

ISSN 0005-2310

А Т АВТОМАТИКА И МЕЛЕМЕХАНИКА



12
2024


НАУКА
— 1727 —

12
2024



А ВТОМАТИКА И МЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

12

декабрь

Москва

2024

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Родионов И.В.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневский В.М.,
Воронцов К.В., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф., Кибзун А.И.,
Краснова С.А., Крищенко А.П., Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г.,
Лазарев А.А., Ляхов А.И., Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США),
Миллер Б.М., Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В.,
Немировский А.С. (США), Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В.,
Пальчунов Д.Е., Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В.,
Степанов О.А., Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: 8 (495) 198-17-20, доб. 1443

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартыхина*

Москва

ФГБУ «Издательство «Наука»

© 2024 г. М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СИНТЕЗ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО ВЫХОДУ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ КАК ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ

Предлагается новый подход к решению задачи подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений в линейных дискретных системах управления при помощи динамической обратной связи по выходу. Подход основан на сведении проблемы к задаче матричной оптимизации, где переменными являются матрица обратной связи и матрица наблюдателя. Выписан градиентный метод для отыскания динамической обратной связи по выходу и дано его обоснование.

Ключевые слова: линейные системы, дискретное время, внешние возмущения, обратная связь по выходу, наблюдатель, оптимизация, уравнение Лапунова, градиентный метод, метод Ньютона.

DOI: 10.31857/S0005231024120012, EDN: XUOEAO

1. Введение

В работе [1] был предложен и обсужден новый подход к решению задачи подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений в линейных непрерывных системах управления при помощи динамической обратной связи по выходу с использованием наблюдателя Люенбергера [2, 3]. Этот подход, восходящий к работе [4], основан на сведении проблемы к задаче матричной оптимизации, где переменными являются матрица обратной связи и матрица наблюдателя; далее эта задача решается градиентным методом.

Небольшой обзор литературы по соответствующей проблематике был дан в [1] (см., например, [5], а также приведенную там обширную библиографию). В [6] был предложен подход к решению этой же задачи путем ее сведения к решению задачи полуопределенного программирования в терминах линейных матричных неравенств (ЛМН) [7, 8]; при этом пришлось произвести ряд закруглений для того, чтобы линеаризовать матричные неравенства и установить окончательный результат в терминах ЛМН, что привело к излишнему консерватизму полученных условий.

Среди идейно близких публикаций также следует отметить недавние работы [9, 10], в которых был предложен перспективный подход к решению обсуждаемой задачи, основанный на нахождении решений параметризованных матричных уравнений Риккати.

Настоящая статья является непосредственным продолжением работы [1], распространяя предложенные в ней подходы на системы управления в дискретном времени. Важной практически-ориентированной особенностью предлагаемого подхода является возможность ограничения величины матриц наблюдателя и динамического регулятора.

Всюду далее \mathbb{S}^n – пространство симметричных матриц размера $n \times n$ с вещественными элементами, $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора и спектральная норма матрицы, $\|\cdot\|_F$ – фробениусова норма матрицы, T – символ транспонирования, tr – след матрицы, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение Фробениуса для матриц, I – единичная матрица соответствующей размерности, $\lambda_i(A)$ – собственные значения матрицы A , а $\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)| < 1$ – радиус устойчивости шуровской матрицы A .

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему управления

$$(1) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Dw_k, \\ y_k &= C_1x_k + D_1w_k, \\ z_k &= C_2x_k, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{r \times n}$, с состоянием $x_k \in \mathbb{R}^n$, начальным условием x_0 , наблюдаемым выходом $y_k \in \mathbb{R}^\ell$, оптимизируемым выходом $z_k \in \mathbb{R}^r$, управлением $u_k \in \mathbb{R}^p$ и внешним возмущением¹ $w_k \in \mathbb{R}^m$, ограниченным в каждый момент времени:

$$\|w_k\| \leq \delta \quad \text{для всех } k = 0, 1, 2, \dots$$

Будем предполагать, что пара (A, B) управляема, а пара (A, C_1) наблюдаема.

Состояние x_k системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом y_k . Задачей является нахождение минимального (в определенном смысле) эллипсоида, содержащего оптимизируемый выход z_k .

Построим наблюдатель, описываемый линейным разностным уравнением, включающим в себя рассогласование выхода y_k и его прогноза $C_1\hat{x}_k$:

$$(2) \quad \hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + L(y_k - C_1\hat{x}_k), \quad \hat{x}_0 = 0,$$

где $L \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ – матрица наблюдателя.

Согласно (1), (2) невязка $e_k = x_k - \hat{x}_k$ будет удовлетворять разностному уравнению

$$e_{k+1} = (A - LC_1)e_k + (D - LD_1)w_k, \quad e_0 = x_0.$$

¹ Несмотря на то, что природа возмущений в состоянии и наблюдаемом выходе системы, вообще говоря, различна, удобно считать их одними и теми же, полагая что матрицы D и D_1 “вырезают” из вектора w_k разные “куски”; общий случай также может быть рассмотрен ценой некоторого усложнения.

Замкнув систему (1) обратной связью с помощью динамического регулятора

$$(3) \quad u_k = K\hat{x}_k, \quad K \in \mathbb{R}^{p \times n},$$

получаем систему

$$(4) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= (A + BK)x_k - BKe_k + Dw_k, \\ e_{k+1} &= (A - LC_1)e_k + (D - LD_1)w_k, \\ z_k &= C_2x_k \end{aligned}$$

с регулируемым выходом z_k .

Как и в непрерывном случае, синтез статического регулятора по выходу вида $u_k = Ky_k$ не всегда возможен: матрица $A + BKC_1$ может оказаться не стабилизируемой выбором K , тогда как динамический регулятор (3) может быть построен (при малоограничительных требованиях управляемости и наблюдаемости системы; подробнее см. раздел 3).

3. Подход к решению

Воспользуемся методом инвариантных эллипсоидов (подробнее см. [8, 13]). Напомним, что эллипсоид

$$\mathcal{E}_x = \{x \in \mathbb{R}^n: \quad x^T P^{-1} x \leq 1\}, \quad P \succ 0$$

называется *инвариантным* для линейной дискретной динамической системы

$$(5) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Dw_k, \quad \|w_k\| \leq 1, \\ z_k &= Cx_k \end{aligned}$$

с шуровской матрицей A , если любая траектория системы, исходящая из точки x_0 , лежащей в эллипсоиде \mathcal{E}_x , при всех внешних возмущениях $w_k: \|w_k\| \leq 1$ в любой момент времени будет находиться в этом эллипсоиде.

Инвариантный эллипсоид обладает свойством притягиваемости: траектория системы, исходящая из точки вне инвариантного эллипсоида, стремится к нему с течением времени.

Легко видеть, что если \mathcal{E}_x – инвариантный эллипсоид с матрицей P , то линейный выход z_k системы (5) при $x_0 \in \mathcal{E}_x$ будет принадлежать эллипсоиду

$$\mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R}^r: \quad z^T (CPC^T)^{-1} z \leq 1\},$$

называемому *ограничивающим* (а при $x_0 \notin \mathcal{E}_x$ – стремиться к нему).

Оценивая влияния внешних возмущений на выход системы, естественно интересоваться минимальными ограничивающими эллипсоидами; в качестве критерия минимальности ограничивающего эллипсоида часто принимается величина $\text{tr } CPC^T$, равная сумме квадратов его полуосей. Хорошо известен следующий результат (см., например, [8]).

Теорема 1. Пусть матрица A шуровская, $\rho = \max_i |\lambda_i(A)| < 1$, пара (A, D) управляема, а матрица $P(\alpha) \succ 0$, $\rho^2 < \alpha < 1$ удовлетворяет дискретному уравнению Ляпунова

$$(6) \quad \frac{1}{\alpha} A P A^T - P + \frac{1}{1 - \alpha} D D^T = 0.$$

Тогда задача об оптимальном ограничивающем эллипсоиде для системы (5) сводится к минимизации одномерной функции

$$f(\alpha) = \operatorname{tr} C P(\alpha) C^T$$

на интервале $\rho^2 < \alpha < 1$.

Сделаем несколько замечаний. Во-первых, если α^* – точка минимума в задаче из теоремы 1, и x_0 удовлетворяет условию $x_0^T P^{-1}(\alpha^*) x_0 \leq 1$, то гарантируется очевидная равномерная оценка

$$\|z_k\|^2 \leq \|C P(\alpha^*) C^T\| \leq \operatorname{tr} C P(\alpha^*) C^T = f(\alpha^*), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Во-вторых, уравнение (6) представимо в виде

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} A \right) P \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} A \right)^T - P + \frac{1}{1 - \alpha} D D^T = 0$$

и согласно [8, лемма 1.2.6] имеет единственное положительно-определенное решение тогда и только тогда, когда матрица $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} A$ шуровская, т.е.

$$\rho \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} A \right) < 1.$$

Вернемся к системе (4); введя составной вектор

$$g_k = \begin{pmatrix} x_k \\ e_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n},$$

запишем ее в матричном виде и введем в рассмотрение матрицы $A_{K,L}$, D_L и C :

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{g}_k &= \underbrace{\begin{pmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - LC_1 \end{pmatrix}}_{A_{K,L}} g_k + \underbrace{\begin{pmatrix} D \\ D - LD_1 \end{pmatrix}}_{D_L} w_k, \quad g_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 \end{pmatrix}, \\ z_k &= \underbrace{\begin{pmatrix} C_2 & 0 \end{pmatrix}}_C g_k. \end{aligned}$$

Заклучим состояние g_k системы (7) в инвариантный эллипсоид

$$\mathcal{E}_g = \{g \in \mathbb{R}^{2n}: \quad g^T P^{-1} g \leq 1\},$$

порожденный матрицей $P \in \mathbb{S}^{2n}$, и будем минимизировать размер соответствующего ограничивающего эллипсоида

$$\mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R}^r: \quad z^T(\mathcal{C}P\mathcal{C}^T)^{-1}z \leq 1\}$$

по выходу z_k с матрицей $\mathcal{C}P\mathcal{C}^T$. В качестве критерия его минимальности примем критерий следа, т.е. величину $\text{tr } \mathcal{C}P\mathcal{C}^T$.

Заметив, что матрица $A_{K,L}$ представима в виде

$$\begin{aligned} A_{K,L} &= \begin{pmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - LC_1 \end{pmatrix} = \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}}_{\mathcal{A}} + \underbrace{\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}}_{M_1} K \underbrace{\begin{pmatrix} I & -I \end{pmatrix}}_{N_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}}_{M_2} L \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -C_1 \end{pmatrix}}_{N_2}, \end{aligned}$$

в соответствии с теоремой 1 приходим к задаче минимизации функции $\text{tr } \mathcal{C}P\mathcal{C}^T$ при ограничении

$$(8) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{\alpha}(\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2 L N_2)P(\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2 L N_2)^T - \\ &\quad - P + \frac{\delta^2}{1 - \alpha} D_L D_L^T = 0 \end{aligned}$$

относительно матричных переменных $0 \prec P \in \mathbb{S}^{2n}$, $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ и скалярного параметра $\alpha > 0$.

В качестве критерия качества выберем функцию

$$(9) \quad f(K, L, \alpha) = \text{tr } \mathcal{C}P\mathcal{C}^T + \chi_K \|K\|_F^2 + \chi_L \|L\|_F^2,$$

в которой помимо компоненты, определяющей размер ограничивающего эллипсоида по критерию следа, содержатся штрафы за величину матриц регулятора и наблюдателя (при этом коэффициенты $\chi_K, \chi_L > 0$ регулируют их важность); в то же время их наличие гарантирует коэрцитивность минимизируемой функции по K и L (см. раздел 4).

Замечание 1. Обратим внимание, что блочная матрица $A_{K,L}$ имеет те же собственные значения, что и стоящие на ее диагонали матрицы $A + BK$ и $A - LC_1$. В свою очередь, существование матриц K и L таких, чтобы матрицы $A + BK$ и $A - LC_1$ были устойчивыми, вытекает из свойств управляемости и наблюдаемости исходной системы.

В силу замечания 1 заведомо существуют матрицы K_0 и L_0 такие, что матрица A_{K_0, L_0} шуровская. Матрицы (K, L) , обладающие этим свойством, будем называть *стабилизирующей матричной парой*.

4. Оптимизация функции $f(K, L, \alpha)$

Итак, исходная задача синтеза динамической обратной связи при помощи наблюдателя, подавляющей воздействие внешних возмущений на выход z_k системы (1), свелась к задаче минимизации функции $f(K, L, \alpha)$, определяемой соотношением (9), при ограничении

$$(10) \quad \frac{1}{\alpha} A_{K,L} P A_{K,L}^T - P + \frac{\delta^2}{1 - \alpha} D_L D_L^T = 0$$

по переменным $P \in \mathbb{S}^{2n}$, $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ и скалярному параметру $\alpha > 0$. Запись $f(K, L, \alpha)$ подчеркивает, что при заданных K , L и α матрица P находится из уравнения Ляпунова (10); тем самым независимыми переменными являются K , L и α .

Установленные в [11] свойства функции $f(\alpha) = \text{tr } C P C^T$ (при некоторой фиксированной стабилизирующей паре (K, L)), могут быть полностью перенесены на рассматриваемый случай. В частности, функция $f(\alpha)$ определена, положительна и строго выпукла на интервале $\rho^2(A_{K,L}) < \alpha < 1$, а ее значения стремятся к бесконечности на концах этого интервала.

Минимизацию функции $f(\alpha)$ можно эффективно осуществлять при помощи метода Ньютона. А именно, зададимся некоторым начальным приближением $\rho^2(A_{K,L}) < \alpha_0 < 1$, например $\alpha_0 = (1 + \rho^2(A_{K,L}))/2$ и применим итерационный процесс

$$(11) \quad \alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{f'(\alpha_j)}{f''(\alpha_j)}.$$

При этом согласно [11]

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \text{tr } Y \left(\frac{\delta^2}{(1 - \alpha)^2} D_L D_L^T - \frac{1}{\alpha^2} A_{K,L} P A_{K,L}^T \right), \\ f''(\alpha) &= 2 \text{tr } Y \left(\frac{\delta^2}{(1 - \alpha)^3} D_L D_L^T + \frac{1}{\alpha^3} A_{K,L} (P - X) A_{K,L}^T \right), \end{aligned}$$

где P , Y и X – решения дискретных уравнений Ляпунова (10),

$$\frac{1}{\alpha} A_{K,L}^T Y A_{K,L} - Y + C^T C = 0$$

и

$$\frac{1}{\alpha} A_{K,L} X A_{K,L}^T - X + \frac{\delta^2}{(1 - \alpha)^2} D_L D_L^T - \frac{1}{\alpha^2} A_{K,L} P A_{K,L}^T = 0$$

соответственно.

Следующая теорема гарантирует глобальную сходимость алгоритма.

Теорема 2 [11]. В методе (11) справедливы оценки

$$|\alpha_j - \alpha^*| \leq \frac{f''(\alpha_0)}{2^j f''(\alpha^*)} |\alpha_0 - \alpha^*|, \quad |\alpha_{j+1} - \alpha^*| \leq c |\alpha_j - \alpha^*|^2,$$

где $c > 0$ – некоторая константа (она может быть выписана явно).

Первая оценка гарантирует глобальную сходимость метода (быстрее, чем геометрическая прогрессия с коэффициентом $1/2$), а вторая – квадратичную сходимость в окрестности решения.

Перейдем к минимизации функции

$$f(K, L) \doteq \min_{\alpha} f(K, L, \alpha),$$

предварительно исследовав ее свойства.

Лемма 1 [1]. Функция $f(K, L)$ определена и положительна на множестве \mathcal{S} стабилизирующих матричных пар.

Множество определения \mathcal{S} функции $f(K, L)$ может быть невыпуклым и несвязным, причем, как и в непрерывном случае, его границы могут быть негладкими (см. [12]).

Лемма 2. Функция $f(K, L, \alpha)$ определена при $(K, L) \in \mathcal{S}$ и для $\rho^2(A_{K,L}) < \alpha < 1$. На этом допустимом множестве она дифференцируема, причем градиент дается выражениями

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} f(K, L, \alpha) &= \operatorname{tr} Y \left(\frac{\delta^2}{(1-\alpha)^2} D_L D_L^T - \frac{1}{\alpha^2} A_{K,L} P A_{K,L}^T \right), \\ (12) \quad \frac{1}{2} \nabla_K f(K, L, \alpha) &= \frac{1}{\alpha} M_1^T Y A_{K,L} P N_1^T + \chi_K K, \end{aligned}$$

$$(13) \quad \frac{1}{2} \nabla_L f(K, L, \alpha) = \frac{1}{\alpha} M_2^T Y A_{K,L} P N_2^T - \frac{\delta^2}{1-\alpha} (0 \quad I) Y D_L D_1^T + \chi_L L,$$

где матрица Y является решением дискретного уравнения Ляпунова

$$(14) \quad \frac{1}{\alpha} A_{K,L}^T Y A_{K,L} - Y + C^T C = 0.$$

Минимум функции $f(K, L, \alpha)$ достигается во внутренней точке допустимого множества и определяется необходимыми условиями

$$\nabla_K f(K, L, \alpha) = 0, \quad \nabla_L f(K, L, \alpha) = 0, \quad \nabla_{\alpha} f(K, L, \alpha) = 0.$$

При этом $f(K, L, \alpha)$ как функция от α строго выпукла на $\rho^2(A_{K,L}) < \alpha < 1$ и достигает минимума во внутренней точке этого интервала.

Доказательство этого и последующего утверждений приведены в Приложении.

Далее – для получения простых количественных оценок в лемме 3 – в минимизируемую функцию (9) вводится регуляризующая добавка ε следующим образом:

$$f(K, L, \alpha) = \operatorname{tr} P(C^T C + \varepsilon I) + \chi_K \|K\|_F^2 + \chi_L \|L\|_F^2 \rightarrow \min_{K, L, \alpha}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Требование необходимости ее введения можно существенно ослабить, но цель сейчас состоит в получении наиболее простых и наглядных результатов.

Лемма 3. На множестве \mathcal{S} функция $f(K, L)$ коэрцитивна (т.е. стремится к бесконечности на его границе), причем справедливы следующие оценки:

$$(15) \quad \begin{aligned} f(K, L) &\geq \frac{\delta^2}{1 - \rho^2(A_{K,L})} \frac{\varepsilon}{1 - \sigma_{\min}^2(A_{K,L})} \|D_L\|_F^2, \\ f(K, L) &\geq \chi_K \|K\|^2, \\ f(K, L) &\geq \chi_L \|L\|^2. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение множество уровня

$$\mathcal{S}_0 = \{(K, L) \in \mathcal{S}: f(K, L) \leq f(K_0, L_0)\}.$$

Из леммы 3 вытекает очевидное

Следствие 1. Для любых $(K_0, L_0) \in \mathcal{S}$ множество \mathcal{S}_0 ограничено.

С другой стороны, у функции $f(K, L)$ на множестве \mathcal{S}_0 существует точка минимума (как у непрерывной – в силу свойств решения уравнения Ляпунова – функции на компактном множестве), но множество \mathcal{S}_0 не имеет общих точек с границей \mathcal{S} в силу (15). Выше было показано, что $f(K, L)$ дифференцируема на \mathcal{S}_0 . Следовательно, справедливо

Следствие 2. Существует точка минимума (K_, L_*) на множестве \mathcal{S} , и в ней градиент функции $f(K, L)$ обращается в нуль.*

Градиенты функции $f(K, L)$ по K и по L не являются липшицевыми на множестве \mathcal{S} стабилизирующих регуляторов, однако можно показать, что они обладают этим свойством на его подмножестве \mathcal{S}_0 .

Полученные свойства минимизируемой функции и ее производных позволяют построить метод минимизации и обосновать его сходимость.

5. Алгоритм решения

Предлагаются следующий итеративный подход к решению задачи (8)–(9). В его основе лежит попеременное применение градиентного метода по переменным K и L и минимизация по параметру α по методу Ньютона.

Алгоритм минимизации $f(K, L, \alpha)$:

1. Задаемся параметрами $\varepsilon > 0$, $0 < \tau_K, \tau_L < 1$ и начальной стабилизирующей матричной парой (K_0, L_0) .

Вычисляем величину

$$\alpha_0 = \frac{1 + \rho^2(\mathcal{A} + M_1 K_0 N_1 + M_2 L_0 N_2)}{2}.$$

2. На j -й итерации имеем величины K_j , L_j и α_j .

Вычисляем градиент $H_j^K = \nabla_K f(K_j, L_j, \alpha_j)$.

3. Делаем шаг градиентного метода по K :

$$K_{j+1} = K_j - \gamma_j^K H_j^K,$$

при этом длину шага $\gamma_j^K > 0$ подбираем дроблением γ_K до выполнения условий:

а. K_{j+1} обращает матрицу $(\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2 L_j N_2)/\sqrt{\alpha_j}$ в шуровскую;

б. $f(K_{j+1}) \leq f(K_j) - \tau_K \gamma_j^K \|H_j^K\|^2$.

4. Имея величину K_{j+1} , вычисляем градиент $H_j^L = \nabla_L f(K_{j+1}, L_j, \alpha_j)$.

5. Делаем шаг градиентного метода по L :

$$L_{j+1} = L_j - \gamma_j^L H_j^L,$$

при этом длину шага $\gamma_j^L > 0$ подбираем дроблением γ_L до выполнения условий:

а. L_{j+1} обращает матрицу $(\mathcal{A} + M_1 K_{j+1} N_1 + M_2 L N_2)/\sqrt{\alpha_j}$ в шуровскую;

б. $f(L_{j+1}) \leq f(L_j) - \tau_L \gamma_j^L \|H_j^L\|^2$.

6. Для полученных K_{j+1} , L_{j+1} решаем задачу минимизации $f(K_{j+1}, L_{j+1}, \alpha)$ по α и получаем α_{j+1} . Переходим к п. 2.

Условие остановки:

$$\|H_j^K\| \leq \varepsilon, \quad \|H_j^L\| \leq \varepsilon.$$

В этом случае текущую пару (K_j, L_j) принимаем за приближенное решение и завершаем работу алгоритма.

Важным моментом является выбор пробного шага градиентного метода. Весьма перспективным является его выбор из следующих соображений. Пусть для некоторых K , L , α и $P \succ 0$ выполняется

$$\frac{1}{\alpha}(\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2 L N_2)P(\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2 L N_2)^T - P + \frac{\delta^2}{1 - \alpha} D_L D_L^T = 0.$$

Рассмотрим приращение по K :

$$K \rightarrow K - \gamma H^K, \quad H^K = \nabla_K f(K, L, \alpha),$$

и найдем, для каких γ матрица $\mathcal{A} + M_1(K - \gamma H^K)N_1 + M_2 L N_2$ останется устойчивой (шуровской).

Для этого достаточно потребовать, чтобы P оставалась матрицей квадратичной функции Ляпунова для $\mathcal{A} + M_1(K - \gamma H^K)N_1 + M_2 L N_2$, т.е.

$$(\mathcal{A} + M_1(K - \gamma H^K)N_1 + M_2 L N_2)P(\mathcal{A} + M_1(K - \gamma H^K)N_1 + M_2 L N_2)^T - P \prec 0$$

или

$$\begin{pmatrix} P & \mathcal{A} + M_1(K - \gamma H^K)N_1 + M_2 L N_2 \\ (\mathcal{A} + M_1(K - \gamma H^K)N_1 + M_2 L N_2)^T & P^{-1} \end{pmatrix} \succ 0.$$

Последнему соотношению можно придать вид

$$\begin{pmatrix} P & A_{K,L} \\ A_{K,L}^T & P^{-1} \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} 0 & M_1 H^K N_1 \\ (M_1 H^K N_1)^T & 0 \end{pmatrix} \succ 0,$$

откуда, согласно [14],

$$0 < \gamma^K < \min_{\lambda_i > 0} \lambda_i \left(\begin{pmatrix} P & A_{K,L} \\ A_{K,L}^T & P^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & M_1 H^K N_1 \\ (M_1 H^K N_1)^T & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Аналогичным образом предлагается выбирать пробный шаг при оптимизации по переменной L :

$$0 < \gamma^L < \min_{\lambda_i > 0} \lambda_i \left(\begin{pmatrix} P & A_{K,L} \\ A_{K,L}^T & P^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & M_2 H^L N_2 \\ (M_2 H^L N_2)^T & 0 \end{pmatrix} \right),$$

где $H^L = \nabla_L f(K, L, \alpha)$.

6. Пример: управление двухмассовой системой

Рассмотрим *двухмассовую систему* – систему из двух твердых тел с массами m_1 и m_2 , соединенных пружиной с коэффициентом упругости k , скользящих без трения вдоль неподвижного горизонтального стержня (рис. 1). К левому телу приложено управление u ; на каждое из тел воздействуют внешние возмущения w_1 и w_2 .

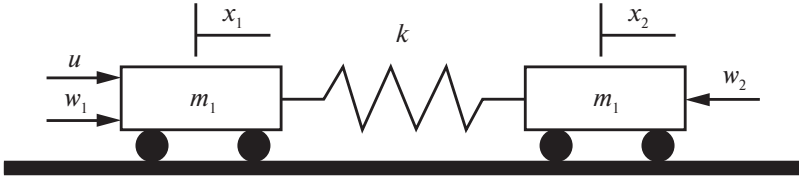


Рис. 1. Двухмассовая система.

Обозначим через x_1, v_1 координату и скорость левого тела, а через x_2, v_2 – правого тела. Наблюдению доступен зашумленный двумерный выход

$$y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + w_3 \end{pmatrix},$$

а в качестве регулируемого выхода рассмотрим

$$z = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Будем полагать ограниченным в каждый момент времени объединенный вектор внешних возмущений:

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad \|w\| \leq 0,2.$$

При единичных параметрах двухмассовой системы и интервале дискретизации $\Delta = 0,1$ приходим к системе вида (1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0,9950 & 0,0050 & 0,0998 & 0,0002 \\ 0,0050 & 0,9950 & 0,0002 & 0,0998 \\ -0,0997 & 0,0997 & 0,9950 & 0,0050 \\ 0,0997 & -0,0997 & 0,0050 & 0,9950 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0,0050 \\ 0,0000 \\ 0,0998 \\ 0,0002 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0,0050 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0050 & 0 \\ 0,0998 & 0,0002 & 0 \\ 0,0002 & 0,0998 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зададимся некоторой начальной стабилизирующей парой

$$K_0 = \begin{pmatrix} -6,9566 & 2,6036 & -4,1281 & -5,8682 \end{pmatrix}, \quad L_0 = \begin{pmatrix} 3,2037 & -0,6077 \\ 3,5790 & 0,3961 \\ 3,3299 & 0,1006 \\ -7,0446 & 5,3352 \end{pmatrix}$$

и положим

$$\chi_K = \chi_L = 0,1.$$

Итеративная процедура в соответствии со сформулированным выше алгоритмом приводит к матрице динамического регулятора

$$K^* = \begin{pmatrix} -1,0311 & 0,6922 & -1,8064 & 0,0088 \end{pmatrix}, \quad \|K^*\| = 2,1921,$$

матрице наблюдателя

$$L^* = \begin{pmatrix} 1,1630 & -0,1759 \\ 1,8237 & 0,3432 \\ 2,0765 & 0,0714 \\ -3,7874 & 2,6783 \end{pmatrix}, \quad \|L^*\| = 5,2735$$

и соответствующему ограничивающему эллипсу с матрицей

$$CP^*C^T = \begin{pmatrix} 0,3974 & 0,1478 \\ 0,1478 & 0,4115 \end{pmatrix}, \quad \text{tr } CP^*C^T = 0,8089;$$

при этом $\alpha^* = 0,9714$. Динамика изменения критерия $f(K, L)$ показана на рис. 2.

Положив теперь

$$\chi_K = \chi_L = 0,01,$$

находим матрицу динамического регулятора

$$K'^* = \begin{pmatrix} -1,3591 & 0,8130 & -2,5922 & 0,0186 \end{pmatrix}, \quad \|K'^*\| = 3,0378,$$

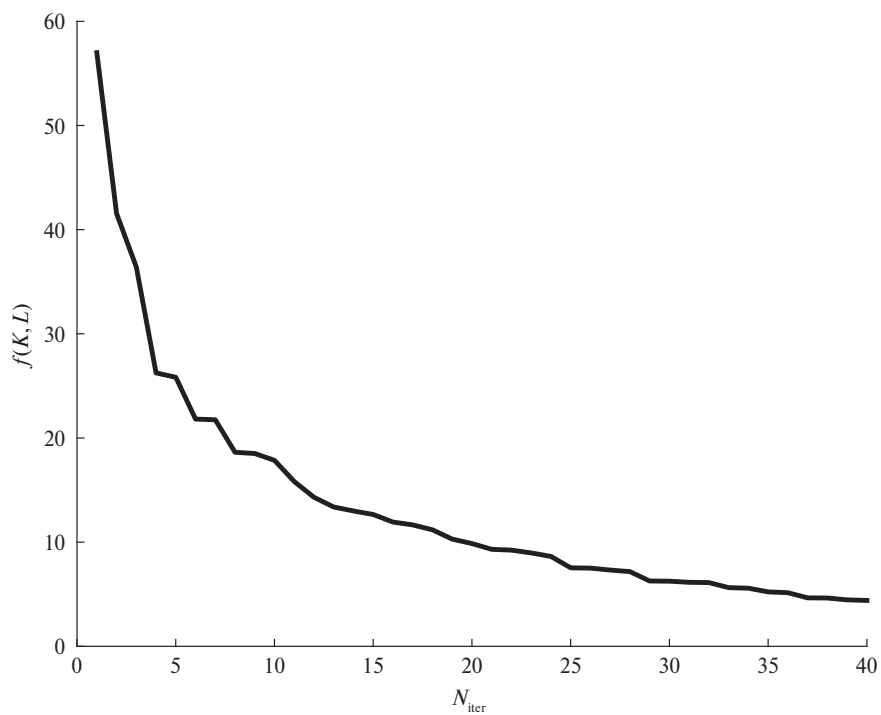


Рис. 2. Оптимизационная процедура при $\chi_K = \chi_L = 0,1$.

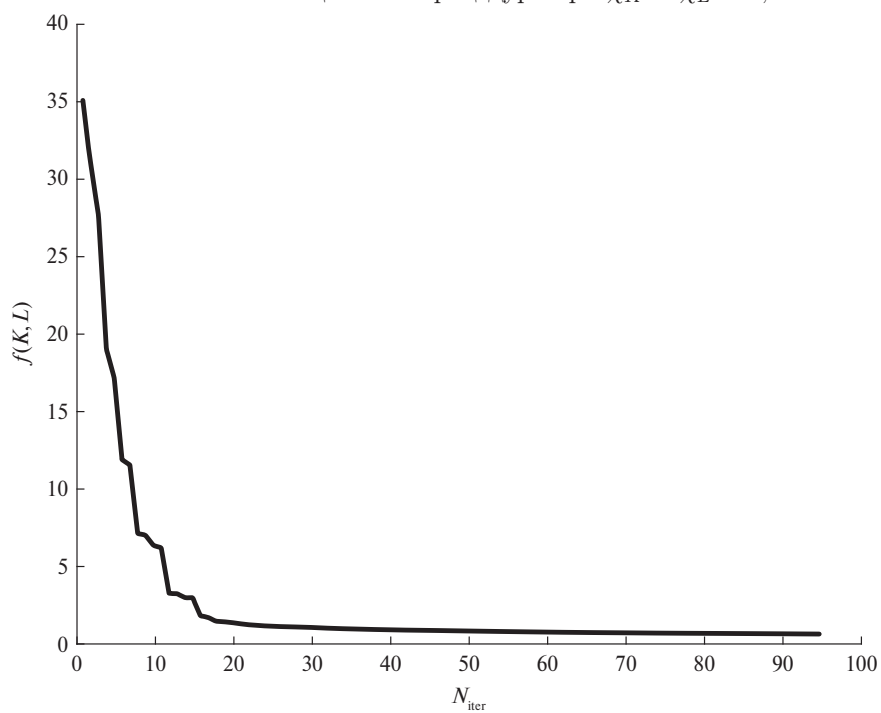


Рис. 3. Оптимизационная процедура при $\chi_K = \chi_L = 0,01$.

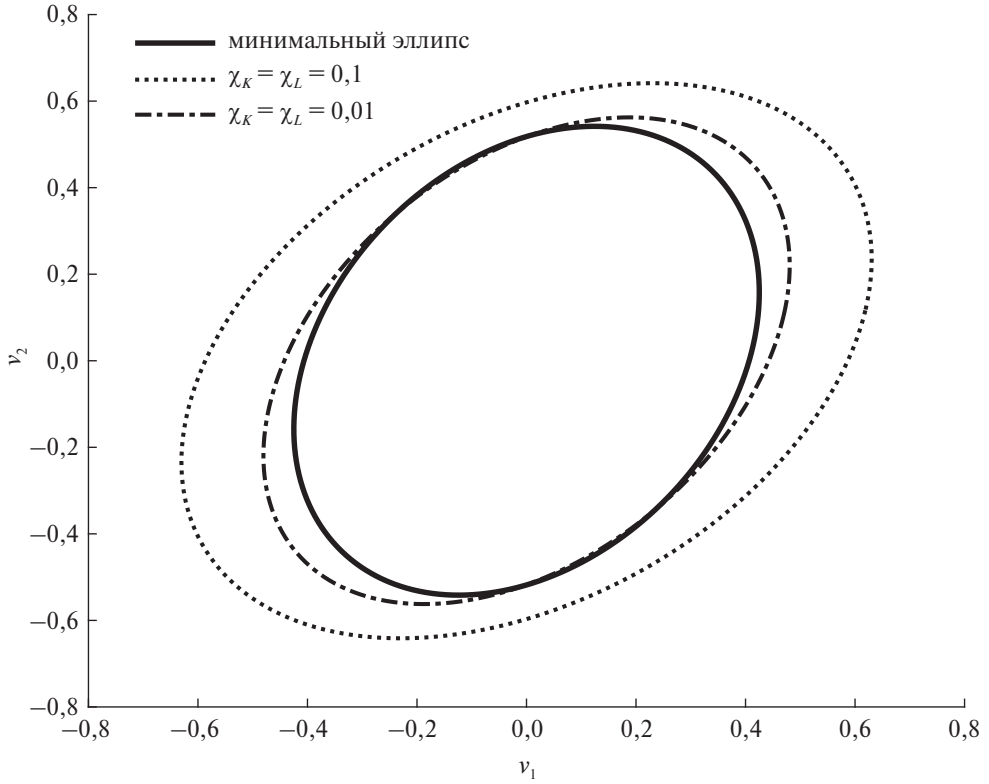


Рис. 4. Ограничивающие эллипсы.

матрицу наблюдателя

$$L'^* = \begin{pmatrix} 0,6899 & -0,0066 \\ 2,7589 & 0,5861 \\ 3,0458 & 0,1396 \\ -5,3792 & 3,8014 \end{pmatrix}, \quad \|L'^*\| = 7,4014$$

и соответствующий ограничивающий эллипс с матрицей

$$CP'^*C^T = \begin{pmatrix} 0,2310 & 0,1056 \\ 0,1056 & 0,3163 \end{pmatrix}, \quad \text{tr } CP'^*C^T = 0,5473;$$

при этом $\alpha^* = 0,9677$. Динамика изменения критерия $f(K, L)$ показана на рис. 3.

Как видно, уменьшение штрафных коэффициентов привело к ожидаемому результату: размер ограничивающего эллипса уменьшился (примерно на треть); “платой” за это явился рост нормы матриц динамического регулятора и наблюдателя (приблизительно на 40%).

Для сравнения, воспользовавшись для решения этой же задачи подходом, предложенным в [10], находим матрицу динамического регулятора

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} -15,2436 & 10,0353 & -10,7619 & -8,9984 \end{pmatrix}, \quad \|\hat{K}\| = 23,0188,$$

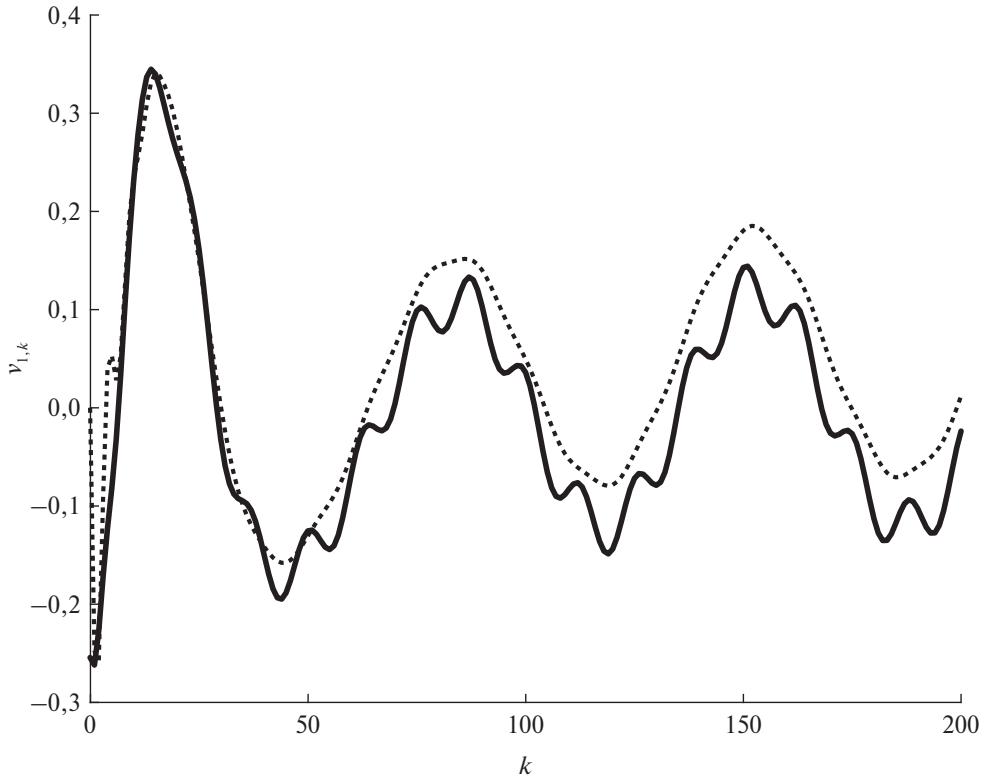


Рис. 5. Динамика координаты v_1 (сплошная линия) и ее оценки \hat{v}_1 (точечная линия).

и матрицу наблюдателя

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 3,0329 & 0,0004 \\ 14,9866 & 0,0818 \\ 20,9524 & 0,0080 \\ 6,6502 & 0,0405 \end{pmatrix}, \quad \|\hat{L}\| = 26,7774,$$

соответствующие минимальному ограничивающему эллипсу с матрицей

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 0,1807 & 0,0672 \\ 0,0672 & 0,2935 \end{pmatrix}, \quad \text{tr } \hat{R} = 0,4742.$$

Как видно, построенный ограничивающий эллипс с матрицей $\mathcal{C}P'^*\mathcal{C}^T$ превышает оптимальный (с матрицей \hat{R}) всего лишь на 15%, тогда как соответствующие матрицы регулятора и наблюдателя отличаются по норме в несколько раз (для матрицы регулятора – почти на порядок).

На рис. 4 сплошной линией показан оптимальный ограничивающий эллипс, предоставляемый методом [10]; точечной линией показан полученный в соответствии с предлагаемой оптимизационной процедурой ограничивающий эллипс при $\chi_K = \chi_L = 0,1$, а штрихпунктиром – при $\chi_K = \chi_L = 0,01$.

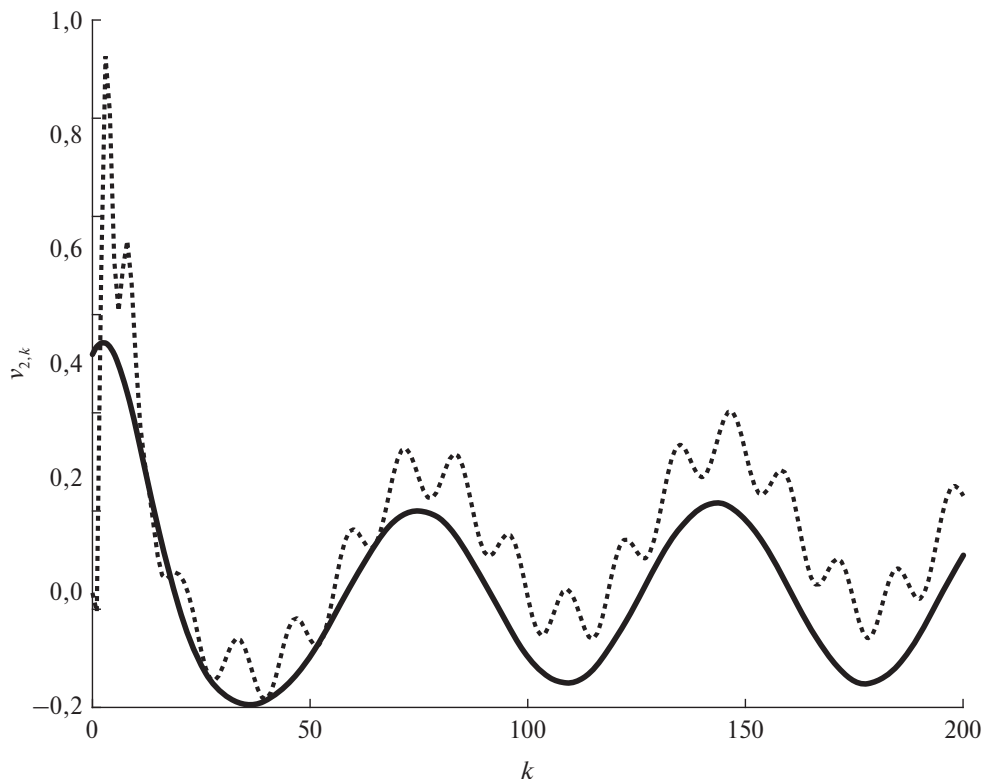


Рис. 6. Динамика координаты v_2 (сплошная линия) и ее оценки \hat{v}_2 (точечная линия).

На рис. 5 и 6 сплошной линией показаны истинные траектории оцениваемых координат системы (при некотором начальном условии и допустимом внешнем возмущении), а точечной линией – их оценки, предоставляемые построенной парой (K^*, L^*) .

7. Заключение

Предложен новый подход к задаче подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений в линейных дискретных системах управления при помощи динамической обратной связи по выходу. Подход основан на сведении исходной задачи к задаче матричной оптимизации, далее она решается градиентным методом. Конечно, возможно использование заметно более быстрых методов минимизации первого порядка, чем градиентный метод (в частности – метод сопряженных градиентов). Подробная проверка более эффективных методов предполагается в будущем; пока важна принципиальная возможность и эффективность нового подхода. Его практически-ориентированной особенностью является возможность ограничения величины матрицы наблюдателя и матрицы регулятора.

Одним из возможных направлений для дальнейших исследований является обобщение предлагаемого подхода на различные робастные постановки задачи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 2. Дифференцирование по α производится в соответствии с результатами, приведенными в разделе 4.

Для дифференцирования по K функции (9) при ограничении в виде дискретного уравнения Ляпунова

$$(П.1) \quad \frac{1}{\alpha} A_{K,L} P A_{K,L}^T - P + \frac{\delta^2}{1-\alpha} D_L D_L^T = 0$$

относительно матрицы P инвариантного эллипсоида придадим величине K приращение ΔK и обозначим соответствующее приращение P через ΔP :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} (\mathcal{A} + M_1(K + \Delta K)N_1 + M_2 L N_2)(P + \Delta P)(\mathcal{A} + M_1(K + \Delta K)N_1 + M_2 L N_2)^T - \\ - (P + \Delta P) + \frac{\delta^2}{1-\alpha} D_L D_L^T = 0. \end{aligned}$$

Оставляя обозначение ΔP для главной части приращения, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} (A_{K,L} P A_{K,L}^T + A_{K,L} P (M_1 \Delta K N_1)^T + M_1 \Delta K N_1 P A_{K,L}^T + A_{K,L} \Delta P A_{K,L}^T) - \\ - (P + \Delta P) + \frac{\delta^2}{1-\alpha} D_L D_L^T = 0. \end{aligned}$$

После вычитания уравнения (П.1) из этого уравнения имеем:

$$(П.2) \quad \frac{1}{\alpha} A_{K,L} \Delta P A_{K,L}^T - \Delta P + \frac{1}{\alpha} (A_{K,L} P (M_1 \Delta K N_1)^T + M_1 \Delta K N_1 P A_{K,L}^T) = 0.$$

Вычислим приращение функции $f(K, L, \alpha)$ по K , линеаризуя соответствующие величины:

$$\begin{aligned} \Delta_K f(K, L, \alpha) &= f(K + \Delta K, L, \alpha) - f(K, L, \alpha) = \\ &= \text{tr } \mathcal{C}(P + \Delta P) \mathcal{C}^T + \chi_K \|K + \Delta K\|_F^2 - (\text{tr } \mathcal{C} P \mathcal{C}^T + \chi_K \|K\|_F^2) = \\ &= \text{tr } \mathcal{C} \Delta P \mathcal{C}^T + \chi_K (\langle K + \Delta K, K + \Delta K \rangle - \langle K, K \rangle) = \\ &= \text{tr } \mathcal{C} \Delta P \mathcal{C}^T + \chi_K (\text{tr } K^T \Delta K + \text{tr } (\Delta K)^T K) = \text{tr } \Delta P \mathcal{C}^T \mathcal{C} + 2\chi_K \text{tr } K^T \Delta K. \end{aligned}$$

Из двойственных уравнений Ляпунова (П.2) и (14) имеем (см. [11, лемма П.1.1])

$$\text{tr } \Delta P \mathcal{C}^T \mathcal{C} = \frac{2}{\alpha} \text{tr } Y M_1 \Delta K N_1 P A_{K,L}^T$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \Delta_K f(K, L, \alpha) &= \frac{2}{\alpha} \text{tr } Y M_1 \Delta K N_1 P A_{K,L}^T + 2\chi_K \text{tr } K^T \Delta K = \\ &= 2 \left\langle \frac{1}{\alpha} M_1^T Y A_{K,L} P N_1^T + \chi_K K, \Delta K \right\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к соотношению (12).

Перейдем к дифференцированию функции $f(K, L, \alpha)$ по L : придадим величине L приращение ΔL и обозначим соответствующее приращение P через ΔP :

$$\frac{1}{\alpha}(\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2(L + \Delta L)N_2)(P + \Delta P)(\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2(L + \Delta L)N_2)^T - \\ - (P + \Delta P) + \frac{\delta^2}{1 - \alpha} \left(D - (L + \Delta L)D_1 \right) \left(D - (L + \Delta L)D_1 \right)^T = 0.$$

Оставляя обозначение ΔP для главной части приращения, получаем

$$\frac{1}{\alpha}(A_{K,L} P A_{K,L}^T + A_{K,L} P (M_2 \Delta L N_2)^T + M_2 \Delta L N_2 P A_{K,L}^T) - \\ - (P + \Delta P) + \frac{\delta^2}{1 - \alpha} \left[D_L D_L^T - \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta L D_1 \end{pmatrix} D_L^T - D_L \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta L D_1 \end{pmatrix}^T \right] = 0.$$

После вычитания уравнения (II.1) из этого уравнения имеем

$$(II.3) \quad \frac{1}{\alpha} A_{K,L} \Delta P A_{K,L}^T - \Delta P + \frac{1}{\alpha} (A_{K,L} P (M_2 \Delta L N_2)^T + M_2 \Delta L N_2 P A_{K,L}^T) - \\ - \frac{\delta^2}{1 - \alpha} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \Delta L D_1 \end{pmatrix} D_L^T + D_L \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta L D_1 \end{pmatrix}^T \right] = 0.$$

Вычислим приращение функции $f(K, L, \alpha)$ по L , линейризуя соответствующие величины:

$$\Delta_L f(K, L, \alpha) = f(K, L + \Delta L, \alpha) - f(K, L, \alpha) = \\ = \text{tr} \mathcal{C}(P + \Delta P) \mathcal{C}^T + \chi_L \|L + \Delta L\|_F^2 - (\text{tr} \mathcal{C} P \mathcal{C}^T + \chi_L \|L\|_F^2) = \\ = \text{tr} \mathcal{C} \Delta P \mathcal{C}^T + \chi_L (\langle L + \Delta L, L + \Delta L \rangle - \langle L, L \rangle) = \\ = \text{tr} \mathcal{C} \Delta P \mathcal{C}^T + \chi_L (\text{tr} L^T \Delta L + \text{tr} (\Delta L)^T L) = \text{tr} \Delta P \mathcal{C}^T \mathcal{C} + 2\chi_L \text{tr} L^T \Delta L.$$

Из двойственных уравнений (II.3) и (14) имеем

$$\text{tr} \Delta P \mathcal{C}^T \mathcal{C} = 2 \text{tr} Y \left[\frac{1}{\alpha} M_2 \Delta L N_2 P A_{K,L}^T - \frac{\delta^2}{1 - \alpha} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta L D_1 \end{pmatrix} D_L^T \right]$$

и поэтому

$$\Delta_L f(K, L, \alpha) = \\ = 2 \text{tr} Y \left[\frac{1}{\alpha} M_2 \Delta L N_2 P A_{K,L}^T - \frac{\delta^2}{1 - \alpha} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta L D_1 \end{pmatrix} D_L^T \right] + 2\chi_L \text{tr} L^T \Delta L = \\ = 2 \text{tr} \left[\frac{1}{\alpha} N_2 P A_{K,L}^T Y M_2 \Delta L - \frac{\delta^2}{1 - \alpha} D_1 D_L^T Y \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \Delta L \right] + 2\chi_L \text{tr} L^T \Delta L = \\ = 2 \left\langle \frac{1}{\alpha} M_2^T Y A_{K,L} P N_2^T - \frac{\delta^2}{1 - \alpha} \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} Y D_L D_1^T + \chi_L L, \Delta L \right\rangle,$$

откуда и следует формула (13).

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Рассмотрим последовательность стабилизирующих матричных пар $\{K_j, L_j\} \in \mathcal{S}$ такую, что

$$(K_j, L_j) \rightarrow (K, L) \in \partial \mathcal{S},$$

т.е. $\rho(A_{K,L}) = 1$. Это означает, что для любого $\epsilon > 0$ найдется число $N = N(\epsilon)$ такое, что неравенство

$$|\rho(A_{K_j, L_j}) - \rho(A_{K, L})| = 1 - \rho(A_{K_j, L_j}) < \epsilon$$

справедливо для всех $j \geq N(\epsilon)$.

Пусть P_j – решение дискретного уравнения Ляпунова (10), ассоциированного с парой (K_j, L_j) :

$$\frac{1}{\alpha_j} A_{K_j, L_j} P_j A_{K_j, L_j}^T - P_j + \frac{\delta^2}{1 - \alpha_j} D_{L_j} D_{L_j}^T = 0,$$

а Y_j – решение двойственного к нему дискретного уравнения Ляпунова

$$\frac{1}{\alpha_j} A_{K_j, L_j}^T Y_j A_{K_j, L_j} - Y_j + \mathcal{C}^T \mathcal{C} + \varepsilon I = 0.$$

Тогда (см. [12, лемма П.1])

$$\begin{aligned} f(K_j, L_j) &= \text{tr } P_j (\mathcal{C}^T \mathcal{C} + \varepsilon I) + \chi_K \|K_j\|_F^2 + \chi_L \|L_j\|_F^2 \geq \text{tr } P_j (\mathcal{C}^T \mathcal{C} + \varepsilon I) = \\ &= \text{tr } Y_j \frac{\delta^2}{1 - \alpha_j} D_{L_j} D_{L_j}^T \geq \frac{\delta^2}{1 - \alpha_j} \lambda_{\min}(Y_j) \text{tr } (D_{L_j} D_{L_j}^T) \geq \\ &\geq \frac{\delta^2}{1 - \alpha_j} \frac{\lambda_{\min}(\mathcal{C}^T \mathcal{C} + \varepsilon I)}{1 - \sigma_{\min}^2(A_{K_j, L_j})} \text{tr } (D_{L_j} D_{L_j}^T) \geq \\ &\geq \frac{\delta^2}{1 - \rho^2(A_{K_j, L_j})} \frac{\varepsilon}{1 - \sigma_{\min}^2(A_{K_j, L_j})} \|D_{L_j}\|_F^2 \geq \\ &\geq \frac{\delta^2}{\epsilon} \frac{\varepsilon}{1 - \sigma_{\min}^2(A_{K_j, L_j})} \|D_{L_j}\|_F^2 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} +\infty, \end{aligned}$$

поскольку

$$\rho^2(A_{K_j, L_j}) < \alpha_j < 1.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} f(K_j, L_j) &= \text{tr } P_j (\mathcal{C}^T \mathcal{C} + \varepsilon I) + \chi_K \|K_j\|_F^2 + \chi_L \|L_j\|_F^2 \geq \\ &\geq \chi_K \|K_j\|_F^2 \geq \chi_K \|K_j\|^2 \xrightarrow{\|K_j\| \rightarrow +\infty} +\infty \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} f(K_j, L_j) &= \text{tr } P_j (\mathcal{C}^T \mathcal{C} + \varepsilon I) + \chi_K \|K_j\|_F^2 + \chi_L \|L_j\|_F^2 \geq \\ &\geq \chi_L \|L_j\|_F^2 \geq \chi_L \|L_j\|^2 \xrightarrow{\|L_j\| \rightarrow +\infty} +\infty. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Синтез обратной связи по выходу при помощи наблюдателя как задача оптимизации // *АиТ*. 2022. № 3. С. 7–32.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. Observer-Aided Output Feedback Synthesis as an Optimization Problem // *Autom. Remote Control*. 2022. V. 83. No. 3. P. 303–324.
2. Коровин С.К., Фомичев В.В. Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М.: Физматлит, 2007.
3. Luenberger D.G. An Introduction to Observers // *IEEE Trans. Automat. Control*. 1971. V. AC-16. No. 6. P. 596–620.
4. Levine W., Athans M. On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems // *IEEE Trans. Automat. Control*. 1970. V. 15. No. 1. P. 44–48.
5. Fatkhullin I., Polyak B. Optimizing Static Linear Feedback: Gradient Method // *SIAM J. Control Optim.* 2021. V. 59. No. 5. P. 3887–3911.
6. Поляк Б.Т., Топунов М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // *АиТ*. 2008. № 5. С. 72–90.
Polyak B.T., Topunov M.V. Suppression of Bounded Exogenous Disturbances: Output Feedback // *Autom. Remote Control*. 2008. V. 69. No. 5. P. 801–818.
7. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., et al. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
8. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
9. Peregudin A., Furtat I. New Duality Relations in Linear Systems and Optimal Control Under Bounded Disturbances // *IEEE Trans. Autom. Control*. 2024. V. 69. No. 8. P. 5569–5576.
10. Dogadin E., Peregudin A., Shirokih D. Optimal Control for Discrete-Time Systems under Bounded Disturbances // *Proc. 2024 American Control Conf. (ACC)*. Toronto, Canada, 2024. P. 1940–1945.
11. Хлебников М.В. Сравнение гарантирующего и калмановского фильтров // *АиТ*. 2023. № 4. С. 64–95.
Khlebnikov M.V. A Comparison of Guaranteeing and Kalman Filters // *Autom. Remote Control*. 2023. V. 84. No. 4. P. 434–459.
12. Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Синтез статического регулятора для подавления внешних возмущений как задача оптимизации // *АиТ*. 2021. № 9. С. 86–115.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. Static Controller Synthesis for Peak-to-Peak Gain Minimization as an Optimization Problem // *Autom. Remote Control*. 2021. V. 82. No. 9. P. 1530–1553.
13. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Линейные матричные неравенства в системах управления с неопределенностью // *АиТ*. 2021. № 1. С. 3–54.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Linear Matrix Inequalities in Control Systems with Uncertainty // *Autom. Remote Control*. 2021. V. 82. No. 1. P. 1–40.

14. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Техника D-разбиения при решении линейных матричных неравенств // АиТ. 2006. № 11. С. 159–174.
Polyak B.T., Shcherbakov P.S. The D-Decomposition Technique for Linear Matrix Inequalities // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 11. P. 1847–1861.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Бобцовым.

Поступила в редакцию 10.06.2024

После доработки 26.09.2024

Принята к публикации 22.10.2024

Стохастические системы

© 2024 г. А.В. БОСОВ, д-р техн. наук (ABosov@frccsc.ru)
(Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление» РАН, Москва)

ПОЗИЦИОНИРОВАНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ПОДВОДНОГО АППАРАТА ПО НАБЛЮДЕНИЯМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ¹

Модель стохастической системы наблюдения, учитывающая случайные временные задержки между поступившим наблюдением и фактическим состоянием движущегося объекта, адаптирована для решения задачи идентификации параметров движения. Приведены уравнения для оптимальной байесовской идентификации. Для практического решения к задаче применен условно-минимаксный нелинейный фильтр (УМНФ). Подробно обсуждается синтез УМНФ, включая выбор структуры фильтра, на примере задачи позиционирования автономного подводного аппарата по наблюдениям стационарных акустических маяков. Выполнен вычислительный эксперимент на близкой к практическим потребностям модели с использованием трех вариантов фильтра – типовой аппроксимации обновляющего процесса, метода линейных псевдонаблюдений и геометрической интерпретации результатов угловых измерений.

Ключевые слова: нелинейная стохастическая система наблюдения, идентификация параметров, наблюдения со случайными запаздываниями, условно-минимаксный нелинейный фильтр, позиционирование, акустические сенсоры, линейные псевдонаблюдения.

DOI: 10.31857/S0005231024120026, EDN: XUMKVA

1. Введение

Теория стохастической фильтрации обеспечивает методами и алгоритмами решения разнообразные прикладные задачи оценивания и управления движущимися объектами [1]. В свою очередь, приложения могут оказаться источниками новых постановок, моделей, критериев, стимулируя совершенствование и развитие теории. Такова прикладная область автономных подводных аппаратов (ПА) [2]. Особенности водной среды влияют не только на характер и цели движения, но и на средства выполнения измерений. Так, для решения задачи позиционирования ПА могут использоваться разные измерительные

¹ Работа выполнена с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика» ФИЦ ИУ РАН, Москва).

средства [3], но все они строятся на общих физических законах. Это акустические сенсоры, а значит, на их работу влияет множество факторов: от температуры до солености и давления воды [4]. Один из результатов этого влияния – случайная задержка поступления данных о состоянии наблюдаемого ПА. Этот фактор никак не учитывается в аналогичной задаче навигации летательных аппаратов (ЛА), поскольку высокая скорость распространения радиоволн позволяет им пренебречь. Действительно, модели систем радиолокационного наблюдения предполагают получение в текущий момент времени данных о текущем положении ЛА. Но скорость распространения акустической волны не столь высока, задержка может оказаться довольно большой, что не позволяет пренебречь ей. Модель стохастической динамической системы наблюдения, которая учитывает фактор задержки акустического сигнала, предложена в [5] и дополнена в [6]. Формально эта модель может быть приведена к унифицированному виду нелинейной стохастической системы наблюдения, что позволяет записать для нее соотношения оптимальной байесовской фильтрации [7] и применять известные эвристические методы фильтрации, включая расширенный фильтр Калмана [8], фильтры частиц [9] и различные варианты сигма-точечных фильтров [10]. Но и оптимальный фильтр, и любые эвристические оценки практически применить не получается даже на модельных примерах, потому что фактор случайной временной задержки между поступившим наблюдением и фактическим состоянием движущегося объекта компенсируется расширением вектора состояния на величину, пропорциональную времени задержки и частоте измерений. В условиях, близких к реальным, получаются гигантские размерности, перспективы борьбы с которыми отсутствуют. Единственный эффективный инструмент, чтобы справиться с задержками, дает метод условно-оптимальной фильтрации Пугачева [11, 12] и его развитие – условно-минимаксный фильтр (УМНФ) Панкова [13]. Это подтверждено расчетами, выполненными в [5, 6]. Продолжая исследовать УМНФ в модели с временными задержками, в этой статье внимание акцентируется на двух вопросах. Во-первых, качество условно-оптимальной фильтрации во многом определяется обоснованным выбором структуры фильтра. Универсальные рекомендации [14] могут сильно проигрывать решениям, которые учитывают специфику задачи. Это показано, в частности, в [5, 6], где фильтр удается синтезировать, опираясь на простую геометрическую интерпретацию измерений. Эта же идея в статье применяется не к упрощенному модельному примеру, а к имеющему реальное прикладное содержание примеру и показывает также хорошие результаты. Однако такой вариант измерений, который позволяет непосредственно определять положение, решая геометрическую задачу, все-таки надо признать ограниченным, и нужен более универсальный подход. Такой подход использует идею метода линейных псевдонаблюдений, предложенного в [15] и успешно развитого в [16]. Представленным в статье результатам в этой части посвящен раздел 4, включающий модель стохастической системы наблюдения, описывающей процесс позиционирования ПА по данным угловых измерений двух акустических маяков, и ва-

рианты выбора структуры УМНФ, учитывающие физический смысл задачи. На этом примере показано, как можно использовать угловые измерения для улучшения точности позиционирования и как при этом учитывать временные задержки наблюдений, порожденные водной средой. Второй вопрос касается традиционного для стохастических систем наблюдения предположения о том, что модель состояния движущего объекта известна. На практике в полном объеме это предположение не выполняется, а модели используются с теми или иными ошибками. Компенсировать влияние этих ошибок можно, если включать их модель в уравнения состояния. Большое число задач и методов такого рода создано в теории робастного оценивания [17]. Другой вариант – описывать неточности модели параметрами, оценивать их и использовать вместе с решением основной задачи фильтрации. Вне зависимости от того, возможно ли это и будут ли оцениваться эти параметры заранее или одновременно с оцениванием текущего положения объекта, соответствующие методы относятся к теории идентификации [18]. Довольно естественным представляется объединять задачи фильтрации и идентификации, формируя модель системы наблюдения в рамках байесовского подхода. Именно такой вариант использования УМНФ с приложением к задаче позиционирования ПА реализуется далее. Формальная модель стохастической системы со случайными временными задержками наблюдений и неизвестными параметрами модели состояния приведена в разделе 2. Для байесовской идентификации параметров в разделе 3 адаптированы уравнения оптимальной фильтрации, полученные ранее в [5, 6], а также уравнения для параметров УМНФ, которые используются для позиционирования в численном эксперименте. Параллельно с позиционированием решается задача идентификации неизвестных параметров движения, определяющих среднюю постоянную скорость ПА. Это позволяет оценить влияние результатов идентификации модели движения на качество решения основной задачи позиционирования, а также в условиях использования только угловых измерений положения – принципиальную возможность оценивания скорости движения без ее непосредственного измерения, обеспечиваемого, например, доплеровскими сенсорами.

2. Модель идентификации параметров движения по наблюдениям со случайными задержками

Движение ПА и комплекс измерений описываются дискретной стохастической динамической системой с неизвестными параметрами. Предполагается, что априорно задана величина T максимальной возможной временной задержки поступающих наблюдений. Поскольку можно считать известной скорость звука в воде, это предположение сводится к оценке максимального расстояния между измерителями и ПА, что не должно представлять затруднения. Обозначая начальный момент позиционирования $t = 0$, для дискретной переменной времени t имеем $t = -T, -T + 1, \dots, 0, 1, \dots$

Положение ПА, задаваемое вектором $x_t = (x_{1t}, \dots, x_{pt})' \in \mathbb{R}^p$, например, координатами $(x(t), y(t), z(t))'$ и скоростями $(v_x(t), v_y(t), v_z(t))'$ в инерциальной системе отсчета, связанной с землей, и случайный вектор неизвестных параметров модели движения $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)' \in \mathbb{R}^r$ образуют вектор состояния динамической системы $(x'_t, \mu')' \in \mathbb{R}^{p+r}$. Здесь и далее «'» используется для обозначения транспонированного вектора или матрицы. Предполагается, что распределение μ задано.

Вектор наблюдений $y_t = (y_{1t}, \dots, y_{qt})' \in \mathbb{R}^q$ формируется измерениями, содержащими аддитивные погрешности и временные задержки. Каждому элементу наблюдений y_{it} отвечает свое смещение, заданное дискретной случайной величиной τ_{it} со значениями во множестве $\{0, 1, \dots, T\}$. Величины τ_{it} объединены в вектор $\tau_t = (\tau_{1t}, \dots, \tau_{qt})' \in \mathbb{R}^q$, который является функцией x_t . Именно, предполагается, что каждый элемент наблюдений y_{it} – это измерение, выполненное для положения $x_{t-\tau_{it}}$. Таким образом, система наблюдения имеет вид:

$$(1) \quad \begin{aligned} x_t &= \varphi_t(x_{t-1}, \mu) + w_t, & x_{-T-1} &= \eta, \\ y_{it} &= \psi_{it}(x_{t-\tau_{it}}) + v_{it}, & i &= 1, \dots, q, \\ \tau_t &= \theta_t(x_t), \end{aligned}$$

где $w_t = (w_{1t}, \dots, w_{pt})' \in \mathbb{R}^p$ – векторный дискретный белый шум, моделирующий возмущения, $\eta \in \mathbb{R}^p$ – начальные условия, $v_t = (v_{1t}, \dots, v_{qt})' \in \mathbb{R}^q$ – векторный дискретный белый шум, моделирующий ошибки измерений, векторы η , μ , w_t , v_t независимы в совокупности, известные функции φ_t , ψ_t и θ_t удовлетворяют достаточным условиям существования оценок фильтрации, байесовской и условно-минимаксной. Это типовые условия, гарантирующие существование вторых моментов у векторов состояния и наблюдения, например линейный рост функций системы на бесконечности и наличие вторых моментов у возмущений и ошибок наблюдений (см. теоремы 1 и 2 из [5]).

В модели (1) можно ввести составной вектор состояния, который включает как координаты ПА, так и неизвестные случайные параметры модели движения: $(x'_t, \mu'_t)'$. Тогда модель системы наблюдения получается в виде

$$(2) \quad \begin{aligned} x_t &= \varphi_t(x_{t-1}, \mu_{t-1}) + w_t, & x_{-T-1} &= \eta, \\ \mu_t &= \mu_{t-1}, & \mu_{-T-1} &= \mu, \\ y_t &= \psi_t(x_{t-\tau_t}) + v_t, & \tau_t &= \theta_t(x_t). \end{aligned}$$

Чтобы модель (2) была корректной и могла использоваться в качестве формального представления (1), надо уточнить, что под обозначением $x_{t-\tau_t}$ понимается вектор $(x'_{1t-\tau_{1t}}, \dots, x'_{pt-\tau_{qt}})'$, составленный из положений ПА, отвечающих временной задержке каждого измерения, входящего в вектор наблюдений y_t .

Для вектора начальных условий $(\eta', \mu')'$ в соответствии с байесовской интерпретацией задачи идентификации требуется указать плотность вероятно-

сти, которая может быть записана в виде

$$(3) \quad f_0(X_{-T-1}, M) = f_\eta(X_{-T-1}) f_\mu(M),$$

где $X_{-T-1} \in \mathbb{R}^p$ и $M \in \mathbb{R}^r$ – аргументы плотностей вероятности, соответствующие случайным векторам η и μ , которые выше предполагаются независимыми.

Теперь для записанной системы наблюдения (2) может быть поставлена задача фильтрации, т.е. оценивания состояния $(x'_t, \mu'_t)'$ по наблюдениям $y^t = (y'_0, \dots, y'_t)'$. По ходу решения задачи фильтрации для составного вектора состояния, получается решение как задачи позиционирования, т.е. оценки текущего положения x_t , так и задачи идентификации параметров, т.е. оценки вектора μ .

3. Алгоритмы фильтрации

Заметим, что в поставленной задаче может быть записан оптимальный байесовский фильтр в виде рекуррентных соотношений для апостериорной плотности вероятности. Аналогичные соотношения хорошо известны для традиционных (без задержек) дискретных систем наблюдения [19], а их обобщение на случай временных задержек выполнено в [7]. Нетрудно видеть, что этот же результат имеет место и в решаемой задаче. Фильтр записывается для расширенного вектора положения $\mathbf{x}_t = (x'_{t-T}, \dots, x'_{t-1}, x'_t)'$, поскольку требуется учитывать все возможные временные задержки. Для менее громоздкой записи упростим модель временных задержек, предположив, что вместо вектора $\tau_t \in \mathbb{R}^q$ имеется скалярная величина $\tau_t \in \mathbb{R}^1$. Так получается в частном случае $\tau_{1t} = \dots = \tau_{qt}$. Это значит, что все наблюдатели располагаются на примерно одинаковом расстоянии от ПА, например, когда измерительный комплекс один.

Можно записать апостериорную плотность вероятности $\rho_t = \rho_t(\mathbf{X}_t, M|Y^t)$ вектора $(\mathbf{x}'_t, \mu'_t)'$ относительно вектора всех наблюдений y^t и оценки фильтрации положения x_t^* и параметров μ_t^* . Для этого удобно обозначать аргументы апостериорной плотности через $\mathbf{X}_t = (X'_{t-T}, \dots, X'_{t-1}, X'_t)'$, $M = (M_1, \dots, M_r)'$ и $Y^t = (Y'_0, \dots, Y'_t)'$. Они соответствуют векторам \mathbf{x}_t , μ и y^t . Кроме того, будем использовать ненормированную апостериорную плотность $\hat{\rho}_t = \hat{\rho}_t(\mathbf{X}_t, M|Y^t)$, так что

$$\rho_t(\mathbf{X}_t, M|Y^t) = \frac{\hat{\rho}_t(\mathbf{X}_t, M|Y^t)}{\int \hat{\rho}_t(\mathbf{X}_t, M|Y^t) d\mathbf{X}_t dM}.$$

Тогда можно записать [7]:

$$(4) \quad \begin{aligned} \hat{\rho}_t(\mathbf{X}_t, M|Y^t) &= f_{w_t}(X_t - \varphi_t(X_{t-1}, M)) \times \\ &\times \sum_{i=0}^T I(\theta_t(X_t) = i) f_{v_t}(Y_t - \psi_t(X_{t-i})) \int \rho_{t-1} dX_{t-T-1}, \end{aligned}$$

где $f_{w_t}(\cdot)$ – плотность вероятности возмущений w_t , $f_{v_t}(\cdot)$ – плотность вероятности ошибок наблюдений. Уравнение (4) решается с начальным условием

$$\begin{aligned} \rho_{-1}(\mathbf{X}_{-1}, M | Y^{-1}) &= \rho_{-1}(\mathbf{X}_{-1}, M) = \rho_{-1}(X_{-T-1}, \dots, X_{-1}, M) = \\ &= f_0(X_{-T-1}, M) f_{w_{-T}}(X_{-T} - \varphi_{-T}(X_{-T-1}, M)) \dots \\ &\dots f_{w_{-1}}(X_{-1} - \varphi_{-1}(X_{-2}, M)). \end{aligned}$$

Байесовские оценки x_t^* и μ_t^* получаются интегрированием

$$((\mathbf{x}_t^*)', (\mu_t^*)')' = \int (\mathbf{x}_t', M')' \rho_t(\mathbf{X}_t, M | Y^t) d\mathbf{X}_t dM, \quad \mathbf{x}_t^* = (\dots, (x_t^*)')'.$$

В последнем равенстве указывается на то, что оценка текущего положения x_t^* входит последним подвектором в \mathbf{x}_t^* , оценки прошлых положений ПА также приходится вычислять, хотя они не нужны.

Главный вывод из этих рассуждений состоит в том, что хотя принципиальная возможность получить оптимальные оценки фильтрации и байесовской идентификации имеются, рассчитывать на их практическое применение нельзя. Реализовывать расчет по формуле (4) в рассматриваемой далее модели позиционирования ПА пришлось бы для размерностей $p = 3$, $r = 3$, $q = 4$ и $T = 15$, что дает размерность вектора \mathbf{X}_t , равную 45. Рассчитывать на успех в вычислении интегралов для таких размерностей с хорошей точностью в режиме реального поступления наблюдений y_t представляется как минимум опрометчивым.

Таким образом, нужен иной подход к фильтрации, который позволит получить пусть и не оптимальную оценку, но обладающую хорошей точностью и практически реализуемую. Среди множества известных подходов к субоптимальной фильтрации учесть специфику модели случайных запаздываний наблюдений без внесения кардинальных изменений позволяет концепция условно-оптимальной фильтрации [11, 12]. Изначально предусматриваемая этой концепцией возможность гибко изменять структуру фильтра, учитывая особенности конкретной системы наблюдения, в рассматриваемой постановке позволит учесть как временные запаздывания, так и физические законы, определяющие и движение ПА, и работу измерителей. Минимаксное объяснение свойств этого фильтра вместе с идеей вычислять его параметры приближенно методом имитационного моделирования [13] дают основания для получения оценок хорошего качества как в задаче позиционирования, так и в задаче идентификации параметров движения, при том что реализуемость алгоритмов с разумными затратами вычислительных ресурсов является его неотъемлемым свойством.

Следуя [13] и учитывая используемые в статье обозначения, запишем оценку УМНФ $((\hat{x}_t)', (\hat{\mu}_t'))'$ положения x_t и случайных параметров модели движения μ по наблюдениям y^t в форме прогноз–коррекция

$$\hat{x}_t = \tilde{x}_t + \Delta \hat{x}_t, \quad \hat{\mu}_t = \hat{\mu}_{t-1} + \Delta \hat{\mu}_t.$$

Для вычисления прогноза положения \tilde{x}_t используется базовая прогнозирующая функция $\xi_t(X, M)$, для вычисления коррекции – базовая корректирующая функция $\zeta_t(X, Y)$, $X \in \mathbb{R}^p$, $M \in \mathbb{R}^r$, $Y \in \mathbb{R}^q$. Прогноз \tilde{x}_t вычисляется как функция от $\xi_t = \xi_t(\hat{x}_{t-1}, \hat{\mu}_{t-1})$, коррекция $(\Delta\hat{x}'_t, \Delta\hat{\mu}'_t)'$ – как функция от $\zeta_t = \zeta_t(\tilde{x}_t, y_t)$. Отметим, что в коррекции не используется оценка параметров $\hat{\mu}_{t-1}$ (нет аргумента M), что объясняется отсутствием параметров в функции наблюдений.

Функции, реализующие \tilde{x}_t и $\Delta\hat{x}_t$, выбираются линейными, так что

$$(5) \quad \begin{aligned} \tilde{x}_t &= F_t \xi_t(\hat{x}_{t-1}, \hat{\mu}_{t-1}) + f_t, \\ \begin{pmatrix} \hat{x}_t \\ \hat{\mu}_t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{x}_t \\ \hat{\mu}_{t-1} \end{pmatrix} + H_t \zeta_t(\tilde{x}_t, y_t) + h_t, \end{aligned}$$

где

$$(6) \quad \begin{aligned} F_t &= \text{cov}(x_t, \xi_t) \text{cov}^+(\xi_t, \xi_t), \quad f_t = E\{x_t\} - F_t E\{\xi_t\}, \\ H_t &= \text{cov}\left(\begin{pmatrix} x_t \\ \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{x}_t \\ \hat{\mu}_{t-1} \end{pmatrix}, \zeta_t\right) \text{cov}^+(\zeta_t, \zeta_t), \quad h_t = -H_t E\{\zeta_t\}. \end{aligned}$$

В (6) использованы обозначения: $E\{x\}$ – математическое ожидание случайного вектора x , $\text{cov}(x, y)$ – ковариация x и y , « $^+$ » – операция псевдообращения по Муру–Пенроузу [20]. При этом прогноз положения \tilde{x}_t , оценки \hat{x}_t и $\hat{\mu}_t$ являются несмещенными с ковариациями ошибок оценивания

$$(7) \quad \begin{aligned} \tilde{K}_t &= \text{cov}(x_t - \tilde{x}_t, x_t - \tilde{x}_t) = \text{cov}(x_t, x_t) - F_t \text{cov}(\xi_t, x_t), \\ \hat{K}_t^x &= \text{cov}(x_t - \hat{x}_t, x_t - \hat{x}_t) = \tilde{K}_t - \Delta\hat{K}_t^x, \quad \tilde{K}_0 = \text{cov}(\eta, \eta), \\ \hat{K}_t^\mu &= \text{cov}(\mu - \hat{\mu}_t, \mu - \hat{\mu}_t) = \hat{K}_{t-1}^\mu - \Delta\hat{K}_t^\mu, \quad \tilde{K}_0 = \text{cov}(\mu, \mu), \end{aligned}$$

где матрицы $\Delta\hat{K}_t^x$ и $\Delta\hat{K}_t^\mu$ – верхний и нижний диагональные блоки матрицы $H_t \text{cov}\left(\zeta_t, \begin{pmatrix} x_t \\ \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{x}_t \\ \hat{\mu}_{t-1} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \Delta\hat{K}_t^x & \dots \\ \dots & \Delta\hat{K}_t^\mu \end{pmatrix}$.

Линейные преобразования (5) базовых прогноза ξ_t и коррекции ζ_t имеют минимаксное обоснование как наилучшие оценки на классах всех вероятностных распределений с известным средним и ковариацией [13]. Аналитические вычисления коэффициентов F_t , f_t , H_t и h_t фильтра в практических расчетах заменяются оценками Монте-Карло, т.е. вместо $E\{x\}$ в (6) подставляются $\bar{E}\{x\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$, где $\{x_i\}_{i=1}^N$ – выборочные значения x , смоделированные на компьютере. Наконец, достаточные условия существования оценки (5) применительно к модели (2) сформулированы в [5, 6].

Таким образом, для решения задачи позиционирования ПА требуется указать конкретные условия движения и наблюдения и синтезировать УМНФ, выбрав базовые прогноз ξ_t и коррекцию ζ_t .

4. Позиционирование автономного ПА с использованием стационарных акустических маяков

4.1. Модель движения

Как уже упоминалось, целевой и на данный момент единственной областью приложения рассматриваемой модели системы со случайными временными задержками наблюдений является передвижение объекта в водной среде. Именно вода выступает естественным источником запаздываний измерений, которые выполняются различными акустическими сенсорами. С использованием таких измерений можно ставить разные задачи, в том числе целеполагание и интеллектуальное отслеживание целей, оценивание и прогнозирование положения аппарата, идентификация модели движения, планирование перемещений отдельного ПА и группы, инерциальная навигация и визуальное позиционирование и др. Для демонстрации гибкости и эффективности УМНФ выбрана задача позиционирования автономного ПА, взаимодействующего с двумя стационарными акустическими маяками. Модель наблюдений и возможные подходы к решению задачи оценивания в этой постановке в деталях рассматривались в [21–23]. Здесь эта модель дополнена определением случайных временных задержек для измерений каждого маяка и отсутствием точной априорной информации о параметрах движения, а именно о векторе средней скорости движения ПА. Анализировать, таким образом, можно как результаты стандартного применения УМНФ для решения задачи фильтрации состояния – определения положения ПА, так и позиционирования совместно с идентификацией параметров.

Модель движения ПА исходит из предположения, что в среднем аппарат двигается с постоянной скоростью, на реальную скорость оказывают влияние неконтролируемые случайные факторы. Их воздействие приводит к независимым отклонениям скорости, которая остается постоянной на интервалах дискретизации (между очередными измерениями) и изменяется в каждый следующий такт времени. Такое же движение в плоскости использовано в [5], но в предположении, что параметры движения известны. Здесь же они будут идентифицироваться.

Движение ПА описывается в декартовой системе координат $Oxyz$, выбор которой обсуждается ниже. Для координат траектории движения используются типовые обозначения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, единицей измерений этих величин принимаются километры (км). Надо обратить внимание на отличие этих обозначений от x_t , y_t , использованных выше для системы наблюдения в общей модели (1). Позиционирование ПА начинается в момент времени $t = 0$ и выполняется в дискретные моменты времени с шагом δ сек: $\delta, 2\delta, \dots, t\delta, \dots$. Движение ПА начинается в момент времени $-T\delta$, т.е. $t = -T$, чтобы в момент $t = 0$ могло реализоваться измерение с любой допустимой задержкой $\tau_{0i} \leq T$, поэтому начальное положение ПА задается вектором $(x(-T - 1), y(-T - 1), x(-T - 1))'$. В выполненных расчетах предполагается, что этот вектор имеет нормальное распределение со средним $(-1, -1, 1)'$ и

ковариацией $\text{diag}\{0,1^2; 0,1^2; 0,1^2\}$. Предполагается, что ПА движется с неизвестной постоянной скоростью $(v_x, v_y, v_z)'$, на которую оказывают влияние неконтролируемые факторы. Отсутствие точной информации о скорости моделируется предположением о том, что вектор $(v_x, v_y, v_z)'$ является гауссовским со средним $E\{v_x\} = -25$ км/ч, $E\{v_y\} = -12,5$ км/ч, $E\{v_z\} = -1$ км/ч и ковариацией $\text{diag}\{5^2, 5^2, 1\}$. Таким образом, на каждой траектории есть свое «целевое» движение (направление и скорость) и наряду с позиционированием, т.е. оценением положения $(x(t), y(t), z(t))'$, требуется идентифицировать параметры этого движения, заданные реализацией вектора $(v_x, v_y, v_z)'$.

Неконтролируемые случайные факторы, влияющие на скорость движения, моделируются аддитивными возмущениями $w_x(t)$, $w_y(t)$ и $w_z(t)$, и предполагается, что вектор $(w_x(t), w_y(t), w_z(t))'$ имеет нормальное распределение со средним $(0, 0, 0)'$ и ковариацией $\text{diag}\{25^2, 25^2, 25^2\}$. Таким образом, имеем вектор состояния $(x'_t, \mu')' = (x(t), y(t), z(t), v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^{3+3}$ и следующую динамику:

$$(8) \quad \begin{cases} x(t) = x(t-1) + \delta(v_x + w_x(t)), \\ y(t) = y(t-1) + \delta(v_y + w_y(t)), \\ z(t) = z(t-1) + \delta(v_z + w_z(t)), \\ t = -T, -T+1, \dots, 0, 1, \dots \end{cases}$$

Для остальных параметров расчета, как в [5], задается шаг дискретизации наблюдений $\delta = 0,0001$ часа (ч), т.е. порядка трех измерений в секунду (с), позиционирование выполняется для 1000 шагов дискретизации, $t = -T, \dots, 1000$, т.е. 6 минут (мин) движения. За это время ПА в среднем перемещается на расстояние порядка 2,5–3 км, при этом максимальная дальность до более удаленного из двух маяков может достигать 8 км. Соответственно, величина максимальной временной задержки полагается равной $T = 15$, т.е. составляет 0,0015 ч или 5,4 с. Это предположение сделано исходя из скорости звука в воде $v_s = 5400$ км/ч (1500 м/с).

4.2. Модель измерительного комплекса

Функции наблюдателей выполняют два стационарных акустических маяка (пассивное акустическое устройство для оценки направления движения, direction of arrival, DOA) [24], установленных заранее. Если обозначить координаты первого (\mathcal{F} , first) маяка $(X_{\mathcal{F}}, Y_{\mathcal{F}}, Z_{\mathcal{F}})$ и координаты второго (\mathcal{S} , second) – $(X_{\mathcal{S}}, Y_{\mathcal{S}}, Z_{\mathcal{S}})$, то следуя модели, предложенной в [22], наблюдения за позиционируемым ПА с неизвестными координатами (X, Y, Z) представляют собой направления на каждый из маяков, которые дают два угла

$$(9) \quad \begin{cases} \tan \varphi_{\mathcal{F}} = \frac{Y_{\mathcal{F}} - Y}{X_{\mathcal{F}} - X}, & \tan \varphi_{\mathcal{S}} = \frac{Y_{\mathcal{S}} - Y}{X_{\mathcal{S}} - X}, \\ \tan \lambda_{\mathcal{F}} = \frac{Z_{\mathcal{F}} - Z}{|X_{\mathcal{F}} - X|} \cos \varphi_{\mathcal{F}}, & \tan \lambda_{\mathcal{S}} = \frac{Z_{\mathcal{S}} - Z}{|X_{\mathcal{S}} - X|} \cos \varphi_{\mathcal{S}}. \end{cases}$$

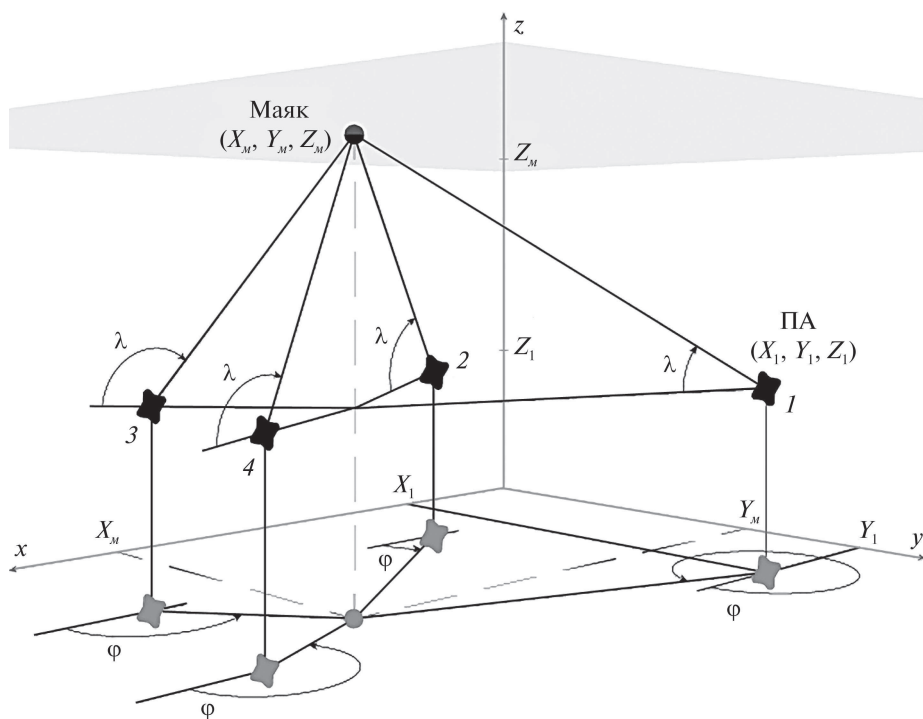


Рис. 1. Схема возможного расположения ПА и маяков.

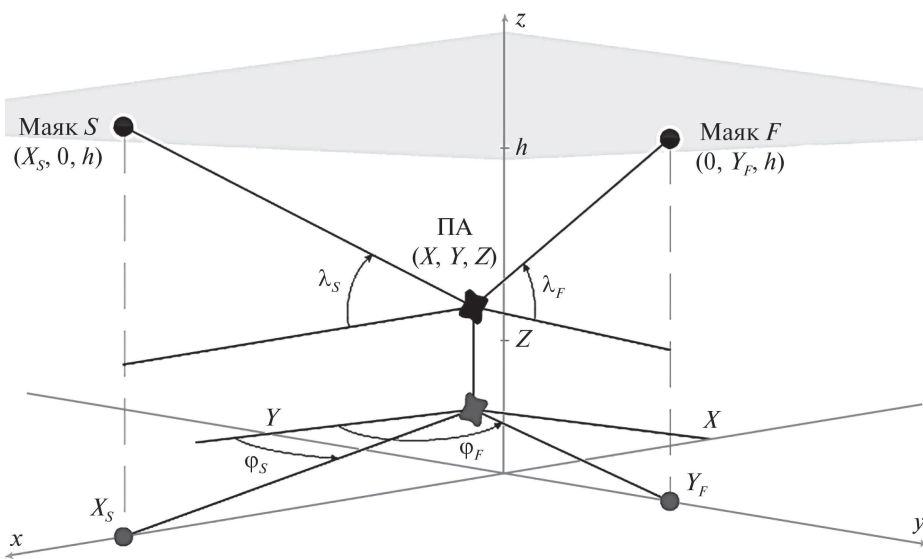


Рис. 2. Схема взаимного расположения ПА и двух маяков в эксперименте.

Геометрическая интерпретация измеряемых углов приведена на рис. 1, где показано, как можно отсчитывать углы φ_F , φ_S , λ_F , λ_S для определения взаимного расположения маяка и позиционируемого ПА, чтобы по имеющимся измерениям тангенсов правильно определять положение аппарата и

учитывать возможное пересечение им линий $X_{\mathcal{F}} - X = 0$ и $X_{\mathcal{S}} - X = 0$, когда часть измерений использовать нельзя. На рисунке положения 1-2-3-4 ПА (X_1, Y_1, Z_1) и маяка $(X_{\mathcal{M}}, Y_{\mathcal{M}}, Z_{\mathcal{M}})$ отвечают возможным комбинациям координат $X_1 < X_{\mathcal{M}}, X_1 > X_{\mathcal{M}}, Y_1 < Y_{\mathcal{M}}, Y_1 > Y_{\mathcal{M}}$, и отсчеты φ и λ выполнены так, чтобы (9) имело место во всех вариантах.

В описанном далее эксперименте с учетом предполагаемого кооперативного сценария, когда маяки и ПА действуют совместно для решения общей задачи, имеется возможность немного упростить соотношения, выбрав систему координат так, чтобы $(X_{\mathcal{F}}, Y_{\mathcal{F}}, Z_{\mathcal{F}}) = (0, Y_{\mathcal{F}}, h)$ и $(X_{\mathcal{S}}, Y_{\mathcal{S}}, Z_{\mathcal{S}}) = (X_{\mathcal{S}}, 0, h)$, где h – глубина в месте расположения маяков (рис. 2). Также можно считать, что $X_{\mathcal{F}} > 0, Y_{\mathcal{F}} > 0$, а начало координат расположено так, что выполняются условия $X < 0, Y < 0$ на протяжении всего периода движения. Тогда все измеряемые углы $\varphi_{\mathcal{F}}, \varphi_{\mathcal{S}}, \lambda_{\mathcal{F}}, \lambda_{\mathcal{S}}$ будут изменяться в диапазоне $(0, \frac{\pi}{2})$, так что $\cos \varphi_{\mathcal{F}} = \frac{1}{(1+\tan^2 \varphi_{\mathcal{F}})^{1/2}}$ и $\cos \varphi_{\mathcal{S}} = \frac{1}{(1+\tan^2 \varphi_{\mathcal{S}})^{1/2}}$. Таким образом, вместо (9) измерения связываются соотношениями

$$(10) \quad \begin{cases} \tan \varphi_{\mathcal{F}} = \frac{Y - Y_{\mathcal{F}}}{X}, & \tan \varphi_{\mathcal{S}} = \frac{Y}{X - X_{\mathcal{S}}}, \\ \tan \lambda_{\mathcal{F}} = \frac{Z - h}{X} \cos \varphi_{\mathcal{F}}, & \tan \lambda_{\mathcal{S}} = \frac{Z - h}{X - X_{\mathcal{S}}} \cos \varphi_{\mathcal{S}}. \end{cases}$$

В выполненных расчетах координаты маяков определяются значениями $Y_{\mathcal{F}} = 1$ км и $X_{\mathcal{S}} = 2$ км, глубина $h = 2$ км. Соответственно, выбранные выше ожидаемое начальное положение ПА $(-1, -1, 1)'$ и средняя скорость $(-25; -12,5; -1)'$ означают, что в среднем в течение 6 мин позиционирования ПА будет двигаться, удаляясь от обоих маяков и сохраняя отрицательные координаты $x(t), y(t)$ и положительную $z(t)$. Увеличение расстояния от измерителей означает, что будут увеличиваться и значения, принимаемые временной задержкой τ_t .

В (10) остается, таким образом, учесть ошибки измерений. Они согласно модели (1) предполагаются аддитивными, так что фактическая модель измерительного комплекса без учета временных задержек в поступлении наблюдений имеет вид

$$(11) \quad \begin{cases} y_{1t} = \frac{y(t) - Y_{\mathcal{F}}}{x(t)} + v_1(t), & y_{2t} = \frac{z(t) - h}{x(t)} \frac{1}{(1 + \tan^2 \varphi_{\mathcal{F}}(t))^{1/2}} + v_2(t), \\ y_{3t} = \frac{y(t)}{x(t) - X_{\mathcal{S}}} + v_3(t), & y_{4t} = \frac{z(t) - h}{x(t) - X_{\mathcal{S}}} \frac{1}{(1 + \tan^2 \varphi_{\mathcal{S}}(t))^{1/2}} + v_4(t), \\ \tan \varphi_{\mathcal{F}}(t) = \frac{y(t) - Y_{\mathcal{F}}}{x(t)}, & \tan \varphi_{\mathcal{S}}(t) = \frac{y(t)}{x(t) - X_{\mathcal{S}}}, \end{cases}$$

где $y_t = (y_{1t}, y_{2t}, y_{3t}, y_{4t})'$ – вектор измеренных угловых направлений $\tan \varphi_{\mathcal{F}}, \tan \lambda_{\mathcal{F}}, \tan \varphi_{\mathcal{S}}, \tan \lambda_{\mathcal{S}}$, координаты положения ПА $x(t), y(t), z(t)$ задаются моделью (8), а вектор $(v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t))'$ аддитивных ошибок измерения имеет нормальное распределение со средним $(0, 0, 0, 0)'$ и ковариациями

$\text{diag} \{(0, 01)^2, (0, 01)^2, (0, 01)^2, (0, 01)^2\}$. В описываемом эксперименте точностные характеристики моделируемых акустических сенсоров подобраны так, чтобы можно было визуализировать отличия в оценках, сохранив приемлемое качество всех алгоритмов. Источником относительно точности реальных устройств может служить работа [25].

Для учета в (11) задержек наблюдений τ_t определим две случайные функции $\tau_{\mathcal{F}}(t)$ и $\tau_{\mathcal{S}}(t)$, которые будут моделировать задержку акустического сигнала в тактах времени, т.е. в шагах дискретизации δ , в уже упомянутом предположении постоянной скорости звука v_s . Отметим, что для рассматриваемой задачи этого упрощенного предположения достаточно. На практике его без особого труда можно заменить на более точное соотношение, например на значение, вычисленное согласно алгоритму [26] или другим более простым аппроксимациям [27]. Зная текущее положение ПА $(x(t), y(t), z(t))'$, вычисляем дальности до маяков, расположенных в точках $(0, Y_{\mathcal{F}}, h)$ и $(X_{\mathcal{S}}, 0, h)$, и задержки $\tau_{\mathcal{F}}(t)$ и $\tau_{\mathcal{S}}(t) \in \{0, 1, \dots, T\}$ в единицах времени модели движения (8)

$$(12) \quad \begin{cases} \tau_{\mathcal{F}}(t) = \min \left\{ T, \left\lceil \frac{\sqrt{(x(t))^2 + (y(t) - Y_{\mathcal{F}})^2 + (z(t) - h)^2}}{(\delta v_s)} \right\rceil \right\}, \\ \tau_{\mathcal{S}}(t) = \min \left\{ T, \left\lceil \frac{\sqrt{(x(t) - X_{\mathcal{S}})^2 + (y(t))^2 + (z(t) - h)^2}}{(\delta v_s)} \right\rceil \right\}. \end{cases}$$

В (12) использовано обозначение $[x]$ для целой части числа x и минимум, чтобы задержки формально соответствовали модели (1) и не превышали заданный порог T . В расчетах $T = 15$ выбрано достаточно большим, так что это ограничение по минимуму на смоделированных траекториях ни разу не срабатывало.

Итак, окончательная модель наблюдений принимает вид

$$(13) \quad \begin{cases} y_{1t} = \frac{x_{2t-\tau_{\mathcal{F}}(t)} - Y_{\mathcal{F}}}{x_{1t-\tau_{\mathcal{F}}(t)}} + v_1(t), \\ y_{2t} = \frac{x_{3t-\tau_{\mathcal{F}}(t)} - h}{x_{1t-\tau_{\mathcal{F}}(t)}} \frac{1}{(1 + \tan^2 \varphi_{\mathcal{F}}(t - \tau_{\mathcal{F}}(t)))^{1/2}} + v_2(t), \\ y_{3t} = \frac{x_{2t-\tau_{\mathcal{S}}(t)}}{x_{1t-\tau_{\mathcal{S}}(t)} - X_{\mathcal{S}}} + v_3(t), \\ y_{4t} = \frac{x_{3t-\tau_{\mathcal{S}}(t)} - h}{x_{1t-\tau_{\mathcal{S}}(t)}} \frac{1}{(1 + \tan^2 \varphi_{\mathcal{S}}(t - \tau_{\mathcal{S}}(t)))^{1/2}} + v_4(t), \\ \tan \varphi_{\mathcal{F}}(t) = \frac{x_{2t} - Y_{\mathcal{F}}}{x_{1t}}, \quad \tan \varphi_{\mathcal{S}}(t) = \frac{x_{2t}}{x_{1t} - X_{\mathcal{S}}}. \end{cases}$$

Для приведения времени запаздывания в (13) к виду исходной модели (1), в которой $\tau_t \in \mathbb{R}^4$, надо использовать (12) и положить $\tau_{1t} = \tau_{2t} = \tau_{\mathcal{F}}(t)$ и $\tau_{3t} = \tau_{4t} = \tau_{\mathcal{S}}(t)$.

4.3. Синтез УМНФ

Синтез фильтра состоит в выборе его структурных функций ξ_t , ζ_t и проведении компьютерного моделирования для расчета коэффициентов по формулам (6) и определения точности по формулам (7). Для простоты далее не вводятся отдельные обозначения для оценок УМНФ, отвечающих разным вариантам структурных функций, все оценки обозначаются одинаково: \hat{x}_t , $\hat{\mu}_t$ и прогнозы \tilde{x}_t . Какую именно структуру имеет фильтр, определяет его наименование (типовой, геометрический, псевдонаблюдений).

Все три предлагаемых варианта фильтра используют базовый прогноз в силу системы (8), т.е. $\xi_t \in \mathbb{R}^3$, $t = 0, 1, \dots$, и имеет вид

$$(14) \quad \xi_{1t} = X_1 + \delta M_1, \quad \xi_{2t} = X_2 + \delta M_2, \quad \xi_{3t} = X_3 + \delta M_3.$$

Уравнения движения (8) линейные, что не меняет наличие подлежащих идентификации параметров, так что базовый прогноз (14) используется во всех вариантах УМНФ и обсуждать имеет смысл только коррекцию.

В первом варианте фильтра, названным «*типовым*», базовую коррекцию задает невязка наблюдений, скорректированная на оценку времени задержки наблюдений, т.е. $\zeta_t \in \mathbb{R}^4$, $t = 0, 1, \dots$, и имеет вид

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta_{1t} = Y_1 - \frac{X_2 - Y_{\mathcal{F}}}{X_1}, \quad \zeta_{2t} = Y_2 - \frac{X_3 - h}{X_1} \frac{1}{(1 + \tan^2 \tilde{\varphi}_{\mathcal{F}})^{1/2}}, \\ \tan \tilde{\varphi}_{\mathcal{F}} = \frac{X_2 - Y_{\mathcal{F}}}{X_1}, \quad (X_1, X_2, X_3)' = \tilde{x}_{t-\hat{\tau}_{\mathcal{F}}(t)}, \\ \zeta_{3t} = Y_3 - \frac{X_2}{X_1 - X_{\mathcal{S}}}, \quad \zeta_{4t} = Y_4 - \frac{X_3 - h}{X_1} \frac{1}{(1 + \tan^2 \tilde{\varphi}_{\mathcal{S}})^{1/2}}, \\ \tan \tilde{\varphi}_{\mathcal{S}} = \frac{X_2}{X_1 - X_{\mathcal{S}}}, \quad (X_1, X_2, X_3)' = \tilde{x}_{t-\hat{\tau}_{\mathcal{S}}(t)}, \\ \hat{\tau}_{\mathcal{F}}(t) = \min \left\{ T, \left[\frac{\sqrt{(X_1)^2 + (X_2 - Y_{\mathcal{F}})^2 + (X_3 - h)^2}}{(\delta v_s)} \right] \right\}, \\ (X_1, X_2, X_3)' = \tilde{x}_t, \\ \hat{\tau}_{\mathcal{S}}(t) = \min \left\{ T, \left[\frac{\sqrt{(X_1 - X_{\mathcal{S}})^2 + (X_2)^2 + (X_3 - h)^2}}{(\delta v_s)} \right] \right\}, \\ (X_1, X_2, X_3)' = \tilde{x}_t. \end{array} \right.$$

Обратим внимание, что для формирования такой невязки аргумент базовой коррекции ζ_t , отвечающий за прогноз, должен содержать не только последний, вычисленный согласно (5), прогноз положения \tilde{x}_t , но и все предыдущие $\tilde{x}_{t-1}, \dots, \tilde{x}_{t-T}$, поскольку оценки временных задержек $\hat{\tau}_{\mathcal{F}}(t)$ и $\hat{\tau}_{\mathcal{S}}(t)$ в (15) могут принять любые значения от 0 до T . Сдвиг прогноза нужен,

чтобы считать невязку от оценки того состояния, которому отвечает текущее наблюдение y_t , т.е. от «запаздывающего» состояния, величину которого можно оценить значениями $\hat{\tau}_{\mathcal{F}}(t)$ и $\hat{\tau}_{\mathcal{S}}(t)$ соответственно для первой и второй пары измеряемых углов. При этом сами оценки задержек можно вычислять, используя прогноз текущего положения \tilde{x}_t , поскольку скорость ПА много меньше скорости звука, так что дальность до ПА за время «доставки» измерения, а значит и само это время, существенно не изменится.

Второй вариант коррекции УМНФ использует идею метода «псевдонаблюдений» [15]. Подход состоит в следующем. Можно заметить, что из исходных геометрических соотношений (10) соотношения для измеряемых углов легко преобразуются в линейные комбинации определяемых координат:

$$\begin{cases} \frac{Y_{\mathcal{F}}}{\tan \varphi_{\mathcal{F}}} = \frac{Y}{\tan \varphi_{\mathcal{F}}} - X, & h \frac{\cos \varphi_{\mathcal{F}}}{\tan \lambda_{\mathcal{F}}} = Z \frac{\cos \varphi_{\mathcal{F}}}{\tan \lambda_{\mathcal{F}}} - X, \\ X_{\mathcal{S}} \tan \varphi_{\mathcal{S}} = X \tan \varphi_{\mathcal{S}} - Y, & h \cos \varphi_{\mathcal{S}} - X_{\mathcal{S}} \tan \lambda_{\mathcal{S}} = Z \cos \varphi_{\mathcal{S}} - X \tan \lambda_{\mathcal{S}}. \end{cases}$$

Такие же преобразования применительно к (11) дают

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{Y_{\mathcal{F}}}{y_{1t}} = \frac{y(t)}{y_{1t}} - x(t) + \frac{x(t)}{y_{1t}} v_1(t), \\ \frac{h}{(1 + \tan^2 \varphi_{\mathcal{F}}(t))^{1/2}} \frac{1}{y_{2t}} = \frac{z(t)}{(1 + \tan^2 \varphi_{\mathcal{F}}(t))^{1/2}} \frac{1}{y_{2t}} - x(t) + \frac{x(t)}{y_{2t}} v_2(t), \\ X_{\mathcal{S}} y_{3t} = x(t) y_{3t} - y(t) - (x(t) - X_{\mathcal{S}}) v_3(t), \\ \frac{h}{(1 + \tan^2 \varphi_{\mathcal{S}}(t))^{1/2}} - X_{\mathcal{S}} y_{4t} = \\ = \frac{z(t)}{(1 + \tan^2 \varphi_{\mathcal{S}}(t))^{1/2}} - x(t) y_{4t} + (x(t) - X_{\mathcal{S}}) v_4(t). \end{array} \right.$$

Наконец, вместо $\tan \varphi_{\mathcal{F}}(t)$ и $\tan \varphi_{\mathcal{S}}(t)$ в (16), точные значения которых неизвестны, нужно подставить соответствующие измерения y_{1t} и y_{3t} и заменить точные соотношения (16) приближенными:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{Y_{\mathcal{F}}}{y_{1t}} = \frac{y(t)}{y_{1t}} - x(t) + \frac{x(t)}{y_{1t}} v_1(t), \\ \frac{h}{(1 + (y_{1t})^2)^{1/2}} \frac{1}{y_{2t}} = \frac{z(t)}{(1 + (y_{1t})^2)^{1/2}} \frac{1}{y_{2t}} - x(t) + \frac{x(t)}{y_{2t}} v_2(t), \\ X_{\mathcal{S}} y_{3t} = x(t) y_{3t} - y(t) - (x(t) - X_{\mathcal{S}}) v_3(t), \\ \frac{h}{(1 + (y_{3t})^2)^{1/2}} - X_{\mathcal{S}} y_{4t} = \\ = \frac{z(t)}{(1 + (y_{3t})^2)^{1/2}} - x(t) y_{4t} + (x(t) - X_{\mathcal{S}}) v_4(t). \end{array} \right.$$

Следуя методу псевдонаблюдений, для записи фильтра надо использовать систему (17), в частности левые части – как новые наблюдения. Это объясняется тем, что в правых частях присутствуют линейные комбинации оцениваемого положения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, что позволяет надеяться на хорошую работу субоптимальных фильтров калмановской структуры, прежде всего расширенного фильтра Калмана (РФК) [8]. Это действительно очень привлекательное свойство, поскольку при записи РФК не придется вычислять производные функций измерителя (ψ_t в модели (1)).

Для синтезируемого УМНФ этот подход дает базовую коррекцию в форме невязки наблюдений (17), т.е. $\zeta_t \in \mathbb{R}^4$ вида

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta_{1t} = \frac{Y_{\mathcal{F}}}{Y_1} - \frac{X_2}{Y_1} + X_1, \quad \zeta_{2t} = \frac{h - X_3}{\left(1 + (Y_1)^2\right)^{1/2}} + X_1, \\ (X_1, X_2, X_3)' = \tilde{x}_{t-\hat{\tau}_{\mathcal{F}}(t)}, \\ \zeta_{3t} = X_{\mathcal{S}}Y_3 - X_1Y_3 + X_2, \quad \zeta_{4t} = \frac{h - X_3}{\left(1 + (Y_3)^2\right)^{1/2}} - X_{\mathcal{S}}Y_4 + X_1Y_4, \\ (X_1, X_2, X_3)' = \tilde{x}_{t-\hat{\tau}_{\mathcal{S}}(t)}. \end{array} \right.$$

В отличие от корректирующего члена обычного РФК в окончательном виде ζ_t в (18) учтены, как в коррекции (15) типового УМНФ, задержки наблюдений такими же оценками $\hat{\tau}_{\mathcal{F}}(t)$ и $\hat{\tau}_{\mathcal{S}}(t)$.

Наконец, третья структура для УМНФ определяется из геометрических соображений, и соответствующая коррекция называется «геометрическая». Снова используем (10) в предположении отсутствия ошибок измерений. Эти соотношения можно интерпретировать как четыре совместных уравнения для определения трех координат ПА X , Y , Z . Хотя геометрическая задача на рис. 1 имеет одно решение (гарантированно пересекающиеся линии акустических лучей двух маяков), формально систему (10) можно решить четырьмя способами. Объединив измеряемые обоими маяками величины в вектор $(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)' = (\tan \varphi_{\mathcal{F}}, \tan \lambda_{\mathcal{F}}, \tan \varphi_{\mathcal{S}}, \tan \lambda_{\mathcal{S}})'$, получаем из (10) систему

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_1 = \frac{Y - Y_{\mathcal{F}}}{X}, \quad Y_2 = \frac{Z - h}{X} \frac{1}{\left(1 + (Y_1)^2\right)^{1/2}}, \\ Y_3 = \frac{Y}{X - X_{\mathcal{S}}}, \quad Y_4 = \frac{Z - h}{X - X_{\mathcal{S}}} \frac{1}{\left(1 + (Y_3)^2\right)^{1/2}} \end{array} \right.$$

с решением X, Y, Z , удовлетворяющим каждому из следующих двенадцати равенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{Y_{\mathcal{F}} + Y_3 X_{\mathcal{S}}}{Y_3 - Y_1}, \\ Y = \frac{Y_3 (Y_{\mathcal{F}} + Y_1 X_{\mathcal{S}})}{Y_3 - Y_1}, \\ Z = h + Y_2 \frac{Y_{\mathcal{F}} + Y_3 X_{\mathcal{S}}}{Y_3 - y_1} \left(1 + (Y_1)^2\right)^{1/2}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{Y_{\mathcal{F}} + Y_3 X_{\mathcal{S}}}{Y_3 - Y_1}, \\ Y = \frac{Y_3 (Y_{\mathcal{F}} + Y_1 X_{\mathcal{S}})}{Y_3 - Y_1}, \\ Z = h + Y_4 \left(\frac{Y_{\mathcal{F}} + Y_3 X_{\mathcal{S}}}{Y_3 - Y_1} - X_{\mathcal{S}} \right) \left(1 + (Y_3)^2\right)^{1/2}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{Y_4 X_{\mathcal{S}}}{Y_4 - Y_2 \left(\frac{1 + (Y_1)^2}{1 + (Y_3)^2} \right)^{1/2}}, \\ Y = \frac{Y_1 Y_4 X_{\mathcal{S}}}{Y_4 - Y_2 \left(\frac{1 + (Y_1)^2}{1 + (Y_3)^2} \right)^{1/2}} + Y_{\mathcal{F}}, \\ Z = h + \frac{Y_2 Y_4 X_{\mathcal{S}}}{\frac{Y_4}{(1 + (Y_1)^2)^{1/2}} - \frac{Y_2}{(1 + (Y_3)^2)^{1/2}}}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{Y_4 X_{\mathcal{S}}}{Y_4 - Y_2 \left(\frac{1 + (Y_1)^2}{1 + (Y_3)^2} \right)^{1/2}}, \\ Y = \frac{Y_2 Y_3 X_{\mathcal{S}}}{Y_4 \left(\frac{1 + (Y_3)^2}{1 + (Y_1)^2} \right)^{1/2} - Y_2}, \\ Z = h + \frac{Y_2 Y_4 X_{\mathcal{S}}}{\frac{Y_4}{(1 + (Y_1)^2)^{1/2}} - \frac{Y_2}{(1 + (Y_3)^2)^{1/2}}}. \end{array} \right.$$

Исключая отсюда одинаковые, в итоге из четырех измерений Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 получаем восемь равенств, которые можно использовать в качестве базовой

коррекции УМНФ $\zeta_t \in \mathbb{R}^8$ вида

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta_{1t} = X_1 - \frac{Y_{\mathcal{F}} + Y_3 X_{\mathcal{S}}}{Y_3 - Y_1}, \\ \zeta_{3t} = X_3 - h - Y_2 \frac{Y_{\mathcal{F}} + Y_3 X_{\mathcal{S}}}{Y_3 - Y_1} \left(1 + (Y_1)^2\right)^{1/2}, \\ \zeta_{2t} = X_2 - \frac{Y_3 (Y_{\mathcal{F}} + Y_1 X_{\mathcal{S}})}{Y_3 - Y_1}, \\ \zeta_{4t} = X_3 - h - Y_4 \left(\frac{Y_{\mathcal{F}} + Y_3 X_{\mathcal{S}}}{Y_3 - Y_1} - X_{\mathcal{S}} \right) \left(1 + (Y_3)^2\right)^{1/2}, \\ \zeta_{5t} = X_1 - \frac{Y_4 X_{\mathcal{S}}}{Y_4 - Y_2 \left(\frac{1+(Y_1)^2}{1+(Y_3)^2} \right)^{1/2}}, \quad \zeta_{7t} = X_2 - \frac{Y_2 Y_3 X_{\mathcal{S}}}{Y_4 \left(\frac{1+(Y_3)^2}{1+(Y_1)^2} \right)^{1/2} - Y_2}, \\ \zeta_{6t} = X_2 - \frac{Y_1 Y_4 X_{\mathcal{S}}}{Y_4 - Y_2 \left(\frac{1+(Y_1)^2}{1+(Y_3)^2} \right)^{1/2}} - Y_{\mathcal{F}}, \\ \zeta_{8t} = X_3 - h - \frac{Y_2 Y_4 X_{\mathcal{S}}}{\frac{Y_4}{(1+(Y_1)^2)^{1/2}} - \frac{Y_2}{(1+(Y_3)^2)^{1/2}}}, \\ (X_1, X_2, X_3)' = \tilde{x}_{t-\max(\hat{\tau}_{\mathcal{F}}(t), \hat{\tau}_{\mathcal{S}}(t))}, \quad Y_{1(2)} = y_{1(2)t-\max(\hat{\tau}_{\mathcal{F}}(t), \hat{\tau}_{\mathcal{S}}(t))+\hat{\tau}_{\mathcal{F}}(t)}, \\ Y_{3(4)} = y_{3(4)t-\max(\hat{\tau}_{\mathcal{F}}(t), \hat{\tau}_{\mathcal{S}}(t))+\hat{\tau}_{\mathcal{S}}(t)}. \end{array} \right.$$

Здесь оценки временных задержек $\hat{\tau}_{\mathcal{F}}(t)$ и $\hat{\tau}_{\mathcal{S}}(t)$ вычисляются так же, как и в предыдущих двух вариантах коррекции, но используются несколько сложнее. Поскольку геометрическая интерпретация «смешала» измерения от разных маяков, то «смешались» и задержки, так что сдвигать назад следует и прогноз, и измерения так, чтобы они относились к одному и тому же моменту времени. Для прогноза – это сдвиг на большую из величин $\hat{\tau}_{\mathcal{F}}(t)$ или $\hat{\tau}_{\mathcal{S}}(t)$, для наблюдений – сдвиг на разницу $|\hat{\tau}_{\mathcal{F}}(t) - \hat{\tau}_{\mathcal{S}}(t)|$ в сторону более раннего измерения (надо напомнить, что измерения y_{it} в (19) уже сдвинуты на $\tau_{\mathcal{F}}(t)$ или $\tau_{\mathcal{S}}(t)$ согласно модели (13)). Таким образом, текущие, самые «свежие» наблюдения будут использоваться только наполовину. Этот «ущерб» нанесен в интересах синхронизации измерений. На самом деле, конечно, никакого ущерба нет, поскольку неиспользованная часть наблюдений будет задействована очень быстро по истечении времени рассинхронизации $|\tau_{\mathcal{F}}(t) - \tau_{\mathcal{S}}(t)|$.

В случае роста числа маяков, т.е. при использовании трех, четырех и т.д. акустических сенсоров, число уравнений (19) растет в геометрической прогрессии. Так что формальное масштабирование геометрической коррекции на большее число наблюдателей может вместо потенциального улучшения качества позиционирования, привести к неприемлемым издержкам из-за сложности реализации. Однако можно предполагать, что нет необходимости использовать все возможные комбинации измерений и можно ограничиться только частью. Целесообразно будет при этом использовать все имеющиеся сенсоры,

и не столь важно, какие именно пары задействовать в коррекции. Косвенно подтверждает это успех фильтра псевдонаблюдений, продемонстрированный в следующем разделе. Но все-таки, несмотря на простоту геометрической задачи, именно геометрический вариант коррекции дает возможность сформировать наилучшую структуру УМНФ для решения задачи позиционирования ПА.

5. Численные эксперименты

Для синтеза УМНФ методом Монте-Карло и анализа его качества моделировалось два независимых пучка по $N = 10\,000$ траекторий. На первом пучке рассчитывались параметры фильтра (6) и (7) каждой из трех предложенных структур коррекции. Обратим внимание, что хотя непосредственно соотношения (7) для вычисления оценки фильтрации не требуются, значения \hat{K}_t полезно знать, так как они имеют смысл теоретической точности фильтра. На втором пучке анализировалось реальное качество оценки фильтрации $\hat{x}_t = (\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{z}(t))'$ и оценки идентификации $\hat{\mu}_t = (\hat{v}_x(t), \hat{v}_y(t), \hat{v}_z(t))'$. Точность оценивания определялась средними квадратическими отклонениями ошибок оценок, обозначенными соответственно как $\sigma_{\hat{x}}(t)$, $\sigma_{\hat{y}}(t)$, $\sigma_{\hat{z}}(t)$ (на рисунках указываются в метрах) и $\sigma_{\hat{v}_x}(t)$, $\sigma_{\hat{v}_y}(t)$, $\sigma_{\hat{v}_z}(t)$ (км/ч) и вычисленными также по методу Монте-Карло, но уже на втором пучке. Таким образом, смотреть

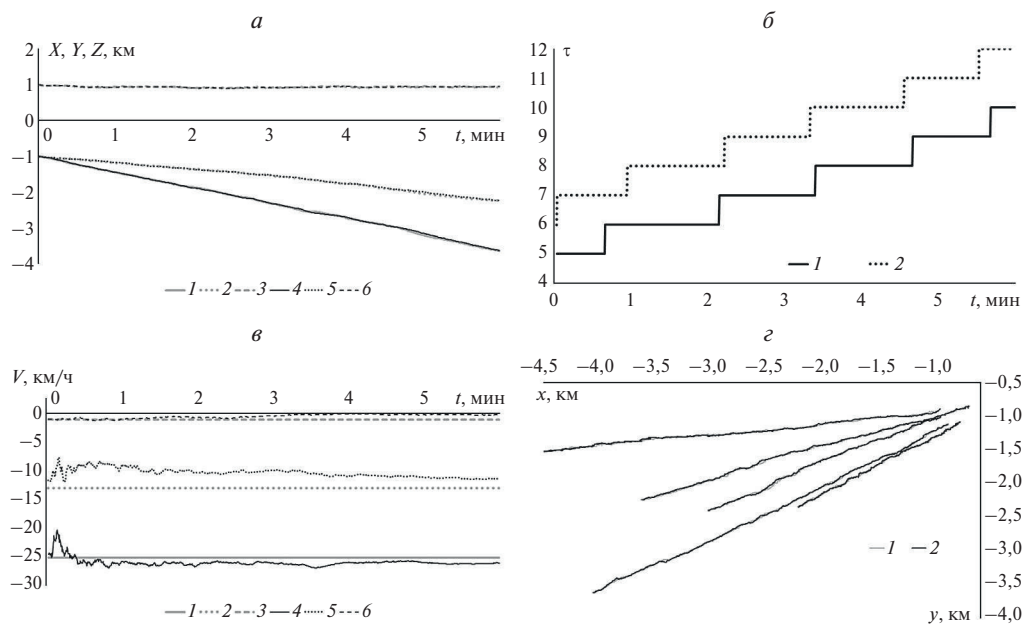


Рис. 3. Типовые траектории ПА: а – положение 1 – $x(t)$, 2 – $y(t)$, 3 – $z(t)$, оценка 4 – $\hat{x}(t)$, 5 – $\hat{y}(t)$, 6 – $\hat{z}(t)$; б – временные задержки 1 – $\tau_F(t)$, 2 – $\tau_S(t)$; в – скорости 1 – v_x , 2 – v_y , 3 – v_z , оценки 4 – $\hat{v}_x(t)$, 5 – $\hat{v}_y(t)$, 6 – $\hat{v}_z(t)$; з – положение ПА и оценки на траекториях 1 – $(x(t), y(t))$, 2 – $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$.

нужно как на абсолютные значения этих величин (в том числе сравнивая их с рассчитанными в модели без учета временных задержек), так и на разницу между ними и соответствующими диагональными элементами \hat{K}_t , чтобы оценить, насколько теоретические свойства УМНФ реализуются на практике при использовании для синтеза компьютерного моделирования.

На рис. 3 эксперимент иллюстрируется примерами характерных траекторий положения, временной задержки, оценок фильтрации и идентификации параметров. На рис. 3,а на одном графике приведены координаты одной траектории ПА $x(t), y(t), z(t)$ и соответствующей оценки УМНФ $\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{z}(t)$; на рис. 3,б – временные задержки $\tau_F(t)$ и $\tau_S(t)$ для первого и второго маяков на той же траектории ПА; на рис. 3,в – оценки $\hat{v}_x(t), \hat{v}_y(t), \hat{v}_z(t)$ и точные значения скоростей v_x, v_y, v_z ; на рис. 3,г – несколько траекторий движения ПА даны в проекции на плоскость Oxy . Оценки УМНФ отвечают геометрической структурной функции. Но хотя разница в оценках фильтрации и идентификации для разных структур УМНФ есть, визуализировать ее на графиках невозможно. Поэтому для анализа результативности далее в большей степени привлекается числовой материал.

Следующий вопрос – точность оценивания – иллюстрируют рис. 4 и 5. На рис. 4,а–в представлены отклонения $\sigma_{\hat{x}}(t), \sigma_{\hat{y}}(t), \sigma_{\hat{z}}(t)$ и для сравнения соответствующие диагональные элементы теоретической ковариации ошибки оценки \hat{K}_t . На рис. 5,а–в приведены аналогичные характеристики $\sigma_{\hat{v}_x}(t), \sigma_{\hat{v}_y}(t), \sigma_{\hat{v}_z}(t)$ для идентифицируемых скоростей. На каждом рисунке по три графика, соответствующих трем вариантам УМНФ – геометрическому, псевдонаблюдений и типовому.

Оценивая эти графики визуально, можно констатировать, что первые два варианта УМНФ успешно справляются с задачей позиционирования. Для точного сравнения нужны числовые показатели, которые приводятся далее. Также можно констатировать принципиальную возможность идентификации скоростей, продемонстрированную этими же фильтрами. Величины, характеризующие качество идентификации, приведены ниже. Очевидна неспособность типового фильтра ни позиционировать ПА, ни идентифицировать среднюю скорость движения. Расхождение между теоретической точностью, определяемой матрицей \hat{K}_t , и реальными величинами отклонений $\sigma_{\hat{x}}(t), \sigma_{\hat{y}}(t), \sigma_{\hat{z}}(t), \sigma_{\hat{v}_x}(t), \sigma_{\hat{v}_y}(t), \sigma_{\hat{v}_z}(t)$, вычисленными на втором пучке, очевидно слишком велико. Причина этого заключается в недостаточном объеме выборки, использованной для синтеза фильтра, и может быть устранена значительным увеличением N . Однако тогда расчеты становятся довольно ресурсоемкими. Вычислительные ресурсы имело бы смысл тратить, если бы не преимущества других двух структур УМНФ, реализовать которые чуть сложнее, но гораздо результативнее.

Завершая эксперимент, нужно ответить на вопросы, охарактеризовав реальную разницу успешных структур УМНФ, влияние на качество оценивания модели с временной задержкой, наличие идентифицируемых параметров.

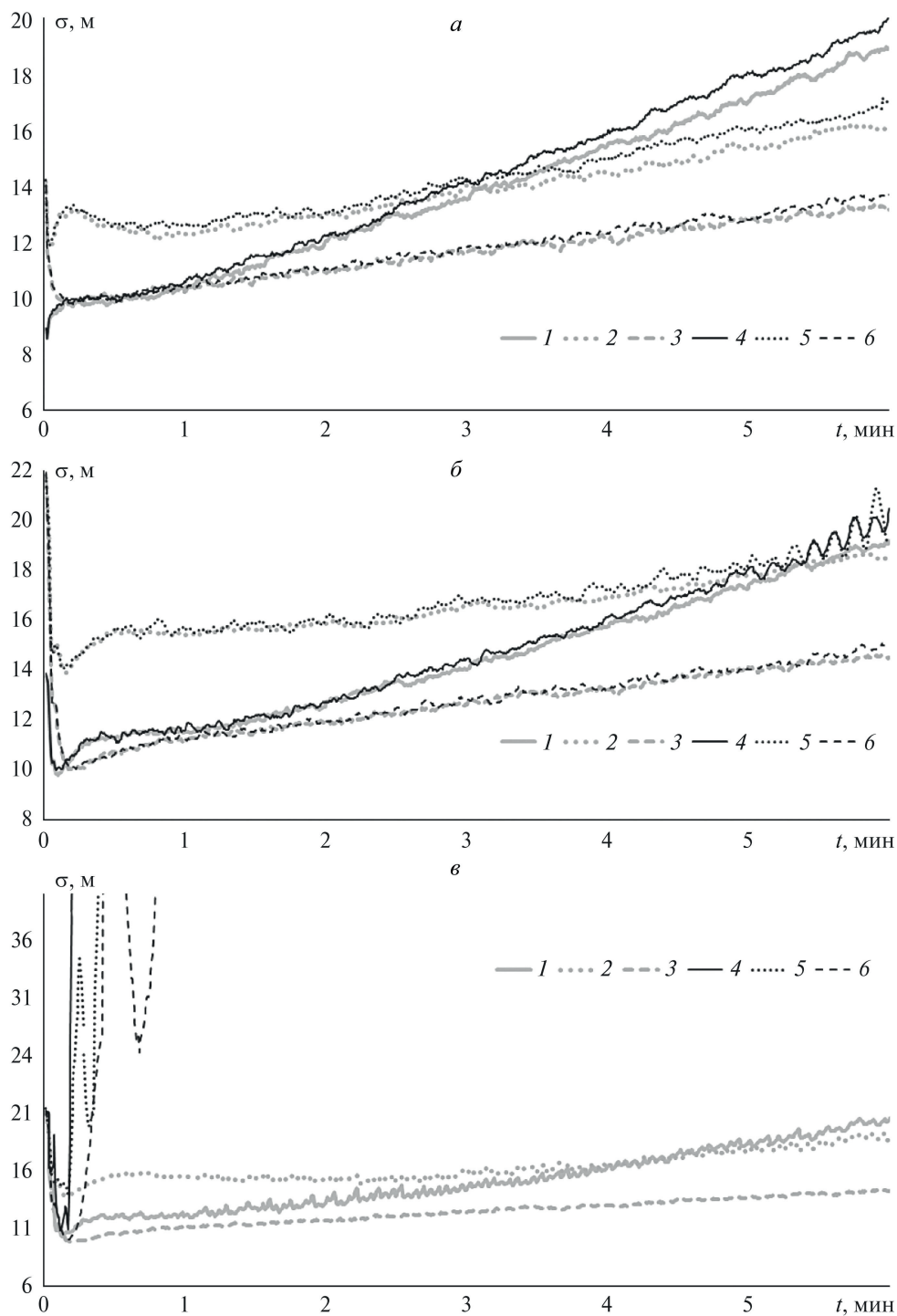


Рис. 4. Среднеквадратические отклонения: 1 - $\left(\widehat{K}_t\right)_{11}^{1/2}$, 2 - $\left(\widehat{K}_t\right)_{22}^{1/2}$, 3 - $\left(\widehat{K}_t\right)_{33}^{1/2}$, 4 - $\sigma_{\hat{x}}(t)$, 5 - $\sigma_{\hat{y}}(t)$, 6 - $\sigma_{\hat{z}}(t)$, фильтры *a* - геометрический, *б* - псевдонаблюдений, *в* - типовой.

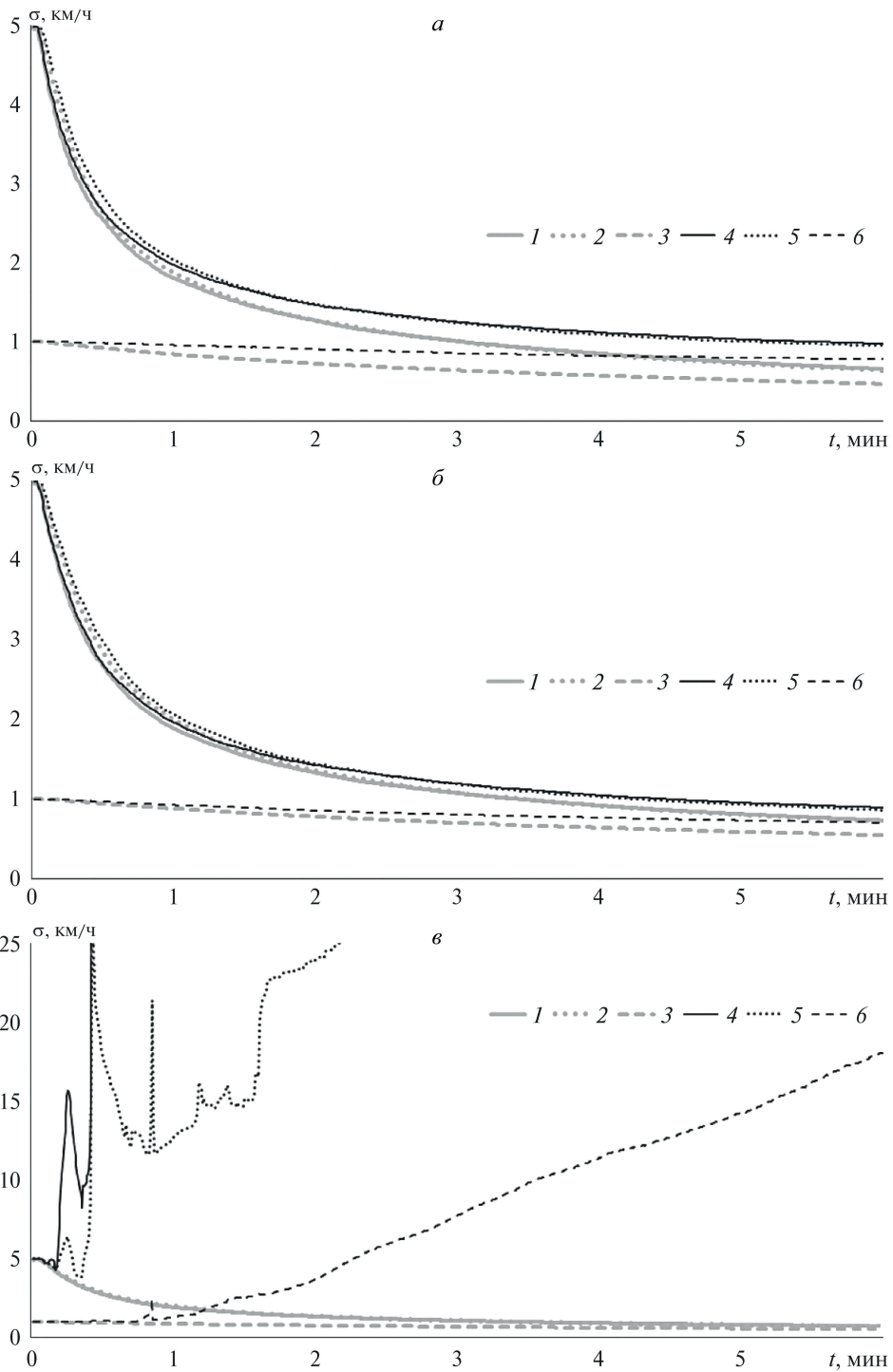


Рис. 5. Среднеквадратические отклонения: 1 — $(\hat{K}_t)_{44}^{1/2}$, 2 — $(\hat{K}_t)_{55}^{1/2}$, 3 — $(\hat{K}_t)_{66}^{1/2}$, 4 — $\sigma_{\hat{v}_x}(t)$, 5 — $\sigma_{\hat{v}_y}(t)$, 6 — $\sigma_{\hat{v}_z}(t)$, фильтры *a* — геометрический, *б* — псевдонаблюдений, *в* — типовой.

Сравнение качества оценивания

Фильтр	$\sigma_{\hat{x}}^{(1)} / \sigma_{\hat{x}}^{(2)}$	$\sigma_{\hat{y}}^{(1)} / \sigma_{\hat{y}}^{(2)}$	$\sigma_{\hat{z}}^{(1)} / \sigma_{\hat{z}}^{(2)}$	$\sigma_{\hat{v}_x}^{(1)} / \sigma_{\hat{v}_x}^{(2)}$	$\sigma_{\hat{v}_y}^{(1)} / \sigma_{\hat{v}_y}^{(2)}$	$\sigma_{\hat{v}_z}^{(1)} / \sigma_{\hat{v}_z}^{(2)}$
$T = 15$, задержка 54 с, v_x, v_y, v_z неизвестны						
Геометрический	13,80/ 14,22	13,93/ 14,32	11,61/ 11,77	0,68 /0,99	0,67 /0,97	0,49 /0,79
Псевдонаблюдения	14,36/14,60	16,54/16,83	12,60/12,70	0,76/ 0,91	0,75/ 0,89	0,56/ 0,72
Типовой	15,22/ 4300	16,38/ 3368	12,50/ 1117	0,76/ 88	0,75/ 96	0,57/ 17
$T = 0$, задержка 0 с, v_x, v_y, v_z неизвестны						
Геометрический	11,27/11,62	11,45/11,78	8,81/8,92	0,67/1,00	0,66/0,98	0,48/0,80
Псевдонаблюдения	11,19/11,36	11,49/11,65	8,87/8,93	0,75/0,92	0,73/0,89	0,55/0,72
Типовой	11,09 / 11,25	11,45 / 11,61	8,81 / 8,86	0,74 / 0,92	0,73 / 0,89	0,55 / 0,72
$T = 15$, задержка 54 с, $v_x = E\{v_x\}$, $v_y = E\{v_y\}$, $v_z = E\{v_z\}$ известны						
Геометрический	13,05/13,23	13,38/13,54	11,48/11,56	—	—	—
Псевдонаблюдения	13,56/13,64	15,38/15,49	12,37/12,42	—	—	—
Типовой	13,66/ 45,81	15,39/ 32,22	12,33/ 22,09	—	—	—
$T = 0$, задержка 0 с, $v_x = E\{v_x\}$, $v_y = E\{v_y\}$, $v_z = E\{v_z\}$ известны						
Геометрический	10,66/11,25	11,11/11,25	8,71/8,77	—	—	—
Псевдонаблюдения	10,66/10,74	11,14/11,22	8,74/8,77	—	—	—
Типовой	10,65 / 10,72	11,13 / 11,21	8,71 / 8,75	—	—	—

С этой целью проведены расчеты с моделями, в которых $\tau_{\mathcal{F}}(t) = \tau_{\mathcal{S}}(t) = 0$, и моделями, в которых $v_x = E\{v_x\}$, $v_y = E\{v_y\}$, $v_z = E\{v_z\}$. Если выбор для сравнения модели без временной задержки ясен, то предположение об известной постоянной скорости ПА на каждой траектории может показаться избыточным. На самом деле, если скорости определяются для каждой траектории, как предполагает исходная модель движения (8), существенной разницы между позиционированием с известными в начальный момент скоростями и позиционированием со скоростями – оценками идентификации нет. Причина этому видна на рис. 5, а–б, показывающем, что приемлемая оценка текущей скорости формируется фильтром довольно быстро. Кроме того, модель движения (8) позволяет довольно точно прогнозировать и с использованием средней скорости, а в предположении отсутствия временных задержек скорость вообще не влияет на качество позиционирования, хотя при этом остается возможность ее идентификации.

В качестве объективной оценки качества позиционирования использованы усредненные по времени (1000 шагов, 6 мин) средние отклонения. Например, для анализа $\hat{x}(t)$ вычислены $\sigma_{\hat{x}}^{(2)} = \frac{1}{1000} \sum_{t=1}^{1000} \sigma_{\hat{x}}(t)$ для сравнения с теоретической точностью $\sigma_{\hat{x}}^{(1)} = \frac{1}{1000} \sum_{t=1}^{1000} \left(\hat{K}_t\right)_{11}^{1/2}$. Для анализа результатов идентификации представлены величины $\sigma_{\hat{v}_x}^{(1)} = \frac{1}{100} \sum_{t=901}^{1000} \left(\hat{K}_t\right)_{44}^{1/2}$ и $\sigma_{\hat{v}_x}^{(2)} = \frac{1}{100} \sum_{t=901}^{1000} \sigma_{\hat{v}_x}(t)$ и т.д., т.е. средние отклонения оценок на последней сотне шагов. Здесь индексы (1) и (2) показывают, что отклонение вычислено на первом (теоретическая точность) и втором (фактическая точность) пучке, нижний индекс обозначает оценку. Все результаты объединены в таблице, наиболее интересные, иллюстрирующие самые высокие и самые низкие точности оценок, выделены полужирным шрифтом.

6. Заключение

Дополнение модели со случайными временными запаздываниями [5, 6] неизвестными параметрами, подлежащими идентификации, конечно, усложнило техническую реализацию алгоритмов оценивания. Даже такой надежный подход, который дают концепции условно-оптимальной и условно-минимаксной фильтрации, испытывает определенные сложности. Это первый важный вывод, который можно сделать из результатов, представленных в таблице предыдущего раздела статьи. Типовой фильтр, воспроизводящий структуру фильтра Калмана, по сути, оказывается неработоспособным. Любопытно, что при этом в моделях без запаздываний и фильтр на основе невязки, и фильтры более сложной структуры одинаково хорошо справляются и с позиционированием (оценкой координат положения), и с идентификацией (оценкой скорости). Собственно, при отсутствии временных задержек наблюдений УМНФ работает одинаково с любой структурой и дает очень хорошую точность оценивания.

Второе замечание следует сделать о концепции псевдоизмерений [15]. Тот факт, что этот подход даст работающую структуру для УМНФ в модели с задержками, изначально не представлялся очевидным. Тем более казалась сомнительной его способность конкурировать с чисто геометрическим решением. В результате же получились вполне конкурентные по точности оценки, а в задаче идентификации УМНФ со структурой псевдонаблюдений даже превосходит геометрический фильтр. При этом геометрическое решение можно получить далеко не всегда, а с ростом числа измерителей еще и размерности будут расти в геометрической прогрессии. В то же время концепция линейных псевдонаблюдений носит универсальный характер, она применима к любым сенсорам DOA, обеспечивающим определение направления движения, и много проще в реализации.

Наконец, третье замечание, касается интерпретации результатов идентификации. С одной стороны, используя метод Монте-Карло, ожидать сходимости оценок в численном эксперименте не приходится. С другой стороны, байесовский подход к оценке параметров и свойства УМНФ не подразумевают сходимости за конечное время, а только гарантируют, что качество оценки будет улучшаться от шага к шагу. Реальное отклонение оценки скоростей оказывается порядка 1 км/ч, что для изначальных 5 км/ч для координат x и y за 6 мин наблюдения представляется хорошим результатом. Скорость по оси Oz оценивается плохо, но она и влияет на точность позиционирования гораздо меньше. Таким образом, принципиальная возможность идентификации скоростей без прямых измерений, например доплеровскими сенсорами, проведенным экспериментом подтверждена. Измерения скорости могут еще повысить точность как идентификации модели движения, так и позиционирования ПА.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bar-Shalom Y., X.-R. Li, Kirubarajan T.* Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory, Algorithms and Software. John Wiley & Sons, Inc. 2002.
2. *Ehlers F. (Ed.)* Autonomous Underwater Vehicles: Design and Practice (Radar, Sonar & Navigation). London, UK: SciTech Publishing, 2020.
3. *Kebkal K.G., Mashoshin A.I.* AUV acoustic positioning methods // Gyroscopy Navig. 2017. V. 8. P. 80–89.
4. *Christ R.D., Wernli R.L.* The ROV Manual: A User Guide for Remotely Operated Vehicles. 2nd Edition. Oxford, UK: Butterworth-Heinemann, 2013.
5. *Босов А.В.* Фильтрация состояния нелинейной динамической системы по наблюдениям со случайными запаздываниями // АиТ. 2023. № 6. С. 49–66.
Bosov A.V. Observation-Based Filtering of State of a Nonlinear Dynamical System with Random Delays // Autom. Remote Control. 2023. V. 84. No. 6. P. 594–605.
6. *Bosov A.* Tracking a Maneuvering Object by Indirect Observations with Random Delays // Drones. 2023. V. 7 (468).

7. Босов А.В. Оптимальная фильтрация состояния нелинейной динамической системы по наблюдениям со случайными запаздываниями // Информатика и ее применения. 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 8–17.
8. Bernstein I., Friedland B. Estimation of the State of a Nonlinear Process in the Presence of Nongaussian Noise and Disturbances // J. Franklin Instit. 1966. V. 281. No. 6. P. 455–480.
9. Arulampalam S., Maskell S., Gordon N.J., Clapp T. A Tutorial on Particle Filters for On-line Non-linear/Non-Gaussian Bayesian Tracking // IEEE Trans. Signal Processing, 2002. V. 50. No. 2. P. 174–188.
10. Julier S.J., Uhlmann J.K., Durrant-Whyte H.F. A new approach for filtering nonlinear systems // Proc. IEEE Amer. Control Conf. (ACC'95), 1995. P. 1628–1632.
11. Пугачев В.С. Рекуррентное оценивание переменных и параметров в стохастических системах, описываемых разностными уравнениями // ДАН СССР. 1978. Т. 243. № 5. С. 1131–1133.
12. Пугачев В.С. Оценивание переменных и параметров в дискретных нелинейных системах // АиТ. 1979. № 6. С. 63–79.
Pugachev V.S. Estimation of variables and parameters in discrete-time nonlinear systems // Autom. Remote Control. 1979. V. 40. No. 4. P. 39–50.
13. Pankov A.R., Bosov A.V. Conditionally minimax algorithm for nonlinear system state estimation // IEEE Trans. Autom. Control. 1994. V. 39. No. 8. P. 1617–1620.
14. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. 2-е изд. М.: Наука, 1990. Гл. ред. физ.-мат. лит.
Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. Stochastic differential systems—Analysis and filtering. Chichester: Wiley, 1987.
15. Lin X., Kirubarajan T., Bar-Shalom Y., Maskell S. Comparison of EKF, pseudo-measurement, and particle filters for a bearing-only target tracking problem // Signal and Data Processing of Small Targets 2002, Proceedings of the AEROSENSE 2002, Orlando, FL, USA, 1–5 April 2002; Drummond, O.E., Ed.; International Society for Optics and Photonics, SPIE: Bellingham, WA, USA, 2002. V. 4728. P. 240–250.
16. Miller A., Miller B. Stochastic control of light UAV at landing with the aid of bearing-only observations // Proceedings of the Eighth International Conference on Machine Vision (ICMV 2015), Barcelona, Spain, 19–21 November 2015; Verikas, A., Radeva, P., Nikolaev, D., Eds.; International Society for Optics and Photonics, SPIE: Bellingham, WA, USA, 2015. V. 9875. P. 474–483.
17. Huber P.J., Ronchetti E.M. Robust Statistics. Wiley Series in Probability and Statistics (2 ed.). Wiley, 2011.
18. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. М.: Наука, 1991.
Ljung L. System Identification—Theory For the User. 2 ed. N.J.: PTR Prentice Hall, 1999.
19. Bertsekas D.P., Shreve S.E. Stochastic Optimal Control: The Discrete-Time Case. NY: Academic Press, 1978.
20. Albert A. Regression and the Moor–Penrose Pseudoinverse. N.Y. Academ.: Academic Press, 1972.
21. Miller A., Miller B., Miller G. AUV navigation with seabed acoustic sensing // Proceedings of the 2018 Australian New Zealand Control Conference (ANZCC), Melbourne, VIC, Australia, 7–8 December. 2018. P. 166–171.

22. *Miller A., Miller B., Miller G.* On AUV Control with the Aid of Position Estimation Algorithms Based on Acoustic Seabed Sensing and DOA Measurements. *Sensors* 2019, 19, 5520.
23. *Miller A., Miller B., Miller G.* Navigation of Underwater Drones and Integration of Acoustic Sensing with Onboard Inertial Navigation System // *Drones*. 2021. V. 5 (83).
24. *Hodges R.* Underwater Acoustics: Analysis, Design and Performance of Sonar. N.Y.: Wiley, USA, 2011.
25. *Weirathmueller M., Weber T.C., Schmidt V., McGillicuddy G., Mayer L., Huff L.* Acoustic Positioning and Tracking in Portsmouth Harbor, New Hampshire // *Proc. OCEANS 2007*, Vancouver, BC, Canada, 29 September–4 October, 2007. P. 1–4.
26. *Wong G.S.K., Zhu S.-M.* Speed of sound in seawater as a function of salinity, temperature, and pressure // *J. Acoust. Soc. Am.* 1995. V. 97. P. 1732–1736.
27. *Dushaw B.D., Worcester P.F., Cornuelle B.D., Howe B.M.* On Equations for the Speed of Sound in Seawater // *J. Acoust. Soc. Am.* 1993. V. 93. P. 255–275.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 20.06.2024

После доработки 10.09.2024

Принята к публикации 20.09.2024

Стохастические системы

© 2024 г. А.А. ГАЛЯЕВ, д-р техн. наук (galaev@ipu.ru),
Л.М. БЕРЛИН (berlin.lm@phystech.edu),
П.В. ЛЫСЕНКО, канд. физ.-мат. наук (pavellysen@ipu.ru),
В.Г. БАБИКОВ, канд. физ.-мат. наук (vl.babikov@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ПОРЯДКОВЫЕ СТАТИСТИКИ НОРМИРОВАННОГО СПЕКТРАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ СЛАБЫХ СИГНАЛОВ В БЕЛОМ ШУМЕ¹

Развивается тематика предыдущих работ авторов, а именно исследуются порядковые статистики дискретного нормированного спектрального распределения аддитивного белого гауссовского шума для решения задачи обнаружения детерминированного сигнала в шумовой смеси с помощью информационных признаков. В данной работе не только устанавливается дополнительная связь между дискретным спектральным распределением статистики однооконной реализации белого шума, но и приводится новый результат, задающий формулы для точного вычисления математического ожидания и дисперсии нормированной порядковой статистики. На основе полученных аналитических результатов предложена новая формула вычисления спектральной сложности, а также уточнена уже известная. Теоретические результаты верифицированы статистическим численным моделированием.

Ключевые слова: порядковые статистики, обработка сигналов, преобразование Фурье, обнаружение сигналов в шуме.

DOI: 10.31857/S0005231024120039, EDN: XUIHNR

1. Введение

Задачи обнаружения детерминированных, хаотических и случайных сигналов привлекают внимание исследователей со времен изучения космических объектов [1, 2]. Основная сложность решения подобных задач заключается в неизвестных свойствах и характеристиках наблюдаемого сигнала. Поэтому зачастую периодичность повторения сигнала во времени считается признаком появления детерминированного сигнала. В дальнейшем по результатам наблюдений производится накопление и усреднение принятой энергии, делается вывод о наличии или отсутствии искомого сигнала [3].

Статистические основы теории обнаружения и классификации сигналов в шуме были заложены в 50–60-е гг. XX в. [4]. Методы машинного обучения позволили, в свою очередь, решать задачи классификации, основываясь

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 23-19-00134).

на выделении множества отдельных признаков [5]. На протяжении последних 30–40 лет в научной литературе появляются результаты исследований, в которых в качестве критериев обнаружения и классификации используются информационные характеристики временных или спектральных распределений. Поскольку энтропия или информация являются нечувствительными к перестановке дискретных отчетов распределений, то взор научного сообщества направлен на исследование распределений порядковых статистик и описание их свойств [6, 7]. Энтропию и связанные с ней величины в последние годы часто применяют в анализе электроэнцефалографии (ЭЭГ) и мозговой активности [8]. Другим примером использования сигнальной энтропии и связанной с ней спектральной сложности является задача классификации сигналов, как показано в [5, 9]. В последние годы порядковые статистики нашли применение в генеративных нейронных сетях [10] и связанных с ними расстоянием Вассерштайна и теорией оптимального транспорта [11, 12].

Зачастую в задачах обнаружения сигналов предполагается известным сигнал, который требуется обнаружить [13], однако на практике также популярной является задача предобнаружения, когда важно, например, определить наличие детерминированного сигнала в белом шуме [14, 15].

Текущая статья направлена на установление статистических закономерностей при однооконных наблюдениях белого шума и исследование эволюции этих закономерностей при появлении сигнала в смеси. Как результат должен появиться новый инструмент для решения задачи обнаружения, а в дальнейшем и задачи классификации, сигнала при малом отношении сигнал/помеха.

Статья имеет следующую структуру. Раздел 2 приводит математическую постановку задачи и исходные положения, необходимые для дальнейшего изложения. В разделах 3 и 4 содержатся основные аналитические результаты работы, а именно леммы и утверждения, связанные с нахождением математического ожидания и дисперсии нормированных порядковых статистик спектрального распределения белого шума при обработке наблюдений одного прямоугольного окна. В разделе 5 вводятся новые информационные характеристики сигналов, основанные на полученных аналитических результатах. В разделе 6 приводятся результаты численного моделирования, подтверждающие теоретические выкладки предыдущих разделов. Раздел 7 завершает изложение и подводит итоги статьи.

2. Исходные положения

Задача обнаружения сигнала $s(n)$ традиционно сводится к задаче различения двух гипотез [15]

$$\begin{cases} \Gamma_0 : x(n) = w(n), \\ \Gamma_1 : x(n) = s(n) + w(n), \quad n = 1, \dots, 2N + 2. \end{cases}$$

Гипотеза Γ_0 связана с принятием решения о приеме только шума, а гипотеза Γ_1 – о приеме смеси полезного сигнала и шума, где последовательно-

сти $\{x(n)\}$, $n = 1, \dots, 2N + 2$ – временной ряд из принятых данных, $\{s(n)\}$ – полезный сигнал, $\{w(n)\}$ – аддитивный случайный шум, $2N + 2$ – длина временного ряда данных. Случайные величины временного ряда $(x(1), \dots, x(n), \dots, x(2N + 2))$ принимают значения $(x_1, \dots, x_n, \dots, x_{2N+2}) \in \mathbb{R}^{2N+2}$.

Для получения аналитического выражения оценки вероятности ошибки различения гипотез можно применить одну из разновидностей леммы Неймана–Пирсона, в которой для функции ошибок справедлива точная формула следующего вида:

$$(1) \quad \mathcal{E}r(N; \Gamma_0, \Gamma_1) = 1 - \frac{1}{2} \|P_0^{(N)} - P_1^{(N)}\| = 1 - TV(P_0, P_1),$$

где $P_0^{(N)}$ – многомерная функция распределения статистики наблюдений по гипотезе Γ_0 , $P_1^{(N)}$ – многомерная функция распределения статистики наблюдений по гипотезе Γ_1 , а $TV(P_0, P_1)$ – полная вариация меры со знаком, $\|Q\| = 2 \sup_A |Q(A)|$. Таким образом, если множества-носители мер P_0, P_1 не пересекаются, то возможно безошибочное различение гипотез. Если же меры $P_0^{(N)}$ и $P_1^{(N)}$ близки, то $\|P_0^{(N)} - P_1^{(N)}\| \approx 0$, и тогда $\mathcal{E}r(N; \Gamma_0, \Gamma_1) \approx 1$.

Поскольку особенность задачи состоит в обнаружении детерминированного сигнала при малом отношении сигнал/помеха, а именно при $\mathcal{E}r(N; \Gamma_0, \Gamma_1) \approx 1$, на основе анализа спектральных свойств принимаемой сигнально-шумовой смеси и информационных критериев, то в работе [16] сформулирована следующая задача.

Задача 1. Пусть имеется реализация $\{x_1, \dots, x_{2N+2}\}$ последовательности независимых случайных величин $\{\xi_1, \dots, \xi_{2N+2}\}$ с нулевым математическим ожиданием, к которой применено дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

$$(2) \quad X_k = \sum_{n=1}^{2N+2} x_n e^{-2i\pi k(n-1)/(2N+2)},$$

определяющее случайную величину

$$(3) \quad \Xi_k = \sum_{n=1}^{2N+2} \xi_n e^{-2i\pi k(n-1)/(2N+2)},$$

где $k = 0, \dots, N$, поскольку в силу свойства симметрии ДПФ вещественного сигнала вторая половина из $N + 1, \dots, 2N + 1$ комплексных амплитуд спектральных отсчетов комплексно сопряжена с первой.

Требуется найти дискретную функцию вероятности нормированного упорядоченного спектрального распределения $p_k(N)$ как нормированное среднее для каждого k -го значения случайной величины

$$(4) \quad \eta_k(N) = \frac{(\mathbf{T}I)_k}{E_X},$$

где $I_k = \Xi_k \Xi_k^*$ (квадрат модуля амплитуды или энергия спектрального отсчета), E_X – половина энергии сигнала, а \mathbf{T} – оператор упорядочивания ряда в порядке невозрастания, и исследовать свойства полученного распределения на различных информационных мерах.

Для решения задачи 1 в общем случае требуется уметь находить

$$(5) \quad \mathbb{E}[\eta_k(N)] = \mathbb{E} \left[\frac{(\mathbf{T}I)_k}{E_X} \right].$$

А. Шустером в 1898 г. было установлено, что распределения случайных величин I_k при $k = 1, \dots, N$ являются экспоненциальными, а при одном значении $k = 0$ удовлетворяет распределению χ^2 с одной степенью свободы. Этот факт справедлив при условии того, что случайные величины ξ_n , $n = 1, \dots, 2N + 2$ – независимые нормально распределенные с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_0^2 , как показано в [17].

Замечание 1. Общее количество отсчетов сигнала во временной области выбрано равным $2N + 2$ для удобства анализа энергий I_k половины спектральных отсчетов, только N из которых являются экспоненциально распределенными величинами.

В статье в качестве критерия для решения задачи обнаружения используется информационная характеристика – сложность, представленная в виде произведения энтропии и \mathcal{L}_1 -нормы двух распределений. При этом энтропия, являясь только функцией от дискретного спектрального распределения, не чувствительна к перестановке его отсчетов, а сложность, являясь функцией уже от двух распределений, чувствительна к перестановке при вычислении относительно неравномерного распределения. Поэтому при постулировании порядка следования отсчетов в дискретном распределении устанавливается правило для вычисления и самих информационных характеристик. В качестве такого правила будем использовать упорядочение по возрастанию или убыванию отсчетов спектра.

3. Основные результаты. Вычисление математического ожидания нормированных порядковых статистик

Для математического ожидания порядковой статистики, нормированной на сумму отсчетов, справедлива следующая

Лемма 1. Пусть z_1, \dots, z_N – результаты наблюдений случайной величины Z , имеющей экспоненциальное распределение $F(z) = 1 - \exp(-z)$ и плотность $f(z) = \exp(-z)$. Рассмотрим значения последовательности $z_{(1)}, \dots, z_{(N)}$ тех же результатов, но расположенных в порядке возрастания, где случайная величина $Z_{(k)}$ является неубывающей k -й порядковой статистикой.

Тогда математическое ожидание такой величины, нормированной на сумму всех элементов выборки, имеет вид

$$(6) \quad \mathbb{E} \left[\frac{Z_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Z_{(i)}} \right] = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{z_k}{\sum_{i=1}^N z_i} \exp \left(- \sum_{i=1}^N z_i \right) dz_1 dz_2 \dots dz_{N-1} dz_N}{\int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left(- \sum_{i=1}^N z_i \right) dz_1 dz_2 \dots dz_{N-1} dz_N}.$$

Доказательство. Лемма проверяется непосредственно записью математического ожидания для порядковой статистики.

Отличие формулы (6) от известных заключается в вычислении среднего величины $\frac{z_k}{\sum_{i=1}^N z_i}$ по совместному распределению порядковых статистик $Z_{(1)}, \dots, Z_{(N)}$. Затруднение вызывает вычисление интеграла в числителе (6), преодолеть которое помогает связь между искомым математическим ожиданием $\mathbb{E} \left[\frac{Z_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Z_{(i)}} \right]$ и $\mathbb{E}[Z_{(k)}]$.

Плотность распределения для k -й порядковой статистики $Z_{(k)}$ по определению задается следующим образом:

$$f_{Z_{(k)}}(z) = \frac{N!}{(k-1)!(N-k)!} f(z)[F(z)]^{k-1}[1-F(z)]^{N-k}.$$

При подстановке экспоненциального закона $F(z)$ эта плотность принимает явный вид

$$(7) \quad f_{Z_{(k)}}(z) = \frac{N!}{(k-1)!(N-k)!} \exp(-z(1+N-k))(1-\exp(-z))^{k-1}.$$

Следующая формула является известным результатом [7] для нахождения математического ожидания порядковых статистик из стандартного экспоненциального закона:

$$(8) \quad \mathbb{E}[Z_{(k)}] = \int_0^\infty z f_{Z_{(k)}}(z) dz = \sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i}.$$

С другой стороны, это математическое ожидание может быть найдено по формуле, предложенной в лемме 1, а именно

$$(9) \quad \begin{aligned} \mathbb{E}[Z_{(k)}] &= \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty z_k \exp \left(- \sum_{i=1}^N z_i \right) dz_1 dz_2 \dots dz_{N-1} dz_N}{\int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left(- \sum_{i=1}^N z_i \right) dz_1 dz_2 \dots dz_{N-1} dz_N} = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{N-k} \frac{1}{i} = \sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i}. \end{aligned}$$

Утверждение 1. Математическое ожидание нормированной порядковой статистики (6) равно

$$(10) \quad \mathbb{E} \left[\frac{Z_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Z_{(i)}} \right] = \frac{1}{N} \sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i},$$

что в точности до множителя $\frac{1}{N}$ совпадает со значением $\mathbb{E}[Z_{(k)}]$.

Доказательство. Повторный интеграл в знаменателе аналитически вычисляется при произвольном верхнем пределе последнего из них

$$\int_0^a \int_0^{z_N} \dots \int_0^{z_3} \int_0^{z_2} \exp \left(- \sum_{i=1}^N z_i \right) dz_1 dz_2 \dots dz_{N-1} dz_N = \frac{1}{N!} + O(a^{N-1} \exp(-a)).$$

Переходя к пределу при $a \rightarrow \infty$, получаем, что

$$(11) \quad \int_0^\infty \int_0^{z_N} \dots \int_0^{z_3} \int_0^{z_2} \exp \left(- \sum_{i=1}^N z_i \right) dz_1 dz_2 \dots dz_{N-1} dz_N = \frac{1}{N!}.$$

Этот же результат можно было получить и другим способом, заметив, что

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left(- \sum_{i=1}^N z_i \right) dz_1 dz_2 \dots dz_{N-1} dz_N = 1.$$

В то же время этот интеграл состоит из суммы $N!$ (по количеству перестановок z_i , $i = 1, \dots, N$) интегралов вида (11).

Исследуем теперь интеграл в числителе выражения (10). Повторный интеграл в числителе аналитически вычисляется при произвольном верхнем пределе последнего из них

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^{z_N} \dots \int_0^{z_3} \int_0^{z_2} \frac{z_k}{\sum_{i=1}^N z_i} \exp \left(- \sum_{i=1}^N z_i \right) dz_1 dz_2 \dots dz_{N-1} dz_N = \\ & = \frac{1}{N!} \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{N-k} \frac{1}{i} \right) + O(a^N \exp(-a)) + O(a^{N+1} \text{Ei}(1, a)), \end{aligned}$$

где $\text{Ei}(1, a) = \int_1^\infty t^{-1} \exp(-ta) dt$.

Переходя к пределу при $a \rightarrow \infty$, получаем результат утверждения 1.

В разделе 4 будет предложен метод для вычисления дисперсии нормированной порядковой случайной величины, который также может быть использован для доказательства утверждения 1.

Одновременно были получены несколько интересных результатов при вычислении повторных несобственных интегралов, а именно:

$$(12) \quad \int_0^\infty \int_0^{z_N} \dots \int_0^{z_3} \int_0^{z_2} \exp \left(- \sum_{i=1}^N z_i \right) dz_1 dz_2 \dots dz_N = \frac{1}{N!},$$

$$(13) \quad \int_0^\infty \int_0^{z_N} \dots \int_0^{z_3} \int_0^{z_2} \frac{1}{\sum_{i=1}^N z_i} \exp \left(- \sum_{i=1}^N z_i \right) dz_1 dz_2 \dots dz_N = \frac{1}{N-1} \frac{1}{N!},$$

$$(14) \quad \int_0^\infty \int_0^{z_N} \dots \int_0^{z_3} \int_0^{z_2} \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^N z_i \right)^2} \exp \left(- \sum_{i=1}^N z_i \right) dz_1 dz_2 \dots dz_N = \frac{1}{N-2} \frac{1}{N-1} \frac{1}{N!},$$

которые могут быть вычислены благодаря следующему утверждению.

Утверждение 2. Для произвольной натуральной степени p при условии $N - p \geq 1$ справедливо:

$$(15) \quad M(p, N) = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^N z_i \right)^p} \exp \left(- \sum_{i=1}^N z_i \right) dz_1 dz_2 \dots dz_N = \\ = \frac{(N - p - 1)!}{(N - 1)!}.$$

При $p \geq N$ этот интеграл не имеет смысла, поскольку расходится. Кроме того, для произвольной натуральной степени p выполнено

$$(16) \quad \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^N z_i \right)^p \exp \left(- \sum_{i=1}^N z_i \right) dz_1 dz_2 \dots dz_N = \frac{(N + p - 1)!}{(N - 1)!}.$$

Доказательство. Замена переменных в интегралах (15) и (16) $\{z_i\}_{i=1}^N \rightarrow \{x_i\}_{i=1}^N$ производится по следующему правилу [18]:

$$(17) \quad x_1 = \frac{z_1}{x_N}, \dots, x_{N-1} = \frac{z_{N-1}}{x_N}, \quad x_N = \sum_{i=1}^N z_i.$$

Для нахождения якобиана $J(x_1, \dots, x_N)$ отображения (17) требуется выразить переменные $\{z_i\}_{i=1}^N$ через $\{x_i\}_{i=1}^N$:

$$z_1 = x_1 x_N, \dots, z_{N-1} = x_{N-1} x_N, \\ z_N = \sum_{i=1}^N z_i - \sum_{i=1}^{N-1} z_i = x_N - \sum_{i=1}^{N-1} x_N x_i = x_N \left(1 - \sum_{i=1}^{N-1} x_i \right).$$

Якобиан отображения после элементарных преобразований приводится к определителю верхнетреугольной матрицы и равен $J(x_1, \dots, x_N) = x_N^{N-1}$. Поэтому интеграл (15) вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned}
M(p, N) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^N z_i \right)^{-p} \exp \left(- \sum_{i=1}^N z_i \right) dz_1 dz_2 \dots dz_N = \\
&= \int_0^\infty x_N^{-p} x_N^{N-1} \exp(-x_N) dx_N \left(\int_0^1 \int_0^{x_{N-1}} \dots \int_0^{x_2} dx_1 \dots dx_{N-2} dx_{N-1} \right) = \\
&= \int_0^\infty x_N^{-p} \frac{x_N^{N-1}}{\Gamma(N)} \exp(-x_N) dx_N \left(\Gamma(N) \int_0^1 \int_0^{x_{N-1}} \dots \int_0^{x_2} dx_1 \dots dx_{N-2} dx_{N-1} \right) = \\
&= \int_0^\infty x_N^{-p} \frac{x_N^{N-1}}{\Gamma(N)} \exp(-x_N) dx_N \int_0^1 \dots \int_0^1 dx_1 \dots dx_{N-1} = \frac{\Gamma(N-p)}{\Gamma(N)} = \frac{(N-p-1)!}{(N-1)!}.
\end{aligned}$$

Аналогично происходит нахождение интеграла (16). Далее остается заметить, что интеграл вида (15) состоит из $N!$ одинаковых интегралов вида (13) при $p = 1$.

Приведем еще один интересный математический результат, касающийся вычисления интеграла вида (13).

Лемма 2. Для любого $N \in \mathbb{N}$ интеграл (15) при $p = 1$ может быть представлен в некотором виде относительно разбиения на две части, состоящих из k и $N - k$ элементов, а именно

$$(18) \quad M(1, N) = \frac{1}{\Gamma(N-k)\Gamma(k)} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\zeta^{N-k-1} \eta^{k-1}}{\zeta + \eta} \exp(-(\zeta + \eta)) d\zeta d\eta.$$

Доказательство. Доказательство леммы можно провести, опираясь на две замены переменных в интеграле, подобно доказательству утверждения 2. Заметим только, что в этом случае, как и ранее по утверждению 2, $M(1, N) = \frac{1}{N-1}$.

4. Основные результаты. Вычисление дисперсии нормированных порядковых статистик

Теперь возникает задача вычисления дисперсии $\mathbb{D} \left[\frac{Z_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Z_{(i)}} \right]$, для нахождения которой необходимо уметь вычислять $\mathbb{E} \left[\frac{Z_{(k)}^2}{(\sum_{i=1}^N Z_{(i)})^2} \right]$.

Утверждение 3. Искомое математическое ожидание может быть найдено следующим образом:

$$(19) \quad \mathbb{E} \left[\frac{Z_{(k)}^2}{\left(\sum_{i=1}^N Z_{(i)} \right)^2} \right] = \frac{1}{N(N+1)} \mathbb{E} \left[Z_{(k)}^2 \right].$$

Доказательство. Математические ожидания в обеих частях равенства выписываются по определению с учетом порядка интегрирования:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[Z_{(k)}^2 \right] &= N! \int_0^\infty \int_0^{z_N} \dots \int_0^{z_3} \int_0^{z_2} z_k^2 \exp \left(- \sum_{i=1}^N z_i \right) dz_1 dz_2 \dots dz_{N-1} dz_N, \\ \mathbb{E} \left[\frac{Z_{(k)}^2}{\left(\sum_{i=1}^N Z_{(i)} \right)^2} \right] &= N! \int_0^\infty \int_0^{z_N} \dots \int_0^{z_3} \int_0^{z_2} \frac{z_k^2}{\left(\sum_{i=1}^N z_i \right)^2} \exp \left(- \sum_{i=1}^N z_i \right) dz_1 dz_2 \dots dz_{N-1} dz_N. \end{aligned}$$

Выполняя замену переменных (17) в интегралах аналогично доказательству утверждения 2, продолжим соответствующие равенства

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[Z_{(k)}^2 \right] &= N! \int_0^\infty \int_\Omega \dots \int x_N^{N-1} x_k^2 x_N^2 \exp(-x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_{N-1} dx_N = \\ &= N! \int_0^\infty x_N^{N+1} \exp(-x_N) dx_N \int_\Omega \dots \int x_k^2 dx_1 dx_2 \dots dx_{N-1} = \\ &= N(N+1)N! \int_0^\infty x_N^{N-1} \exp(-x_N) dx_N \int_\Omega \dots \int x_k^2 dx_1 dx_2 \dots dx_{N-1}, \\ \mathbb{E} \left[\frac{Z_{(k)}^2}{\left(\sum_{i=1}^N Z_{(i)} \right)^2} \right] &= N! \int_0^\infty \int_\Omega \dots \int x_N^{N-1} x_k^2 \exp(-x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_{N-1} dx_N = \\ &= N! \int_0^\infty x_N^{N-1} \exp(-x_N) dx_N \int_\Omega \dots \int x_k^2 dx_1 dx_2 \dots dx_{N-1}, \end{aligned}$$

где буквой Ω обозначена область интегрирования для новых переменных x_1, \dots, x_{N-1} при указанной замене. В данном случае эта область является частью симплекса, возникающего при подобной замене при выводе распределения Дирихле из порождающих Гамма-распределений [19, 20].

Сравнивая выражения для $\mathbb{E} \left[\frac{Z_{(k)}^2}{(\sum_{i=1}^N Z_{(i)})^2} \right]$ и $\mathbb{E} [Z_{(k)}^2]$, получаем искомое утверждение.

Метод, предложенный выше, подходит и для доказательства утверждения 1.

Следствие 1. Из утверждения 3 с учетом формулы (10) следует, что дисперсия имеет вид

$$(20) \quad \mathbb{D} \left[\frac{Z_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Z_{(i)}} \right] = \frac{1}{N(N+1)} \mathbb{E} [Z_{(k)}^2] - \left(\frac{1}{N} \mathbb{E} [Z_{(k)}] \right)^2.$$

Теперь можно произвести ее оценку.

Следствие 2. Для всех значений N справедлива оценка дисперсии (20), удовлетворяющая неравенству

$$\mathbb{D} \left[\frac{Z_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Z_{(i)}} \right] \leq \frac{1}{N^2} \mathbb{D} [Z_{(k)}].$$

Доказательство. Из следствия 1 следует, что

$$\begin{aligned} \mathbb{D} \left[\frac{Z_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Z_{(i)}} \right] &= \frac{1}{N(N+1)} \mathbb{E} [Z_{(k)}^2] - \left(\frac{1}{N} \mathbb{E} [Z_{(k)}] \right)^2 = \\ &= \frac{1}{N^2} \mathbb{D} [Z_{(k)}] - \frac{1}{N^2(N+1)} \mathbb{E} [Z_{(k)}^2]. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Утверждение 4. Второй момент и дисперсия неубывающей порядковой статистики находятся следующим образом:

$$(21) \quad \mathbb{E} [Z_{(k)}^2] = \left(\sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i} \right)^2 + \sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i^2},$$

$$(22) \quad \mathbb{D} [Z_{(k)}] = \sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i^2}.$$

Доказательство. Для $\mathbb{E} [Z_{(k)}^2]$ справедлива следующая формула [7]:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [Z_{(k)}^2] &= \int_0^\infty z^2 f_{Z_{(k)}}(z) dz = \\ &= \int_0^\infty \frac{z^2 N!}{(k-1)!(N-k)!} \exp(-z(1+N-k))(1-\exp(-z))^{(k-1)} dz = \\ &= (H_N - H_{N-k})^2 + \psi^{(1)}(N-k+1) - \psi^{(1)}(N+1), \end{aligned}$$

включающая полигамма-функцию $\psi^{(m)}(n) = (-1)^{(m+1)} m! \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{(m+1)}}$ и гармонический ряд $H_N = \sum_{i=1}^N \frac{1}{i}$.

Подстановка в последнее равенство выражения $\psi^{(m)}(n)$ приводит к результату (21). Дисперсия (22) получается из (21) при учете формулы (8) для $\mathbb{E}[Z_{(k)}]$.

Утверждение 5. Конструктивная формула для вычисления дисперсии (20) имеет вид

$$(23) \quad \mathbb{D} \left[\frac{Z_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Z_{(i)}} \right] = \frac{1}{N(N+1)} \left(\sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i^2} - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i} \right)^2 \right).$$

Доказательство. Преобразуем общую формулу (20) для дисперсии нормированной порядковой статистики, используя (21) и (10):

$$\begin{aligned} (24) \quad \mathbb{D} \left[\frac{Z_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Z_{(i)}} \right] &= \frac{1}{N(N+1)} \mathbb{E} [Z_{(k)}^2] - \left(\frac{1}{N} \mathbb{E} [Z_{(k)}] \right)^2 = \\ &= \frac{1}{N(N+1)} \left(\left(\sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i} \right)^2 + \sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i^2} \right) - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i} \right)^2 = \\ &= \left(\sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i} \right)^2 \left(\frac{1}{N(N+1)} - \frac{1}{N^2} \right) + \frac{1}{N(N+1)} \sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i^2} = \\ &= \left(\sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i} \right)^2 \left(\frac{-1}{N^2(N+1)} \right) + \frac{1}{N(N+1)} \sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i^2} = \\ &= \frac{1}{N(N+1)} \left(\sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i^2} - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Приведем еще несколько интересных фактов из доказанных утверждений.

Следствие 3. Из (22) при $k = N$ следует, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{D} [Z_{(N)}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Следствие 4. Для всех значений N справедливо

$$\mathbb{E} [Z_{(1)}^2] = \frac{1}{N+1} \frac{2}{N^2}.$$

5. Среднее значение плотности нормированного энергетического спектра, его оценки и спектральная сложность

Вернемся к исходной задаче 1. После нахождения энергетических спектральных отсчетов одного окна наблюдения в [16] вводятся y_1, \dots, y_N – результаты наблюдений экспоненциально распределенной случайной величины Y , порождающей $\eta_k(N)$. Тогда значения последовательности $y_{(1)}, \dots, y_{(N)}$ тех же результатов, но расположенных в порядке убывания, являются обратным вариационным рядом, где случайная величина $Y_{(k)}$ является невозрастающей k -й порядковой статистикой.

В этом случае справедливо

$$\mathbb{E} \left[\frac{Z_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Z_{(i)}} \right] = \mathbb{E} \left[\frac{Y_{(N-k+1)}}{\sum_{i=1}^N Y_{(i)}} \right],$$

или

$$\begin{aligned} \tilde{n}_k(N) &= \mathbb{E} \left[\frac{Y_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Y_{(i)}} \right] = \mathbb{E} \left[\frac{Z_{(N-k+1)}}{\sum_{i=1}^N Z_{(i)}} \right] = \\ (25) \quad &= \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} \right) = \frac{1}{N} \sum_{i=k}^N \frac{1}{i}. \end{aligned}$$

Используя (25), получаем, что

$$\sum_{k=1}^N \mathbb{E} \left[\frac{Y_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Y_{(i)}} \right] = N \frac{1}{N} = 1.$$

Откуда видно, что условие нормировки выполнено.

В свою очередь, дисперсия находится по формуле

$$\mathbb{D} \left[\frac{Z_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Z_{(i)}} \right] = \mathbb{D} \left[\frac{Y_{(N-k+1)}}{\sum_{i=1}^N Y_{(i)}} \right],$$

или

$$(26) \quad \mathbb{D} \left[\frac{Y_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Y_{(i)}} \right] = \frac{1}{N(N+1)} \left(\sum_{i=k}^N \frac{1}{i^2} - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=k}^N \frac{1}{i} \right)^2 \right).$$

В [16] для приближенного вычисления функции вероятности нормированного упорядоченного дискретного спектра предложена формула

$$(27) \quad n_k(N) = -\frac{1}{N K_N} \ln \frac{k}{N+1}, \quad \text{где} \quad K_N = -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln \frac{k}{N+1}.$$

Теперь сравним дискретные распределения: точное, задаваемое формулой (25), и приближенное, определяемое по формуле (27).

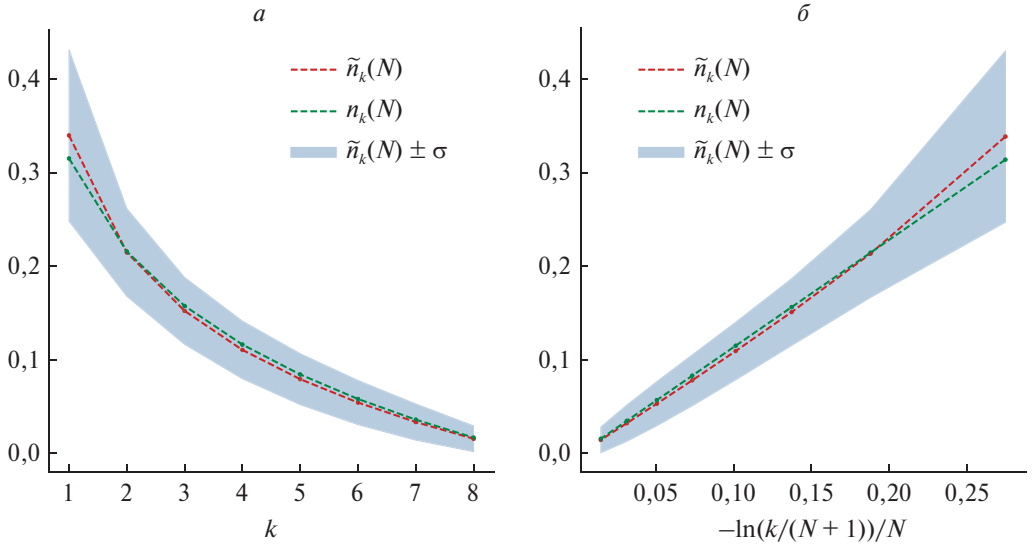


Рис. 1. Дискретные распределения $\tilde{n}_k(N)$ и $n_k(N)$ для ряда размера $N = 8$. *а* – горизонтальная ось в линейном масштабе. *б* – горизонтальная ось в логарифмическом масштабе.

При больших значениях N и k выражение (25), которое является разностью гармонических рядов, можно приближать различными способами. Выберем оценку

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} \approx -\ln \frac{k}{N+1},$$

которая определена и имеет смысл при всех N и $k \in [1, \dots, N]$, а также входит в (27).

Проиллюстрируем на рис. 1, 2 графики зависимостей распределений (25) и (27) от номера отсчета. Буквой σ обозначено стандартное отклонение распределения порядковой статистики, определяемого формулой (26).

Рисунки 1 и 2 иллюстрируют, что точные значения математического ожидания (25) для малого количества точек (членов спектрального ряда) незначительно отличаются от распределения (27), для остальных отсчетов они практически совпадают. С ростом N доля точек, отклоняющихся от оценки, быстро падает.

Лемма 3. В общем случае более точной оказывается оценка

$$(28) \quad \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} \approx -\ln \frac{k-0,5}{N+0,5},$$

которая также определена и имеет смысл при всех N и $k \in [2, \dots, N]$.

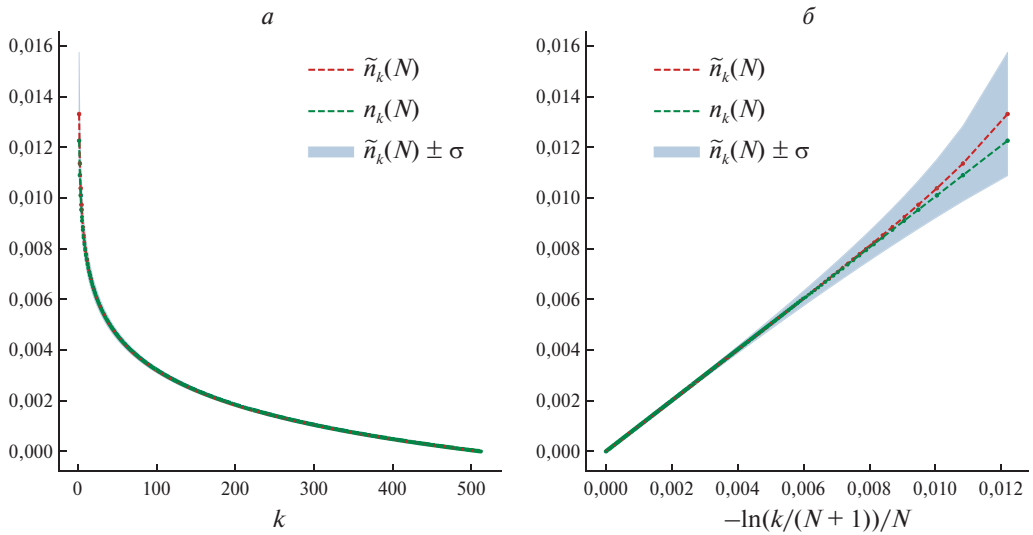


Рис. 2. Дискретные распределения $\tilde{n}_k(N)$ и $n_k(N)$ для ряда размера $N = 512$. *а* – горизонтальная ось в линейном масштабе. *б* – горизонтальная ось в логарифмическом масштабе.

Доказательство. Для доказательства обратимся к теории гармонических рядов.

Частичная сумма N первых членов гармонического ряда называется N -м гармоническим числом и описывается формулой

$$(29) \quad H_N = \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N}.$$

В 1740 г. Эйлером было получено асимптотическое выражение для H_N , называемое формулой Эйлера–Макларена:

$$(30) \quad H_N = \ln N + \gamma + \frac{1}{2N} - \varepsilon_N,$$

где $\gamma = 0,5772 \dots$ – постоянная Эйлера–Маскерони, а $0 \leq \varepsilon_N \leq 1/8N^2$, откуда следует, что при $N \rightarrow \infty$ значение $\varepsilon_N \rightarrow 0$, следовательно, для больших N

$$(31) \quad H_N = \ln N + \gamma + O(N^{-1}) \approx \ln N + \gamma.$$

Последнее выражение называется формулой Эйлера для суммы первых n членов гармонического ряда. Возвращаясь к (30), заметим, что

$$(32) \quad \ln \left(N + \frac{1}{2} \right) = \ln N + \frac{1}{2N} + O \left(\frac{1}{N^2} \right).$$

Подставляя правую часть в (30), можно получить

$$(33) \quad H_N = \ln \left(N + \frac{1}{2} \right) + \gamma + O \left(\frac{1}{N^2} \right),$$

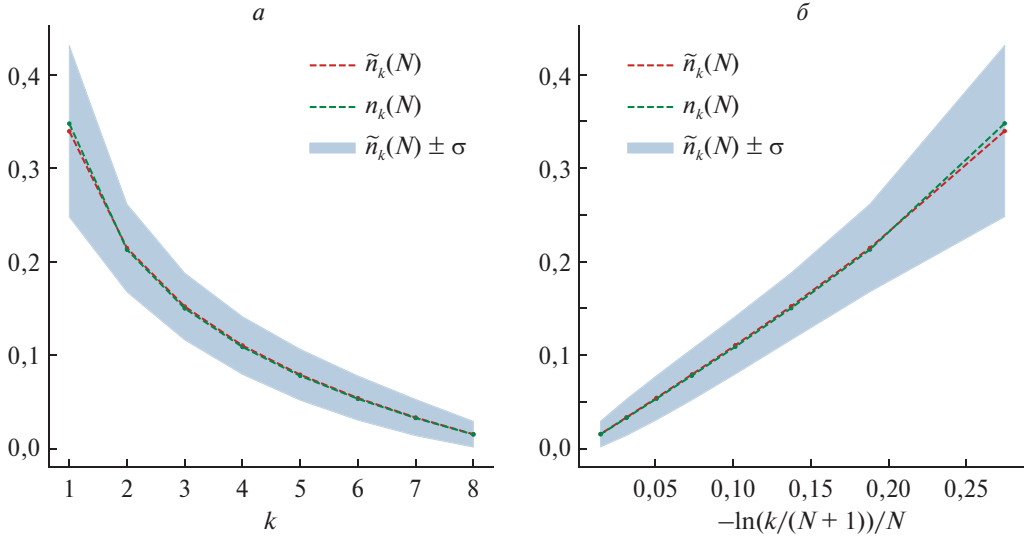


Рис. 3. Дискретные распределения $\tilde{n}_k(N)$ и $n_k(N)$ для ряда размера $N = 8$. a – горизонтальная ось в линейном масштабе. b – горизонтальная ось в логарифмическом масштабе.

поскольку величины ε_N и ε_{k+1} обладают близким порядком малости относительно $\frac{1}{N^2}$ и $\frac{1}{k^2}$, которые быстро стремятся к нулю при росте N и k .

Поэтому (28) принимает вид

$$\begin{aligned}
 (34) \quad & \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} = H_N - H_{k-1} = \\
 & = \ln \left(N + \frac{1}{2} \right) + O \left(\frac{1}{N^2} \right) - \ln \left(k - \frac{1}{2} \right) + O \left(\frac{1}{(k-1)^2} \right).
 \end{aligned}$$

Таким образом, можно утверждать, что для относительно больших N и k справедливо выражение

$$(35) \quad \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} \approx -\ln \frac{k-0,5}{N+0,5},$$

что завершает доказательство леммы.

Для приближенного вычисления функции вероятности нормированного упорядоченного дискретного спектра выберем теперь формулу

$$(36) \quad n_k(N) = -\frac{1}{NK_N} \ln \frac{2k-1}{2N+1}, \quad \text{где} \quad K_N = -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln \frac{2k-1}{2N+1}.$$

Проиллюстрируем результат леммы на рис. 3 и 4.

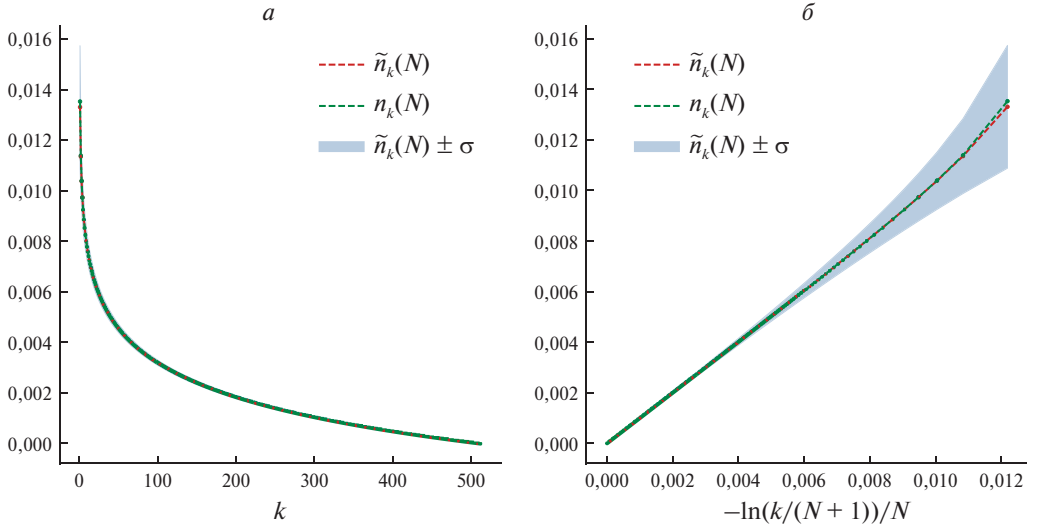


Рис. 4. Дискретные распределения $\tilde{n}_k(N)$ и $n_k(N)$ для ряда размера $N = 512$. *a* – горизонтальная ось в линейном масштабе. *б* – горизонтальная ось в логарифмическом масштабе.

Видно, что даже при малых N имеется практическое совпадение двух распределений. Теперь, считая что нормированные порядковые статистики (η_1, \dots, η_N) принимают значения $p = (p_1, \dots, p_N)$, спектральную сложность также можно задавать на основе распределения (25) по формуле

$$(37) \quad C_{SS}(p) = -\frac{1}{4 \log_2 N} \left(\sum_{k=1}^N p_k \log_2 p_k \right) \left(\sum_{k=1}^N |p_k - \tilde{n}_k(N)| \right)^2$$

или его приближенного аналога (36) по формуле

$$(38) \quad C_S(p) = -\frac{1}{4 \log_2 N} \left(\sum_{k=1}^N p_k \log_2 p_k \right) \left(\sum_{k=1}^N |p_k - n_k(N)| \right)^2,$$

что и показано в следующем разделе 6.

6. Моделирование обнаружения детерминированного сигнала

Для иллюстрации аналитических результатов статьи используем методику статистического моделирования, основанную на анализе сгенерированных численных данных и подробно описанную в предыдущей работе авторов [16]. Как и ранее, все численные результаты получены средствами языка Python и библиотек NumPy и Scipy.

Рассмотрим пары последовательностей данных, отвечающих двум гипотезам принятия сигнала

$$(39) \quad \begin{cases} \Gamma_0 : x_n = w_n, \\ \Gamma_1 : x_n = s_n + w_n, n = 1, \dots, N. \end{cases}$$

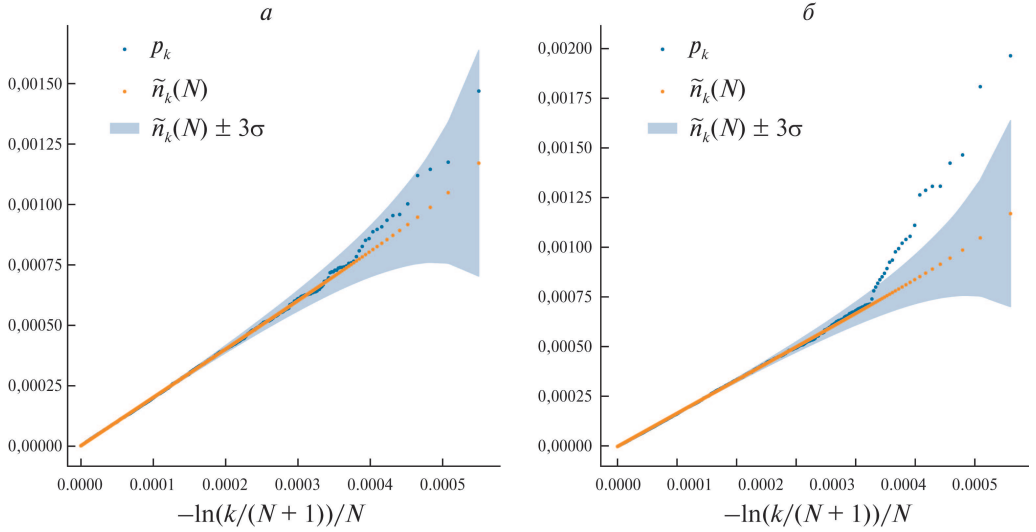


Рис. 5. Дискретные распределения $\tilde{n}_k(N)$ и p_k для ряда размера $N = 8192$ для $SNR = -15,22 \text{ dB}$. Горизонтальная ось в логарифмическом масштабе. *а* – для временной последовательности данных шума w_n . *б* – для временной последовательности данных сигнала с шумом $s_n + w_n$.

Гипотеза Γ_0 связана с принятием решения о приеме только шума, а гипотеза Γ_1 – о приеме смеси полезного сигнала и шума, где последовательность $\{x_n\}$, $n = 1, \dots, N$ – временной ряд из принятых данных, $\{s_n\}$ – полезный сигнал, $\{w_n\}$ – аддитивный белый гауссовский шум, N – длина временного ряда данных (фрейма).

Для проверки качества разделения полезного детерминированного сигнала и шума была набрана статистика на $Q = 50\,000$ численно сгенерированных фреймах $\{x_n\}$ сигнально-шумовой смеси длины $2N = 16\,384$ с размером спектров $N = 8192$ соответственно. Во всех реализациях сигнал $\{s_n\}$ оставался одним и тем же, а именно фиксированным по количеству и амплитудам набором равномерно разнесенных по спектру $K = 30$ синусоид со случайными фазами. Аддитивный белый гауссовский шум $\{w_n\}$ был получен генератором гауссовских последовательностей со средним $\mu = 0$ и дисперсией Σ (в рамках одного набора Q фреймов).

На рис. 5 показаны упорядоченные дискретные спектральные распределения p_k для конкретных реализаций сигналов и теоретические математические ожидания $\tilde{n}_k(N)$, описываемые (25). Видно, что в каждой реализации реальное спектральное распределение белого шума может довольно сильно отличаться от теоретического $\tilde{n}_k(N)$. Однако можно утверждать, что все такие реализации лежат в доверительном интервале, определяемом стандартным отклонением σ распределения порядковой статистики (26). На рис. 5 голубым цветом показана область, ограничивающая доверительный интервал для каждого номера отсчета k с верхней и нижней границей $\tilde{n}_k(N) \pm 3\sigma$.

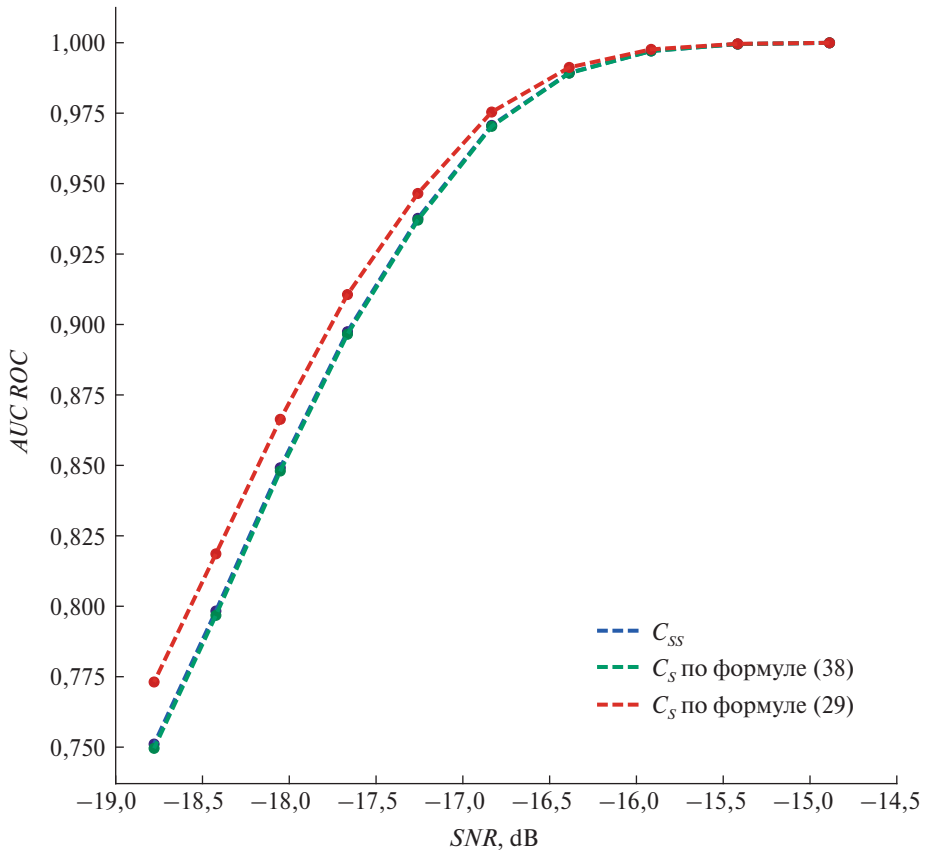


Рис. 6. Зависимость качества бинарной классификации $AUC ROC$ от отношения сигнал/помеха SNR для рассматриваемых функций спектральной сложности.

Для каждой полученной последовательности $\{x_n\}$ вычисляется порядковая статистика дискретного нормированного спектрального распределения p_k , вычисление которой подробно описано в [9, 15]. Далее на основании p_k вычисляются значения C_{SS} (37) и C_S (38) для шума и смеси шума с сигналом, отвечающим двум гипотезам из выражений (39). Величина C_S посчитана для двух разных приближений порядковой статистики спектрального распределения белого шума (27) и (36), поскольку их сравнение тоже представляет интерес.

Конечным результатом моделирования и сравнения вычисленных информационных метрик служит зависимость качества бинарной классификации $AUC ROC$ от отношения сигнал/помеха SNR , которое описывается формулой

$$(40) \quad SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{E_{signal}}{E_{noise}} \right),$$

где E_{signal} , E_{noise} – полные энергии сигнала и шума соответственно, рассчитанные как сумма мощностей спектрального разложения последовательностей $\{s_n\}$ и $\{w_n\}$.

Для получения такой зависимости для ряда значений дисперсий шума Σ набирается статистика Q фреймов, описанная выше, и по ней строятся гistogramмы распределений величин C_{SS} и C_S , по которым затем вычисляются значения $AUC\ ROC$ [16].

На рис. 6 показано сравнение качества бинарного разделения сигнала и шума для информационных метрик C_{SS} и C_S . Видно, что показатели для функций C_{SS} и C_S , которая вычислена с использованием (36), теоретически обусловленной леммой 3, совпадают почти полностью. Также видно, что информационная характеристика C_S , вычисленная с использованием формулы (36) из предыдущей статьи авторов [16], показывает небольшое улучшение в качестве обнаружения. Все аналитические информационные критерии, введенные в работе, демонстрируют высокое качество обнаружения детерминированного сигнала в шуме при малом отношении сигнал/шум.

7. Заключение

В работе установлено, что порядковая статистика дискретного нормированного спектрального распределения является мощным инструментом для решения задачи обнаружения детерминированного сигнала при малом отношении сигнал/помеха при однооконном наблюдении. В качестве критерия обнаружения используется спектральная сложность, вычисляемая на конкретной реализации сигнально-шумовой смеси.

При попытке разделить две задачи «обнаружение (предобнаружение) детерминированных сигналов в белом шуме при малом отношении сигнал/помеха» и «классификация» видно, что, повышая чувствительность метода обнаружения, теряем все физические свойства сигнала, работая в дальнейшем только с информационными. Напрашивается простая аналогия с квантовыми системами, для которых существует соотношение неопределенности, когда исследователь не может точно одновременно измерить скорость и координату. В действительности уменьшение информативности конкретных частот сигнала не позволяет его классифицировать, не говоря уже о том, чтобы восстановить его из измерения совместно с шумом. Однако упорядоченность спектра шума имеет конкретную жесткую структуру, позволяющую делать вывод о присутствии сигнала даже за пределами чувствительности классических энергетических приемников.

Более того, видны перспективы применения предлагаемого метода обнаружения и для других видов шума, а также перспективы построения классификационных сеток сигналов на основе информационных характеристик спектров сигнально-шумовых смесей, чему и будут посвящены следующие работы авторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Amigó J.M., Rosso O.A.* Ordinal methods: Concepts, applications, new developments, and challenges – In memory of Karsten Keller (1961–2022) // *Chaos*. 2023. V. 33. No. 8. P. 080401.
<https://pubs.aip.org/cha/article/33/8/080401/2905538/Ordinal-methods-Concepts-applications-new>
2. *Rosso O.A., Larrondo H.A., Martin M.T., Plastino A., Fuentes M.A.* Distinguishing Noise from Chaos // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V. 99. No. 15. P. 154102.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.99.154102>
3. *Теребиж В.Ю.* Анализ временных рядов в астрофизике. М.: Наука, 1992.
4. *Добрушин Р.Л., Пинскер М.С., Ширяев А.Н.* Применение понятия энтропии в проблемах обнаружения сигнала на фоне шума // Литовский математический сборник. 1963. Т. 3. № 1. С. 107–122.
5. *Chen Z., Wu C., Wang J., Qiu H.* Tsallis Entropy-Based Complexity-IPE Casualty Plane: A Novel Method for Complex Time Series Analysis // *Entropy*. 2024. V. 26. No. 6. P. 521. <https://www.mdpi.com/1099-4300/26/6/521>
6. *Hoeffding W.* On the Distribution of the Expected Values of the Order Statistics // *Ann. Math. Stat.* 1953. V. 24. No. 1. P. 93–100.
<https://doi.org/10.1214/aoms/1177729086>
7. *Balakrishnan N., Cohen A.C.* Order Statistics & Inference: Estimation Methods // Elsevier Science. 1991. <https://doi.org/10.1016/C2009-0-22411-1>
8. *Vecchio F., Miraglia F., Pappalètera C., Orticoni A., Alù F., Judica E., Cotelli M., Rossini P.M.* Entropy as Measure of Brain Networks' Complexity in Eyes Open and Closed Conditions // *Symmetry*. 2021. V. 13. No. 11. P. 2178.
<https://www.mdpi.com/2073-8994/13/11/2178>
9. *Berlin L.M., Galyaev A.A., Lysenko P.V.* Comparison of Information Criteria for Detection of Useful Signals in Noisy Environments // *Sensors*. 2023. V. 23. No. 4. P. 2133. <https://www.mdpi.com/1424-8220/23/4/2133>
10. *Zhang W., Huang D., Zhou M., Lin, J., Wang X.* Open-Set Signal Recognition Based on Transformer and Wasserstein Distance // *Appl. Sci.* 2023. V. 13. No. 4. P. 2151. <https://www.mdpi.com/2076-3417/13/4/2151>
11. *Cazelles E., Robert A., Tobar F.* The Wasserstein-Fourier Distance for Stationary Time Series // *IEEE Transact. Signal Proc.* 2021. V. 69. P. 709–721.
<https://ieeexplore.ieee.org/document/9303405>
12. *Ferracuti F., Freddi A., Monteriu A., Romeo L.* Fault Diagnosis of Rotating Machinery Based on Wasserstein Distance and Feature Selection // *IEEE Transact. Autom. Sci. Engin.* 2022. V. 19. No. 3. P. 1997–2007.
<https://doi.org/10.1109/TASE.2021.3069109>
13. *Quan Z., Zhang W., Shellhammer S.J., Sayed A.H.* Optimal Spectral Feature Detection for Spectrum Sensing at Very Low SNR // *IEEE Transact. Commun.* 2011. V. 59. No. 1. P. 201–212. <https://doi.org/10.1109/TCOMM.2010.112310.090306>
14. *Bardenet R., Flamant J., Chainais P.* On the zeros of the spectrogram of white noise // *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 2020. V. 48. No. 2. P. 682–705.
<https://doi.org/10.1016/j.acha.2018.09.002>
15. *Галляев А.А., Лысенко П.В., Берлин Л.М.* Статистическая сложность как критерий задачи обнаружения полезного сигнала // *АиТ*. 2023. № 7. С. 121–145.
<https://doi.org/10.31857/S0005231023070073>

16. *Галляев А.А., Бабилов В.Г., Лысенко П.В., Берлин Л.М.* Новая спектральная мера сложности и ее возможности по обнаружению сигналов в шуме // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2024. Т. 518. С. 80–88.
17. *Richards M.A.* The Discrete-Time Fourier Transform and Discrete Fourier Transform of Windowed Stationary White Noise // Technical Memorandum. 2013. P. 1–24.
18. *DasGupta A.* Probability for Statistics and Machine Learning: Fundamentals and Advanced Topics // New York: Springer, 2011.
<https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9634-3>
19. *Frigyik B., Kapila, A., Gupta M.* Introduction to the Dirichlet Distribution and Related Processes // UWEE Technical Report Number UWEETR-2010-0006. 2010. P. 1–28.
20. *Hafeez M., Kamal S., Shahbaz M.* The Multivariate Order Statistics for Exponential and Weibull Distributions // Pak. J. Stat. Oper. Res. 2014. V. 10. P. 361–368.
<https://doi.org/10.18187/pjsor.v10i3.825>

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 08.09.2024

После доработки 08.10.2024

Принята к публикации 24.10.2024

Стохастические системы

© 2024 г. А.В. ГОРБУНОВА, канд. физ.-мат. наук (avgorbunova@list.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
А.В. ЛЕБЕДЕВ, д-р физ.-мат. наук (avlebed@yandex.ru)
(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ УПРАВЛЕНИЯ СКОРОСТЬЮ ОБСЛУЖИВАНИЯ В СИСТЕМАХ С РАЗДЕЛЕНИЕМ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ ЗАЯВОК

Рассматривается классическая система с разделением и параллельным обслуживанием. Предлагается модель для определения оптимальной стоимости функционирования такой системы, учитывающая необходимость минимизации среднего времени отклика одновременно с разумными затратами на необходимые для этого ресурсы. Под термином “ресурсы” в рамках исследуемой математической модели подразумеваются интенсивности обслуживания на приборах, стоимость расходов на которые прямо пропорциональна производительности системы, т.е. скорости обслуживания заявок. Для частного случая, когда число подсистем равно двум, представлено точное аналитическое выражение для определения оптимальной стоимости; для более общего случая, когда число подсистем fork-join системы больше двух, получено уравнение, численное решение которого позволяет вычислить искомую величину. Кроме того, проведен асимптотический анализ поведения полученных решений.

Ключевые слова: система с разделением и параллельным обслуживанием заявок, система массового обслуживания, оптимальная стоимость, управление.

DOI: 10.31857/S0005231024120048, **EDN:** XUEPRH

1. Введение

Рассматривается классическая система с разделением и параллельным обслуживанием, называемая также в англоязычной литературе fork-join системой массового обслуживания (СМО). При поступлении в данную систему заявка разделяется на K одинаковых частей (подзаявок), количество которых соответствует числу подсистем. Каждая подсистема представляет собой систему с объемом накопителя бесконечной емкости и единственным прибором. Предполагается, что интенсивности обслуживания на всех имеющихся приборах идентичны. Заявка считается обслуженной после обслуживания всех составляющих ее частей. Соответственно, время отклика системы (время пребывания заявки в системе) определяется максимумом из K случайных времен пребывания подзаявок в подсистемах.

Подобные системы широко используются для моделирования различного рода процессов, в рамках которых происходит разделение или распараллеливание задачи, в частности в области информационных технологий речь может идти о параллельных или распределенных вычислениях, также с их помощью могут моделироваться различные рабочие процессы в производстве (например, сборка многокомпонентного заказа на складе или сложных, состоящих из множества деталей, механизмов на производстве), финансах (например, обработка заявки на кредитование в нескольких подразделениях финансовой организации), здравоохранении (проведение необходимых анализов и сбор анамнеза при поступлении пациента в медицинское учреждение) и т.д.

Ключевой особенностью данной системы, затрудняющей ее анализ, является наличие зависимости между временами пребывания подзаявок в подсистемах. Поэтому несмотря на актуальность и востребованность изучения fork-join систем, точные характеристики функционирования системы были получены только для случая двух подсистем ($K = 2$), в частности, известна формула для среднего времени отклика системы в случае пуассоновского входящего потока и экспоненциальных распределений времен обслуживания [1]. В остальных же случаях найдены только приближенные выражения для аппроксимации основных показателей производительности системы [1–3]. В обзоре [4] можно более подробно ознакомиться с известными результатами. Что касается более свежих исследований, то в работах [5–12], в том числе и авторов данной статьи, помимо выражений, уточняющих известные оценки среднего времени отклика или его дисперсии, получены выражения для оценки таких характеристик, как квантили распределения времени отклика для более широкого диапазона входящих или обслуживающих потоков. Кроме того, в [11] представлено точное выражение для коэффициента корреляции между временами пребывания подзаявок в подсистемах типа $M|M|1$, а в [9] для fork-join системы с распределением Парето времени обслуживания выведена оценка для коэффициента корреляции уже в случае распределения Парето времени обслуживания. Также стоит отметить работы отечественных авторов [13–19]. В серии статей, включающей [13–16], проведен анализ fork-join системы с бесконечнолинейными подсистемами в терминах производящих функций для распределения вероятностей количества подзаявок в каждой подсистеме. В [17] проанализирована одна из модификаций fork-join системы, когда при поступлении заявка разделяется не на фиксированное, а на переменное число подзаявок, которое определяется состоянием системы. В [18] предложен подход на основе инвариантов отношения для приближения среднего времени отклика fork-join СМО, а в [19] fork-join система является составной частью сети и используется для моделирования и исследования характеристик производительности сервисных платформ транзакционных услуг.

В настоящей статье исследуется другой аспект производительности fork-join системы, а именно строится модель стоимости функционирования систе-

мы с разделением и параллельным обслуживанием, что позволяет определить оптимальное управление с точки зрения оптимизации ее финансовых показателей. Базируется модель на естественных предположениях о необходимости минимизации среднего времени отклика системы для сохранения ее конкурентоспособности при разумных затратах на требуемые для этого ресурсы. В частности, под ресурсами может пониматься мощность необходимого оборудования, которое позволяет быстрее обрабатывать клиентский запрос, если речь идет об информационно-вычислительных или производственных системах, например. Понятно, что чем мощнее оборудование, тем больше затрат требуется на его покупку, техническое обслуживание и содержание в целом. Таким образом, скорость работы оборудования (или в терминах СМО интенсивности обслуживания) пропорциональна росту его стоимости. Кроме того, с увеличением скорости обслуживания уменьшается время отклика системы. Таким образом, стоимость функционирования системы складывается из оптимального баланса между временем отклика и скоростью работы обслуживающих приборов.

Более подробно, предполагается, что установлены: 1) цена (штраф) за единицу среднего времени отклика и 2) цена за единицу интенсивности обслуживания. При этом первая цена для простоты полагается равной единице. Далее вычисляются стоимости времени отклика и обслуживания и складываются в общую стоимость затрат, которую здесь хотим минимизировать. Таким образом, ставится задача стоимостной оптимизации управления.

Подобные постановки задач можно найти в монографии [20], посвященной оптимальному дизайну СМО, в том числе оптимальному выбору скоростей поступления и обслуживания заявок (в предположении, что эти параметры управляемы) для различных систем и сетей массового обслуживания. Однако для fork-join систем такие задачи ранее не рассматривались.

Предложенная функциональная зависимость для стоимости функционирования системы с разделением и параллельным обслуживанием позволяет получить в явном виде выражение для определения оптимальной интенсивности обслуживания на приборах системы в случае, если количество подсистем равно двум. Если же число подсистем больше двух, то получение оптимального решения возможно в численном виде. Также было рассмотрено поведение оптимального решения в предельных случаях.

Статья организована следующим образом: в разделе 2 описана математическая модель определения оптимальной стоимости функционирования fork-join системы в общем виде; в следующих двух разделах выводится оптимальное значение коэффициента загрузки системы, позволяющего выразить оптимальное значение интенсивности обслуживания для случая формулы Нельсона–Тантави определения времени отклика системы – в частном случае, т.е. когда число подсистем соответствует двум и формула точна, и в более общем случае, когда формула является приближенной; далее проанализирован случай обобщения формулы Нельсона–Тантави, а затем проведен

асимптотический анализ полученных решений, как в общем случае, так и для конкретных выражений; в заключении подводятся некоторые итоги.

2. Математическая модель определения оптимальной стоимости функционирования fork-join системы

Анализируется fork-join система с пуассоновским входящим потоком с интенсивностью $\lambda > 0$ и экспоненциальным распределением времен обслуживания на $K \geq 2$ однородных приборах с интенсивностью $\mu > 0$. Коэффициент загрузки системы равен $\rho = \lambda/\mu < 1$.

Изложим единый математический подход, который будет далее применяться в работе.

Обозначим стоимость функционирования системы через S и введем функцию $f(\rho)$, которая определяет выражение для среднего времени отклика системы в случае $\lambda = 1$, т.е. $f(\rho) = E[R_K]$ при $\lambda = 1$. Тогда в общем случае будет справедливо следующее выражение:

$$E[R_K] = \frac{1}{\lambda} f(\rho).$$

Поскольку стоимость функционирования системы S зависит от среднего времени отклика системы (цену за единицу времени принимаем за единицу) и стоимости затрат на обслуживание, то можем для нее записать:

$$S = E[R_K] + c\mu,$$

где c – это стоимость единицы интенсивности обслуживания. Соответственно, с учетом введенной функции $f(\rho)$ можем переписать данное выражение следующим образом:

$$S = \frac{1}{\lambda} f(\rho) + c \frac{\lambda}{\rho} = \frac{1}{\lambda} \left(f(\rho) + \frac{c\lambda^2}{\rho} \right).$$

Пусть $c_1 = c\lambda^2$, тогда

$$(1) \quad S = \frac{1}{\lambda} \left(f(\rho) + \frac{c_1}{\rho} \right).$$

Далее для нахождения оптимального значения уровня загрузки системы определим точку экстремума функции стоимости $S(\rho)$, а именно точку минимума. Для этого найдем производную последнего выражения и приравняем ее к нулю

$$S'_\rho = \frac{1}{\lambda} \left(f'(\rho) - \frac{c_1}{\rho^2} \right) = 0,$$

откуда получим уравнение

$$(2) \quad f'(\rho)\rho^2 = c_1,$$

решив которое, найдем оптимальное значение ρ_0 и, соответственно, оптимальное значение интенсивности обслуживания $\mu_0 = \lambda/\rho_0$.

Рассмотрим базовый случай, когда $K = 1$, т.е. фактически систему $M|M|1$. Среднее время отклика в такой системе равно

$$E[R] = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\mu/\lambda - 1}.$$

Тогда функция $f(\rho)$ с учетом того, что $\rho = \lambda/\mu$, определяется как

$$f(\rho) = \frac{1}{1/\rho - 1} = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{1}{1 - \rho} - 1,$$

а производная этой функции имеет вид

$$f'(\rho) = \frac{1}{(1 - \rho)^2}.$$

Теперь подставляем полученные выражения в уравнение (2)

$$\left(\frac{\rho}{1 - \rho} \right)^2 = c_1,$$

откуда получаем значение для искомой оптимальной загрузки системы при $K = 1$

$$(3) \quad \rho_0 = \frac{\sqrt{c_1}}{1 + \sqrt{c_1}}.$$

На следующем шаге можем вычислить оптимальную интенсивность обслуживания, а именно

$$\mu_0 = \frac{\lambda}{\rho_0} = \lambda \left(1 + \frac{1}{\sqrt{c_1}} \right) = \lambda + \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Аналогичная задача была решена в [20, §1.1] для случая, когда в стоимости учитывается не среднее время отклика, а среднее время ожидания.

Подчеркнем, что поскольку получено уравнение (2) относительно загрузки ρ , то в дальнейшем будем искать только оптимальную загрузку, понимая, что ее можно при необходимости пересчитать в оптимальную интенсивность обслуживания.

3. Анализ fork-join СМО с двумя подсистемами типа $M|M|1$. Формула Нельсона–Тантани

Для начала разберем частный случай и определим оптимальное значение коэффициента загрузки системы, когда число подсистем равно двум. Для

среднего времени отклика при $K = 2$ известна точная формула, полученная в [1], а именно

$$E[R_2] = \frac{12 - \rho}{8} \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{12 - \rho}{8} \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{1}{\lambda} \frac{\rho(12 - \rho)}{8(1 - \rho)}.$$

Таким образом, имеем

$$f(\rho) = \frac{\rho(12 - \rho)}{8(1 - \rho)}.$$

Далее находим производную по ρ и, подставляя выражение для $f'(\rho)$ в (2), можем записать следующее уравнение:

$$\frac{\rho^2(\rho^2 - 2\rho + 12)}{(1 - \rho)^2} = 8c_1.$$

Для удобства сделаем замену

$$c_2 = 8c_1$$

и после упрощения получаем уравнение четвертой степени

$$(4) \quad \rho^4 - 2\rho^3 + (12 - c_2)\rho^2 + 2c_2\rho - c_2 = 0,$$

которое и будем решать, поскольку, как известно, для уравнения четвертой степени существует аналитическое решение в радикалах. Для этого воспользуемся методом Феррари [21–23].

Введем следующие обозначения:

$$A = -2, \quad B = 12 - c_2, \quad C = c_2, \quad D = -c_2,$$

тогда получим

$$\rho^4 + A\rho^3 + B\rho^2 + C\rho + D = 0.$$

С помощью замены $\rho = y - A/4$ сведем уравнение четвертой степени (4) к каноническому виду

$$(5) \quad y^4 + A_1y^2 + B_1y + C_1 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= B - \frac{3A^2}{8} = -c_2 + \frac{21}{2}, \\ B_1 &= \frac{A^3}{8} - \frac{AB}{2} + C = c_2 + 11, \\ C_1 &= -\frac{3A^4}{256} + \frac{A^2B}{16} - \frac{AC}{4} + D = -\frac{1}{4}c_2 + \frac{45}{16}. \end{aligned}$$

Далее согласно методу Феррари необходимо найти одно частное действительное решение кубического уравнения

$$(6) \quad A_2t^3 + B_2t^2 + C_2t + D_2 = 0,$$

где

$$A_2 = 2, \quad B_2 = -A_1 = c_2 - \frac{21}{2},$$

$$C_2 = -2C_1 = \frac{1}{2}c_2 - \frac{45}{8}, \quad D_2 = A_1C_1 - \frac{B_1^2}{4} = -\frac{175}{16}c_2 - \frac{23}{32}.$$

С помощью замены $t = z - B_2/(3A_2)$ приводим уравнение (6) к каноническому виду уравнения третьей степени

$$(7) \quad z^3 + A_3z + B_3 = 0,$$

где

$$A_3 = \frac{3A_2C_2 - B_2^2}{3A_2^2} = -\frac{1}{12}c_2^2 + 2c_2 - 12,$$

$$B_3 = \frac{2B_2^3 - 9A_2B_2C_2 + 27A_2^2D_2}{27A_2^3} = \frac{1}{108}c_2^3 - \frac{1}{3}c_2^2 - \frac{3}{2}c_2 - 16.$$

Вещественный корень уравнения (7) согласно методу Кардано [21–23] определяется следующим образом:

$$(8) \quad z_1 = \left(-\frac{B_3}{2} + \sqrt{Q}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{B_3}{2} - \sqrt{Q}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad Q > 0,$$

где

$$(9) \quad Q = \left(\frac{A_3}{3}\right)^3 + \left(\frac{B_2}{2}\right)^2 = -\frac{11}{432}c_2^4 + \frac{11}{12}c_2^3 - \frac{55}{16}c_2^2 + 44c_2.$$

При этом не забываем, что должно выполняться условие

$$\left(-\frac{B_3}{2} + \sqrt{Q}\right)^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{B_3}{2} - \sqrt{Q}\right)^{\frac{1}{3}} = -\frac{A_3}{3}.$$

Отметим, что для случая $Q < 0$ для z_1 после преобразований в конечном счете будет справедлива следующая формула:

$$(10) \quad z_1 = 2\sqrt{-\frac{A_3}{3}} \cos \frac{w}{3},$$

где

$$w = \begin{cases} \operatorname{arctg} \left(\frac{-2\sqrt{-Q}}{B_3} \right), & \text{если } B_3 < 0, \\ \operatorname{arctg} \left(\frac{-2\sqrt{-Q}}{B_3} \right) + \pi, & \text{если } B_3 > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } B_3 = 0, \end{cases}$$

а для случая $Q = 0$ имеем

$$(11) \quad z_1 = 2 \left(-\frac{B_3}{2} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Выражение для Q из (9) преобразуется к виду

$$-\frac{11}{432}c_2 (c_2^3 - 36c_2^2 + 135c_2 - 1728)$$

и меняет свой знак в зависимости от значения c_2 (хотя c_2 должно быть положительным исходя из своего физического смысла), поэтому явно укажем области знакопостоянства выражения для Q , нули которого можно опять же получить с помощью метода Кардано, а именно

$$\begin{aligned} Q &> 0, & \text{если } c_2 \in (0; \tilde{c}_2), \\ Q &< 0, & \text{если } c_2 \in (-\infty; 0) \cup (\tilde{c}_2; +\infty), \end{aligned}$$

где $\tilde{c}_2 = (3 \times 11^{\frac{1}{3}} + 3 \times 11^{\frac{2}{3}} + 12) \approx 33,51$.

Соответственно, получаем

$$t_1 = z_1 - \frac{B_2}{3A_2},$$

где z_1 в зависимости от значения Q определяется выражениями (8), (10) или (11). Частное решение t_1 позволяет представить каноническое уравнение четвертой степени (5) в виде произведения двух квадратных трехчленов

$$\left(y^2 - y\sqrt{2t_1 - A_1} + \frac{B_1}{2\sqrt{2t_1 - A_1}} \right) \left(y^2 + y\sqrt{2t_1 - A_1} - \frac{B_1}{2\sqrt{2t_1 - A_1}} \right) = 0.$$

Решение одного из квадратных уравнений (с учетом обратной замены) будет являться искомым решением исходного уравнения четвертой степени (4). В частности, проверка показала, что искомым является корень второго уравнения, поэтому можем записать итоговое решение как

$$y_0 = y_3 = \frac{-\sqrt{2t_1 - A_1} + \sqrt{Dis_2}}{2},$$

где дискриминант второго уравнения равен

$$Dis_2 = -2t_1 - A_1 + \frac{2B_1}{\sqrt{2t_1 - A_1}}$$

и, соответственно,

$$\rho_0 = y_0 - \frac{A}{4} = y_0 + \frac{1}{2}.$$

4. Анализ fork-join СМО с $K > 2$ подсистемами типа $M|M|1$.

Формула Нельсона–Тантави

Выведем уравнение для определения оптимального значения коэффициента загрузки системы в общем случае, когда $K > 2$. Для математического ожидания времени отклика fork-join системы приближенная формула Нельсона–Тантави, которая считается одной из наиболее точных среди известных, имеет вид [1]

$$(12) \quad E[R_K] \approx \left[\frac{H_K}{H_2} + \frac{4}{11} \left(1 - \frac{H_K}{H_2} \right) \rho \right] \frac{12 - \rho}{8} \frac{1}{\mu - \lambda},$$

где $H_K = \sum_{i=0}^K 1/i$ – это частичная сумма гармонического ряда.

Будем решать задачу для приближения Нельсона–Тантави в предположении, что формула (12) является точной.

Введем следующие обозначения:

$$H = \frac{H_K}{H_2}, \quad M = \frac{4}{11} \left(1 - \frac{H_K}{H_2} \right) = \frac{4}{11}(1 - H).$$

Тогда

$$E[R_K] = \frac{1}{\lambda} (H + M\rho) \frac{12 - \rho}{8} \frac{\rho}{1 - \rho},$$

следовательно,

$$f(\rho) = (H + M\rho) \frac{12 - \rho}{8} \frac{\rho}{1 - \rho},$$

а для $f'(\rho)$ после преобразований получаем

$$(13) \quad f'(\rho) = \frac{1}{8(1 - \rho)^2} (2M\rho^3 + (H - 15M)\rho^2 + (24M - 2H)\rho + 12H).$$

Затем подставляем полученное выражение в (2)

$$\frac{\rho^2}{8(1 - \rho)^2} (2M\rho^3 + (H - 15M)\rho^2 + (24M - 2H)\rho + 12H) = c_1.$$

Также для удобства вводим обозначение $c_2 = 8c_1$ и получаем уравнение пятой степени, которое после преобразований с учетом того, что $M = 4(1 - H)/11$, сводится к виду

$$(14) \quad \begin{aligned} &8(H - 1)\rho^5 + (60 - 71H)\rho^4 + (118H - 96)\rho^3 + \\ &+ 11(c_2 - 12H)\rho^2 - 22c_2\rho + 11c_2 = 0. \end{aligned}$$

Полученное уравнение (14) можно решить численно и определить оптимальное значение ρ_0 и, соответственно, искомое значение μ_0 .

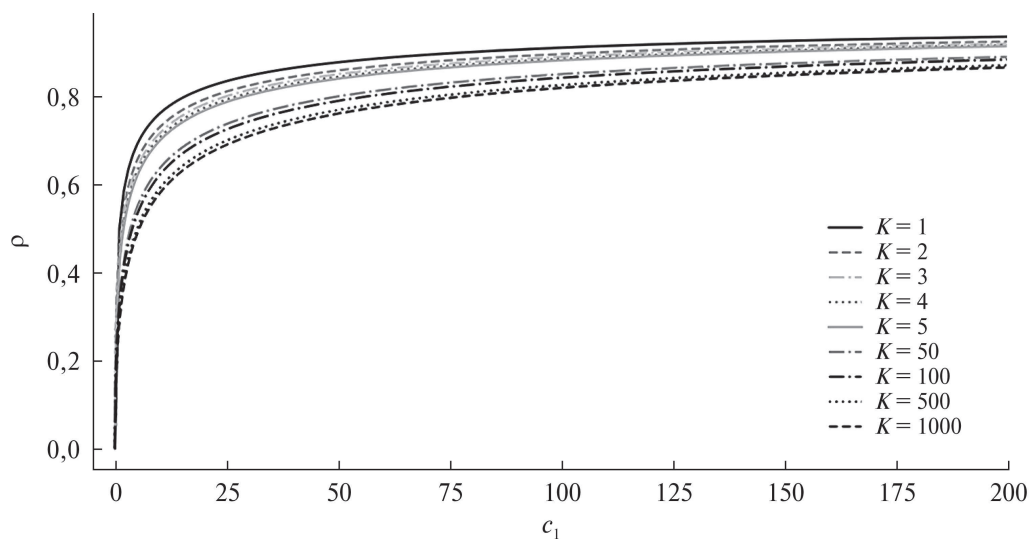


Рис. 1. График зависимости значения оптимального уровня загрузки системы ρ (решение уравнения (14)) от параметра c_1 для различного числа подсистем K .

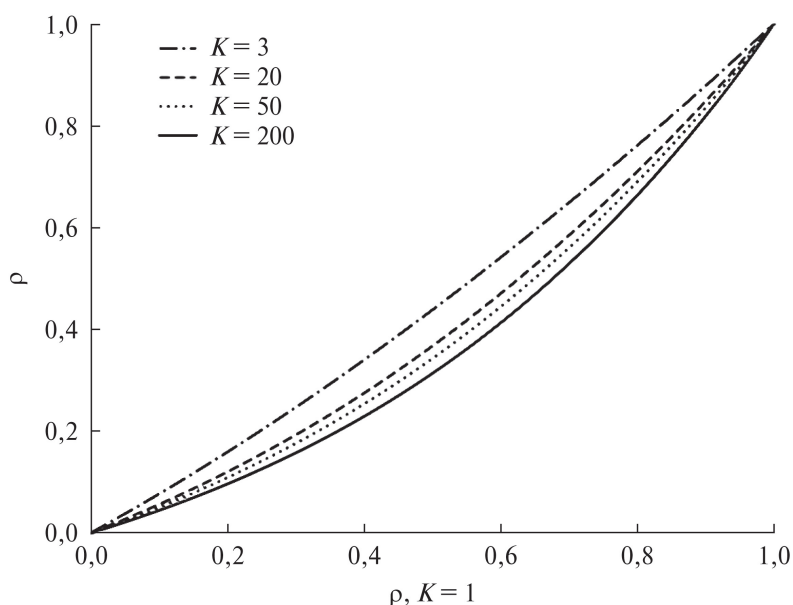


Рис. 2. График зависимости оптимального значения загрузки системы ρ в зависимости от оптимального значения загрузки ρ при $K = 1$.

На рис. 1 представлены графики зависимости поведения оптимального значения коэффициента загрузки $\rho = \rho_0$, являющегося решением уравнения (14), от значения параметра c_1 для различного числа подсистем K fork-join СМО. На начальном этапе наблюдается довольно стремительный рост требуемого уровня загрузки с увеличением цены единицы ресурса и, соответственно, производительности системы в целом. Причем даже для числа

подсистем $K = 1000$, т.е. иными словами, при условии разделения задачи и обработки ее подзадач на довольно большом количестве устройств, уже при $c_1 > 5,5$ необходимый уровень загрузки будет $\rho > 0,5$. Одновременно с этим при дальнейшем росте параметра c_1 наблюдается довольно медленный рост требуемой загрузки, например, при $c_1 \approx 158$, что почти в 29 раз больше $c_1 = 5,5$, будет значение $\rho_0 = 0,85$, т.е. все еще не превышает 90%. Кроме того, исходя из вида графиков, наблюдается эффект того, что с ростом K оптимальный уровень загрузки на систему снижается, что было ожидаемо и вполне естественно.

На рис. 2 представлен график зависимости поведения оптимального значения коэффициента загрузки системы от оптимального значения ρ при $K = 1$ согласно (3). График позволяет сравнить уровень оптимальной загрузки для различных значений $K \geq 2$ с уровнем оптимальной загрузки в случае $K = 1$. Как видно, с увеличением числа подсистем уровень требуемой загрузки для оптимальной работы системы падает, т.е. линия все сильнее прогибается под прямой $\rho = \rho_{K=1}$ и становится все более выпуклой (ниже любой хорды, соединяющей любые две точки на графике, выбранные на рассматриваемом интервале).

5. Анализ fork-join СМО с $K > 2$ подсистемами типа $M|M|1$. Обобщение формулы Нельсона–Тантави

Рассмотрим обобщение формулы Нельсона–Тантави из [10], в которой было показано, что уточненная формула дает лучшее приближение для среднего времени отклика. Улучшение достигается за счет некоторой поправки к выражению из (12), которое теперь обозначим через $E[R_K]_{NT}$. Итак, аппроксимация имеет вид

$$(15) \quad E[R_K] = \frac{\rho}{\mu - \lambda} \left(\frac{H_K}{H_2} - 1 \right) \left(Q_1 - Q_2 \left(\frac{H_K}{H_2} - 1 \right) + Q_3 \rho \right) + E[R_K]_{NT},$$

где

$$Q_1 \approx 0,087197, \quad Q_2 \approx 0,070236, \quad Q_3 \approx 0,09638.$$

Определим выражение для $f(\rho)$ в данном случае, для этого вынесем $1/\lambda$ за скобки

$$E[R_K] = \frac{1}{\lambda} \left[-\frac{\rho^2}{1 - \rho} \left(1 - \frac{H_K}{H_2} \right) \left(Q_1 + Q_2 \left(1 - \frac{H_K}{H_2} \right) + Q_3 \rho \right) + \lambda E[R_K]_{NT} \right],$$

в итоге получим

$$f(\rho) = -\frac{\rho^2}{1 - \rho} \left(1 - \frac{H_K}{H_2} \right) \left(Q_1 + Q_2 \left(1 - \frac{H_K}{H_2} \right) + Q_3 \rho \right) + \lambda E[R_K]_{NT},$$

где $\lambda E[R_K]_{NT}$ было рассчитано ранее и имеет вид

$$\lambda E[R_K]_{NT} = f_2(\rho) = (H + M\rho) \frac{12 - \rho}{8} \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

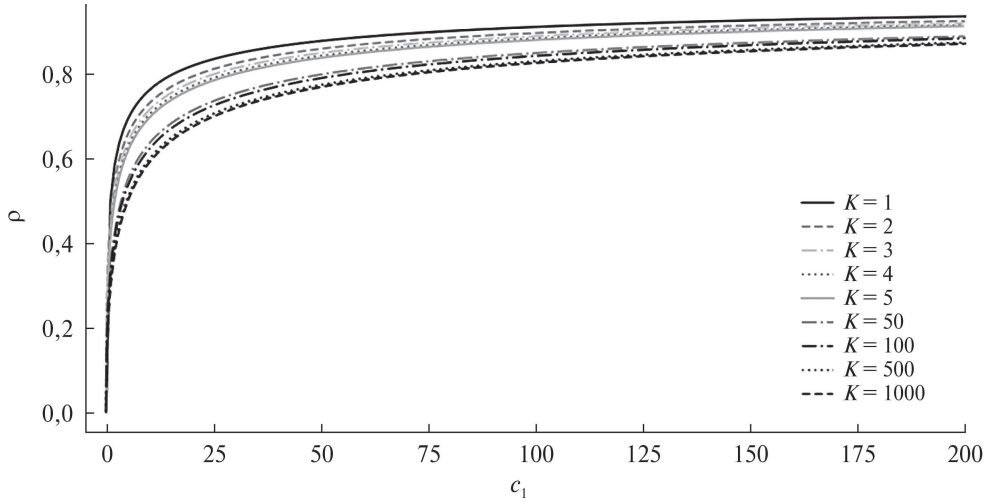


Рис. 3. График зависимости значения оптимального уровня загрузки системы ρ (решение уравнения (16)) от параметра c_1 для различного числа подсистем K .

Таким образом, с учетом предложенной ранее замены $H = H_K/H_2$ имеем

$$f(\rho) = -\frac{\rho^2}{1-\rho}(1-H)(Q_1 + (1-H)Q_2 + Q_3\rho) + f_2(\rho) = f_1(\rho) + f_2(\rho).$$

Далее берем производную от полученного выражения

$$f'(\rho) = f'_1(\rho) + f'_2(\rho),$$

где

$$f'_1(\rho) = \frac{\rho(1-H)}{(1-\rho)^2} \left(2Q_3\rho^2 - \rho(3Q_3 - (1-H)Q_2 - Q_1) - (2Q_1 + 2(1-H)Q_2) \right),$$

$$f'_2(\rho) = \frac{1}{8(1-\rho)^2} \left(2M\rho^3 + (H - 15M)\rho^2 + (24M - 2H)\rho + 12H \right).$$

Соответственно, после подстановки полученных выражений в (2) получаем, что

$$(16) \quad c_1 = \rho^2 f'(\rho) = \rho^2 (f'_1(\rho) + f'_2(\rho)).$$

Уравнение (16), как и в случае с формулой Нельсона–Тантави из предыдущего раздела, является уравнением пятой степени, которое может быть решено численно, после чего будет найдено оптимальное значение μ_0 .

На рис. 3 представлены графики оптимального значения загрузки $\rho = \rho_0$, являющегося решением (16). Поведение графиков в целом аналогично случаю формулы Нельсона–Тантави (12). Чтобы более детально проанализировать разницу между полученными результатами, проведем сравнение поведения оптимального решения для частных случаев числа подсистем $K = 20$ и $K = 200$.

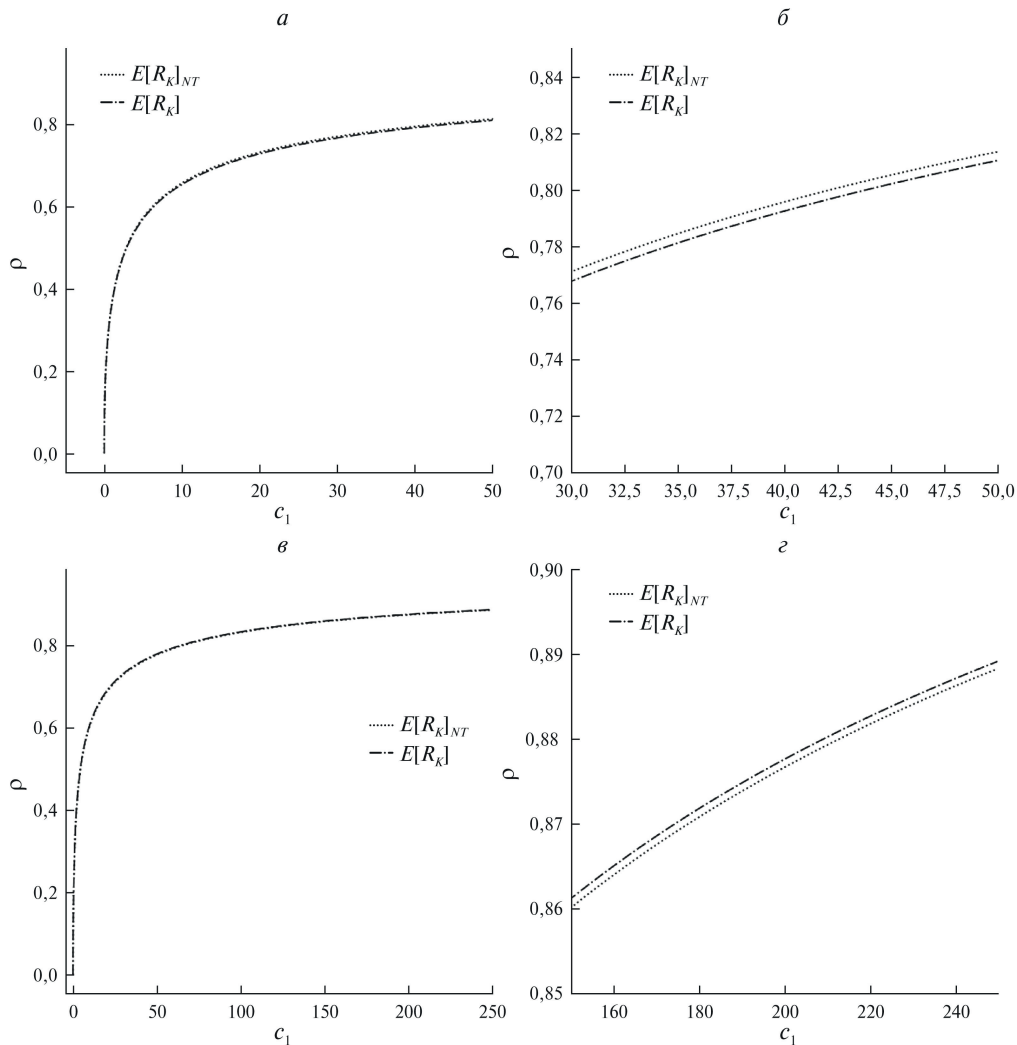


Рис. 4. Графики оптимального значения загрузки $\rho = \rho_0$, являющегося решением уравнения (16) при $K = 20$ (рис. 4, *a, б*) и $K = 200$ (рис. 4, *в, г*).

На рис. 4 представлены графики зависимости значения оптимального уровня загрузки системы $\rho = \rho_0$ от параметра c_1 для случаев формулы Нельсона–Тантави для среднего времени отклика системы $E[R_K]_{NT}$ из (12) и уравнения (14), а также обобщения формулы Нельсона–Тантави для среднего времени отклика системы $E[R_K]$ из (15) и уравнения (16) при $K = 20$ (рис. 4, *a, б*) и $K = 200$ (рис. 4, *в, г*), в том числе и в масштабе (рис. 4, *б, г*).

На рисунках 4, *a, б* для $K = 20$ видно, что для случая формулы Нельсона–Тантави (12) для оценки среднего времени отклика системы оптимальное значение загрузки ρ превышает оптимальное значение, рассчитанное по обобщенной формуле (15). Однако для графиков 4, *в, г* при $K = 200$ можно наблюдать обратную ситуацию.

Для того чтобы обстоятельно разобраться в поведении оптимальных решений в обоих случаях, далее проанализируем их асимптотику.

6. Асимптотика поведения оптимального решения

Рассмотрим уравнение (2) и определим поведение его решения при стремлении $c_1 \rightarrow 0$ ($\rho \rightarrow 0$) и $c_1 \rightarrow +\infty$ ($\rho \rightarrow 1$) в общем виде. Для начала проанализируем случай $\rho \rightarrow 0$, соответственно $c_1 \rightarrow 0$. Тогда имеем

$$\rho^2 f'(\rho) \sim \rho^2 f'(0),$$

далее подставляем полученное в (2), т.е. $\rho^2 f'(\rho) = c_1$, откуда следует, что

$$(17) \quad \rho \sim \sqrt{\frac{c_1}{f'(0)}}, \quad c_1 \rightarrow 0.$$

Теперь проанализируем случай $\rho \rightarrow 1$, соответственно $c_1 \rightarrow +\infty$. В общем случае имеем

$$\rho^2 f'(\rho) \sim f'(\rho).$$

Таким образом, если существует такое число $L \in (0, +\infty)$, что

$$L = \lim_{\rho \rightarrow 1} (1 - \rho)^2 f'(\rho),$$

то

$$f'(\rho) \sim \frac{L}{(1 - \rho)^2},$$

поэтому при подстановке полученного выражения для $f'(\rho)$ с L в (2) и учетом асимптотики имеем следующее:

$$\begin{aligned} \rho^2 f'(\rho) &= c_1, \\ f'(\rho) &\sim c_1, \quad \rho \rightarrow 1, \quad c_1 \rightarrow +\infty, \\ (1 - \rho)^2 &\sim \frac{L}{c_1}, \quad \rho \rightarrow 1, \quad c_1 \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

поэтому

$$(18) \quad \rho = 1 - \sqrt{\frac{L}{c_1}}(1 + o(1)), \quad c_1 \rightarrow \infty.$$

Далее предметно рассмотрим имеющиеся модели, а именно случаи формулы Нельсона–Тантави и его обобщение, и определим конкретные выражения для полученных эквивалентностей из общего случая.

Для формулы Нельсона–Тантави при $K \geq 2$ с учетом выражения (13) справедливо

$$f'(0) = \frac{3}{2} \frac{H_K}{H_2},$$

поэтому при подстановке в (17) для $c_1 \rightarrow 0$ ($\rho \rightarrow 0$) получим

$$(19) \quad \rho \sim \sqrt{\frac{2}{3} \frac{H_2}{H_K}} c_1, \quad c_1 \rightarrow 0.$$

Теперь определим асимптотику решения при $c_1 \rightarrow +\infty$ ($\rho \rightarrow 1$). Для этого найдем значение L :

$$(20) \quad \begin{aligned} L &= \lim_{\rho \rightarrow 1} (1 - \rho)^2 f'(\rho) = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{2M\rho^3 + (H - 15M)\rho^2 + (24M - 2H)\rho + 12H}{8} = \frac{7}{8} \frac{H_K}{H_2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\rho = 1 - \sqrt{\frac{1}{c_1} \left(\frac{7}{8} \frac{H_K}{H_2} + \frac{1}{2} \right)} (1 + o(1)).$$

Теперь проанализируем обобщение формулы Нельсона–Тантави. Аналогично рассмотрим уравнение (16) и определим поведение его решения при стремлении $c_1 \rightarrow 0$ ($\rho \rightarrow 0$) и $c_1 \rightarrow \infty$ ($\rho \rightarrow 0$). Проанализируем случай $\rho \rightarrow 0$, соответственно, $c_1 \rightarrow 0$.

Для формулы (15) при $K \geq 2$ справедливо

$$f'(0) = f'_1(0) + f'_2(0) = \frac{3}{2} \frac{H_K}{H_2},$$

поэтому, как и ранее,

$$\rho \sim \sqrt{\frac{2}{3} \frac{H_2}{H_K}} c_1, \quad c_1 \rightarrow 0.$$

Теперь проанализируем случай $\rho \rightarrow 1$ ($c_1 \rightarrow \infty$). Для (15) при $K \geq 2$ получим

$$L = \lim_{\rho \rightarrow 1} (1 - \rho)^2 f'(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 1} (1 - \rho)^2 (f'_1(\rho) + f'_2(\rho)) = L_1 + L_2.$$

Фактически значение L_2 было вычислено ранее и соответствует значению L из (20)

$$L_2 = \frac{7}{8} \frac{H_K}{H_2} + \frac{1}{2}.$$

Теперь рассчитаем L_1 :

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{\rho \rightarrow 1} (1 - \rho)^2 f'_1(\rho) = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 1} \rho(1 - H) \left(2Q_3\rho^2 - \rho(3Q_3 - (1 - H)Q_2 - Q_1) - (2Q_1 + 2(1 - H)Q_2) \right) = \\ &= (H - 1)(Q_1 - (H - 1)Q_2 + Q_3) = \left(\frac{H_K}{H_2} - 1 \right) \left[Q_1 - \left(\frac{H_K}{H_2} - 1 \right) Q_2 + Q_3 \right] \approx \\ &\approx \left(\frac{H_K}{H_2} - 1 \right) \left[0,183577 - 0,070236 \left(\frac{H_K}{H_2} - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

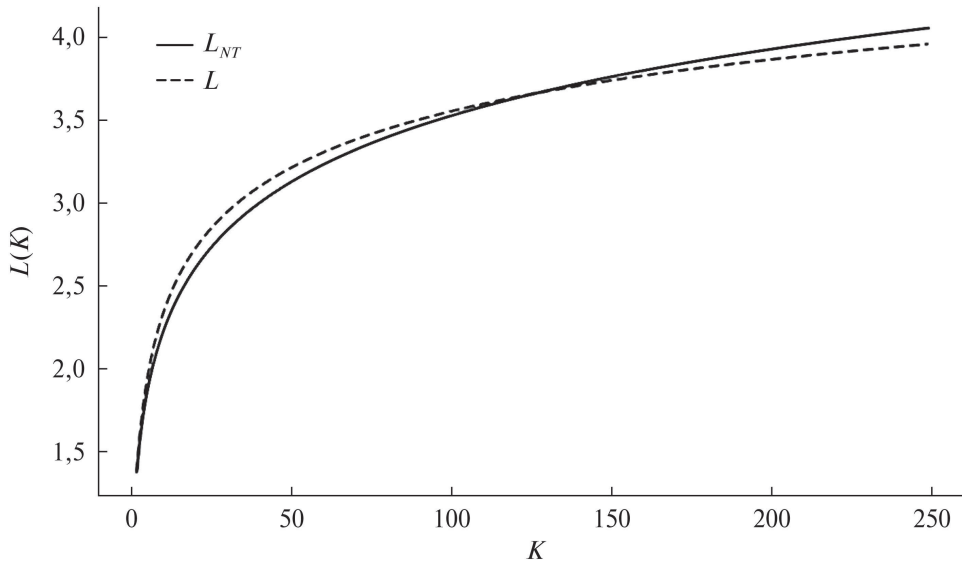


Рис. 5. График зависимости значения L от K для случая формулы Нельсона–Тантави (12) и случая обобщающей формулы (15).

Таким образом, получаем, что

$$\rho = 1 - \sqrt{\frac{L}{c_1}}(1 + o(1)),$$

где

$$(21) \quad L = \left(\frac{H_K}{H_2} - 1 \right) \left[Q_1 - \left(\frac{H_K}{H_2} - 1 \right) Q_2 + Q_3 \right] + \frac{7}{8} \frac{H_K}{H_2} + \frac{1}{2}.$$

На рис. 5 представлен график зависимости значения L от числа подсистем для случая формулы Нельсона–Тантави (20) и случая обобщающей формулы (21). После значения $K = 126$ происходит “перелом” графиков, и если сперва значение L_{NT} превышало значение L для обобщающей формулы, то для значений $K \geq 127$ ситуация поменялась с точностью до наоборот, что в том числе и подтверждается графиками, представленными ранее, для оптимального значения загрузки в зависимости от параметра c_1 на рис. 4 для $K = 20$ и $K = 200$.

Что касается практического применения полученных асимптотических результатов, то оба случая, как высокой ($\rho \rightarrow 1$), так и низкой ($\rho \rightarrow 0$) загрузки, могут представлять интерес. Так, например, в системах с интенсивным использованием данных параллельные и распределенные вычисления получили широкое распространения как один из основных способов повышения производительности при обработке больших данных. Поэтому владельцы подобных высокопроизводительных вычислительных сред заинтересованы в получении прогнозов поведения системы при пиковых нагрузках, ровно как и в обратных

ситуациях, когда платформы наименее всего востребованы, с целью выработки стратегий эффективной работы систем. В этом контексте, асимптотические формулы могут подсказать, когда (при каких ценах на единицу скорости обслуживания) подобные режимы (высокой и низкой загрузки) оказываются оптимальными, т.е. фактически желательными при функционировании системы, в смысле стоимости, а когда нет.

7. Заключение

В работе исследуется система с разделением и параллельным обслуживанием с точки зрения управления оптимальной стоимостью ее функционирования в зависимости от цены единицы ресурса, влияющего на производительность системы и, соответственно, время ее отклика. Построена математическая модель, учитывающая оптимальное соотношение стоимости и эффективности работы системы. Проведен анализ на базе полученных ранее аппроксимаций для среднего времени отклика, как одной из наиболее известных и точных, так и ее обобщения, полученного авторами данной статьи. Для частного случая системы, т.е. когда число подсистем равно двум, удается вывести в явном виде выражения для оптимальной загрузки системы. Для большего числа подсистем представлены уравнения пятой степени, численное решение которых позволяет определить искомые значения загрузки на систему и, соответственно, интенсивности обслуживания, которая фактически характеризует “мощность” необходимых ресурсов. Также проанализировано асимптотическое поведение системы.

Поскольку используемые здесь приближения среднего времени отклика являются довольно точными, с их помощью также хорошо описывается суммарная стоимость затрат, поэтому при расчетных значениях оптимальной загрузки (и, соответственно, оптимальной скорости обслуживания) стоимость будет близка к оптимальной. Поэтому расчетные значения загрузки можно рекомендовать для использования в качестве оценок их фактических значений для fork-join систем. Кроме того, если есть оценка оптимальной загрузки при одном числе подсистем, ее можно пересчитать в оценку для другого числа подсистем (см. рис. 2). Поскольку в общем случае задача решается только численно, то в случаях высоких и низких цен на единицу скорости обслуживания можно рекомендовать использовать асимптотические формулы, которые дают более простые, но при этом более грубые оценки оптимальной загрузки.

Предложенная в статье математическая модель для управления оптимальным функционированием системы будет справедлива и в более общих случаях fork-join СМО, а именно с отличным от пуассоновского входящим потоком и/или отличным от экспоненциального распределением времени обслуживания на приборах, как в [9]. При этом, разумеется, для вывода конкретных соотношений или уравнений необходимы аналитические приближения для величины среднего времени отклика системы. Кроме того, можно рассмотреть модели с нелинейной зависимостью стоимости затрат на обслуживание

от скорости обслуживания (например, степенной зависимостью, как упомянуто в [20, §1.1]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nelson R., Tantawi A.N.* Approximate analysis of fork/join synchronization in parallel queues // IEEE Transact. Comput. 1988. V. 37. P. 739–743.
2. *Varma S., Makowski A.M.* Interpolation approximations for symmetric fork-join queues // Performance Evaluat. 1994. V. 20. P. 245–265.
3. *Varki E., Merchant A., Chen H.* The M/M/1 fork-join queue with variable sub-tasks // Unpublished. Available online.
<https://www.cs.unh.edu/~varki/publication/2002-nov-open.pdf>
4. *Thomasian A.* Analysis of fork/join and related queueing systems // ACM Computing Surveys (CSUR). 2014. V. 47. No. 2. P. 1–71.
5. *Qiu Z., Pérez J. F., Harrison P. G.* Beyond the mean in fork-join queues: Efficient approximation for response-time tails // Performance Evaluat. 2015. V. 91. P. 99–116.
6. *Nguyen M., Alesawi S., Li N., Che H., Jiang H.* ForkTail: A black-box fork-join tail latency prediction model for user-facing datacenter workloads // Proc. 27th Int. Symp. High-Perform. Parallel Distrib. Comput. 2018. P. 206–217.
7. *Nguyen M., Alesawi S., Li N., Che H., Jiang H.* A Black-Box Fork-Join Latency Prediction Model for Data-Intensive Applications // IEEE Transact. Parall. Distrib. Syst. 2020. V. 31. No. 9. P. 1983–2000.
8. *Enganti P., Rosenkrantz T., Sun L., Wang Z., Che H., Jiang H.* ForkMV: Mean-and-Variance Estimation of Fork-Join Queueing Networks for Datacenter Applications // Proc. IEEE International Conference on Networking, Architecture and Storage (NAS). 2022. P. 1–8.
9. *Gorbunova A.V., Lebedev A.V.* Nonlinear Approximation of Characteristics of a Fork-Join Queueing System with Pareto Service as a Model of Parallel Structure of Data Processing // Math. Comput. Simulat. 2023. V. 214. P. 409–428.
10. *Gorbunova A.V., Lebedev A.V.* On Estimating the Characteristics of a Fork-Join Queueing System with Poisson Input and Exponential Service Times // Advanc. Syst. Sci. Appl. 2023. V. 23. P. 99–114.
11. *Gorbunova A.V., Lebedev A.V.* Correlations of the Sojourn Times of Subtasks in Fork-Join Queueing Systems with $M|M|1$ -type Subsystems // Advanc. Syst. Sci. Appl. 2024. V. 24. No. 2. P. 1–18.
12. *Gorbunova A.V., Lebedev A.V.* Copulas and Quantiles in Fork-Join Queueing Systems // Advanc. Syst. Sci. Appl. 2024. V. 24. No. 1. P. 1–19.
13. *Ивановская И.А., Моисеева С.П.* Исследование математической модели параллельного обслуживания заявок смешанного типа // Изв. Том. политехн. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. Т. 317. № 5. С. 32–34.
14. *Жидкова Л.А., Моисеева С.П.* Исследование системы параллельного обслуживания кратных заявок простейшего потока // Вест. Том. политехн. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. Т. 17. № 4. С. 49–54.

15. *Моисеева С.П., Захорольная И.А.* Математическая модель параллельного обслуживания кратных заявок с повторными обращениями // *Автометрия*. 2011. Т. 47. № 6. С. 51–58.
16. *Моисеева С.П., Панкратова Е.В., Убонова Е.Г.* Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания с разнотипным обслуживанием и входящим потоком марковского восстановления // *Вест. Том. политехн. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2016. Т. 35. № 2. С. 46–53.
17. *Осипов О.А.* Система обслуживания с делением и слиянием требований, в которой требование занимает все свободные обслуживающие приборы // *Вест. Росс. ун-та дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика*. 2018. Т. 26. № 1. С. 28–38.
18. *Хабаров Р.С., Лохвицкий В.А., Дудкин А.С.* Аппроксимация времени пребывания для системы массового обслуживания fork-join на основе инвариантов отношения // *Интеллектуальные технологии на транспорте*. 2020. Т. 22. № 2. С. 46–50.
19. *Редругина Н.М.* Метод вычисления временных характеристик обслуживания в сервисных платформах инфокоммуникационных транзакционных услуг с параллельной обработкой запросов // *Тр. уч. заведений связи*. 2023. Т. 9. № 3. С. 82–90.
20. *Stidham S.* Optimal design of queueing systems. Boca Raton: CRC Press/Taylor & Francis, 2009. 384 p.
21. *Spiegel M.R., Lipschutz, S. Liu J.* Mathematical Handbook of Formulas and Tables, McGraw Hill Professional, 3rd (Third) edition // *Schaum's Outline Series*. 2008. 312 p.
22. *Курош А.Г.* Алгебраические уравнения произвольных степеней (Популярные лекции по математике; вып. 7). Изд. 2-е. М. : Наука, 1975. 32 с.
23. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры: Учебник. Изд. 17-е. СПб.: Лань, 2008. 432 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галаевым.

Поступила в редакцию 07.10.2024

После доработки 16.10.2024

Принята к публикации 18.10.2024

Управление в социально-экономических системах

© 2024 г. А.Ю. ГОЛУБИН, канд. физ.-мат. наук (agolubin@hse.ru)
(Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва;
ФГБУН Центр информационных технологий в проектировании РАН,
Одинцово, Московская обл.),
В.Н. ГРИДИН, д-р техн. наук (info@ditc.ras.ru),
Д.С. СМИРНОВ, канд. экон. наук (info@ditc.ras.ru)
(ФГБУН Центр информационных технологий в проектировании РАН,
Одинцово, Московская обл.),
С.А. БУЛГАКОВ канд. физ.-мат. наук (s.a.bulgakov@gmail.com)
(Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва)

МЕТОД ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ АКТИВАМИ С ПОШАГОВЫМИ CODITIONAL VALUE AT RISK (CVAR) ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПРИ ИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРАХ ВЕКТОРОВ ДОХОДНОСТЕЙ¹

Предметом исследования является многошаговая задача инвестирования с Conditional Value at Risk (CVaR) ограничениями на приращения процесса риска, с заданным порогом капитала для банкротства, разрешением коротких продаж и нормальной моделью суммарного дохода. Целью является нахождение метода оптимального управления активами для целевого функционала равного среднему значению финального капитала инвестора. В результате исследования показано, что оптимальный инвестиционный портфель на каждом шаге не зависит от текущего значения капитала инвестора, а зависит только от номера шага инвестирования. Доказано, что многошаговая задача сводится к конечному числу одношаговых задач оптимизации, которые сводятся к задачам конического программирования. Для одношаговой задачи приведены условия непустоты множества допустимых портфелей и применена теорема Куна–Таккера об условиях оптимальности портфеля. Изучен случай, когда доходности активов имеют не нормальные распределения, а эллиптические распределения. Представлен иллюстративный численный пример нахождения оптимальной инвестиционной стратегии, основанный на открытых данных о котировках акций трех компаний на фондовой бирже.

Ключевые слова: метод нахождения оптимального инвестирования, мера риска, вероятностное ограничение CVaR, банкротство.

DOI: 10.31857/S0005231024120053, **EDN:** XTZBUR

¹ Исследование выполнено в рамках темы № FFNR-2024-0003.

1. Введение

Впервые формализация понятия «инвестиционный портфель» и способы его формирования были предложены Марковицем в 1952 г. в [1], где описана математическая модель формирования оптимального инвестиционного портфеля. В качестве меры риска, которая позволяет получить оценку финансового риска для портфеля активов, Марковиц использовал дисперсию доходности. После использования дисперсии в качестве меры риска, многие ученые исследовали альтернативные меры риска [2, 3]. Одной из таких мер риска стала стоимостная мера риска Value at Risk (VaR), которая стала широко применяться с 1980-х гг. VaR – это оценка величины, которую не превысят ожидаемые потери с заданной вероятностью, выраженная в денежном эквиваленте. В книге [4] квантильные, т.е. VaR ограничения, были использованы в постановках и решениях оптимизационных задач. В [5] сравнивается дисперсия как мера риска, которую использовал Марковиц в своих работах, с мерой риска VaR. Авторы приходят к выводу, что в общем случае мера риска VaR имеет ряд преимуществ, но не свободна от недостатков, например с помощью VaR невозможно оценить размер убытков вне доверительного уровня. Некоторые исследователи [6] указали на то, что VaR не является когерентной мерой риска (см. определение, например, в [6]), поскольку она не удовлетворяет свойству субаддитивности, за исключением случая нормального распределения риска. С другой стороны, в [5, 7] отмечалось, что мера риска VaR широко используется регуляторами в финансовой индустрии.

Введенная в литературе в последние декады мера риска CVaR уже является когерентной мерой риска, в [6] авторы сравнили меру риска VaR и CVaR и пришли к выводу о том, что в случае отсутствия в инвестиционном портфеле безрискового актива мера риска CVaR является более эффективной, чем мера риска VaR. Помимо этого, авторы отмечают, что CVaR учитывает выбросы, что критически важно для оценки рискованных и волатильных активов. В [8] авторы приходят к выводу, что несмотря на преимущество меры риска CVaR над мерой риска VaR в общем случае, имеет смысл учитывать обе этих меры для оценки риска инвестиционного портфеля.

В [9] была исследована многошаговая задача инвестирования с VaR ограничениями, но без возможности банкротства. С другой стороны, (см., например, [10]) банкротство, т.е. понижение капитала инвестора ниже заданного значения, когда на оставшемся временном интервале дальнейшие сделки по инвестированию запрещены, играет существенную роль в оценке финансовой стратегии. Оптимальная инвестиционная стратегия с пошаговыми квантильными (т.е. VaR) ограничениями была найдена в [11], где предусмотрена возможность банкротства.

В представленной работе изучена многошаговая задача инвестирования с возможностью банкротства, где – в отличие от [11] – предусмотрены по-

шаговые CVaR ограничения; преимущества такого подхода над введением VaR ограничений описаны выше. Показано, что рассматриваемая многошаговая задача дележа риска имеет решение, в котором каждый оптимальный портфель на шаге t зависит только от номера шага t и не зависит от значения текущего капитала инвестора ($x > 0$). Доказано, что исходная многошаговая задача сводится к решению конечного числа одношаговых задач конусной оптимизации, где целевые функции определяются рекуррентной формулой, что позволяет относительно просто найти оптимальную инвестиционную стратегию. Заметим, что в отличие от [12, 13], где риск банкротства на каждом шаге лишь оценивался с помощью неравенства Чебышева, здесь авторы исследуют задачу, решая уравнения динамического программирования, в которых предусмотрена возможность банкротства.

В разделе 2 рассматривается одношаговая задача с CVaR ограничением. Приведены необходимые и достаточные условия непустоты множества допустимых портфелей и выполнения условия регулярности Слейтера, а также использована теорема Куна–Таккера для определения решения этой задачи конусной оптимизации. Раздел 3 посвящен исследованию оптимизации инвестиционной стратегии в многошаговой задаче с CVaR ограничениями. Показано, что каждая компонента оптимального портфеля зависит только от номера шага инвестирования и не зависит от текущего капитала инвестора, найдены необходимые условия оптимальности стратегии. Модель, отличная от ранее рассмотренной нормальной модели, исследована в разделе 4, где изучено обобщение нормальной модели в случае эллиптических распределений. В разделе 5 решен численный пример, иллюстрирующий на основе реальных данных нахождение оптимальной стратегии для инвестиций в три крупные компании. Раздел 6 содержит заключительные замечания.

2. Одношаговая задача построения оптимального портфеля

Изучим сначала одношаговую модель выбора оптимального инвестиционного портфеля (см., например, [6, 11]), где случайный вектор доходностей активов $R = (R_0, \dots, R_n)$, и R_i представляет изменение стоимости i -го актива от текущей стоимости в процентах. В терминах цены акций это означает, что $R_i = p_1/p_0$, где p_0 – текущая цена акции i -го актива (детерминированная величина), p_1 – цена акции i -го актива при следующей котировке (случайная величина). Пусть $R_0 = m_0$ почти наверное (п.н), т.е. это – безрисковый актив. Пусть $\bar{a} \in R^{n+1}$ – инвестиционный портфель, где a_i – доля в процентах от начального капитала $x_0 > 0$, инвестированная в i -й актив. Бюджетное ограничение $\sum_{i=0}^n a_i = 1$ означает самофинансирование инвестора (нет притока средств извне, и имеющиеся средства инвестора вкладываются только в активы этого рынка) и, вместе с тем, разрешение «коротких продаж», т.е. воз-

возможность взятия займа некоторых активов по текущей стоимости с целью вложения этих денег в другие активы. Максимизируемой функцией является математическое ожидание финального дохода

$$EX_{\bar{a}} = Ex_0 \sum_{i=0}^n a_i R_i = x_0 \sum_{i=0}^n a_i m_i,$$

где $m_i = ER_i$ и $x_0 > 0$ – начальный капитал.

Для формулировки CVaR меры риска (см. [6]) в рассматриваемой задаче сначала понадобится определение меры риска Value at Risk (VaR) для случайного дохода Z :

$$\text{VaR}_{\alpha}(Z) = -z_{\alpha} = -\inf \{t : P(Z < t) \geq \alpha\},$$

где $\alpha \in (0, 1/2)$ – заданный уровень значимости. Conditional Value at Risk (CVaR) – мера риска, имеющая смысл ожидаемых потерь в случае превышения условной меры риска VaR с заданным уровнем значимости α :

$$\text{CVaR}_{\alpha}(Z) = E\{Z | Z \geq \text{VaR}_{\alpha}(Z)\}.$$

Обозначим через $f_Z(z)$ плотность распределения стандартизованного дохода $(Z - EZ)/\sqrt{DZ}$. Тогда [6]

$$\text{CVaR}_{\alpha}(Z) = -EZ + \sqrt{DZ}k,$$

где

$$k = \frac{-\int_{-\infty}^{-z_{\alpha}} z f_Z(z) dz}{\alpha}.$$

Предполагая нормальную аппроксимацию финального дохода инвестора $X_a = x_0 \sum_{i=0}^n a_i R_i$, широко используемую в портфельной теории (см., например, [6, 9]), получим выражение для параметра k (см. выше его определение). Поскольку $\phi'(x) = -x\phi(x)$, где $\phi(x)$ – плотность стандартного нормального распределения, то легко видеть, что $k = \phi(\Phi^{-1}(\alpha))/\alpha$. Тогда

$$\text{CVaR}_{\alpha}(X_a) = -EX_a + \sqrt{DX_a} \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha},$$

где $\Phi(x)$ – стандартная нормальная функция распределения, α – заданный уровень значимости.

Введем ограничение CVaR для рассматриваемой задачи:

$$\text{CVaR}_{\alpha}(X_a) \equiv -(x_0 \langle a, \Delta m \rangle + x_0 m_0) + x_0 \sqrt{aCa'} \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha} \leq dx_0.$$

Здесь через Δm обозначен вектор $(m_1 - m_0, \dots, m_n - m_0)$, $\langle a, \Delta m \rangle$ – скалярное произведение $\sum_{i=1}^n a_i \Delta m_i$, d – доля в процентах от начального капитала $x_0 > 0$, C – ковариационная матрица $n \times n$ рискованных активов.

Суммируя все рассуждения выше, сформулируем одношаговую задачу оптимизации:

$$(1) \quad \begin{cases} EX_a \equiv \langle a, \Delta m \rangle + m_0 \rightarrow \max, \\ a \in D = \left\{ a \in R^n : \sqrt{aCa'} \leq \frac{\langle a, \Delta m \rangle + m_0 + d}{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))/\alpha} \right\}. \end{cases}$$

Ниже будем использовать следующие естественные предположения: $0 < m_0 < \min_{i=1, \dots, n} m_i$, матрица ковариаций рисков C положительно определена.

Далее в этом разделе приводим просто модификации утверждений, полученных ранее (см. [11, 14]) для VaR ограничения и на случай CVaR ограничения (см. (1)), которые затем будут использованы при решении многошаговой задачи.

По определению, конус второго порядка (см., например, [15]) есть $K = \{(a, t) \in R^{n+1} : \sqrt{aCa'} \leq t\}$. Известно, что такой конус регулярен, иными словами, он является выпуклым, замкнутым, $\text{Int}K \neq \emptyset$ и, если $x \in K$, $-x \in K$, то $x = 0$. Задачу (1) тогда можно переписать как задачу конусного программирования [15]

$$(2) \quad \max \langle a, \Delta m \rangle \text{ при ограничении } \left(a, \frac{\langle a, \Delta m \rangle + m_0 + d}{\frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha}} \right) \in K.$$

Для решения (2) понадобится описание конуса, двойственного к K . Согласно определению, двойственный конус равен $K^* = \{x \in R^{n+1} : \langle x, y \rangle \geq 0 \text{ для всех } y \in K\}$. В задаче (2) он определяется [3] как

Лемма 1. Двойственный конус равен

$$K^* = \{(u, v) \in R^{n+1} : \sqrt{uCu'} \leq v\}.$$

Ниже приведем условие, достаточное для выполнения условия Слейтера (см. определение, например, в [15]) в задаче (2). Обозначим через j индекс, при котором выражение $\sigma_i \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha} - \Delta m_i$ достигает своего минимума, $i = 1, \dots, n$, здесь $\sigma_i = \sqrt{DR_i}$ – стандартное отклонение.

Утверждение 1. Если

$$(3) \quad \sigma_j \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha} - \Delta m_j < 0,$$

то внутренняя часть $\text{Int}D \neq \emptyset$, т.е. условие Слейтера в задаче (1) и, следовательно, в задаче (2) выполнено.

Доказательство. Пусть a^j – инвестиционный портфель вида $(0, \dots, 0, a_j, 0, \dots, 0)$, где a_j находится на j -м месте, а все остальные компоненты инвестиционного портфеля – нули. Заметим, что в рассматриваемом случае разрешены короткие продажи, т.е. a_j может быть меньше нуля. CVaR ограничение

в одношаговой задаче (1) примет вид

$$|a_j| \sigma_j \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha} - a_j \Delta m_j \leq d + m_0.$$

Рассмотрим минимум левой части этого выражения:

$$\rho = \min_a \left\{ |a_j| \sigma_j \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha} - a_j \Delta m_j \right\}.$$

Утверждается, что

$$\rho = -\infty.$$

Действительно, рассмотрим случай $a_j \geq 0$. Левая часть CVaR ограничения переписывается следующим образом:

$$a_j \sigma_j \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha} - a_j \Delta m_j = a_j \left(\sigma_j \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha} - \Delta m_j \right).$$

Поскольку по предположению $\sigma_j \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha} - \Delta m_j < 0$, то

$$\min_{a_j} \left\{ a_j \left(\sigma_j \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha} - \Delta m_j \right) \right\} = -\infty.$$

Суммируя рассуждения выше, получаем: если $\sigma_j \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha} - \Delta m_j < 0$, то $IntD \neq \emptyset$. Утверждение 1 доказано.

Заметим, что из доказательства утверждения 1 очевидно следует (см. (3)) достаточное условие непустоты допустимого множества D , $\sigma_j \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha} - \Delta m_j \leq 0$.

Утверждение 2. Если условие (3) выполнено, то допустимый портфель a^ оптимален в задаче (2) тогда и только тогда, когда существует вектор $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu) \in K^*$ такой, что*

$$\Delta m \left(1 + \frac{\mu}{\frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha}} \right) + \lambda = 0$$

и

$$a^* \lambda' + \frac{\mu(\langle a^*, \Delta m \rangle + m_0 + d)}{\frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha}} = 0, \text{ где } \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Данное утверждение является очевидным следствием теоремы Куна–Таккера [15] для вогнутой задачи конусного программирования (2). Заметим, что без условия вогнутости целевой функции в (2), которая сейчас является линейной, теорема дает лишь необходимые условия оптимальности.

3. Многошаговая задача построения оптимального портфеля

В многошаговой задаче горизонт инвестирования разделен на T частей или моментов времени $0, 1, \dots, T$. Случайный вектор доходностей активов для момента времени t обозначается как $R^t = (R_0^t, \dots, R_n^t)$, где $R_0^t = m_0^t$ п.н. – доходность безрискового актива. Векторы R^t предполагаются независимыми, как и в работах по оптимизации инвестирования в многошаговых моделях с банкротством [7, 12]. Обозначим математическое ожидание доходности i -го актива через $m_i^t = ER_i^t$. Матрицы ковариаций доходностей рискованных активов C_t положительно определены на каждом шаге t .

Термин «банкротство инвестора» означает следующее. Если текущий капитал инвестора X_t опустится ниже порога $r = 0$, то инвестор не может совершать любые сделки с активами (покупать, продавать, брать в долг) и значение капитала X_t считается фиксированным от момента t до последнего шага. После применения нормальной аппроксимации для приращения в процентах капитала на интервале $[t, t + 1]$ получаем нормально распределенную случайную величину $Y_a^t := \sum_{i=1}^n a_i(R_i^t - m_0^t) + m_0^t$ с параметрами $\mu^t(a) = \langle a, \Delta m^t \rangle + m_0^t$ и $\sigma^t(a) = \sqrt{a C_t a^T}$. Тогда пошаговые CVaR ограничения (см. раздел 2) имеют вид

$$-X_t \langle a, \Delta m^t \rangle + X_t m_0^t + X_t \sqrt{a C_t a^T} \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha^t))}{\alpha^t} \leq d^t X_t$$

для каждого $X_t = x > 0$.

Здесь $\Delta m^t = (m_1^t - m_0^t, \dots, m_n^t - m_0^t)$, $d^t > 0$ – доля в процентах от текущего капитала, ограничивающая меру риска CVaR, $\alpha^t \in (0, 1)$ – уровень значимости, $t = 0, \dots, T - 1$. Инвестиционную стратегию будем обозначать как $A = (a^0, \dots, a^{T-1})$, напомним, что короткие продажи разрешены.

Тогда уравнение динамики капитала при выбранной инвестиционной стратегии будет

$$(4) \quad X_{t+1} = \begin{cases} X_t \left[\sum_{i=1}^n a_i^t (R_i^t - m_0^t) + m_0^t \right], & \text{при } X_t > 0, \\ X_t, & \text{при } X_t \leq 0, \end{cases}$$

$t = 0, \dots, T - 1; \quad X_0 = x_0, \text{ где } x_0 > 0.$

Предполагается, что цель инвестора – максимизация среднего значения финального капитала. Таким образом, рассматриваемая задача есть задача оптимального управления марковской цепью при наличии множества поглощающих состояний $\{x : x \leq 0\}$:

$$(5) \quad \begin{cases} J[A] \equiv E(X_T) \rightarrow \max, \quad A \in \mathbf{A} \text{ при ограничениях (4) и} \\ -(\langle a, \Delta m^t \rangle + m_0^t) + \sqrt{a C_t a^T} \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha^t))}{\alpha^t} \leq d^t, \end{cases}$$

где \mathbf{A} – множество всех инвестиционных стратегий, предсказуемых в смысле естественной фильтрации.

Определим функцию Беллмана как $V_t(x) = \max_A EX_T$ для управляемого процесса на интервале $[t, T]$ с начальным состоянием $X_t = x$. Тогда

$$V_T(x) = x;$$

$$V_{T-1}(x) = \max_{a \in D_{T-1}} x E Y_a^{T-1} = \max_{a \in D_{T-1}} x G_{T-1}(a) = x G_{T-1}(a_*^{T-1}), \text{ если } x > 0,$$

$$V_{T-1}(x) = x, \text{ если } x \leq 0;$$

$$\begin{aligned} V_{T-2}(x) &= \max_{a \in D_{T-2}} x \left\{ E [G_{T-1}(a_*^{T-1}) Y_a^{T-2} | Y_a^{T-2} > 0] \times \right. \\ &\quad \left. \times P(Y_a^{T-2} > 0) + E [Y_a^{T-2} | Y_a^{T-2} \leq 0] P(Y_a^{T-2} \leq 0) \right\} = \\ &= \max_{a \in D_{T-2}} x G_{T-2}(a) = x G_{T-2}(a_*^{T-2}) \text{ при } x > 0 \text{ и } V_{T-2}(x) = x \text{ при } x \leq 0; \end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned} V_0(x) &= \max_{a \in D_0} x \left\{ E [G_1(a_*^1) Y_a^0 | Y_a^0 > 0] P(Y_a^0 > 0) + E [Y_a^0 | Y_a^0 \leq 0] P(Y_a^0 \leq 0) \right\} = \\ &= \max_{a \in D_0} x G_0(a) = x G_0(a_*^0), \text{ где } x > 0. \end{aligned}$$

Здесь D_t , множество допустимых портфелей на шаге t , есть (см. (5))

$$(6) \quad D_t = \left\{ a \in R^n : \sqrt{a C_t a'} \leq \frac{\langle a, \Delta m^t \rangle + m_0^t + d^t}{\frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha^t))}{\alpha^t}} \right\},$$

где, напомним, $\Delta m^t = (m_1^t - m_0^t, \dots, m_n^t - m_0^t)$, $t = 0, \dots, T-1$, случайные величины Y_a^t определены выше. Отметим, что D_t не зависит от текущего состояния $x > 0$ процесса X_t .

Введенные выше функции $G_t(a)$ определяются рекуррентной формулой

$$\begin{aligned} (7) \quad G_t(a) &= E [Y_a^t | Y_a^t > 0] P(Y_a^t > 0) G_{t+1}(a_*^{t+1}) + \\ &\quad + E [Y_a^t | Y_a^t \leq 0] P(Y_a^t \leq 0), \quad t = 0, \dots, T-1, \\ G_T(a) &\equiv 1, \end{aligned}$$

где a_*^{t+1} – портфель, максимизирующий $G_{t+1}(a)$ на множестве D_{t+1} .

Из приведенных выражений для функций Беллмана следует, что каждый портфель a_*^t в оптимальной стратегии $A_* = (a_*^0, \dots, a_*^{T-1})$ зависит только от момента t принятия решения и не зависит от величины текущего состояния $x > 0$ процесса X_t .

Следующая теорема дает явное выражение для функций $G_t(a)$ и приводит необходимые условия оптимальности в задаче оптимального управления (5).

Теорема 1. Пусть условие (3) выполняется для всех α^t , Δm_j^t .

Если инвестиционная стратегия $(a_*^0, \dots, a_*^{T-1})$ является оптимальной, то существует вектор

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu) \in K^* = \left\{ (\lambda, \mu) \in R^{n+1} : \sqrt{\lambda C_t^{-1} \lambda'} \leq \mu \right\},$$

такой что:

$$(8) \quad \nabla G_t(a_*^t) + \frac{\Delta m^t \mu}{\frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha^t))}{\alpha^t}} + \lambda = 0$$

и

$$(9) \quad a_*^t \lambda' + \frac{\mu (\langle a_*^t, \Delta m^t \rangle + m_0^t + d^t)}{\frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha^t))}{\alpha^t}} = 0,$$

где $\nabla G_t(a)$ обозначает градиент $G_t(a)$,

$$(10) \quad \begin{aligned} G_t(a) &= \left\{ \bar{\Phi} \left[-\frac{\mu^t(a)}{\sigma^t(a)} \right] \mu^t(a) + \sigma^t(a) \varphi \left[-\frac{\mu^t(a)}{\sigma^t(a)} \right] \right\} \times \\ &\times G_{t+1}(a_*^{t+1}) + \Phi \left[-\frac{\mu^t(a)}{\sigma^t(a)} \right] \mu^t(a) - \sigma^t(a) \varphi \left[-\frac{\mu^t(a)}{\sigma^t(a)} \right], \\ G_T(a) &\equiv 1. \end{aligned}$$

Здесь $\bar{\Phi}(\cdot) = 1 - \Phi(\cdot)$, через $\Phi(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ обозначены функция распределения и плотность стандартной нормальной случайной величины соответственно, $\mu^t(a) = \langle a, \Delta m^t \rangle + m_0^t$ и $\sigma^t(a) = \sqrt{a C_t a'}$.

Доказательство. Выражение для $G_t(a)$ (см. рекуррентную формулу (7)) легко преобразуется в (10) с учетом выражений для математического ожидания нормальной случайной величины Y_a^t , усеченной на интервалы $(0, \infty)$ и $(-\infty, 0]$ (см., например, [16]). Поскольку в знаменателях в (10) присутствует стандартное отклонение $\sigma^t(a) = \sqrt{a C_t a'}$, необходимо сначала показать, что вырожденный инвестиционный портфель $a^d = (0, \dots, 0)$ не может быть оптимальным в задаче

$$(11) \quad \max_{a \in D_t} G_t(a).$$

Действительно, рассмотрим портфель $a_\gamma = \gamma \Delta m^t$, который является допустимым для достаточно малых $\gamma > 0$ (см. (6)). Далее,

$$\begin{aligned} \mu^t(a_\gamma) &= \gamma \|\Delta m^t\|^2 + m_0^t, \quad \sigma^t(a_\gamma) = \gamma \sqrt{\Delta m^t C_t \Delta m^t} \text{ и } \Phi \left(\frac{-\mu^t(a_\gamma)}{\mu^t(a_\gamma)} \right) \rightarrow 0, \\ \varphi \left(\frac{-\mu^t(a_\gamma)}{\sigma^t(a_\gamma)} \right) &\rightarrow 0 \text{ при } \gamma \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

Тогда

$$G_t(a_\gamma) = G_t(a_*^{t+1}) (\gamma \|\Delta m_t\|^2 + m_0^t) + o(\gamma) > G_t(a^d) = G_t(a_*^{t+1}) m_0^t$$

для достаточно малых значений $\gamma > 0$. Таким образом, для решения задачи (11) достаточно ограничиться множеством допустимых портфелей $D_t \setminus a^d$.

Условие (3) означает, что $\text{Int} D_t \neq \emptyset$, т.е. выполнено условие Слейтера в задаче (11). Применяя утверждение 2 к этой задаче конусного программирования, где целевая функция $G_t(a)$ не является, вообще говоря, вогнутой, получим (8)–(9) как необходимые условия оптимальности в (11). Теорема 1 доказана.

4. Модель доходностей рискованных активов, отличная от нормальной

Пусть доходности n рискованных активов имеют многомерное эллиптическое распределение (нормальное распределение, распределение Лапласа, Бесселя и др. [17]), что позволяет, в частности, учесть “тяжелые хвосты” в распределениях доходностей. Удобное свойство этого класса распределений для анализа рисков состоит в том, что линейная комбинация эллиптически распределенных активов снова имеет эллиптическое распределение. Обозначим через $F(x)$ функцию распределения “стандартной” эллиптической случайной величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, а через $f(x)$ – ее плотность.

Тогда (см. раздел 2) мера риска CVaR имеет вид

$$\text{CVaR}_\alpha(X_a) = -EX_a + \sqrt{DX_a} k^*,$$

где теперь

$$k^* = \frac{-\int_{-\infty}^{-z_\alpha^*} x f(x) dx}{\alpha} \text{ и } z_\alpha^* : F(-z_\alpha^*) = \alpha.$$

Таким образом, полученные выше результаты сохраняют силу и в этом случае с заменой $k = \phi(\Phi^{-1}(\alpha)) / \alpha$ на k^* . Усеченные нормальные распределения заменяются на соответствующие усеченные эллиптические.

5. Пример²

Проиллюстрируем полученные в разделе 3 результаты решением численного примера нахождения оптимальных портфелей для рынка из трех компаний: Apple, Microsoft, Facebook. Данные о стоимости акций за период 07.05.2022–07.05.2023 (один год) были взяты в открытом доступе с сайта биржи nasdaq (<https://www.nasdaq.com/market-activity/stocks/>). Полученные реализации доходностей этих активов примерно следуют нормальным

² Данные для этого примера и само решение были получены с помощью Сильвентой-нана Д.П.

распределениям (но в этой работе строгая проверка гипотез о нормальности распределений доходностей методами математической статистики остается вне рассмотрения), поэтому предположение о нормальном распределении общего дохода инвестора на каждом шаге представляется обоснованным. На основе этих эмпирических данных построены оценки вектора математических ожиданий $m = (m_0^t, \dots, m_3^t)$ и матрицы ковариаций $C = C_t$ трех рискованных активов. Предполагается, что векторы математических ожиданий и матрицы ковариаций не зависят от номера шага на всем временном интервале $[0, T] = [0, 4]$, а безрисковый актив имеет доходность $m_0 = 1$, т.е. вложения в этот актив сохраняются и не приносят убытка/прибыли. Начальный капитал инвестора $x_0 = 1$; уровень значимости $\alpha = 0,05$; константа d , ограничивающая сверху меру риска CVaR, является варьируемым параметром.

Согласно результатам раздела 3 (см. теорему 1) оптимальный портфель на шаге t определяется как решение задачи

$$\max_{D_t} G_t(a), \quad t = 3, 2, 1, 0,$$

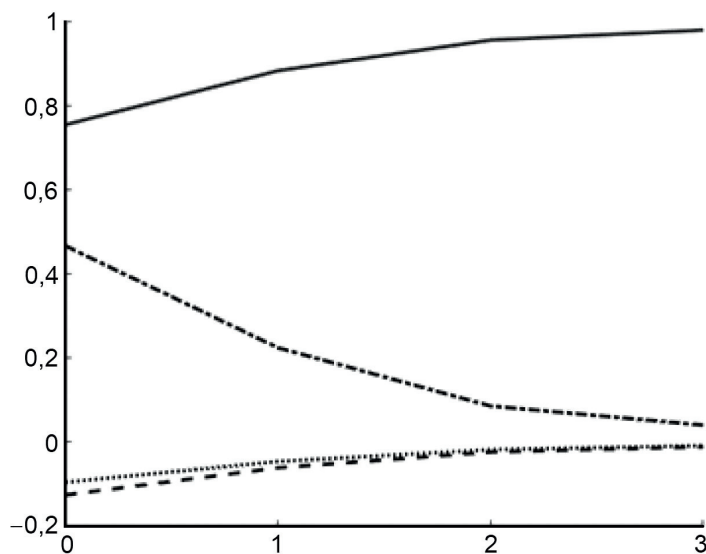
где рекуррентные выражения для $G_t(a)$ определены в (10). Таблица ниже показывает, как меняется оптимальный портфель при увеличении константы d , ограничивающей CVaR.

Оптимальные инвестиционные портфели в многошаговой задаче с изменением константы d , ограничивающей меру риска CVaR на каждом шаге

t	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
d	0,2	0,25	0,28	0,29
Apple, $a_*^t(1)$	0,7536	0,8820	0,9548	0,9786
Microsoft, $a_*^t(2)$	-0,0950	-0,0457	-0,0175	-0,0082
Facebook, $a_*^t(3)$	-0,1253	-0,0607	-0,0233	-0,0110
Безрисковый актив, $a_*^t(0)$	0,4667	0,2244	0,0860	0,0406

С увеличением константы d на каждом шаге инвестор становится более склонным к риску, поэтому ожидаемо доля инвестирования в безрисковый актив уменьшается от шага к шагу, а доля инвестирования в рискованные активы увеличивается. Для наглядности полученные оптимальные инвестиционные портфели отображены на рисунке.

Оптимальное значение целевого функционала $J[A_*] = E X_4$ равно 1,031, что означает получение 3% средней прибыли за весь период инвестирования. Такое низкое значение объясняется тем, что наблюдаемые за год доходности акций рискованных активов близки к единице и имеют низкую волатильность – различия в эмпирических доходностях каждого рискованного актива составляют лишь доли процента. Отметим, что решенный пример есть лишь иллюстрация к теореме 1 и приведенная в ней методика вычисления оптимальной



Оптимальные инвестиционные портфели на шагах $\{0, 1, 2, 3\}$. Сплошная линия обозначает долю вложений в акции Apple, доля вложений в безрисковый актив — штрихпунктирная линия, доля вложений в Microsoft — пунктирная линия, доля вложений в Facebook — штриховая линия.

инвестиционной стратегии дала бы другие результаты в случае рискованных активов, отличных от трех, рассмотренных выше.

6. Заключение

В работе была сформулирована и решена многошаговая задача инвестирования с вероятностными (CVaR) ограничениями и возможностью банкротства. Предполагалось разрешение коротких продаж и нормальная (или эллиптическая) модель распределений суммарных доходов на каждом шаге. Было показано, что оптимальный инвестиционный портфель на каждом шаге не зависит от значения капитала инвестора, а зависит только от номера шага инвестирования. В рамках нахождения оптимальных инвестиционных портфелей показано, что многошаговая задача разбивается на конечное число одношаговых задач оптимизации, которые рекуррентно связаны и сводятся к задачам конического программирования. Для вспомогательной одношаговой задачи были приведены и доказаны достаточные условия непустоты множества допустимых портфелей и выполнения условий регулярности Слейтера. При ее решении была применена модифицированная теорема Куна–Таккера для случая обобщенных неравенств. Результатом решения многошаговой задачи можно считать метод построения оптимальных портфелей инвестирования, применимый на практике при известных оценках векторов математических ожиданий и матриц ковариаций доходностей.

Также представлен численный пример, основанный на данных о котировках акций трех компаний на фондовой бирже за один год, который иллюстрирует нахождение оптимальных инвестиционных портфелей. Представляются интересными следующие направления развития данной работы: использование других распределений вместо нормальной или эллиптической модели для доходностей, например, гамма-распределений; применение другой меры риска вместо CVaR, например shortfall probability [3]. Еще одним направлением может стать анализ аналогичной задачи, но с запретом на короткие продажи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Markowitz H.* Portfolio Selection // J. Finance. 1952. V. 7. P. 77–91.
2. *Gaivoronski A., Pflug G.* Value at Risk in Portfolio Optimization: Properties and Computational Approach // J. Risk. 2004. V. 7. No. 2. P. 1–31.
3. *Голубин А.Ю., Гридин В.Н.* Построение эффективных инвестиционных портфелей с вероятностью падения финального капитала ниже установленного уровня в качестве меры риска // АиТ. 2023. № 4. С. 131–144.
4. *Кибзун А.И., Кан Ю.С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
5. *Alexander G.J., Baptista A.M.* Economic Implications of Using a Mean-VaR Model for Portfolio Selection: A Comparison with Mean-variance Analysis // J. Econom. Dynam. Control. 2002. V. 26. P. 1159–1193.
6. *Alexander G.J., Baptista A.M.* A comparison of VaR and CVaR constraints on portfolio selection with the mean-variance model // Management Sci. 2004. V. 50. P. 1261–1273.
7. *Shiba N., Xu C., Wang J.* Multistage Portfolio Optimization with VaR as Risk Measure // Int. J. Innovat. Comput., Inform. Control. 2007. V. 3. No. 3. P. 709–724.
8. *Tyrrell R., Rockafellar R.T., Uryasev S.* Conditional value-at-risk for general loss distributions // J. Banking Finance. 2002. V. 26. No. 7. P. 1443–1471.
[https://doi.org/10.1016/S0378-4266\(2\)00271-6](https://doi.org/10.1016/S0378-4266(2)00271-6).
9. *Pinar M.C.* Static and Dynamic VaR Constrained Portfolios with Application to Delegated Portfolio Management // Optimization. 2013. V. 62. No. 11. P. 1419–1432.
10. *Gardoni P., Murphy C.* Gauging the societal impacts of natural disasters using a capabilities-based approach // Disasters: Disaster Studies, Policy, Management. 2010. V. 34. No. 3. P. 619–636.
11. *Golubin A.Y.* Optimal Investment Policy in a Multi-stage Problem with Bankruptcy and Stage-by-stage Probability Constraints // Optimization. 2022. V. 70. No. 10. P. 2963–2977. <https://doi.org/10.1080/02331934.2021.1892674>
12. *Li C., Li Z.* Multi-period portfolio optimization for asset–liability management with bankrupt control // Appl. Math. Comput. 2012. V. 218. P. 11196–11208.
13. *Wei S., Ye Z.* Multi-period optimization portfolio with bankruptcy control in stochastic market // Appl. Math. Comput. 2007. V. 186. P. 414–425.

14. Голубин А.Ю., Газов А.И. Условия оптимальности в задаче выбора инвестиционного портфеля при вероятностном ограничении на капитал инвестора // Информационные технологии в проектировании и производстве. 2018. № 4. С. 53–57.
15. Boyd S., Vandenberghe L. Convex Optimization, Cambridge, Cambridge: University Press, 2009.
16. Burkardt J. The Truncated Normal Distribution, Department of Scientific Computing, Florida State University, 2014.
17. Landsman Z., Valdez E.A. Tail Conditional Expectations for Elliptical Distributions // North Amer. Actuarial J. 2003. V. 7. No. 4. P. 55–71.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галеевым.

Поступила в редакцию 13.02.2024

После доработки 30.09.2024

Принята к публикации 09.10.2024

Заметки, хроника, информация

© 2024 г.

11-я МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ФИЗИКЕ И УПРАВЛЕНИЮ

DOI: 10.31857/S0005231024120068, EDN: XTXNLU

С 9 по 12 сентября 2024 г. в университете Кадир Хас в г. Стамбуле состоялась 11-я конференция по физике и управлению (Physics and Control conference – PhysCon 2024), см. <https://physcon2024.khas.edu.tr/>. Конференция была организована турецкими университетами Кадир Хас и Белкент при поддержке международного общества по физике и управлению (International Physics And Control Society – IPACS). Председателем оргкомитета был профессор Фатихан Атай (Fatihcan Atay) из университета Белкент (Анкара). Ключевые решения по организации конференции принимал наблюдательный совет, куда входил и автор этой заметки. Совет возглавляется профессором Экехардом Шоллем (Eckehard Schöll) – президентом общества IPACS из Технического Университета Берлина. PhysCon 2024 был посвящен памяти Германа Хакена (1927–2024), который был почетным членом IPACS, основателя синергетики и автора новаторских работ по неравновесным фазовым переходам. В конференции приняли участие 87 человек из 15 стран. Состоялось 72 доклада, в том числе четыре пленарных ключевых доклада, четыре приглашенных доклада и две лекции. В программу были включены также пять минисимпозиумов, организованных участниками, каждый из которых состоял из 3–4 докладов с общей тематикой. Распределение докладов по странам следующее: Российская Федерация – 22, Алжир – 12, Турция – 10, Германия и Испания – по шесть, Англия – четыре, США, Бразилия и Австралия – по два, Китай, Дания, Мексика, Узбекистан, Иран, Италия – по одному докладу. Тематика конференции охватывает междисциплинарную область на перекрестке таких наук, как математика, физика, биология, электроника и вычислительная техника. Значительная часть докладов была посвящена вопросам на стыке теории управления, прикладной математики и нейробиологии, в том числе изучению моделей процессов в мозге человека и управления ими. Эту новую научную область можно назвать кибернетической нейробиологией.

Открылась конференция пленарным докладом Х. Йенсена (Henrik Jensen, Imperial College London) «Самоорганизованная критичность и управление». После краткого обзора по самоорганизованной критичности (SOC) был дан новый анализ одной из парадигматических моделей – модели лесного пожара (FFM). Связь между наблюдаемым поведением их распространения по степенному закону и подлинной критичностью обсуждалась с тех пор, как мо-

дель была введена в 1992 г. Недавний анализ показывает, что действительно, возможно установить критическую масштабную инвариантность в модели, если аккуратно управлять связью между движущей силой и размером системы. В докладе М. Тимме (Marc Timme) из Технического университета Дрездена рассматривались флуктуационные реакции и опрокидывание в сильно возмущенных нелинейных системах. Предложено интегральное условие самосогласованности и способ прогноза точки перелома с помощью расширения с большим возмущением, оцененного в рамках условия самосогласованности. Новый подход может помочь количественно предсказать существенно нелинейную динамику отклика, а также бифуркации, возникающие при больших амплитудах воздействия в неавтономных динамических системах. Ямир Морено (Yamir Moreno) из университета Сарагосы (Испания) в своем докладе «Сетевая эпидемиология: от моделирования заболеваний к управлению ими» дал обзор работ по анализу динамики заражения в отдельных популяциях, которые описываются различными сетевыми топологиями. Представил динамику заражения в многослойных сетях, представляющих более богатое фазовое пространство для системы и рассмотрел недавнюю пандемию COVID-19 через призму сетевой эпидемиологии. Был также рассмотрен вопрос управления реальными заболеваниями в смысле их смягчения либо за счет лучшей готовности, либо с помощью нефармацевтических вмешательств. Доклад Майкла Смолла (Michael Small) из Университета Западной Австралии «Выбор задержки вложения и почему он важен» отталкивался от теоремы Такенса, гарантирующей точное вложение детерминированной нелинейной динамической системы с данным временным рядом при довольно общих условиях. С 1980-х гг. было предложено много методов для оценки времени между наблюдениями (задержки), обеспечивающего точное вложение, но почти все методы выбора этой задержки основаны на применении некоторой эвристики. В докладе представлен новый, топологически обоснованный способ выбора задержки, основанный на использовании концепций из персистентной гомологии (persistent homology) и топологического анализа данных и гарантирующий достижение «наилучшего» аттрактора для заданных данных.

Экехард Шолль в своей лекции «Неравновесные фазовые переходы и явления нуклеации в синхронизирующихся сетях», посвященной памяти Германа Хакена, рассматривал фазовые переходы в нелинейных динамических системах, далеких от термодинамического равновесия. Было отмечено, что концепции термодинамики и статистической физики применялись для описания самоорганизации, формирования пространственно-временных структур, сосуществования фаз, критических явлений и неравновесных фазовых переходов первого и второго рода уже с 1970-х гг. Однако фазовые переходы и критические явления в динамических сетях, где могут возникать синхронизационные переходы, порождая множество частично синхронных моделей и сложное коллективное поведение с приложениями ко многим природным, социально-экономическим и технологическим системам, стали изучаться го-

раздо позже. В лекции рассматривались эти работы и устанавливались связи между опрокидывающимися переходами, взрывной синхронизацией, нуклеацией, критическим замедлением и т.д. с неравновесной термодинамикой. В частности, изучалась модель Курамото с инерцией, применимая к энергосетям, которая приводит к фазовым переходам первого рода, к синхронизации через частично синхронизированные состояния, и показано, что ее можно рассматривать как адаптивную сеть фазовых осцилляторов, подобную нейронным сетям с пластичностью.

Лекция Александра Фрадкова (ИПМаш РАН) «Кибернетическая нейробиология» была посвящена введению в новое научное направление – кибернетическую нейробиологию, которая является разделом вычислительной нейробиологии, направленным на изучение нейробиологических систем кибернетическими методами. Кибернетическая нейробиология базируется на математических моделях, принятых в вычислительной нейронауке (модель Ходжкина–Хаксли, модель ФицХью–Нагумо, модель Моррис–Лекара, модель Хиндмарша–Роуза, модель Ландау–Стюарта, модель нейронных масс и т.д.) и методах кибернетики – науки об управлении и связи в живом организме, машине и обществе. В лекции изложены основные задачи и методы, а также некоторые результаты кибернетической нейронауки, полученные в основном в ИПМаш РАН и в СПбГУ, в том числе результаты по нейроинтерфейсному управлению (управлению «силой мысли»). Среди основных задач кибернетической нейробиологии были названы следующие: 1. Анализ условий, при которых модели нейронных ансамблей обладают некоторыми особыми режимами, соответствующими поведению реальных нейронных ансамблей: синхронизация, спайкинг, берстинг, солитоны, хаос, химеры и др. 2. Синтез внешних (управляющих) воздействий, создающих указанные режимы в моделях нейронных ансамблей. 3. Оценивание состояния и параметров моделей нейронных ансамблей по результатам измерения входных и выходных переменных. 4. Классификация состояний и намерений человека по результатам наблюдений его нервной активности с использованием методов адаптации и машинного обучения (с приложением к медицинской и психологической диагностике). 5. Синтез алгоритмов управления, обеспечивающих заданные свойства замкнутой системы, состоящей из управляемого объекта (например, нервной системы живого существа или мозга человека) и управляющего агента, реализованного в компьютеризованной установке, взаимодействующих через нейроинтерфейс.

Несколько слов об истории конференции. Первая конференция по физике и управлению прошла в 2003 г. в Санкт-Петербурге. Вторая конференция прошла в 2005 г., также в Санкт-Петербурге. Сопредседателями программного комитета первой конференции были выдающийся физик, Нобелевский лауреат академик Жорес Иванович Алферов, а также генеральный директор концерна ЦНИИ «Электроприбор», создатель гироскопической техники и систем управления академик Владимир Григорьевич Пешехонов. Проведение этих конференций мотивировалось возникновением в 1990-е г. новой

научной области на стыке физики и теории систем управления, включающей управление колебаниями, управление хаотическими процессами, управление молекулярными и квантовыми системами, управление пучками частиц и др. Эта область была названа кибернетической физикой (см. А.Л. Фрадков, «Автоматика и Телемеханика», 1999, № 3). В ней изучаются вопросы управления процессами в сложных динамических системах, возникающих в физике и других естественных науках: процессы синхронизации, нелинейные волны, хаос, солитоны, квантово-механические процессы, управление в термодинамике и др. Весь этот спектр вопросов сохранил свою актуальность и по сей день. Интерес к общению и сотрудничеству ученых и инженеров, увлеченных новой областью науки, привел к их организационному объединению. В 2005 г., 26 августа, в день закрытия конференции Physics and Control 2005, в Аничковом дворце состоялось организационное собрание Международного общества физики и управления (International Physics and Control Society – IPACS). Общество также существует по сей день. Общие собрания членов IPACS проходят во время конференций PhysCon, а штаб-квартира Общества находится в Санкт-Петербурге. Подробнее о деятельности IPACS см. на его сайте <http://physcon.ru>. Последующие конференции PhysCon проходили каждые два года в разных городах и странах: в 2007 г. в Потсдаме в Германии, в 2009 г. – в Катанье на Сицилии, в 2011 г. – в Леоне в Испании, в 2013 г. в Сан-Луис-Потоси в Мексике, в 2015 г. – в Стамбуле в Турции, в 2017 г. – во Флоренции в Италии. В 2019 г. конференция снова проходила в России, в университете Иннополис, а в 2021 г. в связи с пандемией конференция была проведена в формате онлайн шанхайским университетом Фудан (Китай). Выбор места и команды организаторов для проведения очередной конференции занял лишний год в связи со сложной политической обстановкой. Но итоги конференции показали, что выбор был правильным: он позволил достаточно большому числу российских специалистов поддержать творческие и личные связи с зарубежными коллегами. Одной из удачных организационных находок было разрешение участникам из стран, находящихся под санкциями, оплачивать оргвзнос наличными по приезду. Итоги конференции показали также, что в научной области, впервые оформившейся в нашей стране в 2003 г. Россия остается в числе лидирующих стран и в 2024 г. Программа и тезисы докладов конференции PhysCon2024 размещены на ее сайте, а ее труды будут опубликованы в специальных выпусках журналов Cybernetics And Physics (<http://cap.physcon.ru>) и The European Physical Journal Special Topics (<https://link.springer.com/journal/11734>).

А.Л. Фрадков, д-р техн. наук,
Институт проблем машиноведения РАН,
Санкт-Петербургский государственный университет

СОДЕРЖАНИЕ

Линейные системы

Хлебников М.В. Синтез обратной связи по выходу в дискретных системах управления как задача оптимизации	3
---	---

Стохастические системы

Босов А.В. Позиционирование и идентификация параметров движения подводного аппарата по наблюдениям со случайными запаздываниями	23
Галяев А.А., Берлин Л.М., Лысенко П.В., Бабилов В.Г. Порядковые статистики нормированного спектрального распределения для обнаружения слабых сигналов в белом шуме	49
Горбунова А.В., Лебедев А.В. Об особенностях управления скоростью обслуживания в системах с разделением и параллельным обслуживанием заявок	70

Управление в социально-экономических системах

Голубин А.Ю., Гридин В.Н., Смирнов Д.С., Булгаков С.А. Метод оптимального управления активами с пошаговыми conditional value at risk (CVaR) ограничениями при известных параметрах векторов доходностей	89
--	----

Заметки, хроника, информация

Фрадков А.Л. 11-я международная научная конференция по физике и управлению	103
---	-----

C O N T E N T S

Linear Systems

Khlebnikov M.V. Output Feedback Design for Discrete Control Systems as an Optimization Problem	3
---	---

Stochastic Systems

Bosov A.V. AUV Positioning and Motion Parameter Identification Based on Observations with Random Delays	23
Galyaev A.A., Berlin L.M., Lysenko P.V., Babikov V.G. Order Statistics of Normalized Spectral Distribution for Detection of Weak Signals in White Noise	49
Gorbunova A.V., Lebedev A.V. On the Features of Service Speed Control in Fork-Join Queueing System	70

Control in Social Economic Systems

Golubin A.Yu., Gridin V.N., Smirnov D.S., Bulgakov S.A. A Method of Optimal Investment with Stage-by-Stage Conditional Value at Risk (CVaR) Constraints and Known Parameters of Return Vectors	89
---	----

Notes, Meetings, Information

Fradkov A.L. 11th International Conference on Physics and Control	103
--	-----