .



(а) Потенциал, нормированный на величину  $\Omega B R_0^2 / (2c)$ . Красная линия соответствует высоте зазора  $H_{\text{gap}}(r_m)$

(б) Норма невязки решения уравнения Пуассона

Рис. 3. Пример вычисления ускоряющего потенциала для пульсара с  $\chi = 10^\circ$ ,  $B_{12} = 1.6$  и  $P = 0.5$  с



**Рис. 4.** Профили предельного ускоряющего потенциала, вычисленные с использованием различных характерных энергий изгибного излучения для пульсара с  $\chi = 10^\circ$ ,  $B_{12} = 1.6$  и  $P = 0.5$  с. Потенциал нормирован на величину  $\Omega B R_0^2 / (2c)$

Действительно, для того чтобы величина  $\cos \theta_b$  при характерных значениях  $P \approx 1$  с поменяла знак в пределах полярной шапки, необходимо, чтобы  $|\chi - \pi/2| \lesssim 3 R_0 / (2R) \sim 0.03$ , то есть  $88.5^\circ \lesssim \chi \lesssim 91.5^\circ$ . В результате, как показано на рис. 5, смена знака потенциала имеет место лишь для угла  $\chi = 89.3^\circ$ ; для угла  $\chi = 88^\circ$  знак потенциала не изменяется по всей поверхности полярной шапки.

Отметим наконец, что, как показано на рис. 5, значения ускоряющего потенциала оказываются заметно меньше, чем для неортогональных пульсаров. Это напрямую связано с малостью фактора  $\cos \theta_b$  в гольдрайховской плотности (3).

## 4. ПРОФИЛЬ ПЛОТНОСТИ ВТОРИЧНОЙ ПЛАЗМЫ

### 4.1. Метод расчета

Для изучения распределения плотности плазмы в пространстве удобно записать концентрацию в следующем виде:  $n = g(r_m, \varphi_m) \lambda n_{GJ}$ , где  $n_{GJ} = |\rho_{GJ}|/e$  — гольдрайховская концентрация, а  $\lambda$  — параметр множественности, определяемый усреднением величины  $n/n_{GJ}$  по полярной шапке. Такой вид записи мотивирован тем, что вдали от области генерации частиц функция  $g(r_m, \varphi_m)$  является постоянной на силовых линиях магнитного поля, то есть вся зависимость от высоты над полярной шапкой содержится в гольдрайховской плотности  $n_{GJ}$  (что следует из уравнения непрерывности).

Однако, поскольку для ортогональных пульсаров сама величина  $n_{GJ}$  существенно зависит от координат  $r_m, \varphi_m$ , в качестве нормировки нами была выбрана величина

$$n_0 = \frac{\Omega B}{2\pi c e} \sqrt{\frac{\Omega R}{c}}, \quad (22)$$

где последний множитель соответствует характерной величине  $\cos \theta_b$  на полярной шапке для ортогональных пульсаров. Таким образом, безразмерная величина  $\lambda$  характеризует эффективность генерации плазмы, а функция  $g(r_m, \varphi_m)$  определяет ее пространственное распределение.

Для расчета множественности плазмы нами использовалась следующая модель: первичные частицы, ускоренные в определенном в первой части нашей работы потенциале  $\psi(r_m, \varphi_m, z)$  до значений лоренц-факторов  $\gamma_e \sim 10^7$ , рожают первичные фотоны, которые, в свою очередь, поглощаясь в магнитном поле, дают начало синхротронному каскаду рождения пар [35, 36]. Считая, что длины свободного пробега фотонов много меньше расстояния от центра звезды до точки излучения [36], синхротронный каскад можно считать локальным в пространстве. Тогда, в рамках такой модели получаем следующее выражение для количества вторичных частиц, рожденных одной первичной частицей:

$$\lambda_1 = \int_0^\infty dz_e \int_0^\infty d\varepsilon_i n_\gamma(z_e, \varepsilon_i; r_m, \varphi_m) f_{SR}(z_e, \varepsilon_i; r_m). \quad (23)$$

Здесь  $z_e$  есть высота излучения изгибного фотона,  $z_a$  — высота его поглощения в магнитном поле, а  $n_\gamma$  — спектр первичных фотонов. Наконец, функция  $f_{SR}$  определяет число вторичных частиц, рожденных одним фотоном с энергией  $\varepsilon_i$ , поглощенным на высоте  $z_e$ . Для ее определения мы воспользуемся подходом, предложенным в работе [36], однако теперь вычисления будут проводиться с учетом зависимости всех величин от координат на полярной шапке.

Введя теперь равновесные объемные темпы рождения вторичных пар  $Q_p$  и фотонов  $Q_\gamma$ , можно записать следующее выражение для числа вторичных частиц  $f_{SR}$ :

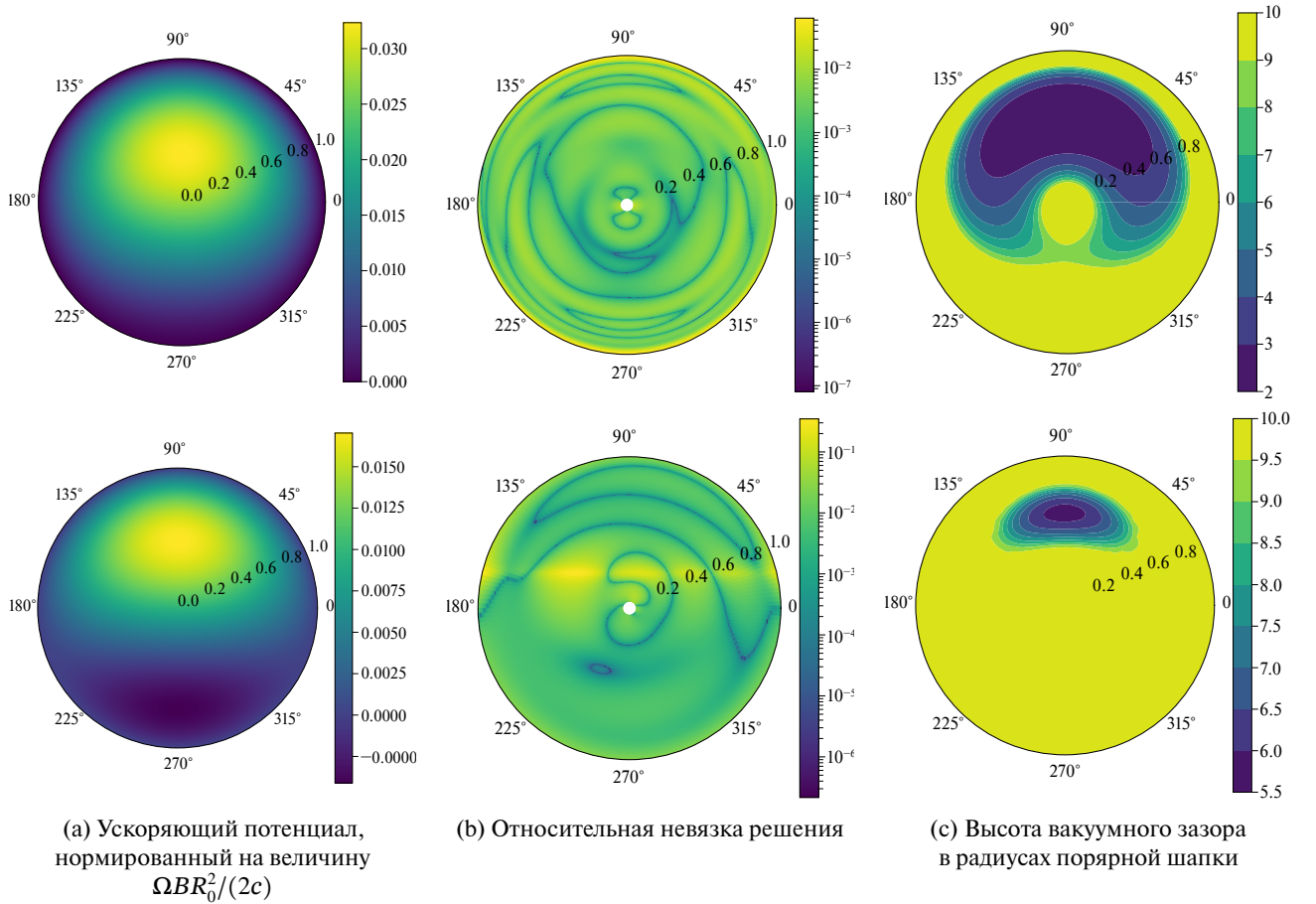
$$\begin{aligned} f_{SR}(\varepsilon_i) &= \int_0^\infty d\varepsilon Q_p(\varepsilon, \varepsilon_i) = \\ &= \int_0^\infty d\varepsilon (1 - e^{-\tau_\infty(\varepsilon)}) Q_\gamma(\varepsilon, \varepsilon_i), \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\tau_\infty$  является предельной оптической толщиной магнитосферы. В свою очередь, функцию  $Q_\gamma$  можно определить из интегрального уравнения [36]:

$$\begin{aligned} Q_\gamma(\varepsilon, \varepsilon_i) &= \int_0^\infty d\varepsilon' [1 - e^{-\tau_\infty(\varepsilon')}] \times \\ &\times \frac{1}{\varepsilon'} K\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right) [\delta(\varepsilon' - \varepsilon_i) + Q_\gamma(\varepsilon', \varepsilon)]. \end{aligned} \quad (25)$$

В этом уравнении функция  $K(\varepsilon/\varepsilon')$  имеет вид:

$$\begin{aligned} K\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right) &= \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \sqrt{\Lambda} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)^{-3/2} \times \\ &\times \left[ G\left(\Lambda \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right) - G\left((1 + a^2) \Lambda \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right) \right], \end{aligned} \quad (26)$$



**Рис. 5.** Примеры расчета ускоряющего потенциала для ортогональных пульсаров с  $B_{12} = 1.5$ ,  $P = 0.3$  с,  $\chi = 88^\circ$  для верхнего ряда и  $\chi = 89.3^\circ$  — для нижнего. Приведены максимальные значения потенциала над полярной шапкой, нормы невязки уравнения Пуассона на высоте  $0.5 R_0$ , а также высоты вакуумных зазоров в радиусах полярной шапки

где  $a = 3 B_{\text{cr}} / (4B \ln \Lambda)$ , а  $\Lambda$  определяется выражением (12). В свою очередь

$$G(t) = \int_t^\infty dx K_{5/3}(x) (x^{3/2} - t^{3/2}). \quad (27)$$

Решение данного уравнения несложно получить, вводя дискретизацию в логарифмическом масштабе и решая соответствующее матричное уравнение. На рис. 6 показаны примеры расчета спектра вторичных частиц в зависимости от местоположения формирования каскада. Как мы видим, с ростом высоты  $z$  формируется степенной спектр вторичных частиц. Этот хорошо известный факт [35, 36] подтверждает справедливость нашего рассмотрения.

Далее, для определения спектра первичных фотонов  $n_\gamma$ , как и при расчете потенциала, необходимо рассмотреть два источника: изгибное излучение и обратное комптоновское рассеяние. Для оценки вклада комптоновского рассеяния можно воспользоваться приближенными выражениями для темпа рождения пар (числа фотонов, рождаемых одной первичной частицей) [23]:

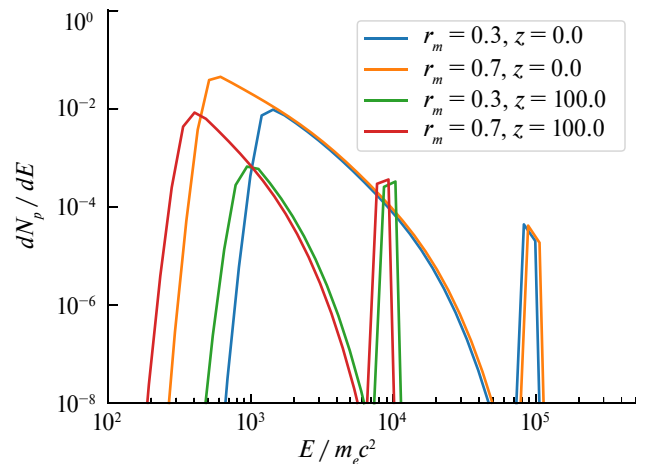
$$\dot{N}_{NR} \approx 1.5 \times 10^9 \gamma^{-1} T_6^2 \Delta\mu \text{ с}^{-1}, \quad (28)$$

$$\dot{N}_R \approx 10^{13} \gamma^{-2} B_{12} T_6 \text{ с}^{-1}, \quad (29)$$

$$\dot{N}_{CR} \approx \gamma \rho_8^{-1} \text{ с}^{-1}. \quad (30)$$

Здесь индексы NR, R и CR соответствуют нерезонансному комптоновскому рассеянию в пределе Клейна–Нишины, резонансному комптоновскому рассеянию и изгибному излучению.

Величина  $T_6$  является температурой полярной шапки в единицах  $10^6$  K,  $\rho_8$  — радиус кривиз-



**Рис. 6.** Спектр синхротронного каскада, запущенного фотоном с энергией  $\epsilon_\gamma = 10^6$  для различных значений  $r_m$  и  $z$

ны магнитных силовых линий в единицах  $10^8$  см, а  $\Delta\mu = 1 - \mu_{\min}$ . Сравнить эффективность генерации вторичной плазмы для трех механизмов можно, домножив величины  $\dot{N}$  на фактор  $f_{\text{SR}}(\varepsilon_\gamma(\gamma_e))$ , где механизм генерации первичных фотонов определяет вид  $\varepsilon_\gamma(\gamma_e)$ . Так, для изгибного излучения  $\varepsilon_\gamma \sim 3/2 \lambda_e/R_c \gamma_e^3$ , для нерезонансного обратного комптоновского рассеяния в пределе Клейна–Нишины  $\varepsilon_\gamma \sim \gamma_e$ , а для резонансного —  $\varepsilon_\gamma \sim 2\gamma_e\varepsilon_B$ . Учитывая, что характерный масштаб генерации вторичной плазмы есть масштаб спада магнитного поля, т. е. радиус звезды, величину  $\lambda_1$  можно оценить как  $\dot{N}(\gamma_e)f_{\text{SR}}R/c$ .

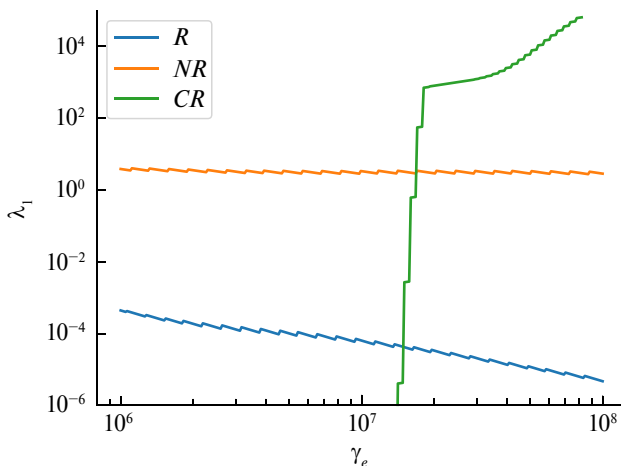
Результаты расчета для интересующих нас  $\gamma$ -факторов первичных частиц представлены на рис. 7. Как можно видеть, во всем интересующем нас диапазоне энергий обратным комптоновским рассеянием можно пренебречь. Более того, результаты для нерезонансного рассеяния, представленные на рис. 7, получены для  $\Delta\mu = 1$ , в то время как характерные значения  $\Delta\mu$  на высотах порядка радиуса звезды составляют  $(R_0/R)^2 \ll 1$ .

Поскольку же, как уже было сказано выше, масштаб генерации вторичной плазмы составляет несколько радиусов звезды, приведенная оценка на самом деле значительно завышена. Поэтому в данном разделе мы ограничимся рассмотрением только изгибного механизма. В этом случае концентрация первичных фотонов  $n_\gamma$  определяется спектром изгибного излучения

$$dN_\gamma^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^2}{cR_c(z)} \frac{\gamma_e F(\omega/\omega_c)}{\hbar\omega} d\omega dz \equiv n_\gamma d\omega dz, \quad (31)$$

где

$$F(t) = t \int_t^\infty K_{5/3}(x) dx \quad (32)$$



**Рис. 7.** Сравнение эффективности генерации вторичной плазмы для изгибного излучения и обратного резонансного и нерезонансного комптоновского рассеяния

и

$$\omega_c = \frac{3}{2} \frac{c}{R_c} \gamma_e^3. \quad (33)$$

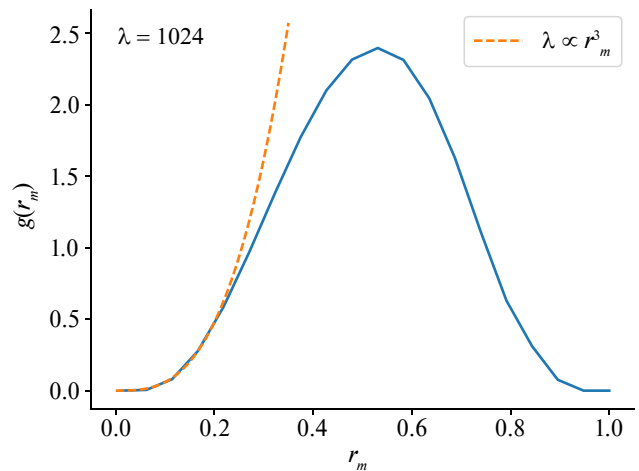
Определив количество частиц  $\lambda_1$ , рождаемых одной первичной частицей, можно найти и концентрацию вторичной плазмы, домножив  $\lambda_1$  на концентрацию первичных частиц, то есть на гольдрайховскую плотность. Тогда, согласно определению (22), имеем

$$\lambda g(r_m, \phi_m) = \lambda_1(r_m, \phi_m) \times \begin{cases} 1, & \chi < 85^\circ, \\ \frac{\cos \theta_b}{\sqrt{\frac{\Omega R}{c}}}, & \chi > 85^\circ. \end{cases} \quad (34)$$

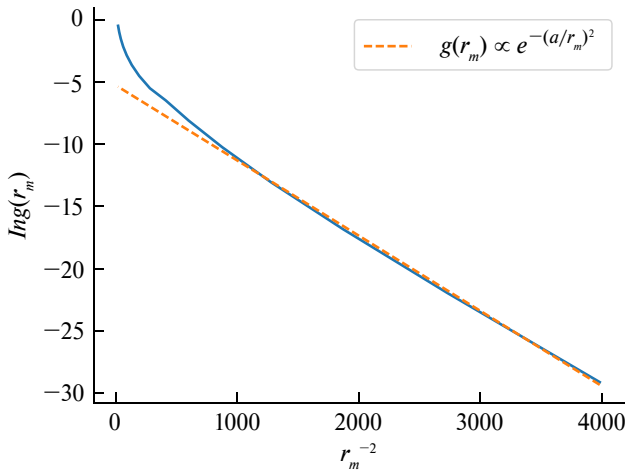
#### 4.2. Осесимметричный случай

Как и при определении ускоряющего потенциала, удобно отдельно рассматривать неортогональные и ортогональные пульсары. В осесимметричном случае полученные результаты интересно сравнить с работой [35], где аналогичные вычисления проводились, фактически, для пульсаров вблизи линии смерти (т. е. вся магнитосфера полагалась вакуумной). Хотя качественная форма полученных профилей совпадает с результатами данной работы, существует и несколько существенных отличий.

Прежде всего, оказалось, что энергии первичных фотонов, как правило, не хватает, чтобы запустить многоступенчатый синхротронный каскад. То есть величина  $f_{\text{SR}}$  близка к 1 для энергий изгибных фотонов. Соответственно, и множественность вторичной плазмы при одинаковых параметрах оказалась меньше, чем в работе [35]. Еще одно отличие касается асимптотического поведения профиля концентрации вблизи магнитной оси. В то время как в работе [35] на основании качественных соображений утверждалось, что с хорошей точностью можно положить  $g(r_m) \propto r_m^3$  при  $r_m \ll 1$ , в настоящей



**Рис. 8.** Профиль концентрации вторичной плазмы  $g(r_m)$  для пульсара с параметрами  $P = 0.5$  с,  $B_{12} = 1.0$ ,  $\chi = 10^\circ$ . Штриховой линией показано приближение  $g \propto r_m^3$



**Рис. 9.** Линеаризация поведения профиля концентрации в пределе  $r_m \rightarrow 0$ . Штриховой линией показана асимптотика  $g(r_m) \propto e^{-(a/r_m)^2}$ .

работе был получен результат  $g(r_m) \propto \exp[-a^2/r_m^2]$ ,  $a \ll 1$  (рис. 8, 9). Данная асимптотика следует из разложения спектра изгибного излучения (31) вблизи магнитной оси, который не был учтен в работе [35]. Стоит, однако, отметить, что полученная выше асимптотика применима лишь вблизи магнитной оси ( $r_m < 0.03$ ), в то время как кубическая зависимость лучше описывает профиль на больших масштабах  $0.03 < r_m < 0.2$ . Так что для практических целей следует пользоваться асимптотикой  $g(r_m) \propto r_m^3$ .

#### 4.3. Неосесимметричный случай

На рис. 10 показаны поперечные профили концентрации  $lg(r_m, \phi_m)$  для различных магнитных полей  $B_{12}$  и углов наклона  $\chi$  и для периода  $P = 0.3$  с, характерного для интеримпульсных пульсаров. Как можно видеть, для умеренных магнитных полей и углов  $\chi$ , мало отличающихся от  $90^\circ$ , генерация плазмы оказывается в значительной степени подавленной. При этом профили плотности в целом повторяют профили, определенные ранее в работе [20] в рамках качественного рассмотрения. Тем самым остается в силе и основной вывод этой статьи, касающийся статистики интеримпульсных пульсаров (наблюдаемое число интеримпульсных пульсаров говорит в пользу закона эволюции угла  $\chi$  в сторону углов  $\sim 90^\circ$ ).

Напомним, что для ортогональных пульсаров сама возможность генерации вторичной плазмы оказывается под вопросом. Действительно, при  $\chi \sim 90^\circ$  гольдрайховская плотность (3) значительно меньше, чем в неортогональном случае. Так как данная величина является источником в уравнении Пуассона (4), при прочих равных условиях ортогональные пульсары должны обладать заметно меньшим ускоряющим потенциалом, что должно сказаться на возможности генерации плазмы.

Особенно интересен этот вопрос в контексте необходимой для генерации вторичной плазмы ве-

личины магнитного поля, оценить которое невозможно без явного использования модели эволюции. Хотя для обыкновенных пульсаров выбор конкретной модели приводит лишь к различию на фактор  $\sim 2 - 3$ , для ортогональных пульсаров разница может быть заметно больше. Действительно, в то время как общепринятая МГД-модель эволюции [37–39] предсказывает магнитные поля, мало отличающиеся от стандартной оценки  $B_{12} \approx \dot{P}_{-15}^{1/2} P^{1/2}$ ,

$$B_{12}^{\text{MHD}} \approx \frac{\dot{P}_{-15}^{1/2} P^{1/2}}{\sqrt{1 + \sin^2 \chi}}, \quad (35)$$

в рамках BGI-модели, предложенной в работе [40], магнитное поле записывается в виде

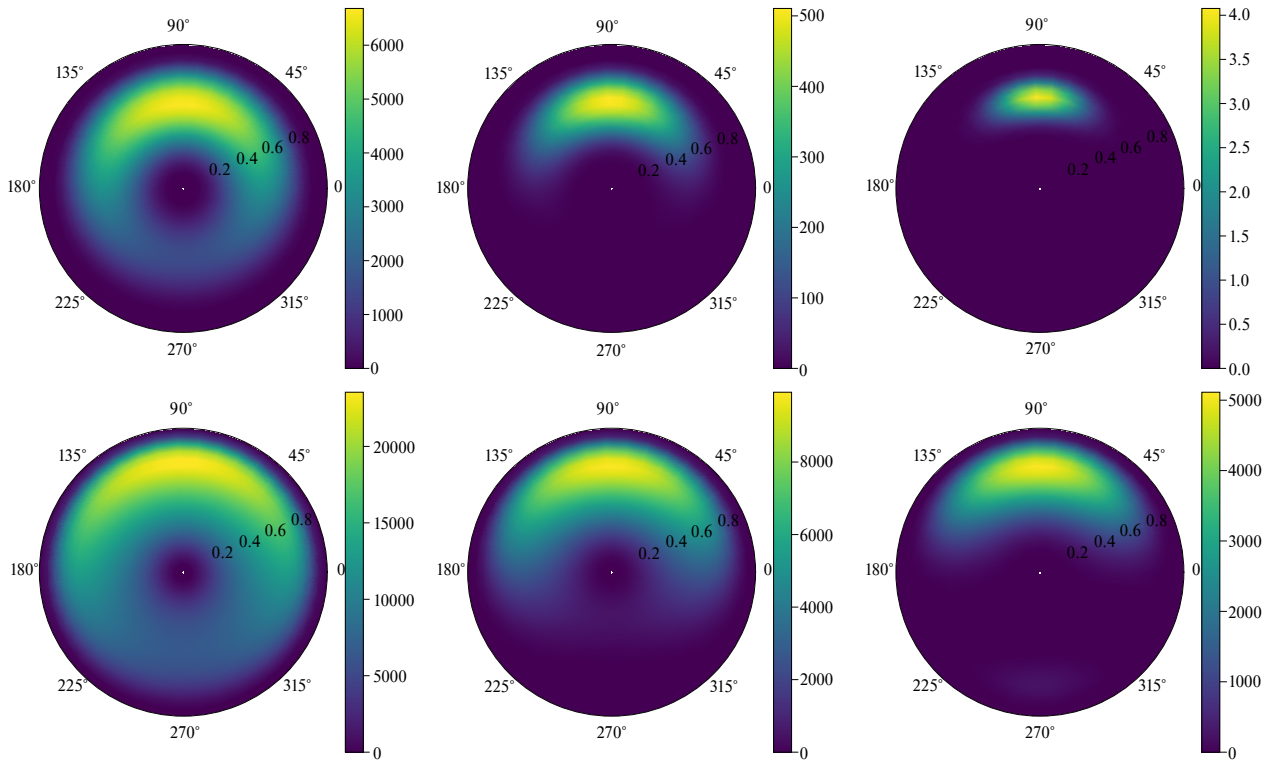
$$B_{12}^{\text{BGI}} \approx \frac{\dot{P}_{-15}^{1/2} P^{1/2}}{\sqrt{\cos^2 \chi + C}}, \quad (36)$$

где  $C \sim \sqrt{\Omega R/c} \ll 1$ . В результате соотношение (36) для ортогональных пульсаров приводит к оценке  $B_{12} \approx 10 P^{3/4} \dot{P}_{-15}^{1/2}$  [20], которая дает значения магнитного поля, в несколько раз большие, чем предсказывает модель МНД. А при больших магнитных полях условие генерации вторичных частиц для ортогональных пульсаров будет выполнено в большем диапазоне периодов. Иными словами, и здесь возникает указание на справедливость модели BGI.

Этот вопрос, однако, требует более детального анализа, выходящего за рамки настоящей работы. Соответственно, в данной работе не преследовалась и цель проводить расчеты для конкретных радиопульсаров, этому будет посвящена отдельная статья. В частности поэтому мы ограничились лишь обсуждением самой модели генерации вторичной плазмы для магнитных полей, превышающих стандартные оценки для интеримпульсных пульсаров, но не выходящих за пределы применимости нашей модели:  $B < B_{\text{cr}}$  [41]. В следующей статье предполагается также использовать эту модель для определения средних профилей наблюдаемого радиоизлучения.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе был предложен новый подход к определению ускоряющего потенциала над полярной шапкой нейтронной звезды. В его основе лежит концепция вакуумного зазора, высота которого предполагается зависимой от координат на полярной шапке и определяется самосогласованно с электрическим потенциалом. Для реализации данного подхода была построена численная процедура, заключающаяся в итеративном решении уравнения Пуассона в вакуумной области и пересчете ее верхней границы. Для решения трехмерного уравнения Пуассона в области с изменяющейся геометрией был успешно применен метод PINN.



**Рис. 10.** Поперечные профили концентрации  $\lambda g(r_m, \phi_m)$  для ортогональных пульсаров для различных магнитных полей и углов наклона

Важно отметить, что предложенный подход впервые позволил количественно определить структуру ускоряющего потенциала для ортогональных пульсаров, являющуюся для таких объектов существенно неосесимметричной. Используя данный метод и модель генерации вторичной электрон-позитронной плазмы были проведены расчеты поперечных профилей концентрации как для обыкновенных, так и для ортогональных пульсаров. Также было исследовано влияние обратного комптоновского рассеяния на рассматриваемые процессы и было показано, что даже при температуре полярной шапки  $T \sim 10^6$  К этим процессом можно пренебречь.

Далее, для ортогональных пульсаров было проведено предварительное исследование зависимости эффективности генерации электрон-позитронных пар от величины магнитного поля и угла наклона магнитной оси к оси вращения. Было показано, что для углов  $89^\circ \lesssim \chi \lesssim 91^\circ$  и умеренного магнитного поля  $B_{12} \sim 2$ , множественность вторичной плазмы оказывается на несколько порядков меньше, чем для обыкновенных пульсаров. В то же время, как хорошо известно [20], ортогональные радиопульсары наблюдаются, и оценки угла наклона магнитной оси к оси вращения для некоторых из этих объектов попадают в указанный диапазон.

Можно предложить несколько объяснений такому противоречию. В первую очередь, так как оценки углов наклона пульсаров имеют большую погрешность, может оказаться, что пульсары с такими углами просто не наблюдаются. Другим объяснением

может являться большее по сравнению с магнитодипольной оценкой магнитное поле, что в свою очередь предполагает уточнение модели эволюции пульсаров. Также не стоит исключать и возможную недипольность магнитного поля для таких объектов, также способную усилить процессы генерации вторичной плазмы. Таким образом, данное наблюдение мотивирует обратить большее внимание на светимости ортогональных пульсаров и оценки их углов наклона магнитной оси к оси вращения.

Наконец, отметим, что одним из основных приложений полученных результатов является изучение распространения радиоизлучения в магнитосфере нейтронной звезды. Действительно, как было показано в работах [6, 35, 42], эффекты преломления и поглощения играют существенную роль в формировании среднего профиля интенсивности. Таким образом, верификация моделей генерации радиоизлучения невозможна без учета реального поперечного профиля концентрации вторичной плазмы. Кроме того, информация о профилях плотности плазмы для ортогональных пульсаров позволит уточнить их функцию видимости, что необходимо для анализа статистики данных объектов [20].

Конечно, нельзя не отметить модельность решенной задачи. Действительно, многие численные [10, 13, 16] и аналитические [43] работы указывают на существенную нестационарность генерации вторичной плазмы. Таким образом, границы применимости предложенной модели требуют отдельного, детального исследования. Тем не менее

на данный момент не существует нестационарных моделей, позволяющих определить пространственное распределение вторичной плазмы над полярной шапкой. Тем интереснее будет сравнить результаты данной работы с нестационарными численными моделями, когда их точность станет достаточной для определения профиля плотности истекающей плазмы.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-22-00120).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *S. Johnston, M. Kramer, A. Karastergiou, M.J. Keith, L.S. Oswald, A. Parthasarathy, and P. Weltevrede*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 520(4), 4801 (2023).
2. *B. Posselt, A. Karastergiou, S. Johnston, A. Parthasarathy, et al.*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 508(3), 4249 (2021).
3. *P.F. Wang, J.L. Han, J. Xu, C. Wang, et al.*, Res. Astron. and Astrophys. 23(10), id. 104002 (2023).
4. *V. Radhakrishnan and D.J. Cooke*, Astrophys. Letters 3, 225 (1969).
5. *L. Oster and W. Sieber*, Astrophys. J. 210, 220 (1976).
6. *V.S. Beskin and A.A. Philippov*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 425(2), 814 (2012).
7. *M.A. Ruderman and P.G. Sutherland*, Astrophys. J. 196, 51 (1975).
8. *B.C. Бескин*, Успехи физ. наук 188(4), 377 (2018).
9. *A.N. Timokhin*, Astrophys. J. 408(1), L41 (2010).
10. *A.N. Timokhin and J. Arons*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 429(1), 20 (2013).
11. *A.A. Philippov and A. Spitkovsky*, Astrophys. J. 785, id. L33 (2014).
12. *A. Tchekhovskoy, A. Philippov, and A. Spitkovsky*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 457, 3384 (2016).
13. *A.N. Timokhin and A.K. Harding*, Astrophys. J. 810(2), id. 144 (2015).
14. *F. Cruz, T. Grismayer, A.Y. Chen, A. Spitkovsky, and L.O. Silva*, Astrophys. J. Letters 919(1), id. L4 (2021).
15. *L.I. Arzamasskiy, V.S. Beskin, and K.K. Pirov*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 466(2), 2325 (2017).
16. *A.A. Philippov, A. Spitkovsky, and B. Cerutti*, Astrophys. J. Letters 801(1), id. L19 (2015).
17. *V.S. Beskin, A.V. Gurevich, and I.N. Istomin*, Sov. J. Experim. Theoret. Phys. 58(2), 235 (1983).
18. *S.E. Gralla, A. Lupsasca, and A. Philippov*, Astrophys. J. 851(2), id. 137 (2017).
19. *P. Goldreich and W.H. Julian*, Astrophys. J. 157, 869 (1969).
20. *E.M. Novoselov, V.S. Beskin, A.K. Galishnikova, M.M. Rashkovetskiy, and A.V. Biryukov*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 494(3), 3899 (2020).
21. *P. Sturrock*, Astrophys. J. 164, 529 (1971).
22. *V.S. Beskin and P.E. Litvinov*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 510(2), 2572 (2022).
23. *J.A. Hirschman and J. Arons*, Astrophys. J. 554(1), 624 (2001).
24. *B. Zhang, G.J. Qiao, W.P. Lin, and J.L. Han*, Astrophys. J. 478(1), 313 (1997).
25. *G.R. Blumenthal and R.J. Gould*, Rev. Modern Physics 42(2), 237 (1970).
26. *В.Б. Бепестецкий, Е.М. Луфшиц, Л.П. Пумаевский*, Квантовая электродинамика (М.: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1989).
27. *H. Herold*, Phys. Rev. D 19(10), 2868 (1979).
28. *C. D. Dermer*, Astrophys. J. 360, 197 (1990).
29. *A.T. Chantada, S.J. Landau, P. Protopapas, C.G. Scoccola, and C. Garraffo*, Phys. Rev. D 107(6), id. 063523 (2023).
30. *S. Mishra and R. Molinaro*, J. Quant. Spectroscop. Radiative Transfer 270, id. 107705 (2021).
31. *P. Stefanou, J.F. Urbán, and J.A. Pons*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 526(1), 1504 (2023).
32. *I. Dimitropoulos, I. Contopoulos, V. Misketzis, and E. Chaniadakis*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 528(2), 3141 (2024).
33. *S. Markidis*, Frontiers in Big Data 4, id. 669097 (2021).  
<https://doi.org/10.3389/fdata.2021.669097>
34. *J. Arons*, Astrophys. J. 266, 215 (1983).
35. *V.S. Beskin, A.Yu. Istomin, and A.G. Mikhaylenko*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 526(2), 1633 (2023).
36. *J.A. Hirschman and J. Arons*, Astrophys. J. 560(2), 871 (2001).
37. *A. Spitkovsky*, Astrophys. J. 648(1), L51 (2006).
38. *C. Kalapotharakos, I. Contopoulos, and D. Kazanas*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 420(4), 2793 (2012).
39. *A. Tchekhovskoy, A. Philippov, and A. Spitkovsky*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 457(3), 3384 (2016).
40. *V.S. Beskin, A.V. Gurevich, and Ya.N. Istomin*, Physics of the Pulsar Magnetosphere (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993).
41. *Ya.N. Istomin and D.N. Sobyenin*, Astron. Letters 33(10), 660 (2007).
42. *S.A. Petrova and Y.E. Lyubarskii*, Astron. and Astrophys. 355, 1168 (2000).
43. *E.A. Tolman, A.A. Philippov, and A.N. Timokhin*, Astrophys. J. Letters 933(2), id. L37 (2022).

## ACCELERATION POTENTIAL AND DENSITY PROFILE OF SECONDARY PLASMA IN THE MAGNETOSPHERE OF ORTHOGONAL PULSARS

© 2025 A. Yu. Istomin<sup>1,2</sup>, F. A. Kniazev<sup>1,2</sup>, V. S. Beskin<sup>2,1,\*</sup>

<sup>1</sup>*Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russia*

<sup>2</sup>*P. N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

*\*e-mail: beskin@td.lpi.ru*

A new method for determining the accelerating potential above the polar caps of radio pulsars with an arbitrary inclination angle of the magnetic axis to the rotation axis is proposed. The approach is based on the concept of a vacuum gap, the height and shape of the upper boundary of which are found self-consistently together with the solution of the corresponding Poisson equation. In turn, knowledge of the accelerating potential allows one to determine the transverse profiles of the secondary plasma density. It is also shown that the influence of inverse Compton scattering on the processes under consideration is insignificant.

*Keywords:* radio pulsars, accelerating potential, secondary plasma

# ВЛИЯНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ФАКТОРОВ НА ЭНЕРГИЮ СОЛНЕЧНОЙ ВСПЫШКИ

© 2025 г. В. Л. Мерзляков

*Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н. В. Пушкова РАН,  
Троицк, Москва, Россия  
e-mail: mvl@izmiran.ru*

Поступила в редакцию 20.03.2024 г.

После доработки 11.09.2024 г.

Принята в печать 11.09.2024 г.

Изучаются факторы, влияющие на энергетику солнечной вспышки. Исследование проводилось в рамках модели ускорения частиц в магнитной X-особенности. Было установлено, что энергия вспышки зависит главным образом от потока электронов в зону ускорения. А изменение такого потока в свою очередь определяется размерами зоны ускорения. Расчеты показали, что для хромосферного источника вспышки вертикальная протяженность зоны ускорения изменяется от  $\sim 100$  км до  $\approx 2 \cdot 10^3$  км, а ее диаметр от  $\sim 1$  км до  $\approx 100$  км.

*Ключевые слова:* Солнце, вспышки, ускорение частиц

DOI: 10.31857/S0004629925010068, EDN: HLSRMW

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из проявлений солнечной активности являются вспышки. Во время вспышки выделяется огромное количество энергии — до  $10^{32}$  эрг. Последствия столь мощного явления отражаются на состоянии земной атмосферы. В связи с этим возникает естественное желание прогнозировать появление вспышки и ее энергетику. В настоящее время вопрос о предсказании появления вспышки остается открытым, но есть некоторые наблюдательные связи мощности вспышки с величиной магнитного потока и размерами активной области, где подавляющее количество вспышек и происходит. Между тем, в активных областях с указанными особенностями случаются и вспышки малой мощности  $\sim 10^{27}$  эрг. Чтобы понять причину этого, необходимо установить влияющие на энергетику вспышки факторы, чему и посвящено предлагаемое исследование.

## 2. МОДЕЛЬ ВСПЫШКИ

В солнечной вспышке происходит выделение большого количества энергии за короткое время. В настоящее время наиболее популярной является идея магнитного пересоединения. Такое пересоединение происходит в магнитной X-особенности и формирует токовый слой. Однако в солнечных условиях появление токового слоя требует многих часов, а процесс эффективного выделения энергии во время солнечной вспышки занимает несколько минут. Между тем в самой магнитной X-особенности происходит быстрое ускорение электронов [1]. В связи с такой ситуацией автор полагает, что основным источником энергии сол-

нечной вспышки являются ускоренные электроны в X-особенности.

Появление магнитной X-особенности возможно, в частности, около нейтральной линии магнитного поля, где по разные стороны возникают зоны локального усиления магнитного поля. Возникают эти зоны вследствие конвективных движений плазмы. Процесс такого усиления описан в работе [2], где приведены примеры численного расчета, которые показывают усиление магнитного поля на порядок величины. Для нашего случая достаточно иметь по две зоны локально усиленного магнитного поля разного знака, чтобы возникла магнитная конфигурация с X-особенностью. Такая система 4-х магнитных зон может быть описана как магнитный источник, имеющий дипольную, квадрупольную и октупольную магнитные гармоники. Совместное действие дипольной и октупольной гармоники приводит к формированию магнитной X-особенности.

Рассмотрим вариант симметричного магнитного поля с одним компонентом октупольной гармоники  $Q$ , которая соосна дипольной гармонике  $M$ . В сферической системе координат, связанной с диполем, радиальный компонент  $B_r$  и полярный компонент  $B_\theta$  магнитного поля будут иметь вид:

$$\begin{aligned} B_r &= 2M \cos \theta \cdot r^{-3} + 3Q \cos \theta (5 \cos 2\theta - 1) r^{-5}, \\ B_\theta &= M \sin \theta \cdot r^{-3} + 1.5Q \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) r^{-5}, \end{aligned} \quad (1)$$

где расстояние  $r$  отсчитывается от некоего эффективного центра, создаваемого локальными магнитными источниками, полярный угол  $\theta$  отсчитывается от направления вектора магнитного диполя.

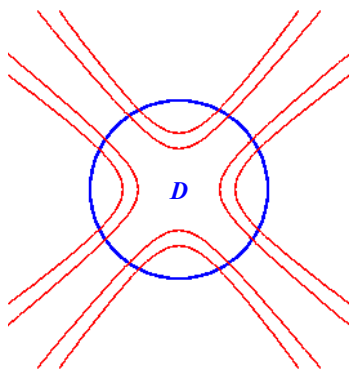
В окрестности  $B_r = 0$ ,  $B_\theta = 0$  и возникает магнитная X-особенность, которая изображена схематически на рис. 1, где кривые линии представляют силовые линии. Местоположение  $B_r = 0$  и  $B_\theta = 0$  образует окружность, которая лежит в плоскости, перпендикулярной дипольному моменту на угловом расстоянии  $\theta = 90^\circ$ . Указанная окружность имеет радиус  $(1.5Q/M)^{1/2}R_s$  (в единицах солнечного радиуса).

Следует отметить, что при наличии квадрупольной гармоники, создающей асимметрию конфигурации (1), магнитная X-особенность также возникает. Но плоскость, в которой лежит линия нулевого магнитного поля ( $B_r = 0$  и  $B_\theta = 0$ ), смещается по углу  $\theta$ . В случае, когда величина квадрупольной гармоники не превышает 1% от дипольной, такое смещение составляет не более  $5^\circ$  от симметричного случая  $\theta = 90^\circ$ .

Сформировавшие локальные магнитные зоны конвективные движения за время своего существования постоянно усиливают магнитное поле в таких зонах. Вследствие такого усиления происходит изменение напряженности магнитного поля (1). И такое изменение возбуждает вихревое электрическое поле. В принятой нами модели симметричного магнитного поля (1) электрическое поле будет иметь только  $\phi$  компонент, ориентированный перпендикулярно дипольному моменту. Величина этого компонента электрического поля согласно [3] определяется временной вариацией компонента  $B_\theta$  как

$$E_\phi = -c^{-1} \cdot (\partial B_\theta / \partial t) \cdot t. \quad (2)$$

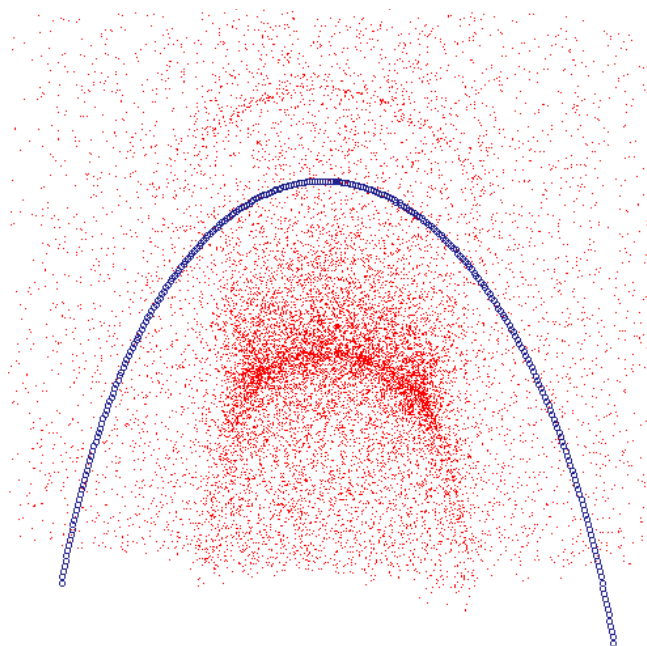
Электрическое поле (2) ориентировано так же, как и линия нулевого магнитного поля ( $B_r = 0$  и  $B_\theta = 0$ ), т. е. перпендикулярно силовым линиям в X-особенности (рис. 1). Возможность ускорения заряженных частиц полем (2) зависит от соотношения частоты столкновения и гирочастоты. В солнечной хромосфере и короне гирочастота существенно превышает частоту столкновения электронов и протонов. Электроны и протоны “замагничены”,



**Рис. 1.** Магнитная X-особенность в сечении перпендикулярном линии нулевого магнитного поля. Геометрия кривых показывает магнитные силовые линии. Область диаметром  $D$  отмечает зону, где заряженные частицы плазмы могут быть ускорены вихревым электрическим полем

что при наличии электрического поля приводит к их дрейфовому перемещению. В X-особенности напряженность магнитного поля уменьшается к центру, и на некотором расстоянии гирочастота уменьшается до такой величины, что становится меньше частоты столкновения. И начиная с такого расстояния электроны уже не “привязаны” к силовым линиям и могут ускоряться электрическим полем. Положения такой зоны, где электроны ускоряются полем (2), схематически отмечено на рис. 1 окружностью диаметром  $D$ . Физически такая зона ускорения представляет собой трубку около линии  $B_r = 0$ ,  $B_\theta = 0$ , которая показана на рис. 2 в виде набора колец. Следует понимать, что размер зоны  $D$  меняется вдоль указанной трубки в зависимости от окружающих условий.

Вне указанной зоны  $D$  (см. рис. 1) заряженные частицы участвуют в дрейфовом перемещении со скоростью  $\mathbf{V} = c \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B} / B^2$ . В результате такого дрейфа происходит перераспределение плотности плазмы в некоторой окрестности около изучаемого источника (1). В принятой нами симметричной модели (1) и (2) дрейфовое перемещение  $V$  приводит к появлению плотной структуры типа “петля”, когда временное изменение дипольной гармоники превышает изменение октупольной гармоники  $\partial M / \partial t > \partial Q / \partial t$ . Важно отметить, что петельная структура реально наблюдается во время импульсной фазы солнечной вспышки.



**Рис. 2.** Результаты модельного расчета дрейфового перемещения плазмы над магнитным источником (1) при наличии вихревого электрического поля (2). Дрейф создает места уплотнения в виде петли при начальном равномерном распределении модельных частиц. Конфигурация из колец отмечает положения области  $D$  магнитной X-особенности (см. рис. 1) вдоль линии нулевого магнитного поля

Расчеты дрейфового перемещения проводим в предположении, что электроны и протоны “замагничены”. В нашей симметричной модели источника магнитного поля (1) электроны и протоны перемещаются со скоростью  $V$ , которая имеет компоненты по радиусу  $r$  и углу  $\theta$ . Из формулы для дрейфовой скорости с учетом (2) указанные компоненты можно записать в виде произведения составляющих магнитного поля и их производных:

$$\begin{aligned} V_r &= r \cdot (\partial B_\theta / \partial t) B_\theta / B^2, \\ V_\theta &= -r \cdot (\partial B_r / \partial t) B_r / B^2. \end{aligned} \quad (3)$$

В формуле (3) составляющие магнитного поля  $B_r$  и  $B_\theta$  представляют собой выражения (1). Таким образом, в окрестности источника магнитного поля (1) определено поле скоростей. И в этом поле каждая частица движется со скоростью (3) в зависимости от ее координаты. Хотя выражение для скоростей (3) задается аналитическим способом, траекторию частицы проще рассчитывать численным способом.

На рис. 2 показан результат модельного расчета перемещения точечных частиц в поле скоростей (3) над источником с магнитным полем (1) с электрическим полем (2). Расчеты проводились численным способом при начальном равномерном распределении модельных точечных частиц в некоторой окрестности над источником, которая содержала в себе зону ускорения (система колец на рис. 2).

Представленный на рис. 2 вариант рассчитывался при относительных изменениях дипольного и октупольного моментов  $\partial M / M \partial t = 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ ,  $\partial Q / Q \partial t = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$  и  $Q / M = 10^{-3} R_s^2$ . Указанные величины, как ожидается, являются типичными для солнечной вспышки. Показан результат расчета после 2000 с от начала процесса, когда “включается” поле скоростей (3). В этом случае уплотнение “петли” относительно начального распределения в среднем около 5. Важно отметить, что наблюдаться такая “петля” будет существенно контрастнее, поскольку поток излучения плазмы пропорционален квадрату плотности. В рассмотренном случае (см. рис. 2) уже на 100 с от начала процесса плотность точек увеличилась в 2 раза относительно начальной. И такая петельная структура будет хорошо заметна, поскольку поток от нее превысит окружающее излучение в 4 раза.

Эволюция петельной структуры (см. рис. 2) зависит от временных изменений дипольной и октупольной гармоник магнитного поля источника 1. В этой связи открывается возможность изучения изменений величин этих гармоник по наблюдению плотности и геометрии “петли” (см. рис. 2). Наблюдаемая вариация плотности, как изменение наблюдаемого контраста, зависит от относительного роста дипольной гармоник  $\partial M / M \partial t$ . Высота “петли” определяется отношением  $Q / M$ , которое в соответствии с установленным различием временных вариаций, не остается постоянным. Для указанной возможно-

сти требуется анализ наблюдательных данных, и это тема отдельного исследования.

### 3. ЭНЕРГИЯ ВСПЫШКИ

Во время солнечной вспышки наблюдается рентгеновское излучение, которое возникает вследствие свободно-свободного излучения ускоренных электронов. Подавляющая доля такого потока приходит из двух хромосферных источников вспышки. Согласно рассматриваемой модели вспышки наблюдаемая ситуация указывает на основную долю ускоряемых электронов именно в хромосферных источниках. Поэтому для изучения энергетических факторов вспышки надо рассмотреть именно эти источники.

Выделяемая в указанном источнике энергия  $W_f$  зависит от количества ускоряемых электронов, их энергии и длительности процесса ускорения электронов:

$$W_f = 2 \int w_e (\partial N_e / \partial t) dt = 2 \langle w_e \rangle \langle \partial N_e / \partial t \rangle t_f. \quad (4)$$

Множитель двойка в выражении для энергии (4) означает, что хромосферных источников два (см. рис. 2). Нас интересует влияния различных факторов на суммарную энергию вспышки, поэтому проведем анализ средних значений набираемой энергии электроном  $\langle w_e \rangle$ , потока электронов в зону ускорения  $\langle \partial N_e / \partial t \rangle$ , длительности процесса ускорения  $t_f$ .

Наблюдаемая импульсная фаза вспышки, когда и происходит ускорение электронов, составляет десятки минут. Этот временной масштаб явления  $\sim 10^3$  с указывает на то, что локальное магнитное конфигурация с X-особенностью создается конвекцией мезогрануляционного масштаба. Значит, импульсная фаза не может превышать времени жизни мезогрануляции  $\approx 2 \cdot 10^3$  с. Минимальная наблюдаемая длительность этой фазы для слабых вспышек  $\approx 500$  с. В таком случае влияние фактора  $t_f$  на энергию солнечной вспышки оказывается менее 5 раз.

Ситуация с набираемой электроном энергии  $\langle w_e \rangle$  зависит от условия ускорения, которое определяется соотношением между вихревым электрическим полем (2) и величиной поля Драйзера. Для нашей задачи интерес представляет среднее значение вариации магнитного поля (2)  $\langle \partial M / \partial t \rangle = \Delta B / \Delta t$  в течение фазы ускорения. Длительность этой фазы  $\Delta t \approx 10^3$  с. Ситуация с вариацией магнитного поля зависит от соотношения временных изменений дипольной и октупольной гармоник источника (1). Если есть различие между ними в несколько раз, тогда  $\Delta B$  будет определяться изменением напряженности магнитного поля в окрестности X-особенности. Индикатором пространственного положения X-особенности является высота коронального источника вспышки (см. рис. 2). Эта высота находится в пределах 20–40 тыс. км, где напряженность магнитного поля в активной области

$\sim 10$  Гс. Изменение напряженности магнитного поля источником (1), как было сказано выше (п. 2), может быть до десяти раз. Тогда вариация магнитного поля в X-особенности за время импульсной фазы  $\Delta B$  может быть более 10 Гс. При указанных величинах ( $r > 20$  тыс. км) из формулы (2) получаем среднюю величину электрического поля  $\langle E_\phi \rangle > 10^{-3}$  [СГС].

Поле Драйсера  $E_D \approx 10^{-10} n_p / T_e$  [СГС], где плотность протонов в хромосфере  $n_p \leq 10^{12} \text{ см}^{-3}$ . Электронная температура в зоне ускорения  $T_e \sim 10^7 \text{ К}$  [4, 5]. Тогда величина поля Драйсера  $E_D < 10^{-5}$  [СГС], т.е. более чем на 2 порядка меньше возбуждаемого вихревого поля во время вспышки. В процессе вспышки представляется очень маловероятным, чтобы поле  $E_\phi$  отличалось от среднего более, чем на 2 порядка. Значит, ускорение электронов во время импульсной фазы вспышки происходит в режиме убегания.

В режиме убегания электроны тормозятся возбуждаемой ими неустойчивостью. В нашем случае, когда магнитное поле не влияет на ситуацию, быстрее всего возбуждается неустойчивость Бунемана. Неустойчивость возникает, когда потоковая скорость электронов в несколько раз превышает тепловую. Для мощных вспышек электронная температура в зоне ускорения 40 МК [5], которая соответствует энергии  $10^{-8}$  эрг. Для возбуждения неустойчивости набираемая электроном скорость в процессе ускорения, очевидно, не может превышать тепловую больше, чем на порядок. Это означает, что энергия электрона в процессе ускорения  $\langle w_e \rangle < 10^{-6}$  эрг или  $\approx 600$  кэВ. Для слабых вспышек с температурой в зоне ускорения 6 МК [4] энергия электрона  $\langle w_e \rangle < 1.5 \cdot 10^{-7}$  эрг ( $\approx 90$  кэВ). В таком случае влияние  $\langle w_e \rangle$  на диапазон изменения энергии вспышек не более 7 раз — менее порядка величины.

Полученные оценки ускоряемых электронов являются весьма неопределенными. Но такая неопределенность, вероятно, не превышает фактора 2, поскольку наблюдаемое рентгеновское излучение мощных вспышек указывает на присутствие электронов с энергией до 300 кэВ. Важно отметить, что количество электронов, ускоряемых в режиме убегания, должно составлять наибольшую долю от поступающих в зону ускорения электронов вследствие большого превышения возбуждаемого вихревого электрического поля над полем Драйсера.

Наблюдаемый диапазон энергии солнечной вспышки  $10^{27} - 10^{32}$  эрг. Тогда из формулы (3) и оценки  $\langle w_e \rangle$  и  $t_f$  для слабых и мощных вспышек получаем для потока электронов  $\langle \partial N_e / \partial t \rangle \sim 10^{31} - 10^{35}$  электрон/с.

#### 4. ОБЛАСТЬ УСКОРЕНИЯ

Электроны попадают в зону ускорения по силовым линиям из окружающей плазмы (см. рис. 1). Количество таких электронов зависит от скорости,

плотности и объема зоны ускорения. Для простоты расчетов примем геометрию зоны ускорения  $D$  в виде окружности. Тогда поток электронов зависит от указанных выше параметров как

$$\begin{aligned} \langle \partial N_e / \partial t \rangle &= \langle v_r \rangle \pi D \cdot 0.5 \int n_e dh = \\ &= 0.5 \langle v_r \rangle \langle n_e \rangle \pi D \cdot H, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\langle v_r \rangle$  — средняя величина радиально направленной скорости электронов,  $\langle n_e \rangle$  — средняя плотность,  $H$  — протяженность зоны ускорения. Коэффициент 0.5 в формуле (5) показывает, что движение электронов по силовым линиям равновероятно в разных направлениях.

Величина радиальной скорости электрона определяется тепловой скоростью  $v_k$  и геометрией силовых линий (см. рис. 1)  $v_r = (1/3)^{1/2} v_k \cos \beta$ , где  $\beta$  — угол между направлениями силовой линии и радиальным. Тепловая скорость зависит от окружающей зону ускорения температуры. В нашем случае  $T_e \approx 10^6 \text{ К}$  как среднее значение между температурой в зоне ускорения и фоновой хромосферной. С учетом геометрии силовых линий (см. рис. 1) получаем оценку скорости  $\langle v_r \rangle \approx 5 \cdot 10^8 \text{ см/с}$ .

В случае мощных вспышек класса X протяженность зоны ускорения занимает всю высоту хромосферы [6]. Тогда параметр  $H = 2 \cdot 10^3 \text{ км}$ , и из формулы (5) можно определить размер сечения зоны ускорения (см. рис. 1). С учетом полученной выше оценки  $\langle v_r \rangle$  и найденной выше величины  $\langle \partial N_e / \partial t \rangle \approx 10^{35}$  электрон/с получаем размер зоны  $D \approx 10^2 \text{ км}$ .

Рассмотрим случай слабой солнечной вспышки с потоком электронов  $\langle \partial N_e / \partial t \rangle \approx 10^{31}$  электрон/с. Этот поток на 4 порядка меньше, чем у мощной вспышки. Представляется маловероятным, что протяженность зоны ускорения меньше во столько же раз, т.е.  $H \approx 0.1 \text{ км}$ . Однако понятно, что протяженность эффективной области ускорения электронов существенно меньше, чем у мощных вспышек. Возможное положение такой области в пределах хромосферы приводит к соотношению  $D \cdot H \approx 1 - 100 \text{ км}^2$ . В связи с возбуждаемой неустойчивостью представляется маловероятным, чтобы протяженность  $H$  была меньше размера  $D$ . В этом плане выглядит наиболее предпочтительным вариант, когда  $D \sim 1 \text{ км}$  и  $H \sim 100 \text{ км}$ . Для подтверждения такого варианта необходимо дополнительное исследование.

#### 5. ВЫВОДЫ

В рамках принятой модели ускорения был найден определяющий энергетику вспышки фактор. Им оказался поток электронов в зону ускорения, который меняется на 4 порядка от  $10^{31}$  до  $10^{35}$  электрон/с. Диаметр зоны ускорения в магнитной X-особенности, где и происходит ускорение, составляет  $\approx 100 \text{ км}$  для мощных вспышек и  $\sim 1 \text{ км}$  для слабых. При этом протяжен-

ность этой зоны в хромосфере  $\approx 10^3$  км и  $\sim 100$  км соответственно.

### БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания, которые позволили улучшить изложение предлагаемой модели солнечной вспышки.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *J. Threlfall, T. Neukirch, C.E. Parnell, O.S. Eradat*, Astron. and Astrophys. 574, A7, 15 (2015).
2. *A.V. Getling, R. Ishikawa, A.A. Buchnev*, Advances in Space Research 55, 862 (2015).
3. *М.М. Молоденский, В.Л. Мерзляков*, Письма в Астрон. журн. 28, 314 (2002).
4. *А.С. Кириченко, С.А. Богачев*, Письма в Астрон. журн. 39, 884 (2013).
5. *A. Warmuth, G. Mann*, Astron. and Astrophys. 588, A115, 14 (2016).
6. *В.Л. Мерзляков*, Доклад на Всероссийской конференции “Магнетизм и активность Солнца — 2022” (КрАО РАН, Крым, 22–26 августа, 2022).

## THE DIFFERENT FACTORS INFLUENCE ON THE SOLAR FLARES ENERGY

© 2025 V. L. Merzlyakov

*Pushkov Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere and Radio Wave Propagation, Troitsk, Moscow, Russia*  
e-mail: mvl@izmiran.ru

The factors influencing the energy of the solar flare are being studied. The model of particle acceleration in the magnetic X-singularity is investigated. It was found that the flare energy depends mainly on the flow of electrons into the acceleration zone. The change in such a flow is determined by the size of the acceleration zone. It is calculated that for a chromospheric flare source the vertical length of the acceleration zone varies from  $\sim 100$  km to  $\approx 2 \cdot 10^3$  km and its diameter varies from  $\sim 1$  km to  $\approx 100$  km.

*Keywords:* Sun, flares, particles acceleration

# НОРМА СМЕЩЕНИЯ ПРИ ВОЗМУЩАЮЩЕМ УСКОРЕНИИ, ИЗМЕНЯЮЩЕМСЯ ПО ЗАКОНУ ОБРАТНЫХ КВАДРАТОВ, В СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА, СВЯЗАННОЙ С ВЕКТОРОМ СКОРОСТИ

© 2025 г. Т. Н. Санникова

Крымская астрофизическая обсерватория Российской академии наук, пос. Научный, Крым, Россия  
e-mail: tnsannikova@crao.crimea.ru

Поступила в редакцию 22.07.2024 г.

После доработки 05.09.2024 г.

Принята в печать 11.09.2024 г.

Рассмотрена задача движения точки нулевой массы под действием притяжения к центральному телу и малого возмущающего ускорения  $\mathbf{P}' = \mathbf{P}/r^2$ , где  $r$  — расстояние до притягивающего центра, компоненты вектора  $\mathbf{P}$  полагаются постоянными в системе отсчета с осями, направленными по вектору скорости, главной нормали и вектору площадей. Ранее для данной задачи найдены уравнения движения в средних элементах и формулы перехода от оскулирующих элементов к средним в первом порядке малости; величинами второго порядка мы пренебрегаем. Если возмущающие силы малы, то оскулирующая орбита слабо отклоняется от средней. Разность  $d\mathbf{r}$  векторов положения на оскулирующей и средней орбитах является квазипериодической функцией времени. В данной работе получена евклидова (среднеквадратичная по средней аномалии) норма  $\|d\mathbf{r}\|^2$  смещения оскулирующей орбиты относительно средней. Оказалось, что  $\|d\mathbf{r}\|^2$  зависит только от компонентов вектора  $\mathbf{P}$  (положительно определенная квадратичная форма), большой полуоси (пропорционально второй степени) и эксцентриситета оскулирующего эллипса. Норма  $\|d\mathbf{r}\|^2$  получена в виде рядов по степеням эксцентриситета  $e$ . Полученное выражение пригодно до  $e_0 \approx 0.995862$ , при  $e > e_0$   $\varphi = \sqrt{\|d\mathbf{r}\|^2}$  может принимать комплексные значения. Результаты применены к задаче о движении модельных тел под действием возмущающего ускорения, обусловленного эффектом Ярковского. Также проведено сравнение результатов с аналогичными для нормы  $\|d\mathbf{r}\|^2$  в системе отсчета, связанной с радиусом-вектором.

**Ключевые слова:** эффект Ярковского, тангенциальное ускорение, среднеквадратичная норма, смещение оскулирующей орбиты от средней

DOI: 10.31857/S0004629925010075, EDN: HLSGTG

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В статье [1] сформулирована задача о движении точки нулевой массы  $\mathcal{A}$  под действием притяжения к центральному телу  $\mathcal{S}$  (например, к Солнцу) и возмущающего ускорения  $\mathbf{P}'$ , которое подчиняется закону обратных квадратов  $\mathbf{P}' = \mathbf{P}/r^2$ , где  $r = |\mathbf{r}|$  — модуль радиуса-вектора  $\mathbf{r} = \mathcal{S}\mathcal{A}$ . Компоненты  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{W}$  вектора  $\mathbf{P}$  постоянны в системе  $\mathcal{O}$ , орты которой направлены по вектору скорости, главной нормали к оскулирующей орбите и бинормали (направленной по вектору площадей) соответственно.

Отношение модулей возмущающего ускорения  $|\mathbf{P}'|$  и вызванного притяжением к центральному телу основного ускорения  $\chi^2/r^2$  считается малым порядком  $\mu$ :

$$\max \frac{|\mathbf{P}'|}{\chi^2 r^{-2}} = \max \frac{|\mathbf{P}|}{\chi^2} = \mu \ll 1,$$

где  $\chi^2$  — произведение постоянной тяготения на массу  $\mathcal{S}$ . Величинами порядка  $\mu^2$  пренебрегается. В ра-

боте [1] к уравнениям движения описанной задачи применено осредняющее преобразование, найдены уравнения движения в средних элементах и формулы перехода от оскулирующих элементов к средним:

$$\epsilon_n = \bar{\epsilon}_n + u_n, \quad (1)$$

где  $\epsilon_n$  — шесть оскулирующих элементов;  $\bar{\epsilon}_n$  — шесть средних элементов;  $u_n$  — функции замены переменных, которые считаются функциями средних элементов  $\bar{\epsilon}_k$ , но в первом приближении безразлично, считать ли аргументы  $u_n$  средними или оскулирующими.

Явные выражения  $u_n$  для элементов орбиты  $\omega, e, i, \Omega, \sigma, M$  (среднее движение, эксцентриситет, наклон, долгота восходящего узла, аргумент перигея и средняя аномалия соответственно) найдены в работе [1] и приведены в Приложении А (формулы (A1)). Там же приведена формула (A5) для функции  $u_7$  замены оскулирующей большой полуоси средней, поскольку далее в качестве основной системы элементов орбиты будем использовать

$a, e, i, \Omega, \sigma, M$  (большая полуось, эксцентриситет, наклон орбиты, долгота восходящего узла, аргумент перицентра и средняя аномалия соответственно). В слабовозмущенных задачах первые пять элементов медленно изменяются со временем, тогда как средняя аномалия  $M$  служит быстрой переменной.

Отклонение оскулирующей орбиты от средней наглядно можно представить как разность  $d\mathbf{r}$  векторов положения небесного тела на оскулирующей и средней орбитах. Если возмущающие силы малы, то оскулирующая орбита слабо отклоняется от средней, а  $d\mathbf{r}$  является квазипериодической функцией времени и быстро меняется, поэтому больший интерес представляет норма  $d\mathbf{r}$  как норма вектор-функции от  $M$ . Выбор средней аномалии в качестве переменной, по которой определяется норма, обусловлен тем, что по  $M$  сохраняется квазипериодичность функции  $d\mathbf{r}$ .

Норма разности  $d\mathbf{r}$  позволит оценить отклонение оскулирующей орбиты от средней вследствие периодических возмущений и покажет, нужно ли учитывать эти возмущения (точнее, отличия оскулирующих элементов от средних) или можно ограничиться вековым движением, которое дается осредненными уравнениями.

Наиболее часто в небесной механике используются чебышевская (равномерная) и евклидова (среднеквадратичная) нормы [2–4]. Для функции  $f$  —  $2\pi$ -периодической по  $M$  и непрерывной на отрезке  $[-\pi, \pi]$  скалярной или векторной функции от элементов орбиты — эти нормы имеют вид:

$$\langle f \rangle = \max_{M \in [-\pi, \pi]} |f(a, \dots, M)|,$$

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dM.$$

Аналитические выражения для чебышевской нормы можно получить лишь для простейших функций (см. примеры в работах [4, 5]). Напротив, для евклидовой нормы это удается часто.

В работе [4] выведены формулы для  $(d\mathbf{r})^2$ , выраженного через разности элементов  $u_n$ . С их помощью в статье [6] получена евклидова норма  $\|d\mathbf{r}\|^2$  смещения оскулирующей орбиты относительно средней при наличии малого возмущающего ускорения, обратно пропорционального квадрату расстояния до притягивающего центра в системе отсчета, связанной с радиусом-вектором. Данная статья посвящена определению нормы  $\|d\mathbf{r}\|^2$  в системе отсчета, связанной с вектором скорости. В заключении приведен сравнительный анализ этих норм.

## 2. НОРМА РАЗНОСТИ ОСКУЛИРУЮЩИХ И СРЕДНИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Запишем выражение (A5) для  $u_7$  и пять последних уравнений (A1) для  $u_2 - u_6$  как приращения элементов  $\delta e_n$  и выразим их через эксцентрическую аномалию  $E$ , учитывая соотношения, приведенные

в Приложении В. Затем с помощью средств компьютерной алгебры представим полученные выражения рядами по степеням эксцентриситета, поскольку исходные выражения (A1), (A5) являются сложными функциями от  $e$ . В Приложении С приведены разложения выражений (A1), (A5) с точностью до  $e^{10} - e^{12}$ , обеспечивающие соблюдение условия нулевого среднего (как требуется для функций замены переменных  $u_n$  согласно [1]), а также минимум три верных знака после запятой при вычислении  $\delta e_n$  в части, зависящей от эксцентриситета, при малых и умеренных  $e \leq 0.6$  (см. формулы (C1)). Однако для вычисления нормы смещения оскулирующей орбиты относительно средней использованы разложения выражений (A1), (A5) с точностью до 25-й степени эксцентриситета (ввиду их громоздкости мы не приводим их здесь).

Рассматривая выражения (C1), можно заметить, что они представляют собой ряды Фурье вида  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(e) \sin kE$  либо  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(e) \cos kE$ , где функции  $a_k(e)$  — ряды Маклорена по степеням эксцентриситета с рациональными коэффициентами, причем первый член ряда  $a_k(e)$  имеет порядок  $k - 2$  и более. Поэтому при сохранении членов до определенной степени эксцентриситета в рядах Фурье остается конечное число слагаемых.

Некоторые из выражений (C1) имеют особенности при  $e = 0$  или  $e = 1$ . Но поскольку осреднение по средней аномалии подразумевает эллиптичность оскулирующей орбиты, то есть  $0 < e < 1$ , то сингулярность при вычислениях не встречается.

В Приложении D приведены формулы для разности векторов положения на оскулирующей и средней орбитах, выраженной через разности элементов [4], и нормы (формулы (D1), (D2), (D3)).

Подставляя (C1) в (D2), и далее в (D1) средствами компьютерной алгебры получим для  $(d\mathbf{r})^2$  выражение вида

$$\begin{aligned} (d\mathbf{r})^2 = & \frac{\mathfrak{I}^2 a^2}{\chi^4} \sum_{k=0}^{\infty} a_{1k}(e) \cos kE + \\ & + \frac{\mathfrak{N}^2 a^2}{\chi^4} \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}(e) \cos kE + \\ & + \frac{W^2 a^2}{\chi^4} \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k}(e) \cos kE + \\ & + \frac{\mathfrak{I} \mathfrak{N} a^2}{\chi^4} \sum_{k=1}^{\infty} a_{4k}(e) \sin kE, \end{aligned} \quad (2)$$

где ряды Маклорена для коэффициентов  $a_{nk}(e)$  всегда начинаются с члена порядка  $e^k$ . На практике суммирование в (2) проводилось до  $k = 50$ .

Мы не приводим промежуточные выражения для функций (D2) и  $a_{nk}(e)$  для экономии места и сразу перейдем к вычислению нормы (D3).

Подставив (2) в (D3) получим:

$$\begin{aligned} \varrho^2 = \|\mathbf{dr}\|^2 = & \frac{\mathfrak{Z}^2 a^2}{\chi^4} \sum_{k=0}^{\infty} a_{1k}(e) \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{a} \cos kE dE + \\ & + \frac{\mathfrak{N}^2 a^2}{\chi^4} \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}(e) \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{a} \cos kE dE + \\ & + \frac{W^2 a^2}{\chi^4} \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k}(e) \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{a} \cos kE dE + \\ & + \frac{\mathfrak{Z}\mathfrak{N}a^2}{\chi^4} \sum_{k=1}^{\infty} a_{4k}(e) \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{a} \sin kE dE. \end{aligned} \quad (3)$$

Последнее слагаемое в (3) — нечетная функция  $E$ , она исчезает в результате интегрирования. В остальных случаях при интегрировании учтем [5, п. 3.6.3]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{a} dE &= 1, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{a} \cos E dE &= -\frac{e}{2}, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{a} \cos kE dE &= 0 \quad \text{при } k \geq 2. \end{aligned} \quad (4)$$

В итоге получим норму разности оскулирующих и средних элементов:

$$\begin{aligned} \varrho^2 = \|\mathbf{dr}\|^2 = & \frac{\mathfrak{Z}^2 a^2}{\chi^4} \left( a_{10}(e) - \frac{e}{2} a_{11}(e) \right) + \\ & + \frac{\mathfrak{N}^2 a^2}{\chi^4} \left( a_{20}(e) - \frac{e}{2} a_{21}(e) \right) + \\ & + \frac{W^2 a^2}{\chi^4} \left( a_{30}(e) - \frac{e}{2} a_{31}(e) \right) = \\ = & \frac{a^2}{\chi^4} (V_1 \mathfrak{Z}^2 + V_2 \mathfrak{N}^2 + V_3 W^2), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} V_1 = & \frac{1}{(1-e^2)^2} \left( 16 + \frac{1121e^2}{8} + \frac{10793e^4}{512} - \right. \\ & - \frac{239033e^6}{18432} - \frac{17713751e^8}{18874368} - \frac{16112611e^{10}}{37748736} - \\ & - \frac{222199537e^{12}}{1006632960} - \frac{15794064133e^{14}}{123312537600} - \\ & - \frac{78324446438359e^{16}}{969769255698432} - \frac{945456502286119e^{18}}{17455846602571776} - \\ & - \frac{135640061196163177e^{20}}{3562417673994240000} - \\ & - \frac{23949733051735938707e^{22}}{862105077106606080000} - \\ & \left. - \frac{256113538574688068647e^{24}}{12261049985516175360000} + O(e^{26}) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 = & \frac{1}{(1-e^2)^2} \left( 1 + \frac{29e^2}{8} - \frac{2221e^4}{288} + \frac{1907e^6}{512} - \right. \\ & - \frac{265501e^8}{491520} - \frac{5955551e^{10}}{58982400} - \frac{108054281e^{12}}{3853516800} - \\ & - \frac{347992909e^{14}}{46242201600} - \frac{80402703347e^{16}}{170467251978240} + \\ & + \frac{961519885723e^{18}}{454579338608640} + \frac{157193618149693e^{20}}{52384857115852800} + \\ & + \frac{12031971779882773e^{22}}{3771709712341401600} + \\ & \left. + \frac{7001336583337473239e^{24}}{226637845826025539200} + O(e^{26}) \right), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} V_3 = & \left( 1 - \frac{39e^2}{32} + \frac{101e^4}{576} + \frac{599e^6}{6144} + \frac{19889e^8}{307200} + \right. \\ & + \frac{86891e^{10}}{1843200} + \frac{145911e^{12}}{4014080} + \frac{14979701e^{14}}{513802240} + \\ & + \frac{286187473e^{16}}{11890851840} + \frac{402547717e^{18}}{19818086400} + \\ & + \frac{3098641663e^{20}}{177628774400} + \frac{233207333021e^{22}}{15347126108160} + \\ & \left. + \frac{300747020621e^{24}}{22455968071680} + O(e^{26}) \right). \end{aligned}$$

Выражения (5), (6) позволяют получить в числовом значении смещения  $\varrho$  не менее 2 верных знаков после запятой вплоть до  $e = 0.7$  по сравнению со значением, полученным путем численного интегрирования, как будет показано в разделе 3, но, в отличие от численного интегрирования, не требуют больших вычислительных ресурсов.

Исследуем поведение функций  $V_1$ ,  $V_2$  и  $V_3$  (6) на интервале  $e \in [0, 1)$ :

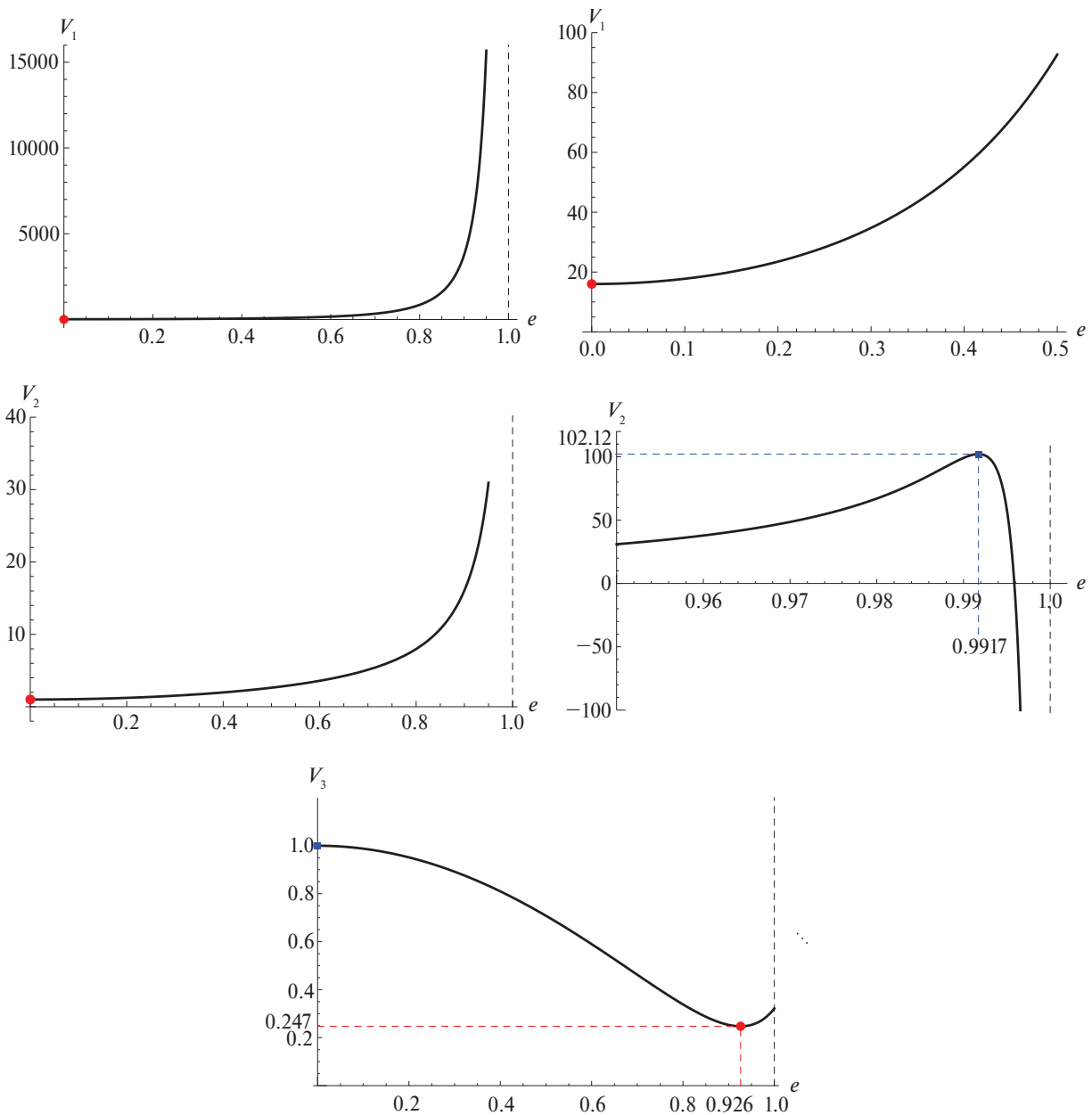
$\min(V_1) = 16$  при  $e = 0$ ,  $V_1 \rightarrow \infty$  при  $e \rightarrow 1$ ,  $V_1$  монотонно возрастает;

$\min(V_2) = 1$  при  $e = 0$ ,  $\max(V_2) \approx 102.12175$  при  $e \approx 0.991724$ ,  $V_2 \rightarrow -\infty$  при  $e \rightarrow 1$ ;

$\min(V_3) \approx 0.247374$  при  $e \approx 0.926173$ ,  $\max(V_3) = 1$  при  $e = 0$ .

Функция  $V_2 < 0$  при  $e > e_0 \approx 0.995862$ . Таким образом  $V_k > 0$  при  $e < e_0$ , следовательно, на интервале  $e \in [0, e_0]$  норма  $\varrho^2$  (5) положительна и  $\varrho$  — действительное число. Зависимость  $V_1$ ,  $V_2$  и  $V_3$  от  $e$  показана на рис. 1.

Как и в задаче с постоянным возмущающим ускорением  $\mathbf{P}'$ , представленной в работе [7],  $\varrho^2$  зависит только от компонентов вектора возмущающего ускорения  $\mathfrak{Z}$ ,  $\mathfrak{N}$ ,  $W$  (положительно определенная квадратичная форма), большой полуоси (пропорци-



**Рис. 1.** Значения  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  в зависимости от эксцентриситета  $e$  на интервале от 0 до 1. Верхние графики представляют  $V_1$  в разных масштабах. На левой панели сверху и в центре показаны значения  $V_1$  и  $V_2$  до  $e = 0.95$ . На графиках отмечены точки максимумов (синие квадратные маркеры) и точки минимумов (красные круглые маркеры)

онально второй степени) и эксцентриситета оскулирующего эллипса. От ориентации орбиты и положения точки  $A$  на ней  $\varphi^2$  не зависит.

Согласно работе [7] наибольшее значение  $\varphi^2$  для заданной орбиты при возмущающем ускорении  $\mathbf{P}'$  таким, что вектор  $\mathbf{P}$  находится внутри некоторого эллипсоида, ориентированного вдоль осей системы отсчета  $\mathcal{O}$ , равно:

$$\max \varphi^2 = \frac{a^2}{\chi^4} P^2 \max\{V_1, V_2, V_3\}, \quad (7)$$

где  $P = \sqrt{\mathfrak{Z}^2 + \mathfrak{N}^2 + W^2} = \text{const}$ . Для  $e \in [0, 0.995859]$   $V_1 > V_2 \geq V_3$  (равенство достигается при  $e = 0$  и  $e \approx 0.995859$ ), при  $e \in (0.995859, e_0]$   $V_2 < V_3$ , на интервале  $e \in (e_0, 1.0)$  функция  $V_2(e)$  прини-

мает отрицательные значения, поэтому далее рассматриваем только интервал  $e \in (0, e_0]$ . С учетом сказанного выше выражение (7) дает

$$\begin{aligned} \max \varphi^2 &= \frac{a^2}{\chi^4} P^2 V_1(e), \\ \max \varphi &= \frac{a}{\chi^2} P \sqrt{V_1(e)}. \end{aligned} \quad (8)$$

### 3. СМЕЩЕНИЕ ОСКУЛИРУЮЩЕЙ ОРБИТЫ ОТНОСИТЕЛЬНО СРЕДНЕЙ ВСЛЕДСТВИЕ ЭФФЕКТА ЯРКОВСКОГО

В статье [8] рассмотрены модельные объекты с различными эксцентриситетами орбит от 0 до 0.99, и остальными орбитальными и теплофизическими характеристиками, как у астероида 101955 Bennu,

и найдены средние по орбите значения компонентов вектора  $\mathbf{P}$ , дрейфы элементов и смещение относительно невозмущенного положения в двух системах отсчета, связанных с радиусом-вектором и вектором скорости. Обращаясь к результатам работы [8], для этих модельных объектов вычислены смещение  $\varrho = \sqrt{\varrho^2}$  (5) оскулирующей орбиты относительно средней и максимальное значение  $\max \varrho$  (8). При вычислениях использованы константы

$$\chi^2 = 1.32712440041279419 \times 10^{20} \text{ м}^3/\text{с}^2,$$

$$1 \text{ а. е.} = 1.495978707 \times 10^{11} \text{ м},$$

$$1 \text{ сут} = 86400 \text{ с},$$

и те же исходные данные для астероида 101955 Bennu, как и в работе [8]. Для вычисления  $\varrho$  необходимо только значение большой полуоси  $a = 1.126391025894812 \text{ а. е.}$ , значения эксцентриситета указаны в табл. 1 для каждой модели, так же как значения тангенциального  $\mathfrak{T}$  и нормального  $\mathfrak{N}$  компонентов вектора  $\mathbf{P}$ . Согласно [8] среднее за орбитальный период значение компонента  $W = 0$ .

Норма смещения вычислена также путем численного интегрирования исходных выражений, приведенных в Приложении А, полагая в формулах (A2), (A3) и (A4) верхний предел суммирования по  $n, m, s$  равным 100. Коэффициенты Ганзена вычислены с помощью интегральной формулы, выраженной

через эксцентрическую аномалию  $E$  и приведенной в работе [9]. Также при численном интегрировании использованы значения наклона орбиты  $i = 6.03494377024794^\circ$  и аргумента перигея  $\sigma = 66.22306084084298^\circ$ , как и в работе [8].

В табл. 1 приведены смещения  $\varrho$  и  $\varrho^*$ , вычисленные с помощью формул (5), (6) и численного интегрирования соответственно, а также абсолютная  $\Delta\varrho = |\varrho - \varrho^*|$  и относительная погрешность  $\delta\varrho = \frac{|\varrho - \varrho^*|}{\varrho^*} \cdot 100\%$ , и максимальное значение  $\max \varrho$  (8), вычисленные при различных эксцентриситетах  $e$ . Видно, что при  $e \leq 0.7$   $\Delta\varrho$  не превышает 1 см, то есть формулы (5), (6) позволяют получить в числовом значении  $\varrho$  не менее 2 верных знаков после запятой вплоть до  $e = 0.7$  по сравнению со значением, полученным путем численного интегрирования. Вследствие отбрасывания членов порядка  $O(e^{26})$  в формулах (6) при вычислении  $\varrho$  получено немного завышенное значение по сравнению с  $\varrho^*$ . Относительная погрешность составляет 0.2% и менее для всех рассмотренных  $e$ . Однако необходимо помнить, что само значение  $\varrho^*$  имеет ограниченную точность, поскольку в исходных выражениях также содержатся ряды.

Таблица 1. Исходные данные и результаты

$e$	$\mathfrak{T}, 10^{-14}$ а.е. <sup>3</sup> /сут <sup>2</sup>	$\mathfrak{N}, 10^{-14}$ а.е. <sup>3</sup> /сут <sup>2</sup>	$\varrho, \text{ м}$	$\varrho^*, \text{ м}$	$\Delta\varrho, \text{ м}$	$\delta\varrho, \%$	$\max \varrho, \text{ м}$	$\varrho_{O^*}, \text{ м}$
0.001	-5.10168	-9.91079	129.185	129.185	$4.5 \cdot 10^{-9}$	$3.5 \cdot 10^{-9}$	253.901	129.185
0.01	-5.10155	-9.91054	129.245	129.245	$4.2 \cdot 10^{-11}$	$3.3 \cdot 10^{-11}$	254.029	129.231
0.05	-5.09849	-9.90457	130.680	130.680	$5.4 \cdot 10^{-13}$	$4.1 \cdot 10^{-13}$	257.147	130.351
0.10	-5.08887	-9.88585	135.127	135.127	$6.1 \cdot 10^{-12}$	$4.5 \cdot 10^{-12}$	266.802	133.848
0.20	-5.04976	-9.80969	152.479	152.479	$5.7 \cdot 10^{-14}$	$3.7 \cdot 10^{-14}$	304.430	147.865
0.30	-4.98212	-9.67805	180.585	180.585	$8.2 \cdot 10^{-11}$	$4.6 \cdot 10^{-11}$	365.370	171.674
0.40	-4.88179	-9.48280	219.968	219.968	$5.7 \cdot 10^{-10}$	$2.6 \cdot 10^{-10}$	450.989	206.987
0.50	-4.74156	-9.20998	273.527	273.527	$1.9 \cdot 10^{-7}$	$7.1 \cdot 10^{-8}$	567.932	258.152
0.60	-4.54897	-8.83547	348.406	348.405	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$2.9 \cdot 10^{-5}$	732.103	335.067
0.70	-4.28099	-8.31451	461.304	461.297	0.0071	0.0015	980.244	461.827
0.80	-3.88832	-7.55138	658.382	658.245	0.1369	0.0208	1413.488	711.424
0.85	-3.60997	-7.01056	831.777	831.343	0.4345	0.0523	1794.282	958.324
0.90	-3.22864	-6.26976	1136.522	1135.696	0.8257	0.0727	2462.726	1448.588
0.95	-2.62669	-5.10050	1879.287	1876.154	3.1327	0.1670	4089.474	2909.908
0.97	-2.23295	-4.33575	2678.000	2672.555	5.4447	0.2037	5836.915	4852.070
0.99	-1.53792	-2.98595	5562.831	5552.548	10.2828	0.1852	12143.297	14545.945

**Примечание.** Приведены: эксцентриситет  $e$ , тангенциальный  $\mathfrak{T}$  и нормальный  $\mathfrak{N}$  компоненты, смещения  $\varrho$  и  $\varrho^*$ , вычисленные с помощью формул (5), (6) и численного интегрирования, абсолютная  $\Delta\varrho$  и относительная  $\delta\varrho$  погрешности, максимальное значение  $\max \varrho$  (8), а также смещение  $\varrho_{O^*}$  в системе отсчета  $O^*$ , связанной с радиусом-вектором [6], при значениях компонентов возмущающего ускорения согласно [8]: радиальный  $S = 9.91079 \times 10^{-14} \text{ а.е.}^3/\text{сут}^2$ , трансверсальный  $T = -5.10168 \times 10^{-14} \text{ а.е.}^3/\text{сут}^2$  и бинормальный  $W = 0$ .

Из анализа результатов вычислений видно, что с ростом  $e$  увеличивается величина периодических возмущений, обусловленных эффектом Ярковского, хотя значения (по модулю) компонентов  $\mathfrak{Z}$ ,  $\mathfrak{Y}$  уменьшаются:  $\varrho = 129$  м для почти круговой орбиты и более 5.5 км при  $e = 0.99$ . Но в целом при малых возмущающих ускорениях, характерных для эффекта Ярковского, смещение оскулирующей орбиты относительно средней малó и им можно пренебречь, учитывая лишь вековые дрейфы элементов орбиты, как и было показано в работе [6].

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача движения точки нулевой массы под действием притяжения к центральному телу и малого возмущающего ускорения, обратно пропорционального квадрату расстояния до притягивающего центра в системе отсчета  $\mathcal{O}$  с осями, направленными по вектору скорости, главной нормали к оскулирующей орбите и бинормали. Получена евклидова (среднеквадратичная по средней аномалии) норма смещения  $\|\mathbf{dr}\|^2$ , где  $\mathbf{dr}$  представляет разность векторов положения на оскулирующей и средней орбитах, что позволяет оценить величину периодических возмущений. Оказалось, что  $\|\mathbf{dr}\|^2$  зависит только от компонентов вектора  $\mathbf{P}$  (положительно определенная квадратичная форма), большой полуоси (пропорционально второй степени) и эксцентриситета оскулирующего эллипса. Норма  $\|\mathbf{dr}\|^2$  получена в виде рядов по степеням эксцентриситета  $e$ . Полученное выражение пригодно только до  $e_0 \approx 0.995862$ , при  $e > e_0$   $\varrho = \sqrt{\|\mathbf{dr}\|^2}$  может принимать комплексные значения.

Результаты применены к задаче о движении модельных малых тел под действием возмущающего ускорения, возникающего вследствие эффекта Ярковского. Показано, что с ростом  $e$  увеличивается величина периодических возмущений, обусловленных эффектом Ярковского, хотя значения (по модулю) компонентов  $\mathfrak{Z}$ ,  $\mathfrak{Y}$  уменьшаются. Однако при малых возмущающих ускорениях, характерных для эффекта Ярковского, смещение оскулирующей орбиты относительно средней малó и им можно пренебречь, учитывая лишь вековые дрейфы элементов орбиты.

В заключение сравним полученные результаты с аналогичными для нормы смещения в задаче движения точки нулевой массы под действием притяжения к центральному телу и малого возмущающего ускорения  $\mathbf{P}'$ , обратно пропорционального квадрату расстояния до притягивающего центра в системе отсчета  $\mathcal{O}^*$  с осями, направленными по радиус-вектору, трансверсали и вектору площадей, при этом компоненты  $S$ ,  $T$ ,  $W$  вектора  $\mathbf{P}$  постоянны в системе  $\mathcal{O}^*$  [6]. Формулы главного результата (5) идентичны с точностью до замены компонентов возмущающего ускорения. Функции  $V_n(e)$  в обоих слу-

чаях — ряды по четным степеням эксцентриситета. Функции  $V_3(e)$  совпадают, поскольку компонент  $W$  одинаков для обеих систем отсчета. В системе  $\mathcal{O}^*$  функция  $V_1(e)$  является многочленом второй степени, тогда как в системе  $\mathcal{O}$  — бесконечным рядом,  $V_2(e)$  — ряды в обеих системах. Поскольку при нулевом эксцентриситете триедр  $(-\mathfrak{N}, \mathfrak{Z}, W)$  идентичен триедру  $(S, T, W)$  из работы [6], то  $V_1(0) = V_2^*(0)$ ,  $V_2(0) = V_1^*(0)$  и  $V_3(0) = V_3^*(0)$ , то есть свободные члены совпадают, как и должно быть. Здесь введено обозначение  $V_n^*$  для функций  $V_n$  из статьи [6], чтобы избежать путаницы.

В табл. 1 для сравнения приведены смещения  $\varrho$  и  $\varrho_{\mathcal{O}^*}$  в системах  $\mathcal{O}$  и  $\mathcal{O}^*$  соответственно. Очевидно, что величина смещения оскулирующей орбиты относительно средней не должна зависеть от выбора системы отсчета. Однако из табл. 1 видно, что рост  $\varrho_{\mathcal{O}^*}$  при больших  $e$  выражен сильнее, чем в системе  $\mathcal{O}$ . Это может свидетельствовать о завышении короткопериодических орбитальных возмущений для объектов на высоко эксцентрических орбитах при их расчете в системе  $\mathcal{O}^*$ .

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ

Данная статья выполнена за средства государственного задания, тема Рег. № 22022400207-0.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит анонимного рецензента за ценные комментарии, благодаря которым статья стала более полной и понятной.

#### ПРИЛОЖЕНИЯ

##### ПРИЛОЖЕНИЕ А. ФУНКЦИИ ЗАМЕНЫ ОСКУЛИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ СРЕДНИМИ

Явные выражения функций  $u_n$  в формулах перехода от оскулирующих элементов к средним (1), вычисленные в работе [1]:

$$u_1 = -\frac{6\omega}{\kappa^2(1-e)} \left[ \mathcal{F}_2\left(\frac{\theta}{2}, k\right) - \frac{1}{\pi} \mathbf{E}(k)M \right] \mathfrak{Z},$$

$$u_2 = \frac{4}{\kappa^2} \left\{ \mathcal{F}_1\left(\frac{\theta}{2}, k\right) - \frac{1}{\pi} \mathbf{K}(k)M - \right. \\ \left. - \frac{2}{(1+e)} \left[ \mathcal{F}_3\left(\frac{\theta}{2}, k\right) - \frac{1}{\pi} \mathbf{D}(k)M \right] \right\} \mathfrak{Z} + \\ + \frac{2\eta}{\kappa^2 e} \left[ \arctg \frac{\vartheta}{\eta} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi} (\eta^2 \mathbf{K}(e) - \mathbf{E}(e)) \right] \mathfrak{Y},$$

$$u_3 = \frac{1}{\kappa^2 \eta e} \left\{ \cos \sigma [\eta(\theta - M) - (E - M)] + \right. \\ \left. + \eta \sin \sigma \left[ \ln(1 + e \cos \theta) + 1 - \eta - \ln \frac{2\eta^2}{1 + \eta} \right] \right\} W,$$

$$u_4 = \frac{1}{\chi^2 \eta e \sin i} \left\{ \sin \sigma \left[ \eta(\theta - M) - (E - M) \right] - \right. \\ \left. - \eta \cos \sigma \left[ \ln(1 + e \cos \theta) + 1 - \eta - \ln \frac{2\eta^2}{1 + \eta} \right] \right\} W, \quad (A1)$$

$$u_5 = -\frac{2}{\chi^2 e^2} \left[ \vartheta - \frac{2\eta}{\pi} \mathbf{E}(e) \right] \mathfrak{Z} + \\ + \frac{1}{\chi^2} \left[ \frac{1}{\eta} \left( \mathcal{F}_1 \left( E + \frac{\pi}{2}, e \right) - \mathbf{K}(e) \left( 1 + \frac{2}{\pi} M \right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{e^2} \ln \frac{e \sin E + \sqrt{1 - e^2 \cos^2 E}}{\eta} \right] \mathfrak{H} - u_4 \cos i, \\ u_6 = \frac{2}{\chi^2 (1 - e)} \left\{ 2(1 - e) \left[ \arctg \frac{\vartheta}{\eta} - \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \mathbf{E}(e) - \right. \right. \\ \left. - \frac{\eta^2}{\pi} \mathbf{K}(e) + \frac{1}{e^2} \left( \frac{\eta}{2} \vartheta - \frac{1}{\pi} \mathbf{E}(e) \right) \right] + \\ + \frac{3\mathbf{E}(k)}{\pi} \left[ e \left( \cos E + \frac{e}{2} \right) - \frac{e^2}{4} \cos 2E \right] - \\ - \frac{3\mathbf{E}(k)}{\pi} \mathcal{I}(\theta - E) - 3\mathcal{I}H \left\} \mathfrak{Z} + \right. \\ \left. + \frac{\eta}{\chi^2} \left[ \mathcal{F}_1 \left( E + \frac{\pi}{2}, e \right) - \mathbf{K}(e) \left( 1 + \frac{2}{\pi} M \right) - \right. \right. \\ \left. - \frac{1}{e^2} \ln \frac{e \sin E + \sqrt{1 - e^2 \cos^2 E}}{\eta} \right] \mathfrak{H},$$

где  $\theta$  — истинная аномалия,  $E$  — эксцентриская аномалия,  $\omega, e, i, \Omega, \sigma, M$  — среднее движение, эксцентриситет, наклон орбиты, долгота восходящего узла, аргумент перицентра и средняя аномалия соответственно,

$$\vartheta = \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta} = (1 + e) \times \\ \times \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)} = \eta \sqrt{\frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E}},$$

$$\mathcal{I}(\theta - E) = -\frac{\beta(2 + \beta^2)}{1 + \beta^2} \left( \frac{e}{2} + \cos E \right) + \frac{2}{1 + \beta^2} \times \\ \times \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n + 1 - (n - 1)\beta^2}{n^2(n^2 - 1)} \beta^n \cos nE, \quad (A2)$$

$$\eta = \sqrt{1 - e^2}, \quad \beta = \frac{e}{(1 + \eta)}, \quad k = \frac{2\sqrt{e}}{(1 + e)},$$

$$\mathcal{I}H = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{n} \cos nM, \quad (A3) \\ C_n = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m B_m(k) S_n^{0m}(e) k^{2m}.$$

В (A3) коэффициенты  $S_n^{0m}(e) = X_n^{0m}(e) - X_{-n}^{0m}(e)$  можно найти в статьях [10–13], различные методики вычисления коэффициентов Ганзена  $X_k^{nm}$  изложены в работе [9], а  $B_m(k)$  можно представить рядом [14]:

$$B_m(k) = \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s + 1) \cdots (s + m)}{(s + m + 1) \cdots (s + 2m)} \times \\ \times \left[ \frac{(2s + 2m - 1)!!}{(2s + 2m)!!} \right]^2 \frac{k^{2s}}{2s + 2m - 1}. \quad (A4)$$

Здесь и ниже использованы стандартные обозначения для полных и неполных эллиптических интегралов в форме Лежандра:

$$\mathbf{K}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{h(x, k)}, \quad \mathbf{E}(k) = \int_0^{\pi/2} h(x, k) dx,$$

$$\mathbf{D}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x dx}{h(x, k)} = \frac{\mathbf{K}(k) - \mathbf{E}(k)}{k^2},$$

$$\mathcal{F}_1(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{dx}{h(x, k)}, \quad \mathcal{F}_2(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} h(x, k) dx,$$

$$\mathcal{F}_3(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{\sin^2 x dx}{h(x, k)} = \frac{\mathcal{F}_1(\varphi, k) - \mathcal{F}_2(\varphi, k)}{k^2},$$

где

$$h(x, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}.$$

Используя связь среднего движения и большой полуоси  $\omega = \chi a^{-3/2}$ ,  $d\omega = (-3/2)\chi a^{-5/2} da$ , вместо  $u_1$  получим выражение, относящееся к большой полуоси:

$$u_7 = \frac{4a}{\chi^2(1 - e)} \left[ \mathcal{F}_2 \left( \frac{\theta}{2}, k \right) - \frac{1}{\pi} \mathbf{E}(k) M \right] \mathfrak{Z}. \quad (A5)$$

*Замечание.* В [1] выражение для  $u_6$  обозначено буквой  $v$  и в нем допущена опечатка: в первых квадратных скобках пропущено слагаемое  $2\mathbf{E}(e)/\pi$ . Здесь мы приводим правильное выражение и далее используем его.

## ПРИЛОЖЕНИЕ В. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ФУНКЦИЯМИ ИСТИННОЙ И ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОЙ АНОМАЛИЙ

Переход от истинной аномалии к эксцентриской осуществляется с помощью соотношений [5, 15]:

$$\cos \theta = \frac{a}{r} (\cos E - e), \quad \sin \theta = \frac{a}{r} \eta \sin E, \\ r = a(1 - e \cos E),$$

$$\begin{aligned}
\ln(1 + e \cos \theta) - \ln \frac{2\eta^2}{1 + \eta} &= -\ln(1 - 2\beta \cos E + \beta^2) = \\
&= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n} \cos nE, \\
E - M &= e \sin E, \\
\theta - E &= 2 \arctg \frac{\beta \sin E}{1 - \beta \cos E} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n} \sin nE, \\
\theta - M &= \theta - E + E - M = e \sin E + 2 \arctg \frac{\beta \sin E}{1 - \beta \cos E}.
\end{aligned}$$

#### ПРИЛОЖЕНИЕ С. ФУНКЦИИ $\delta\epsilon_e$

Функции замены переменных  $u_n$ , входящие в выражения (1), запишем как приращения элементов орбиты и представим в виде рядов:

$$\begin{aligned}
\delta a &= \frac{a\mathfrak{A}}{\kappa^2(1 - e^2)^2} \times \\
&\times \left[ \left( 6e - 5e^3 - \frac{25e^5}{32} - \frac{29e^7}{256} - \frac{349e^9}{8192} - \frac{43e^{11}}{2048} \right) \times \right. \\
&\times \sin E + \\
&+ \left( \frac{5e^2}{4} - \frac{13e^4}{16} - \frac{113e^6}{512} - \frac{179e^8}{2048} - \frac{2845e^{10}}{65536} \right) \times \\
&\times \sin 2E + \\
&+ \left( \frac{e^3}{2} - \frac{7e^5}{32} - \frac{27e^7}{256} - \frac{115e^9}{2048} - \frac{1085e^{11}}{32768} \right) \sin 3E + \\
&+ \left( \frac{27e^4}{128} - \frac{21e^6}{512} - \frac{347e^8}{8192} - \frac{995e^{10}}{32768} \right) \sin 4E + \\
&+ \left( \frac{3e^5}{32} + \frac{e^7}{256} - \frac{25e^9}{2048} - \frac{875e^{11}}{65536} \right) \sin 5E + \\
&+ \left( \frac{65e^6}{1536} + \frac{25e^8}{2048} + \frac{5e^{10}}{131072} \right) \sin 6E + \\
&+ \left( \frac{5e^7}{256} + \frac{85e^9}{8192} + \frac{245e^{11}}{65536} \right) \sin 7E + \\
&+ \left( \frac{595e^8}{65536} + \frac{1855e^{10}}{262144} \right) \sin 8E + \\
&+ \left( \frac{35e^9}{8192} + \frac{287e^{11}}{65536} \right) \sin 9E + \\
&+ \left. \frac{1323e^{10}}{655360} \sin 10E + \frac{63e^{11}}{65536} \sin 11E \right], \\
\delta e &= \frac{\mathfrak{A}}{\kappa^2} \left[ \left( 2 + \frac{5e^2}{4} + \frac{7e^4}{32} + \frac{49e^6}{512} + \frac{445e^8}{8192} + \frac{2303e^{10}}{65536} \right) \times \right. \\
&\times \sin E +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \left( \frac{e}{2} + \frac{e^3}{4} + \frac{33e^5}{256} + \frac{5e^7}{64} + \frac{1715e^9}{32768} + \frac{2457e^{11}}{65536} \right) \sin 2E + \\
&+ \left( \frac{e^2}{4} + \frac{9e^4}{64} + \frac{45e^6}{512} + \frac{245e^8}{4096} + \frac{2835e^{10}}{65536} \right) \sin 3E + \\
&+ \left( \frac{3e^3}{32} + \frac{21e^5}{256} + \frac{65e^7}{1024} + \frac{805e^9}{16384} + \frac{40635e^{11}}{1048576} \right) \sin 4E + \\
&+ \left( \frac{3e^4}{64} + \frac{25e^6}{512} + \frac{175e^8}{4096} + \frac{4725e^{10}}{131072} \right) \sin 5E + \\
&+ \left( \frac{5e^5}{256} + \frac{5e^7}{192} + \frac{5215e^9}{196608} + \frac{3255e^{11}}{131072} \right) \sin 6E + \\
&+ \left( \frac{5e^6}{512} + \frac{245e^8}{16384} + \frac{2205e^{10}}{131072} \right) \sin 7E + \\
&+ \left( \frac{35e^7}{8192} + \frac{1015e^9}{131072} + \frac{10269e^{11}}{1048576} \right) \sin 8E + \\
&+ \left( \frac{35e^8}{16384} + \frac{567e^{10}}{131072} \right) \sin 9E + \\
&+ \left( \frac{63e^9}{65536} + \frac{1449e^{11}}{655360} \right) \sin 10E + \\
&+ \left. \frac{63e^{10}}{131072} \sin 11E + \frac{231e^{11}}{1048576} \sin 12E \right] + \\
&+ \frac{\mathfrak{B}}{\kappa^2} \left[ \frac{e}{2} - \frac{3e^3}{16} - \frac{9e^5}{128} - \frac{79e^7}{2048} - \frac{819e^9}{32768} - \frac{4665e^{11}}{262144} + \right. \\
&+ \left( 1 - \frac{3e^2}{8} - \frac{9e^4}{64} - \frac{79e^6}{1024} - \frac{819e^8}{16384} - \frac{4665e^{10}}{131072} \right) \times \\
&\times \cos E + \\
&+ \left( \frac{e^2}{24} + \frac{e^4}{384} - \frac{7e^6}{3072} - \frac{71e^8}{24576} - \frac{1061e^{10}}{393216} \right) \cos 3E + \\
&+ \left( \frac{3e^4}{640} + \frac{13e^6}{5120} + \frac{51e^8}{40960} + \frac{741e^{10}}{1310720} \right) \cos 5E + \\
&+ \left( \frac{5e^6}{7168} + \frac{165e^8}{229376} + \frac{1065e^{10}}{1835008} \right) \cos 7E + \\
&+ \left( \frac{35e^8}{294912} + \frac{427e^{10}}{2359296} \right) \cos 9E + \\
&+ \left. \frac{63e^{10}}{2883584} \cos 11E \right], \tag{C1}
\end{aligned}$$

$$\delta i = \frac{W}{\kappa^2} (L_1 \sin \sigma + L_2 \cos \sigma),$$

$$\delta \Omega = \frac{W}{\kappa^2 \sin i} (L_2 \sin \sigma - L_1 \cos \sigma), \text{ где}$$

$$\begin{aligned}
L_1 = & \left( \frac{e}{2} + \frac{e^3}{8} + \frac{e^5}{16} + \frac{5e^7}{128} + \frac{7e^9}{256} + \frac{21e^{11}}{1024} \right) + \\
& + \left( 1 + \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8} + \frac{5e^6}{64} + \frac{7e^8}{128} + \frac{21e^{10}}{512} \right) \cos E + \\
& + \left( \frac{e}{4} + \frac{e^3}{8} + \frac{5e^5}{64} + \frac{7e^7}{128} + \frac{21e^9}{512} + \frac{33e^{11}}{1024} \right) \cos 2E + \\
& + \left( \frac{e^2}{12} + \frac{e^4}{16} + \frac{3e^6}{64} + \frac{7e^8}{192} + \frac{15e^{10}}{512} \right) \cos 3E + \\
& + \left( \frac{e^3}{32} + \frac{e^5}{32} + \frac{7e^7}{256} + \frac{3e^9}{128} + \frac{165e^{11}}{8192} \right) \cos 4E + \\
& + \left( \frac{e^4}{80} + \frac{e^6}{64} + \frac{e^8}{64} + \frac{15e^{10}}{1024} \right) \cos 5E + \\
& + \left( \frac{e^5}{192} + \frac{e^7}{128} + \frac{9e^9}{1024} + \frac{55e^{11}}{6144} \right) \cos 6E + \\
& + \left( \frac{e^6}{448} + \frac{e^8}{256} + \frac{5e^{10}}{1024} \right) \cos 7E + \\
& + \left( \frac{e^7}{1024} + \frac{e^9}{512} + \frac{11e^{11}}{4096} \right) \cos 8E + \\
& + \left( \frac{e^8}{2304} + \frac{e^{10}}{1024} \right) \cos 9E + \\
& + \left( \frac{e^9}{5120} + \frac{e^{11}}{2048} \right) \cos 10E + \\
& + \frac{e^{10}}{11264} \cos 11E + \frac{e^{11}}{24576} \cos 12E, \\
L_2 = & \left( 1 - \frac{e^2}{4} - \frac{e^4}{4} - \frac{15e^6}{64} - \frac{7e^8}{32} - \frac{105e^{10}}{512} \right) \sin E + \\
& + \left( \frac{e}{4} + \frac{e^3}{8} + \frac{5e^5}{64} + \frac{7e^7}{128} + \frac{21e^9}{512} + \frac{33e^{11}}{1024} \right) \sin 2E + \\
& + \left( \frac{e^2}{12} + \frac{e^4}{16} + \frac{3e^6}{64} + \frac{7e^8}{192} + \frac{15e^{10}}{512} \right) \sin 3E + \\
& + \left( \frac{e^3}{32} + \frac{e^5}{32} + \frac{7e^7}{256} + \frac{3e^9}{128} + \frac{165e^{11}}{8192} \right) \sin 4E + \\
& + \left( \frac{e^4}{80} + \frac{e^6}{64} + \frac{e^8}{64} + \frac{15e^{10}}{1024} \right) \sin 5E + \\
& + \left( \frac{e^5}{192} + \frac{e^7}{128} + \frac{9e^9}{1024} + \frac{55e^{11}}{6144} \right) \sin 6E + \\
& + \left( \frac{e^6}{448} + \frac{e^8}{256} + \frac{5e^{10}}{1024} \right) \sin 7E + \\
& + \left( \frac{e^7}{1024} + \frac{e^9}{512} + \frac{11e^{11}}{4096} \right) \sin 8E + \\
& + \left( \frac{e^8}{2304} + \frac{e^{10}}{1024} \right) \sin 9E + \\
& + \left( \frac{e^9}{5120} + \frac{e^{11}}{2048} \right) \sin 10E + \\
& + \frac{e^{10}}{11264} \sin 11E + \frac{e^{11}}{24576} \sin 12E, \\
\delta\sigma = & \frac{\mathfrak{Z}}{\kappa^2} \left[ -1 + \frac{e^2}{8} + \frac{5e^4}{64} + \frac{57e^6}{1024} + \frac{699e^8}{16384} + \right. \\
& + \frac{4491e^{10}}{131072} + \frac{29809e^{12}}{1048576} - \\
& - \left( \frac{2}{e} - \frac{e}{4} - \frac{5e^3}{32} - \frac{57e^5}{512} - \frac{699e^7}{8192} - \right. \\
& - \frac{4491e^9}{65536} - \frac{29809e^{11}}{524288} \left. \right) \cos E - \\
& - \left( \frac{1}{2} + \frac{e^2}{8} + \frac{11e^4}{256} + \frac{15e^6}{1024} + \frac{87e^8}{32768} - \right. \\
& - \frac{393e^{10}}{131072} - \frac{48673e^{12}}{8388608} \left. \right) \cos 2E - \\
& - \left( \frac{e}{4} + \frac{7e^3}{64} + \frac{29e^5}{512} + \frac{131e^7}{4096} + \right. \\
& + \frac{1235e^9}{65536} + \frac{23521e^{11}}{2097152} \left. \right) \cos 3E - \\
& - \left( \frac{3e^2}{32} + \frac{9e^4}{128} + \frac{101e^6}{2048} + \frac{287e^8}{8192} + \right. \\
& + \frac{26665e^{10}}{1048576} + \frac{78947e^{12}}{4194304} \left. \right) \cos 4E - \\
& - \left( \frac{3e^3}{64} + \frac{23e^5}{512} + \frac{151e^7}{4096} + \frac{3851e^9}{131072} + \right. \\
& + \frac{49045e^{11}}{2097152} \left. \right) \cos 5E - \\
& - \left( \frac{5e^4}{256} + \frac{25e^6}{1024} + \frac{1555e^8}{65536} + \frac{5595e^{10}}{262144} + \right. \\
& + \frac{156469e^{12}}{8388608} \left. \right) \cos 6E - \\
& - \left( \frac{5e^5}{512} + \frac{235e^7}{16384} + \frac{2045e^9}{131072} + \frac{16013e^{11}}{1048576} \right) \cos 7E - \\
& - \left( \frac{35e^6}{8192} + \frac{245e^8}{32768} + \frac{4823e^{10}}{524288} + \frac{20713e^{12}}{2097152} \right) \cos 8E - \\
& - \left( \frac{35e^7}{16384} + \frac{553e^9}{131072} + \frac{5957e^{11}}{1048576} \right) \cos 9E -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{63e^8}{65536} + \frac{567e^{10}}{262144} + \frac{26943e^{12}}{8388608} \right) \cos 10E - \\
& - \left( \frac{63e^9}{131072} + \frac{2499e^{11}}{2097152} \right) \cos 11E - \\
& - \left( \frac{231e^{10}}{1048576} + \frac{2541e^{12}}{4194304} \right) \cos 12E - \\
& - \frac{231e^{11}}{2097152} \cos 13E - \frac{429e^{12}}{8388608} \cos 14E \Big] + \\
& + \frac{\mathfrak{N}}{\kappa^2} \left[ \left( \frac{1}{e} + \frac{11e}{8} + \frac{63e^3}{64} + \frac{831e^5}{1024} + \frac{11613e^7}{16384} + \right. \right. \\
& + \frac{83745e^9}{131072} + \frac{616011e^{11}}{1048576} \Big) \sin E + \\
& + \left( \frac{e^2}{8} + \frac{5e^4}{32} + \frac{171e^6}{1024} + \frac{699e^8}{4096} + \right. \\
& + \frac{22455e^{10}}{131072} + \frac{89427e^{12}}{524288} \Big) \sin 2E + \\
& + \left( \frac{e}{24} + \frac{5e^3}{128} + \frac{35e^5}{1024} + \frac{245e^7}{8192} + \right. \\
& + \frac{3465e^9}{131072} + \frac{99099e^{11}}{4194304} \Big) \sin 3E + \\
& + \left( \frac{3e^4}{256} + \frac{21e^6}{1024} + \frac{437e^8}{16384} + \frac{2035e^{10}}{65536} + \right. \\
& + \frac{287145e^{12}}{8388608} \Big) \sin 4E + \\
& + \left( \frac{3e^3}{640} + \frac{7e^5}{1024} + \frac{63e^7}{8192} + \frac{2079e^9}{262144} + \right. \\
& + \frac{33033e^{11}}{4194304} \Big) \sin 5E + \\
& + \left( \frac{5e^6}{3072} + \frac{15e^8}{4096} + \frac{4435e^{10}}{786432} + \frac{23335e^{12}}{3145728} \right) \sin 6E + \\
& + \left( \frac{5e^5}{7168} + \frac{45e^7}{32768} + \frac{495e^9}{262144} + \frac{4719e^{11}}{2097152} \right) \sin 7E + \\
& + \left( \frac{35e^8}{131072} + \frac{385e^{10}}{524288} + \frac{10983e^{12}}{8388608} \right) \sin 8E + \\
& + \left( \frac{35e^7}{294912} + \frac{77e^9}{262144} + \frac{1001e^{11}}{2097152} \right) \sin 9E + \\
& + \left( \frac{63e^{10}}{1310720} + \frac{819e^{12}}{5242880} \right) \sin 10E + \\
& + \left( \frac{63e^9}{2883584} + \frac{273e^{11}}{4194304} \right) \sin 11E + \\
& + \frac{77e^{12}}{8388608} \sin 12E + \frac{231e^{11}}{54525952} \sin 13E \Big] -
\end{aligned}$$

$$- \cos i \delta \Omega,$$

$$\begin{aligned}
\delta M = & \frac{\mathfrak{Z}}{\kappa^2(1-e^2)^2} \left[ 1 + \frac{23e^2}{8} - \frac{255e^4}{64} + \right. \\
& + \frac{111e^6}{1024} + \frac{57e^8}{16384} - \frac{75e^{10}}{131072} + \\
& + \left( \frac{2}{e} + \frac{23e}{4} - \frac{255e^3}{32} + \frac{111e^5}{512} + \right. \\
& + \frac{57e^7}{8192} - \frac{75e^9}{65536} \Big) \cos E + \\
& + \left( \frac{1}{2} - \frac{39e^2}{16} + \frac{447e^4}{256} + \frac{399e^6}{2048} + \right. \\
& + \frac{147e^8}{32768} - \frac{489e^{10}}{262144} \Big) \cos 2E + \\
& + \left( \frac{e}{4} - \frac{95e^3}{192} + \frac{133e^5}{768} + \frac{601e^7}{12288} + \right. \\
& + \frac{2699e^9}{196608} \Big) \cos 3E + \\
& + \left( \frac{3e^2}{32} - \frac{183e^4}{1024} + \frac{235e^6}{4096} + \right. \\
& + \frac{1143e^8}{65536} + \frac{6405e^{10}}{1048576} \Big) \cos 4E + \\
& + \left( \frac{3e^3}{64} - \frac{17e^5}{256} + \frac{91e^7}{20480} + \frac{3963e^9}{655360} \right) \cos 5E + \\
& + \left( \frac{5e^4}{256} - \frac{157e^6}{6144} - \frac{37e^8}{65536} + \frac{1015e^{10}}{524288} \right) \cos 6E + \\
& + \left( \frac{5e^5}{512} - \frac{1035e^7}{114688} - \frac{4875e^9}{1835008} \right) \cos 7E + \\
& + \left( \frac{35e^6}{8192} - \frac{3495e^8}{1048576} - \frac{6411e^{10}}{4194304} \right) \cos 8E + \\
& + \left( \frac{35e^7}{16384} - \frac{2191e^9}{2359296} \right) \cos 9E + \\
& + \left( \frac{63e^8}{65536} - \frac{3381e^{10}}{13107200} \right) \cos 10E + \\
& + \frac{63e^9}{131072} \cos 11E + \frac{231e^{10}}{1048576} \cos 12E \Big] + \\
& + \frac{\mathfrak{N}}{\kappa^2} \left[ \left( -\frac{1}{e} + \frac{9e}{8} - \frac{11e^3}{64} - \frac{55e^5}{1024} - \right. \right. \\
& - \frac{389e^7}{16384} - \frac{1581e^9}{131072} \Big) \sin E + \\
& + \left( \frac{e^2}{8} + \frac{e^4}{32} + \frac{11e^6}{1024} + \frac{15e^8}{4096} + \frac{87e^{10}}{131072} \right) \sin 2E -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{e}{24} + \frac{7e^3}{384} + \frac{29e^5}{3072} + \frac{131e^7}{24576} + \frac{1235e^9}{393216} \right) \sin 3E + \\
& + \left( \frac{3e^4}{256} + \frac{9e^6}{1024} + \frac{101e^8}{16384} + \frac{287e^{10}}{65536} \right) \sin 4E - \\
& - \left( \frac{3e^3}{640} + \frac{23e^5}{5120} + \frac{151e^7}{40960} + \frac{3851e^9}{1310720} \right) \sin 5E + \\
& + \left( \frac{5e^6}{3072} + \frac{25e^8}{12288} + \frac{1555e^{10}}{786432} \right) \sin 6E - \\
& - \left( \frac{5e^5}{7168} + \frac{235e^7}{229376} + \frac{2045e^9}{1835008} \right) \sin 7E + \\
& + \left( \frac{35e^8}{131072} + \frac{245e^{10}}{524288} \right) \sin 8E - \\
& - \left( \frac{35e^7}{294912} + \frac{553e^9}{2359296} \right) \sin 9E + \\
& + \frac{63e^{10}}{1310720} \sin 10E - \frac{63e^9}{2883584} \sin 11E \Big].
\end{aligned}$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ D

Согласно работе [4] разность оскулирующего и среднего радиуса-вектора может быть выражена через разности элементов орбиты:

$$\begin{aligned}
(d\mathbf{r})^2 &= \delta r^2 + r^2(\delta u + \cos i \delta \Omega)^2 + \\
&+ r^2(\sin u \delta i - \sin i \cos u \delta \Omega)^2,
\end{aligned} \quad (D1)$$

где  $u$  — аргумент широты,

$$\begin{aligned}
\delta r &= \frac{r}{a} \delta a + \frac{a^2}{r} (e - \cos E) \delta e + \frac{a^2}{r} e \sin E \delta M, \\
r(\delta u + \cos i \delta \Omega) &= \frac{a^2}{\eta r} (2 - e^2 - e \cos E) \times \\
&\times \sin E \delta e + r \delta \sigma + r \cos i \delta \Omega + \frac{a^2 \eta}{r} \delta M, \\
r(\sin u \delta i - \sin i \cos u \delta \Omega) &= a[(\cos E - e) \times \\
&\times \sin \sigma + \eta \sin E \cos \sigma] \delta i - \\
&- a \sin i [(\cos E - e) \cos \sigma - \\
&- \eta \sin E \sin \sigma] \delta \Omega.
\end{aligned} \quad (D2)$$

Евклидова (среднеквадратичная по средней аномалии) норма вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned}
\varrho^2 &= \|d\mathbf{r}\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (d\mathbf{r})^2 dM = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (d\mathbf{r})^2 (1 - e \cos E) dE = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (d\mathbf{r})^2 \frac{r}{a} dE.
\end{aligned} \quad (D3)$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. T.N. Sannikova and K.V. Kholshchevnikov, *Astron. Rep.* 63(5), 420 (2019).
2. В.А. Антонов, Е.И. Тимошкова, К.В. Холшевников, Введение в теорию ньютоновского потенциала (М.: Наука, 1988).
3. К.В. Холшевников, В.Ш. Шайдулин, *Вестн. СПбГУ. Сер. 1: Математика. Механика. Астрономия* № 2, 86 (2009).
4. N. Batmunkh, T.N. Sannikova, K.V. Kholshchevnikov, and V.Sh. Shaidulin, *Astron. Rep.* 60(3), 366 (2016).
5. К.В. Холшевников, В.Б. Титов, Задача двух тел. Учебное пособие (СПб.: Изд. СПбГУ, 2007).
6. T.N. Sannikova, *Astron. Rep.* 68(3), 331 (2024).
7. К.В. Холшевников, Н. Батмунх, К.И. Оськина, В.Б. Титов, *Астрон. журн.* 97(4), 348 (2020).
8. T.N. Sannikova, *Astron. Rep.* 66(6), 500 (2022).
9. А.М. Фоминов, *Труды ИПА РАН* 5, 313 (2000).
10. М.Ф. Субботин, Введение в теоретическую астрономию (М.: Наука, 1968).
11. Г.Н. Дубошин (ред.), Справочное руководство по небесной механике и астероидике. Изд-е 2-е. (М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1976).
12. A. Cayley, *Mem. Roy. Astron. Soc.* 29, 191 (1861).
13. M.P. Jarnagin, *U.S. Nautical Almanac Office. Astron. Papers* 18, 1060 (1965).
14. А.М. Журавский, Справочник по эллиптическим функциям (М.-Л.: Изд. АН СССР, 1941).
15. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик, Таблицы интегралов, рядов и произведений (СПб.: БХВ-Петербург, 2011).

# DISPLACEMENT NORM IN THE PRESENCE OF AN INVERSE-SQUARE PERTURBING ACCELERATION IN THE REFERENCE FRAME ASSOCIATED WITH THE VELOCITY VECTOR

© 2025 T. N. Sannikova

*Crimean Astrophysical Observatory of the Russian Academy of Sciences, Nauchny, Crimea, Russia*

*e-mail: tnsannikova@craocrimea.ru*

The problem of motion of a zero-mass-point under the action of attraction to the central body and a small perturbing acceleration  $\mathbf{P}' = \mathbf{P}/r^2$  is considered, where  $r$  is the distance to the attracting center and components of the vector  $\mathbf{P}$  are assumed to be constant in a reference system with the axes directed along the velocity vector, the main normal and the angular momentum vector. Previously, for this problem, equations of motion in the mean elements and formulas for the transition from osculating elements to the mean ones in the first order of smallness were found; second-order quantities are neglected. If the perturbing forces are small, then the osculating orbit slightly deviates from the mean one. The difference  $d\mathbf{r}$  between the position vectors on the osculating and mean orbit is a quasi-periodic function of time. In this work, the Euclidean (root-mean-square over the mean anomaly) norm  $\|\mathbf{dr}\|^2$  of the displacement of the osculating orbit relative to the mean one is obtained. It turned out that  $\|\mathbf{dr}\|^2$  depends only on the components of the vector  $\mathbf{P}$  (positive definite quadratic form), the semi-major axis (proportional to the second power) and the eccentricity of the osculating ellipse. The norm  $\|\mathbf{dr}\|^2$  is obtained in the form of series in powers of eccentricity  $e$ . The resulting expression holds up to  $e_0 \approx 0.995862$ ; for  $e > e_0$ ,  $\vartheta = \sqrt{\|\mathbf{dr}\|^2}$  can take complex values. The results are applied to the problem of the motion of model bodies under the action of perturbing acceleration caused by the Yarkovsky effect. A comparison of the results with similar ones for the norm  $\|\mathbf{dr}\|^2$  in the reference system associated with the radius vector was also carried out.

**Keywords:** Yarkovsky effect, tangential acceleration, root-mean-square norm, displacement of the osculating orbit from the mean orbit