

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

(ПММ)

т. 88, вып. 6



НАУКА
— 1727 —



ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

(ПММ)

Т. 88, вып. 6



МОСКВА 2024

Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 88. Iss. 6

EDITORIAL BOARD

I. G. Goryacheva (editor-in-chief, Professor, RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)

V. G. Baydulov (executive secretary, Ph.D., Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia)

J. Awrejcewicz (Professor, Politechnika Łódzka, Łódź, Poland),

N. N. Bolotnik (Professor, Corresponding RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

F. M. Borodich (Professor, Cardiff University, Cardiff, United Kingdom),

A. B. Freidin (Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),

A. M. Gaifullin (Professor, Corresponding RAS member, Central Aerohydrodynamic Institute
(TsAGI), Zhukovsky, Russia),

M. L. Kachanov (Professor, Tufts University, Medford, MA, USA),

Ju. D. Kaplunov (Professor, Keele University, Staffordshire, United Kingdom),

A. A. Korobkin (Professor, University of East Anglia, Norwich, United Kingdom),

A. M. Kovalev (Professor, NASU member, Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Donetsk, Russia),

V. V. Kozlov (Professor, RAS member, Vice-President RAS, Moscow, Russia),

A. M. Krivtsov (Professor, Corresponding RAS member, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic
University, St. Petersburg, Russia),

Yu. Yu. Makhovskaya (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

T. J. Pedley (Professor, FRS member, University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom),

F. Pfeiffer (Professor, FRS, Foreign RAS member,
Technische Universität München, Munich, Germany),

V. V. Pukhnachev (Professor, Corresponding RAS member, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics,
RAS, Novosibirsk, Russia),

G. Rega (Professor, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy),

S. A. Reshmin (Professor, Corresponding RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

V. A. Sabelnikov (Professor, The French Aerospace Lab ONERA, Paris, France),

Ye. I. Shifrin (Professor, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

F. E. Udwadia (Professor, University of Southern California, Los Angeles, CA, USA),

S. E. Yakush (Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia),

V. F. Zhuravlev (Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia),

K. Zimmermann (Professor, Technische Universität Ilmenau, Ilmenau, Germany)

Editorial advisory board: N. I. Amelkin, I. M. Anan'evskii, A. S. Andreev, V. A. Babeshko,
A. M. Formalskii, Yu. P. Gupalo, A. P. Ivanov, A. N. Kraiko, A. P. Markeev, S. A. Nazarov,
S. V. Nesterov, V. S. Patsko, A. G. Petrov, N. N. Rogacheva, V. V. Sazonov, A. P. Seyranian,
I. A. Soldatenkov, S. Ya. Stepanov, V. N. Tkhai

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

November–December

Учредитель: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Редакция:

В. Г. Байдулов — отв. секретарь

Е. В. Есина — зав. редакцией

Адрес редакции: 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245

Телефон редакции: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

На сайте [Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU](http://eLIBRARY.RU) доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала «Прикладная математика и механика» в каталоге Роспечати 70706

ISSN 0032-8235

Founder: Russian Academy of Sciences

The Editorial Staff:

V. G. Baydulov — executive secretary

E. V. Esina — head of Editorial office (manager editor)

The Editorial Board Address: 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia

Phone: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

The subscription index in Rospechat catalogue 70706

ISSN 0021-8928

СОДЕРЖАНИЕ

Владимир Васильевич Голубев (к 140-летию со дня рождения)	825
Перераспределение массы при проникании неоднородного уплотнения в ускоренно движущийся газовый слой <i>К. В. Краснобаев</i>	828
Об особенностях машущего полета <i>В. Д. Котелкин</i>	839
Волновое сопротивление профиля при его околосзвуковом обтекании потоком газа: история, достижения, проблемы <i>А. С. Петров, Г. Г. Судаков</i>	853
Ударная волна и центрированная волна разрежения в газе Абеля—Нобля <i>М. А. Брутян, У. Г. Ибрагимов, М. А. Меняйлов</i>	874
Математические особенности численного моделирования нестационарного обтекания модели в ударной аэродинамической трубе <i>С. М. Босняков, А. Р. Горбушин, С. В. Матяш, С. В. Михайлов</i>	887
Решение обратной задачи для многозвенного профиля в сжимаемом потоке вязкого газа <i>А. Л. Болсуновский, Н. П. БузOVERЯ, С. В. Герасимов, М. А. Губанова</i>	910
К задаче об оптимальном управлении ламинарным пограничным слоем на проницаемых цилиндрических поверхностях в сверхзвуковых потоках <i>И. Р. Мухаметзянов</i>	922
Управление устойчивостью сверхзвукового пограничного слоя лазерной накачкой в узкую локальную зону. Теплоизолированная стенка <i>Ю. Н. Григорьев, И. В. Ершов</i>	931
Методы групповой классификации релаксирующей газовой динамики <i>С. В. Хабиров</i>	944
Модели для описания дозвуковых течений с предварительно перемешанным турбулентным горением в каналах <i>В. В. Власенко, Р. А. Балабанов, Лю Вэньчао, С. С. Молев, В. А. Сабельников</i>	959

CONTENTS

Vladimir Vasilyevich Golubev (on the 140th anniversary of his birth)	825
Redistribution of Mass during Penetration of a Non-Uniform Cloud into an Accelerating Gas Layer <i>K. V. Krasnobaev</i>	828
About the Features of Flapping Flight <i>V. D. Kotelkin</i>	839
Shock–Wave Drag of Profile Flowing by Transonic Gas Flow: History, Achievements, Problems <i>A. S. Petrov, G. G. Soudakov</i>	853
Shock Wave and Centered Rarefaction FAN in Noble–Abel Gas <i>M. A. Brutyan, U. G. Ibragimov, M. A. Meniailov</i>	874
Mathematical Features of Numerical Simulation of Non-Stationary Flow Around the Model in the Shock Tube <i>S. M. Bosnyakov, A. R. Gorbushin, S. V. Matyash, S. V. Mikhailov</i>	887
Solving of the Inverse Problem for a Multielement Airfoil in a Compressible Viscous Gas Flow <i>A. L. Bolsunovsky, N. P. Busoverya, S. V. Gerasimov, M. A. Gubanova</i>	910
Problem of Optimal Control of a Laminar Boundary Layer on Permeable Cylindrical Surfaces in Supersonic Flows <i>I. R. Mukhametzyanov</i>	922
Stability Control of the Supersonic Boundary Layer by Laser Pumping into a Narrow Local Area. Heat–Insulated Wall <i>Yu. N. Grigoryev, I. V. Ershov</i>	931
Methods of Group Classification for Relaxing Gasdynamics <i>S. V. Khabirov</i>	944
Models for Description of Subsonic Flows with Premixed Turbulent Combustion in Channels <i>V. V. Vlasenko, R. A. Balabanov, Wenchao Liub, S. S. Molev, V. A. Sabelnikov</i>	959



ГОЛУБЕВ ВЛАДИМИР ВАСИЛЬЕВИЧ

(К 140-летию со дня рождения)

Владимир Васильевич Голубев родился 3 декабря (21 ноября) 1884 г. в г. Сергиев Посад. После окончания Московского университета и защиты магистерской диссертации по чистой математике в 1916 г. Владимир Васильевич занимает должность профессора, затем декана физико-математического факультета, а с 1920 г. ректора Саратовского университета. В это же время Владимир Васильевич начинает интересоваться научными работами по аэромеханике, устанавливает контакты с сотрудниками ЦАГИ и занимается теорией крыла. Появляются оригинальные работы В.В. Голубева в области аэродинамики в «Трудах ЦАГИ» [1, 2]. Осенью 1930 г. по приглашению руководства ЦАГИ В.В. Голубев переходит на работу в этот институт. Здесь он становится участником семинара общетеоретической группы, которую организовал и возглавил С.А. Чаплыгин. Именно эта группа заложила основы научных аэродинамических школ России и определила пути развития аэродинамической науки на долгие годы. Постоянными участниками семинара общетеоретической группы были выдающиеся механики: Н.Е. Кочин, М.А. Лаврентьев, М.В. Келдыш, Л.И. Седов, Г.И. Петров, С.А. Христианович, Л.С. Лейбензон, Л.Н. Сретенский, А.И. Некрасов и многие другие. Впоследствии именно В.В. Голубеву комиссия по изданию полного собрания сочинений поручит написать очерк о жизни, научной и общественной деятельности академика С.А. Чаплыгина [3].

Одновременно с началом работы в ЦАГИ В.В. Голубев в качестве профессора начинает свою преподавательскую деятельность в МГУ и после организации в 1933 г. механико-математического факультета становится первым деканом мехмата. В 1932 г. он занимает должность заведующего двух кафедр: аэромеханики МГУ (с 1955 г. кафедре аэромеханики и газовой динамики) и кафедры высшей математики Военно-воздушной академии им. Н.Е. Жуковского.

Под влиянием научных идей В.В. Голубева на кафедре аэромеханики МГУ сформировался целый ряд направлений подготовки специалистов для решения задач прикладной аэродинамики. В 30-е и 40-е годы из-за значительно возросших требований к скоростным и маневренным качествам летательных аппаратов остро встали вопросы, как об увеличении подъемной силы, так и об уменьшении сопротивления или посадочной скорости самолетов. Одной из возможностей достичь этих целей явилось применение специальных механизмов, изменяющих аэродинамические характеристики крыла в нужном направлении. В числе таких механизмов — разрезное крыло, предкрылки, закрылки, щитки.

Глубоко обосновав физическую природу возникающих при использовании механизированных крыльев явлений, Владимир Васильевич эффективно применил методы теории функций комплексного переменного для предсказания и расчета аэродинамических характеристик летательных аппаратов. Полученные результаты нашли отражение в читавшихся на кафедре аэромеханики лекционных курсах и в темах дипломных работ, предлагавшихся студентам [4]. Классическим стал курс по теории крыла, который явился обобщением огромного опыта преподавания В.В. Голубевым на механико-математическом факультете МГУ [5].

Еще одним направлением работы кафедры аэромеханики стала теория крыльев малого удлинения. Разработка этой теории была необходима для проведения расчетов обтекания оперенных тел и подводных частей кораблей [6]. Проведя детальный анализ экспериментов, Владимир Васильевич создал модель течения, опирающуюся на явление перетекания воздуха через кромки крыла, вызывающее увеличение скорости потока на его верхней поверхности. Модель существенно отличалась от классической теории крыла присутствием дополнительных вихрей, не подчиняющихся гипотезе Жуковского-Чаплыгина. А к экспериментам по этой тематике привлекались студенты и аспиранты кафедры, получившие значимые научные результаты.

В середине 40-х годов Владимир Васильевич Голубев обращается к труднейшей проблеме аэромеханики — обтеканию тел нестационарным потоком [6]. В этот период В.В. Голубевым создается теория периодических движений крыла, одним из приложений которой явились работы по аэродинамике машущего полета. В основу теории легла гипотеза о том, что при взмахх крыла за телом образуется не вихревая пелена, а вихревая дорожка, свойства которой регулируются процессами, происходящими в пограничном слое. Теория В.В. Голубева оказала столь сильное влияние на исследования сотрудников, аспирантов, студентов кафедры, что теории машущего полета на протяжении десятиков лет были посвящены научные статьи, защищен целый ряд диссертаций, множество курсовых и дипломных работ.

Широта научных интересов Владимира Васильевича проявлялась и в решении задач, непосредственно связанных с постановкой экспериментов и с объяснением их результатов. Например, им найдено влияние на силы, действующие на тело, неоднородности поля скорости в аэродинамической трубе или при наличии в потоке пропеллера. Используя методы теории функций комплексного переменного при исследовании удара струи о препятствие, В.В. Голубев математически строго установил причину увеличения глубины проникновения клина в препятствие в случае, когда вещество клина неоднородное [7].

Такое сочетание интереса к математическим дисциплинам и к проблемам авиационной техники не могло не привлекать на кафедру талантливых и активных студен-

тов. Впоследствии многие из выпускников кафедры, учеников В.В. Голубева, стали видными учеными, руководителями крупных научно-исследовательских коллективов. Коллеги Владимира Васильевича, студенты тепло отзывались о нем как о блестящем лекторе, чей стиль изложения отличался ясностью основ материала и логической стройностью [8].

О замечательных качествах В.В. Голубева-педагога ярко написал один из его первых учеников-аэромехаников профессор А.А. Космодемьянский: «Владимир Васильевич искренне радовался, когда его работы служили отправным пунктом новых научных изысканий. Работы своих учеников, независимо от их научного ранга, он популяризировал и часто излагал как на лекциях, так и в монографиях. Зная, как различны люди, он никогда не настаивал на каких-либо канонах творчества. Поэтому среди его учеников известны ученые с творческим почерком, совсем не похожим на творческий стиль учителя» [9].

В 1934 г. В.В. Голубев был избран членом-корреспондентом АН СССР, в 1942 г. ему присуждается звание заслуженного деятеля науки и техники РСФСР, а в 1944 г. ему присваивается воинское звание генерал-майора инженерно-авиационной службы. В.В. Голубев награжден орденом Ленина, орденом Трудового Красного Знамени и четырьмя орденами Красной Звезды.

Научное наследие В.В. Голубева в настоящее время продолжает развиваться в трудах сотрудников ЦАГИ, МГУ, Военно-воздушной академии и других научных организаций страны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубев В.В.* Теория крыла аэроплана в плоскопараллельном потоке // Труды ЦАГИ. 1927. Вып. 29.
2. *Голубев В.В.* Теория крыла аэроплана конечного размаха // Труды ЦАГИ. 1931. Вып. 108.
3. *Голубев В.В.* Сергей Алексеевич Чаплыгин. М.: Изд-во Бюро новой техники ЦАГИ, 1947. 124 с.
4. *Протасова Л. А., Тюлина И.А.* Владимир Васильевич Голубев. М.: Изд-во МГУ, 1986. 110 с.
5. *Голубев В.В.* Лекции по теории крыла. М.: Гостехиздат, 1949. 480 с.
6. *Голубев В.В.* Труды по аэродинамике. М.: Гостехиздат, 1957. 979 с.
7. *Голубев В.В.* Исследования по теории удара струи жидкости и некоторые её приложения. М.: Изд-во МГУ, 1975. 76 с.
8. Владимир Васильевич Голубев (к 100-летию со дня рождения): сб. статей / под ред. *Тюлиной И.А.* М.: Изд-во Знание, Сер. Математика, кибернетика, 1984. 64 с.
9. *Космодемьянский А.А.* Очерки по истории механики. М.: Просвещение, 1964. 456 с.

УДК 533;524.5;519.63

**ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАССЫ ПРИ ПРОНИКАНИИ НЕОДНОРОДНОГО
УПЛОТНЕНИЯ В УСКОРЕННО ДВИЖУЩИЙСЯ ГАЗОВЫЙ СЛОЙ**© 2024 г. К. В. Краснобаев^{1,2,*}¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва²Институт космических исследований РАН, Москва

*e-mail: kvk-kras@list.ru

Поступила в редакцию 21.04.2024 г.

После доработки 08.11.2024 г.

Принята к публикации 15.11.2024 г.

Численно моделируется неустановившееся осесимметричное движение идеального совершенного газа, возникающее при взаимодействии сферического уплотнения с газовым слоем, первоначально находившимся в гравитационном равновесии в постоянном поле тяжести. Вещество уплотнения рассматривается как содержащее примесь, частицы которой служат маркерами и не влияют на движение среды. Установлено, что наиболее массивная центральная часть уплотнения глубоко погружается внутрь слоя, в то время как параметры кумулятивной струи существенно зависят от плотности газа на периферии уплотнения. В предположении, что вещество примеси оптически прозрачно для излучения, определено распределение интенсивности в картинной плоскости и выявлено направление максимальной величины интенсивности.

Ключевые слова: кумулятивная струя, проникновение уплотнения в газовый слой, перераспределение массы.

DOI: 10.31857/S0032823524060014 EDN: IHGEJX

1. Введение. Вопросы образования кумулятивных струй при взаимодействии уплотнений (капель, облаков, сгустков) с контактными поверхностями в жидкостях и твердых телах исследуются уже на протяжении десятилетий и результаты исследований отражены в многочисленных оригинальных статьях и монографиях (см., например, работы [1–5] и библиографию в них). Вместе с тем сложность возникающих движений и разнообразие условий, в которых происходит кумуляция, приводят к тому, что и в настоящее время обнаруживаются такие неизвестные ранее эффекты, как, например, появление сверхзвуковых струй или разбрызгивание жидкости в разреженном газе [6–8]. Применительно к проблемам космической газовой динамики возникли новые задачи о прохождении сгустков (уплотнений, облаков) сжимаемого вещества через слои (оболочки), движущиеся с ускорением. Пионерской явилась работа [9], в которой проведены расчеты вторжения сгустка в самогравитирующий галактический газовый диск. При этом на сгусток действовала сила гравитации, порождаемая веществом диска. Дальнейшее развитие работ в направлении взаимодействия сгустков со слоями и оболочками, а также с ударными волнами и ионизационно-ударными (или I-S) фронтами, было связано с исследованием явлений взрывного типа в космических условиях [10–12].

В настоящее время наиболее полно в литературе отражены результаты компьютерного моделирования распространения ударных волн в газе, содержащем локальные уплотнения. Проводились двумерные и трехмерные расчеты, учитывалось влияние на движение радиационных процессов и магнитного поля (см. работы [13–15] и обширную библиографию в них). Одними из центральных были вопросы перемешивания вещества сгустка и окружающей его среды (например, вследствие неустойчивости Рихтмайера–Мешкова), а также влияния кумуляции массы в сходящихся ударных волнах на выполнение критерия развития гравитационной неустойчивости Джинса.

Существенной особенностью большинства исследований взаимодействия ударных волн с уплотнениями является то, что характерный масштаб уплотнения предполагается малым по сравнению с масштабом изменения параметров газа за разрывом. Однако такое предположение может нарушаться при распространении ионизационно-ударного фронта — комплекса разрывов, который возникает в результате расширении среды, нагреваемой и ионизируемой излучением внешнего по отношению к среде источника (звезды или группы звезд) [10–12, 16, 17].

Общая картина движения включает в себя область расширяющегося ионизованного водорода (область Н II), отделенную от окружающего нейтрального газа тонким переходным слоем (фронтом ионизации). Перед фронтом ионизации распространяется ударная волна. Среда между фронтами неоднородная — непосредственно за ударной волной располагается протяженная зона нагретого нейтрального газа, за которой вследствие высвечивания образуется тонкий (по сравнению с расстоянием между фронтами) слой плотного холодного газа. Если область Н II, как это часто наблюдается, формируется в среде с убывающей по мере удаления от звезды плотностью, то происходит ускорение газа, находящегося между фронтами (см., например, работу [16]). Таким образом, в идеализированной постановке при исследовании движений с масштабами, существенно меньшими расстояния между фронтами, естественно перейти в систему координат, где в невозмущенном присутствии уплотнения состояний имеются два различающихся по плотности и температуре газовых слоя. При этом слои разделены контактным разрывом и находятся в гравитационном равновесии в поле тяжести с ускорением, по абсолютной величине равным ускорению вещества в области между фронтами.

Многочисленные наблюдательные данные, полученные с помощью космических аппаратов, свидетельствуют о присутствии на периферии областей НII неоднородностей (уплотнений, облаков, сгустков) различных масштабов и связанных с ними молодых звездных объектов [18]. В настоящее время одним из процессов, объясняющих происхождение неоднородной структуры области между фронтами, является проникновение в плотный слой сгустков, существующих в газе непосредственно за ударной волной.

Компьютерное моделирование показало, что в сжимаемой среде проникновение сгустка в слой может сопровождаться возникновением сложных грибовидных структур, «хвостов» и струй [17, 19–21]. Однако в этих работах в основном рассматривалось только одно из проявлений взаимодействия облака со слоем, которое заключалось в формировании кумулятивной струи. Вместе с тем в [20] было установлено, что кумулятивная струя не образуется, если однородное облако имеет резкую границу. Возможная причина такого эффекта заключается в том, что во внешних частях неоднородного облака присутствует менее плотный, чем в центре, газ. Поэтому этот менее плотный газ должен быстрее, чем газ в центре облака, заполнять образующуюся полость. Иными словами, менее плотный газ должен составлять существенную часть вещества кумулятивной струи. Чтобы проверить это предположение, в настоящей работе для параметров слоя и облака, использовавшихся в [11], проводятся расчеты распределения массы вещества облака. Также в перспективе сопоставления с наблю-

дениями определяются особенности интенсивности излучения, обусловленного примесными элементами струи.

Впервые математическая модель, показавшая существенное влияние неоднородности физических свойств тела на его проникновение в препятствие, была предложена и реализована В.В. Голубевым [22]. В рамках модели идеальной несжимаемой жидкости в [22] было установлено, что при соударении неоднородного клина с преградой центральная часть клина оказывается меньше подверженной растеканию. Применяв теорию функций комплексного переменного, В.В. Голубев нашел, что увеличение пробивной способности клина обусловлено силами давления растекающейся по поверхности мишени жидкости.

Сопоставляя результат [22] с эффектом исчезновения кумулятивной струи [20], необходимо отметить основное качественное сходство в постановке задач. Оно заключается в существовании сравнительно легко деформируемой внешней части сгустка и более плотного ядра. Это приводит к значительной разности скоростей в ядре и вне его. В результате в случае клина возникают дополнительные сдвигивающие клин силы давления. В случае же проникновения сжимаемого сгустка в слой, как будет показано ниже, торможение и деформация менее плотных частиц газа оказывают расталкивающее влияние на вещество слоя. Тем самым создается препятствие схлопыванию полости непосредственно за центральной частью уплотнения, что способствует образованию кумулятивной струи. Отсюда можно также ожидать, что значительный вклад в вещество образующейся кумулятивной струи будет вносить именно газ сравнительно небольшой плотности.

Таким образом, цель работы заключается в нахождении перераспределения вещества облака и в определении влияния его внешних частей на протяженность и плотность струи. Кроме того, по найденному в результате расчетов полю плотности устанавливается угловая зависимость интенсивности излучения в условиях, когда излучение обусловлено малыми примесями тяжелых элементов или пылинок.

В первой части работы излагается постановка задачи и метод ее решения. Далее представлены результаты компьютерного моделирования движения сгустка. Третий раздел посвящен расчету распределения интенсивности излучения примеси в картинной плоскости. В заключительной части работы содержатся анализ результатов и выводы.

2. Постановка задачи, основные уравнения. В настоящее время при исследовании фундаментальных астрофизических проблем широко применяются методы газовой динамики. Это связано с возросшими возможностями наблюдений и с переходом от умозрительных моделей к количественному описанию явлений. Например, процессы в областях активного звездообразования успешно моделируются в рамках газодинамических уравнений. При этом выявляемые путем математического моделирования особенности движений могут быть использованы для получения дополнительных сведений об астрофизических объектах. Так, на основе расчетов взаимодействия уплотнения с ускоренно движущимся газовым слоем была предсказана возможность оценивать характеристики неоднородной среды перед слоем, опираясь на морфологию и параметры кумулятивной струи [19–21].

Но авторами этих работ не рассматривались как вопрос о влиянии структуры сгустка на образование кумулятивной струи, так и возможные особенности распределения интенсивности излучения, обусловленного веществом уплотнения. Настоящий и последующий разделы посвящены этим вопросам.

Обращаясь к работе [9], примем следующую постановку задачи (рис. 1).

Рассматриваются осесимметричные адиабатические неустановившиеся движения идеального совершенного газа.

Предполагается, что в отсутствие облака плоский слой находится в гравитационном равновесии в поле тяжести с ускорением W (область «0» на рис. 1). Слой отде-

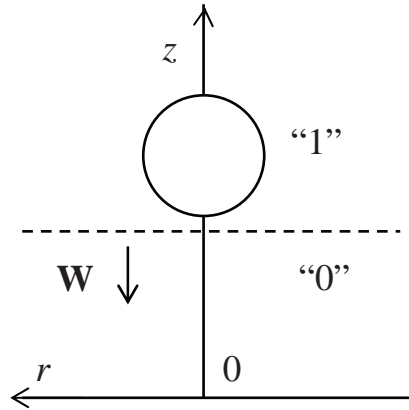


Рис. 1. Схема проникновения сгустка в слой.
Штриховая линия — контактный разрыв.

лен контактным разрывом от газа меньшей плотности, который также находится в равновесии и занимает область «1». В начальный момент времени в области «1» размещается уплотнение с заданным распределением плотности ρ , скорости \mathbf{V} и внутренней энергии E . Возникающее движение описывается системой газодинамических уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} &= 0, \quad \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \operatorname{grad} p = \rho \mathbf{W} \\ \frac{dE}{dt} + \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{V} &= 0, \quad E = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где t — время, p — давление, γ — показатель адиабаты.

Чтобы найти распределение плотности только вещества облака, введем пассивную примесь с плотностью ρ_d . Принимая, что отношение ρ_d/ρ остается постоянным во все время движения, для ρ_d будем иметь уравнение

$$\frac{d\rho_d}{dt} + \rho_d \operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \quad (2.2)$$

При этом входящая в (2.2) скорость \mathbf{V} определяется из решения системы (2.1).

Отметим, что в космических условиях примесными могут являться атомы, ионы и молекулы тяжелых элементов (азот, кислород, углерод, железо,...), а также пылинки различного состава, включая содержащие полициклические ароматические углеводороды.

Для численного решения системы (2.1)–(2.2) введем безразмерные переменные

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_1}, \quad \mathbf{V}^* = \frac{\mathbf{V}}{u_\infty}, \quad E^* = \frac{E}{u_\infty^2}, \quad \phi = \frac{(\gamma - 1)WL}{\gamma a_1^2}, \quad a_1^2 = \frac{p_1}{\rho_1}, \quad t^* = \frac{tu_\infty}{L}$$

Здесь выбор определяющих параметров — плотности ρ_1 , скорости u_∞ , пространственного масштаба L — достаточно произволен, поскольку при проведении серийных расчетов удобно выбрать характерные для приложений значения этих величин безотносительно к конкретному объекту. Например, для областей НП характерным является $u_\infty \sim 10^6$ см/с. Однако ниже на графиках для определенности индекс «1» относится к значениям соответствующих величин на контактном разрыве со стороны менее плотного газа. А u_∞ выбиралось так, чтобы в области «1» на рис. 1 на контактном разрыве было $E^* = 1$. Характерный масштаб L определяется путем задания пара-

метра ϕ , пропорционального отношению энергии, приобретаемой единицей массы газа в поле тяжести с ускорением W , к тепловой энергии. Очевидно также, что при фиксированном ϕ влияние ускорения на равновесие и движение более плотного газа будет происходить на масштабах, меньших L .

В целом конкретные значения безразмерных параметров выбирались согласно характеристикам исследовавшихся в [20] объектов.

Расчеты проникновения неоднородного облака в слой проводились с использованием разностных схем второго порядка аппроксимации типа Лакса–Вендроффа и Лакса–Фридрихса. Выбирались цилиндрическая система координат (z, r) и равномерная прямоугольная сетка с одинаковым по координатам шагом. Расчеты выполнялись в области $(0 \leq z \leq 6; 0 \leq r \leq 3)$. Шаг сетки составлял $5 \cdot 10^{-3}$, так что разрешение было примерно таким же, как в работе [17].

Граничными являлись условия симметрии при $r = 0$ и непротекания $u(0, r) = u(6, r) = 0$, $v(z, 3) = 0$ (u и v – компоненты скорости соответственно по осям z и r).

3. Распределение плотности примеси – результаты численного моделирования. В качестве основного был выбран вариант расчетов, отвечающий совокупности безразмерных параметров, использовавшихся в [20].

В цилиндрической системе координат (z, r) вектор ускорения имеет отрицательную z -компоненту $-W$, координата контактного разрыва z_c , центр сгустка располагается в точке с координатами $(z_d, 0)$. Плотность среды нормируется на свое значение на невозмущенном контактном разрыве со стороны области «1», скорость отнесена к $u_\infty = (E_1(z_{c+0}, 0))^{1/2}$ (здесь E_1 – размерная величина). Параметр ϕ полагается равным $\phi = 0.05$, а $\rho(z_{c-0}, 0)$ на порядок превышает $\rho_1(z_{c+0}, 0)$.

Плотность и скорость в сгустке в начальный момент времени задавались согласно формулам

$$\rho = \rho_{10}(z) + A_d \exp\left(-\frac{(z - z_d)^2 + r^2}{d^2}\right), u = B_d \exp\left(-\frac{(z - z_d)^2 + r^2}{d^2}\right),$$

где $\rho_{10}(z)$ – плотность в отсутствие облака, A_d и B_d – постоянные, d – характерный размер уплотнения, u – z -компонента скорости. Зависимость внутренней энергии E от координат (z, r) выбиралась такой, что при $t = 0$ давление совпадало с тем, что было в состоянии гравитационного равновесия. Это означает, что последующее движение не является изоэнтропическим.

Поскольку из (2.2) следует, что в силу принятых предположений ρ_d определяется с точностью до постоянного множителя, то начальное распределение ρ_d принималось в виде

$$\rho_d = \rho_f + A_i \exp\left(-\frac{(z - z_d)^2 + r^2}{d^2}\right)$$

Постоянная ρ_f – плотность «фона» примеси – введена для удобства расчетов ($\rho_f \sim 10^{-3}$). Соответственно величина A_i выбиралась так, чтобы $A_i \cdot A_d = 1$.

Обращаясь к результатам расчетов, видим, что формирование полости происходит путем вытеснения приповерхностных частей слоя, причем полость заполняется менее плотным газом сгустка (рис. 2, 3; $z_c = 3$; $z_d = 3.5$; $d = 0.3$). Об этом свидетельствует сравнение изоخور среды и изоخور примеси. В то же время плотность в центральной части сгустка вследствие сжимаемости увеличивается и соответственно уменьшается действие выталкивающей силы Архимеда. Это служит причиной возникновения грибовидной формы уплотнения.

На стадии образования кумулятивной струи эффект неоднородности становится наиболее существенным (рис. 4). Центральная часть сгустка практически останавли-

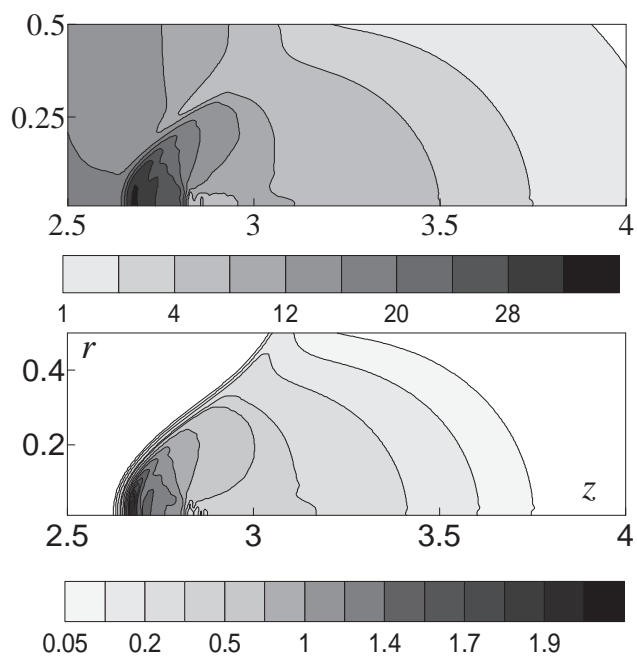


Рис. 2. Изохоры среды (вверху) и примеси (внизу) в момент времени $t = 2$; $A_d = 20$, $B_d = -0.5$.

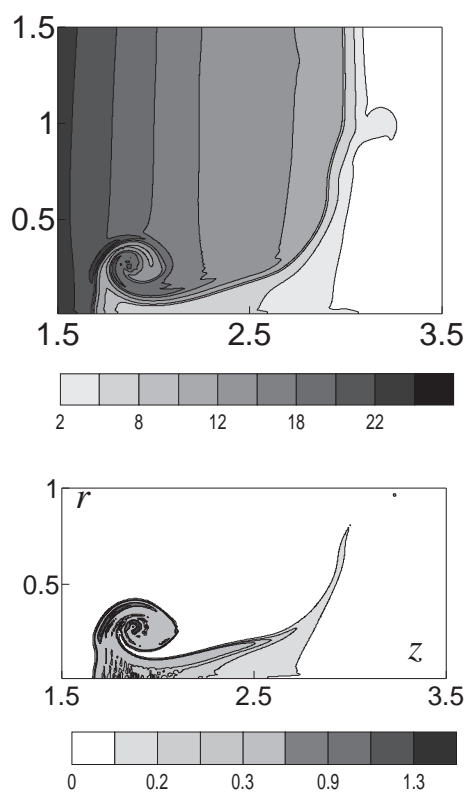


Рис. 3. Изохоры среды (вверху) и примеси (внизу) в момент времени $t = 8$; $A_d = 20$, $B_d = -0.5$.

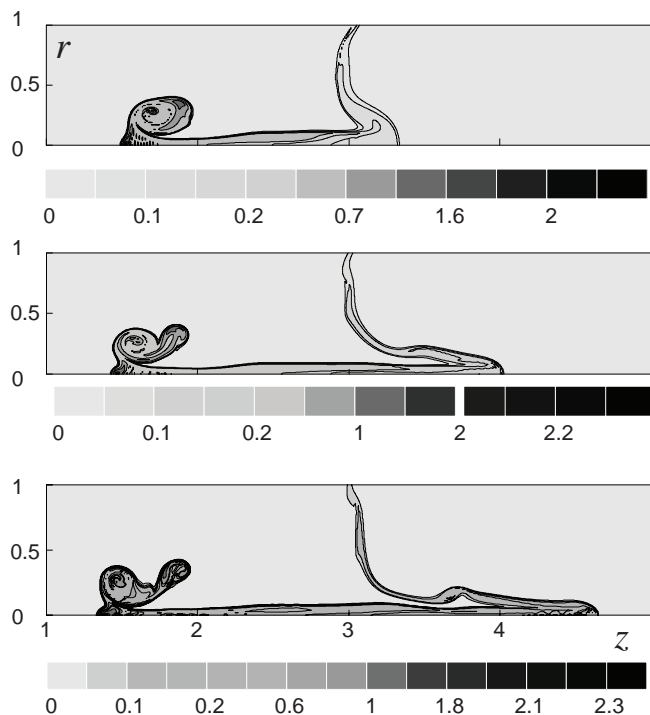


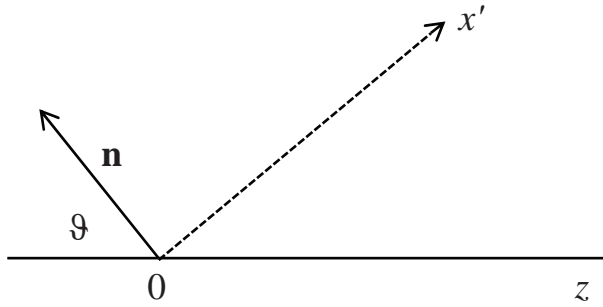
Рис. 4. Изохоры примеси на стадии формирования кумулятивной струи в моменты времени $t = 10, 12, 14$ ($A_d = 20$, $B_d = -0.5$).

вается, в то время как его менее плотные внешние части по мере замыкания полости приобретают скорость в положительном направлении оси z . При этом длина струи достаточно быстро возрастает.

Принимая во внимание результаты расчетов, можно следующим образом объяснить эффект исчезновения кумулятивной струи в случае однородного облака. При одинаковых давлении, массе и импульсе плотность в однородном облаке больше плотности в центре неоднородного облака. Для объема имеет место обратное соотношение. Поэтому при погружении такого уплотнения в слой его плотность еще более возрастает, а масса вытесняемого газа уменьшается. Соответственно уменьшается и размер полости, замыкание которой создает струю. Конечно, эти выводы справедливы лишь в принятом диапазоне безразмерных параметров.

В целом, несмотря на очевидные различия в геометрии движения и в модели среды, идея В.В. Голубева о влиянии неоднородности проникающего в слой уплотнения на эффекты кумуляции, подтверждается результатами выполненного моделирования.

4. Интенсивность излучения оптически прозрачной примеси. При интерпретации наблюдательных данных о кумулятивных струях важным является анализ интенсивности излучения, обусловленного этими объектами. Так, например, распределение интенсивности в картинной плоскости может быть использовано для определения тех направлений, для которых интенсивность максимальна. Поскольку часто излучение от уплотнений обусловлено тяжелыми элементами или пылинками, обилие которых (отношение числа частиц к числу атомов водорода) невелико, то рассмотрим теперь вопрос о нахождении интенсивности излучения, создаваемого веществом оптически прозрачного уплотнения.

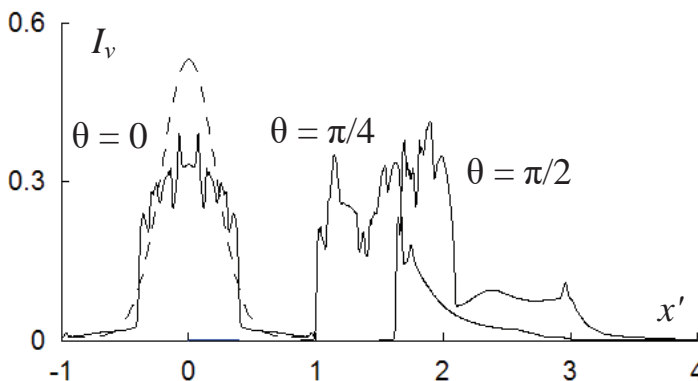
Рис. 5. Координата x' в картинной плоскости.

В случае оптически прозрачного газа интенсивность излучения примеси I_v в любом направлении пропорциональна интегралу от концентрации частиц вдоль луча зрения наблюдателя (здесь индекс «v» указывает лишь на то, что доли излучающих на разных частотах компонент примеси могут отличаться). Учитывая, что коэффициент пропорциональности в принятой выше постановке можно считать произвольным, положим интенсивность излучения I_v просто равной интегралу от плотности ρ_d .

Для вычисления I_v введем картинную плоскость, проходящую через начало координат в плоскости (z, r) (рис. 5). Картинная плоскость перпендикулярна линии зрения наблюдателя, а нормаль \mathbf{n} к ней составляет с осью z угол ϑ . Штриховой линией на рис. 5 отмечена линия пересечения картинной плоскости с плоскостью (z, r) . Расстояние вдоль линии пересечения обозначено через x' .

Характерные зависимости $I_v(x')$ представлены на рис. 6 и 7 для углов $\vartheta = 0, \pi/4, \pi/2$. Видно, что на стадии формирования полости ($t = 8$ на рис. 6) максимум $I_v(x')$ заметно уменьшился по сравнению с его величиной при $t = 0$, а при $\vartheta = \pi/2$ хорошо проявляются сжатое «ядро» и присутствие полости в промежутке изменения x' от 2 до 3. Для стадии возникновения струи ($t = 14$ на рис. 7) характерно существенное увеличение максимума $I_v(x')$ в направлении оси симметрии, являющееся следствием большого возрастания плотности в «ядре».

Таким образом, результаты сопоставления найденных путем численных расчетов особенностей $I_v(x')$ с данными наблюдений могут быть использованы при построе-

Рис. 6. Зависимость $I_v(x')$ на стадии формирования полости. Штриховая линия — распределение интенсивности при $t = 0$.

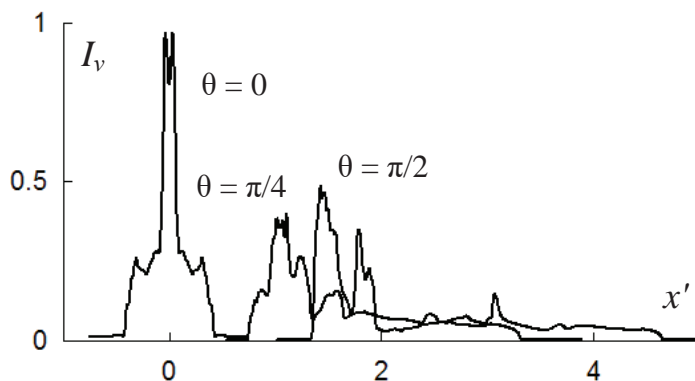


Рис. 7. Зависимость $I_v(x')$ на стадии формирования струи.

нии моделей происхождения неоднородной структуры областей активного звездообразования.

Заключение. Результаты компьютерного моделирования показали, что при взаимодействии ускоренно движущегося газового слоя с обособленным уплотнением неоднородная структура уплотнения существенно влияет на морфологию, размер и параметры кумулятивной струи. При этом струя формируется преимущественно за счет вещества внешних частей сгустка, а его сжатое более плотное «ядро» глубоко погружается внутрь слоя. Такая особенность движения отражается на распределении интенсивности излучения примесных элементов и пыли в картинной плоскости наблюдателя — на стадии образования кумулятивной струи интенсивность значительно увеличивается в области с характерным масштабом порядка размера «ядра».

В целом результаты настоящей работы могут служить подтверждением сделанного В.В. Голубевым в рамках гидродинамической модели вывода о существенном влиянии неоднородности проникающего в слой объекта на процессы кумуляции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Забабахин Е.И., Нечаев М.Н. Ударные волны и их кумуляция // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. Вып. 2(8). С. 442–450.
2. Забабахин Е.И. Кумуляция и неустойчивость. Снежинск: Изд-во РФЯЦ–ВНИИТФ, 1998. 112 с.
3. Андреев С.Г., Бабкин А.В., Баум Ф.А. и др. Физика взрыва / под ред. Орленко Л.П. Т. 2. М.: Физматлит, 2002. 648 с.
4. Лаврентьев М.А. Кумулятивный заряд и принципы его работы // УМН. 1957. Т. 12. Вып. 4(76). С. 41–56.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 416 с.
6. Gekle S., Gordillo J.M., Meer D., Lohse D. High-speed jet formation after solid object impact // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102. P. 034502.
7. Gekle S., Peters I.R., Gordillo J.M., Meer D. et al. Supersonic air flow due to solid-liquid impact // Phys. Rev. Lett. 2010. V. 104. P. 024501.
8. Williams H., Sprittles J., Padrino J., Denissenko P. Effect of ambient gas on cavity formation for sphere impacts on liquids // Phys. Rev. Fluids. 2022. V. 7. P. 094003.
9. Tenorio-Tagle G., Franco J., Bodenheimer P., Rozyczka M. Collisions of high-velocity clouds with the Milky Way: The formation and evolution of large-scale structures // Astron. & Astrophys. 1987. V. 179. P. 219–230.
10. Баранов В.Б., Краснобаев К.В. Гидродинамическая теория космической плазмы. М: Наука, 1977, 335 с.
11. Спитцер Л. мл. Физика межзвездной среды М: Мир, 1981, 351 с.

12. *Tielens A.G.G.M.* The Physics and Chemistry of the Interstellar Medium. Cambridge: Univ. Press, 2005. 495 pp.
13. *Shin M.-S., Stone J.M., Snyder G.F.* The magnetohydrodynamics of shock -cloud interaction in three dimensions // *The Astrophys. J.* 2008. V. 680. P. 336–348.
14. *Yirak K., Frank A., Cunningham A.J.* Self-convergence of radiatively cooling clumps in the interstellar medium // *The Astrophys. J.* 2010, V. 722, P. 412–42.
<https://doi.org/10.1088/0004-637X/722/1/412>
15. *Goldsmith K.J.A., Pittard J.M.* The interaction of a magnetohydrodynamical shock with a filament // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2016. V. 461. P. 578–605.
<https://doi.org/10.1093/mnras/stw1365>
16. *Котова Г.Ю., Краснобаев К.В.* Ускорение сферической нейтральной оболочки, формируемой ионизационно-ударным фронтом в неоднородной межзвездной среде // *Письма в Астрон. ж.* 2009. Т. 35. № 3. С. 189–198.
17. *Pittard J.M.* Tails of the unexpected: the interaction of an isothermal shell with a cloud // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2011. V. 411. P. L41–L45.
18. *Deharveng L., Schuller F., Anderson L.D. et al.* A gallery of bubbles. The nature of the bubbles observed by Spitzer and what ATLASGAL tells us about the surrounding neutral material // *Astron. & Astrophys.* 2010. V. 523. P. 1–135.
19. *Краснобаев К.В., Котова Г.Ю., Тагирова Р.Р.* Двумерные возмущения ускоренного движения неоднородных газовых слоев и оболочек в межзвездной среде // *Письма в Астрон. ж.* 2015. Т. 41. № 3–4. С. 123–132.
20. *Kotova G.Yu., Krasnobaev K.V.* Interaction of an accelerating layer with a cloud: formation of tails and cumulative jets // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2020. V. 492. P. 2229–2235.
21. *Kotova G.Yu., Krasnobaev K.V.* Hydrodynamic instabilities in the models of the formation of young stellar objects // *Fluid Dyn.* 2022. V. 57. Suppl. 1. P. S26–S34.
22. *Голубев В.В.* Исследования по теории удара струи жидкости и некоторые ее приложения. М.: Изд-во МГУ, 1975.

Redistribution of Mass during Penetration of a Non-Uniform Cloud into an Accelerating Gas Layer

K. V. Krasnobaev^{a,b,*}

^a*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

^b*Space Research Institute of the RAS (IKI), Moscow, Russia*

^{*}*e-mail: kvk-kras@list.ru*

The unsteady axisymmetric motion of an ideal perfect gas is numerically simulated, arising from the interaction of a spherical cloud with a gas layer that was initially in gravitational equilibrium in a constant gravitational field. The cloud matter is considered to contain an impurity, the particles of which serve as markers and do not affect the motion of the medium. It has been established that the most massive central part of the condensation is deeply immersed inside the layer, while the parameters of the cumulative jet significantly depend on the gas density at the periphery of the cloud. Under the assumption that the impurity substance is optically thin to radiation, the intensity distribution in the picture plane is determined and the direction of the maximum intensity value is revealed.

Keywords: cumulative jet, penetration of cloud into the gas layer, mass redistribution

REFERENCES

1. *Zababakhin E.I., Nechaev M.N.* Electromagnetic-field shock waves and their cumulation // *JETP*, 1958, vol. 6, no. 2, pp. 345–351.
2. *Zababakhin E.I.* Cumulation and Instability. Snezhinsk: VNIITF Pub., 1998. 112 p. (in Russian)
3. *Andreev S.G., Babkin A.V., Baum F.A. et al.* Physics of Explosion. Vol. 2 / ed. by *Orlenko L.P.* Moscow: Fizmatlit, 2002. 648 p. (in Russian)

4. *Lavrent'ev M.A.* Cumulative charge and the principles of its operation // *Uspekhi Mat. Nauk*, 1957, vol. 12, no. 4(76), pp. 41–56.
5. *Lavrentiev M.A., Shabat B.V.* Problems of Hydrodynamics and Their Mathematical Models. Moscow: Nauka, 1977. (in Russian)
6. *Gekle S., Gordillo J.M., Meer D., Lohse D.* High-speed jet formation after solid object impact // *Phys. Rev. Lett.*, 2009, vol. 102, pp. 034502.
7. *Gekle S., Peters I.R., Gordillo J.M., Meer D. et al.* Supersonic air flow due to solid-liquid impact // *Phys. Rev. Lett.*, 2010, vol. 104, pp. 024501.
8. *Williams H., Sprittles J., Padrino J., Denissenko P.* Effect of ambient gas on cavity formation for sphere impacts on liquids // *Phys. Rev. Fluids*, 2022, vol. 7, pp. 094003.
9. *Tenorio-Tagle G., Franco J., Bodenheimer P., Rozyczka M.* Collisions of high-velocity clouds with the Milky Way: the formation and evolution of large-scale structures // *Astron. & Astrophys.*, 1987, vol. 179, pp. 219–230.
10. *Baranov V.B., Krasnobaev K.V.* Hydrodynamic Theory of Space Plasma. Moscow: Nauka, 1977. 335 p.
11. *Spitzer L. (Jr.)* Physical Processes in the Interstellar Medium. N.Y.: Wiley, 1978.
12. *Tielens A.G.G.M.* The Physics and Chemistry of the Interstellar Medium. Cambridge: Univ. Press, 2005. 495 p.
13. *Shin M.-S., Stone J.M., Snyder G.F.* The magnetohydrodynamics of shock–cloud interaction in three dimensions // *The Astrophys. J.*, 2008, vol. 680, pp. 336–348.
14. *Yirak K., Frank A., Cunningham A.J.* Self-convergence of radiatively cooling clumps in the interstellar medium // *The Astrophys. J.*, 2010, vol. 722, pp. 412–424.
<https://doi.org/10.1088/0004-637X/722/1/412>
15. *Goldsmith K.J.A., Pittard J.M.* The interaction of a magnetohydrodynamical shock with a filament // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2016, vol. 461, pp. 578–605.
<https://doi.org/10.1093/mnras/stw1365>
16. *Kotova G.Yu., Krasnobaev K.V.* Acceleration of a spherical neutral shell produced by an ionization–shock front in an inhomogeneous interstellar medium // *Astron. Lett.*, 2009, vol. 35, no. 3, pp. 189–198.
17. *Pittard J.M.* Tails of the unexpected: the interaction of an isothermal shell with a cloud // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2011, vol. 411, pp. L41–L45.
18. *Deharveng L., Schuller F., Anderson L.D. et al.* A gallery of bubbles. The nature of the bubbles observed by Spitzer and what ATLASGAL tells us about the surrounding neutral material // *Astron. & Astrophys.*, 2010, vol. 523, pp. 1–135.
19. *Krasnobaev K.V., Kotova G.Yu., Tagirova R.R.* Two-dimensional perturbations of the accelerated motion of inhomogeneous gas layers and shells in the interstellar medium // *Astron. Lett.*, 2015, vol. 41, no. 3–4, pp. 104–113.
20. *Kotova G.Yu., Krasnobaev K.V.* Interaction of an accelerating layer with a cloud: formation of tails and cumulative jets // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2020, vol. 492, pp. 2229–2235.
21. *Kotova G.Yu., Krasnobaev K.V.* Hydrodynamic instabilities in the models of the formation of young stellar objects // *Fluid Dyn.*, 2022, vol. 57, suppl. 1, pp. S26–S34.
22. *Golubev V.V.* Studies on the Theory of Liquid Jet Impact and Some of Its Applications. Moscow: MSU Pub., 1975.

УДК 532.5

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ МАШУЩЕГО ПОЛЕТА

© 2024 г. В. Д. Котелкин^{1,*}¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*e-mail: kotelkin@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию 14.03.2024 г.

После доработки 25.04.2024 г.

Принята к публикации 15.05.2024 г.

2D-моделирование машущего полета осуществляется на основе конечно-разностных уравнений Навье–Стокса, а крыло имитируется ансамблем лагранжевых частиц. Моделирование проводится в двух плоскостях — параллельной и ортогональной направлению полета. Воспроизводится вихревая дорожка Голубева, создающая тягу; выясняется смысл восьмеркообразной кинематики; показывается, что вихри, индуцируемые отмахкой крыла, ликвидируют отрыв потока. Установлено, что создание подъемной силы с помощью складных крыльев втрое уменьшает энергозатраты птиц. Исследована аэродинамика модели циклокоптера с гибридной кинематикой.

Ключевые слова: машущий полет, вязкая жидкость, безотрывное обтекание, уравнения Навье–Стокса, вихри, численное моделирование, сила тяги, подъемная сила, восьмеркообразная кинематика, циклокоптер.

DOI: 10.31857/S0032823524060022 EDN: IHBNZS

1. Введение. Машущий полет издавна привлекает внимание инженеров, механиков и биологов. Не удивительно, что им заинтересовался первый заведующий нашей кафедрой аэромеханики МГУ им. М.В. Ломоносова, профессор Владимир Васильевич Голубев. “Мы научились замечательно летать, но насколько экономно мы летаем? Мы имеем в природе замечательные примеры полета — полет птиц. Взмахами крыльев они создают себе и подъемную силу и тягу; бесшумно, с большой скоростью и на очень большие расстояния летят они, взмахивая крыльями. И рядом наши самолеты с их дико ревущими моторами, с пропеллерами, делающими тысячи оборотов в минуту. пожирающие в своих моторах колоссальные запасы бензина.”

Основная проблема в теории машущего крыла — это изучение механизма образования тяги путем взмахов крыльев, который до работ В.В. Голубева был совершенно не ясен. [1]: “В некоторых исследованиях по теории крыла сила тяги объясняется подсосыванием, возникающим у передней кромки крыла.” “Восполнить пробел в теории крыла в этом направлении и составляло цель исследований, проведенных мною и моими сотрудниками в институте механики МГУ”. Владимир Васильевич дал изящное аналитическое объяснение силы тяги в рамках представлений идеальной жидкости, заменив вязкий пограничный слой набором катящихся вихрей. При взмахах крыла в верхней и нижней точках от него отходят вихри, и за крылом образуется вихревая дорожка Голубева, в которой направление вращения вихрей противоположно по отношению к известной дорожке Кармана за неподвижным телом. Вследствие чего поток за телом ускоряется, и сила сопротивления заменяется силой тяги.

Ученик Н.Е. Жуковского, профессор В.В. Голубев, получивший фундаментальные результаты по колеблющемуся с большой амплитудой крылу, заложил теоретическую основу исследований машущего полета, изложенную в его трудах 1942–1957 гг. [1].

Необходимо отметить, что это было сделано намного раньше, чем за рубежом, где основоположником изучения машущего полета считается английский ученый Дж. Лайтхилл [2].

Академик Георгий Иванович Петров, заменивший В.В. Голубева на посту заведующего кафедрой, всегда с большим интересом и симпатией относился к работам по машущему полету. Под его руководством исследования машущего полета получили дальнейшее развитие в работах доцента А.А. Зайцева [3]. С появлением у нас компьютеров, на легендарной БЭСМ-6, ученики А.А. Зайцева [4–6] проводили первые численные исследования машущего полета. Ими были собраны и обработаны данные по кинематике движения крыльев птиц, насекомых и рыб. В группе А.А. Зайцева расчеты проводились, также как и В.В. Голубевым, по уравнениям Эйлера для идеальной жидкости. Влияние вязкости учитывалось приближенно посредством моделирования вихревой пелены за крылом, что позволяло исследовать трехмерные задачи. Под руководством А.А. Зайцева были защищены кандидатские диссертации Тюревым В.В. [4], Шариной Л.А. [5] и Федотовым А.А. [6], уникальные результаты которых не потеряли своей актуальности и сегодня. На семинаре А.А. Зайцева мы слушали доклад о двумерном численном моделировании машущего полета известного шведского специалиста К. Густафсона [7].

Другим первопроходцем численных исследований нестационарных движений крыла был заведующий лабораторией НИИ механики МГУ А.И. Швец [8]. В группе А.И. Швеца численное моделирование развивалось на базе уравнений Навье–Стокса для вязкой жидкости в двумерной постановке. Конечно, уровень вычислительной техники того времени допускал проведение лишь достаточно простых численных исследований. Анализируя расчеты по разгону крыла Г.И. Петров обратил внимание на то обстоятельство, что сначала обтекание, сход потока и аэродинамические силы соответствуют идеальной жидкости, и только через некоторое время действие вязкости сносит отрыв на заднюю кромку. Георгий Иванович высказал гипотезу: “Птицы ухитряются махать крыльями таким образом, чтобы летать как в идеальной жидкости”. Первая проверка этой идеи Г.И. Петрова представлена в [9].

В настоящее время, благодаря прогрессу вычислительной техники и компьютерных технологий, численные исследования машущего полета очень активно развиваются во многих странах [10–15].

Следует отметить инженерные успехи, в Интернете можно найти много примеров успешно летающих машущих моделей.

2. Кинематика крыльев. Простейшая схема Голубева, в которой плоская пластина совершает колебания в условиях плоскопараллельного течения, позволяет получить силу тяги, но она далека от маховых движений крыльев в реальных условиях. В природе наблюдаются разнообразные способы полета и плавания птиц, бабочек, саранчи, китообразных, когда их крылья и плавники совершают поступательно-крутильные движения. Необходимые для расчетов кинематические данные о движениях, совершаемых крыльями птиц, насекомых и плавниками рыб были собраны в группе А.А. Зайцева, рис. 1.

Характерной траекторией поступательного движения (центральной точки) крыла является удлиненная восьмерка А–В–С–D. Во время опускания из верхней части траектории В–С крылья пронируют (вращение, при котором передний край крыла идет вниз) и совершают резкую отмашку назад С–D, при которой их скорость должна быть значительно больше поступательной скорости полета. Обратное вращение крыльев происходит в нижней части траектории С–А с супинацией (вращение, при котором передний край крыла идет вверх), после чего наблюдается фаза плавной проводки крыльев на закритических углах атаки вперед и вверх А–В, включающая в движение все крыло, как это делают ласточки и соколы, или же часть крыла, как это делают чайки.

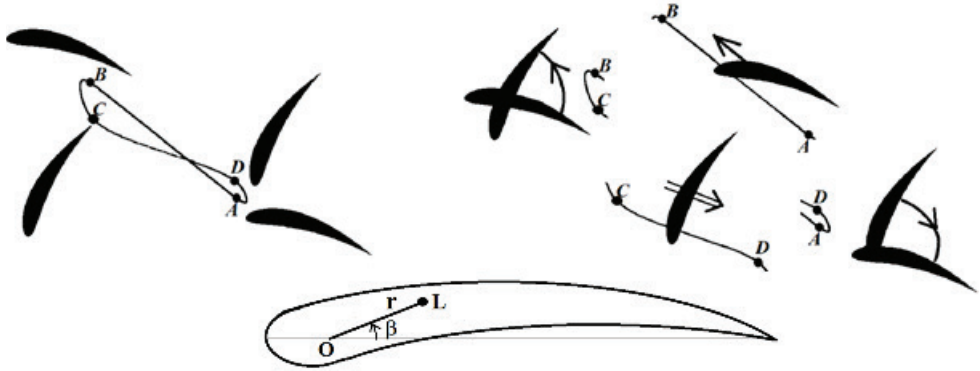


Рис. 1

Двумерная поступательно-вращательная кинематика задается с помощью трех периодических функций

$$\{x_0(t), y_0(t), \alpha_0(t)\}, \quad (2.1)$$

(x_0, y_0) — задают поступательное перемещение какой-либо точки объекта, например центра тяжести; α_0 — задает угол, определяющий вращательное движение $\omega_0(t) = \dot{\alpha}_0(t)$ объекта вокруг точки (x_0, y_0) .

Естественно, что форма объекта также должна быть задана, это происходит при выборе ансамбля лагранжевых частиц $\{L\}$, имитирующих тело. Для этого дополнительно вводится система полярных координат, жестко связанная с телом, рис. 1 снизу. В качестве лагранжевых координат принимаются полярные координаты $r(L), \beta(L)$ частиц при нулевом угле атаки. Тогда эйлеровы координаты частиц будут равны

$$x^e(L, t) = x_0(t) + r(L) \cos(\beta(L) - \alpha_0(t)), \quad y^e(L, t) = y_0(t) + r(L) \sin(\beta(L) - \alpha_0(t)), \quad (2.2)$$

а их скорости —

$$u(L, t) = \dot{x}_0(t) + [y(L, t) - y_0(t)] \omega_0(t), \quad v(L, t) = \dot{y}_0(t) - [x(L, t) - x_0(t)] \omega_0(t) \quad (2.3)$$

При проведении расчетов кинематика в виде восьмерки строилась следующим образом, сначала аналитически задавались ее кусочно-непрерывные части, а потом разрывы сглаживались с помощью численного осреднения.

3. Уравнения и граничные условия. Для сравнительно небольших скоростей полета воздух можно считать несжимаемой средой, движение которой с учетом вязкости описывается уравнениями Навье—Стокса. Будем считать, что рассматриваемый объект — крыло или пластинка — совершает периодические машущие движения и осуществляет прямолинейный полет без маневрирования. В этом случае осредненная скорость перемещения объекта постоянна. Используем для моделирования декартову систему координат, связанную с объектом и движущуюся со скоростью V_∞ , которую примем за масштаб скорости. За масштаб длины возьмем длину хорды крыла L , за масштаб времени — $t_0 = L/V_\infty$, а за масштаб давления — $p_0 = \rho V_\infty^2$. Тогда в безразмерной форме 2D-уравнения Навье—Стокса запишутся в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta u \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta v \quad (3.3)$$

В эти уравнения входит критерий подобия – число Рейнольдса $\text{Re} = V_\infty L/\nu$, где ν – кинематическая вязкость воздуха. Вторым критерием подобия в случае машущего полета является число Струхала $\text{Sh} = t_0/t_c = L/t_c V_\infty$, характеризующее частоту колебаний, где t_c – безразмерный период циклических колебаний крыла.

Решения уравнений (3.1)–(3.3) должны удовлетворять двум граничным условиям – отсутствию возмущений однородного потока вдали от тела

$$u|_\infty = 1, v|_\infty = 0 \quad (3.4)$$

и нестационарному условию прилипания на поверхности тела, скорость и местоположение которого в каждый момент времени известны по заданной кинематике (2.1)–(2.3). Уравнения (3.1)–(3.3) и граничные условия (3.4), (2.1)–(2.3) выражают математическую формулировку задачи. При ее численном решении задавалось также начальное поле скоростей, которое оказывало заметное влияние на 2–3 начальных цикла, а затем течение выходило на исследуемый режим, не зависящий от начальных условий. Для полетов птиц число Re имеет порядок $10^2 \div 10^3$ (число Струхала для дорожки Кармана ~ 0.17).

Главными результирующими аэродинамическими характеристиками машущего полета являются подъемная сила Y и сила сопротивления X . При больших числах Рейнольдса, рассматриваемых в работе, силами трения пренебрежем, и будем учитывать только силы давления. В относительных переменных их заменяют коэффициенты – давления C_p , подъемной силы C_y и силы сопротивления C_x .

По определению

$$C_p = (p_{\text{dim}} - p_\infty)/(\frac{1}{2} \rho V_\infty^2) = 2p_{\text{dimless}}, C_x, C_y = X, Y/(\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 L)$$

В связанной с профилем лагранжевой системе координат C_y находится интегрированием давления вдоль нижней и верхней сторон профиля, а C_x – вдоль его левой и правой “сторон”, т.е. при нулевом угле атаки.

$$C_y = 2 \int (p_{\text{down}}(x^L) - p^{\text{up}}(x^L)) dx^L, C_x = 2 \int (p_{\text{left}}(y^L) - p_{\text{right}}(y^L)) dy^L$$

Размерные силы могут быть вычислены по формуле $X, Y = (\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 L) C_x, C_y$.

4. Численная реализация и тестирование. Для численного решения уравнений Навье–Стокса в работе используется метод конечных разностей, частные производные аппроксимируются центральными разностями со вторым порядком точности на равномерной декартовой сетке. При интегрировании уравнений Навье–Стокса по времени вклады от процессов различной физической природы – конвективного переноса, вязкой диссипации и сил давления – вычисляются отдельно:

$$\begin{aligned} \delta u &= \delta u^{\text{conv}} + \delta u^{\text{vis}} + \delta u^{\text{press}}, \delta u^{\text{vis}} = \delta t \frac{\Delta u}{\text{Re}}, \delta u^{\text{press}} = -\delta t \frac{\partial p}{\partial x} \\ \delta v &= \delta v^{\text{conv}} + \delta v^{\text{vis}} + \delta v^{\text{press}}, \delta v^{\text{vis}} = \delta t \frac{\Delta v}{\text{Re}}, \delta v^{\text{press}} = -\delta t \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}$$

Гиперболический процесс конвективного переноса, вычисляется вдоль характеристик, которыми являются линии тока. При этом необходимо соблюдать ограничение Куранта на временной шаг δt , заключающееся в том, что максимальное переме-

шение не должно превосходить шаг расчетной сетки $V_{\max} \delta t < h$. Параболический процесс вязкой диссипации интегрируется с помощью попеременно-треугольного метода расщепления [16]. Вычисляется промежуточное поле скоростей (\tilde{u}, \tilde{v}) , учитывающее конвективный и вязкий вклады.

Затем находится правая часть уравнения Пуассона для определения распределения давления, обеспечивающего [17,18] выполнение условия несжимаемости (3.1)

$$\Delta p = \frac{1}{\delta t} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right)$$

Давление находится в результате решения эллиптической краевой задачи по мультигридной методике [19–21], после чего вычисляется окончательное поле скорости (u, v) на новом временном слое $t^{n+1} = t^n + \delta t$

$$u = \tilde{u} - \delta t \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v = \tilde{v} - \delta t \frac{\partial p}{\partial y}$$

Расчетная область имеет форму прямоугольника, рис. 2, а внешние граничные условия (3.4) редуцируются. Слева на входе потока ставятся условия $u = 1, v = 0, p = 0$, соответствующие однородному потоку. Сверху и снизу сохраняется условие $v = 0$, и используются условия отсутствия касательных напряжений $du/dy = 0$ и $dp/dy = 0$, соответствующие скользким стенкам. Справа на выходе потока задаются “мягкие” условия: $dv/dx = 0, du/dx = 0$ и $dp/dx = 0$.

Подвижный объект моделируется набором лагранжевых частиц $\{L\}$, идентифицируемых полярными координатами $\{r(L), \beta(L)\}$. В приводимых далее расчетах в одной эйлеровой ячейке размещались 4 лагранжевых частицы, на хорду крыла отводилось 320 расчетных узлов. Для поступательно-вращательных движений (2.1) текущие эйлеровы координаты лагранжевых частиц вычисляются по формулам (2.2).

Отметим, что такой численный подход не только удобен из-за его простоты и универсальности, но и обладает высокой эффективностью.

5. Тестирование. Первоначальное тестирование численного алгоритма проводилось путем расчета дорожки Кармана за неподвижным цилиндром и сопоставления результатов расчета с экспериментальными данными [22], рис. 2, а, и показало хорошее совпадение, сужение следа в расчете отражает ограничение расчетной области непроницаемыми стенками.

Тестирование полного алгоритма, включающего осцилляции обтекаемого объекта, проводилось путем сравнения с имеющимися в литературе численными результатами других авторов. На рис. 2, б приведены результаты тестирования (сверху — вихри,

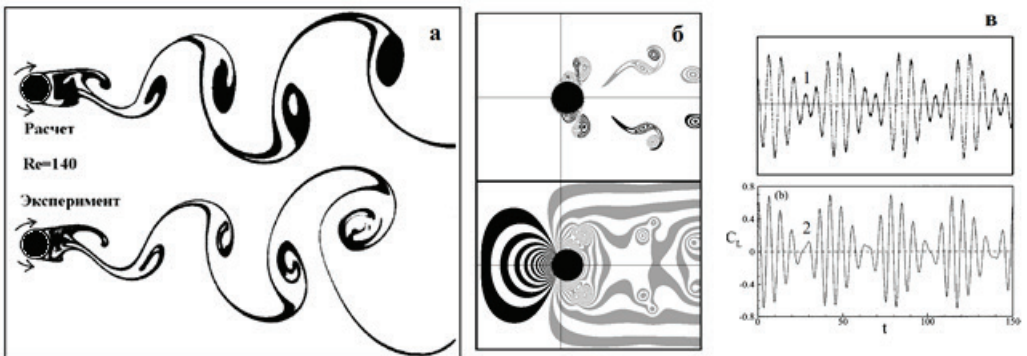


Рис. 2.

снизу — изобары давления) для цилиндра, совершающего колебания вдоль потока, воспроизведен режим (Locked-on modes [23]) симметричной вихревой дорожки. На рис. 2,в приведены результаты тестирования для случая, когда цилиндр совершает 15-градусные вращательные колебания, воспроизведен наиболее сложный характер изменения подъемной силы [24]. Верификация показала, что численный алгоритм хорошо воспроизводит сложные течения, возникающие при поступательных и вращательных осцилляциях. В приводимых далее численных экспериментах число Рейнольдса, если оно не указывается, равно 1000.

Важным инструментом компьютерного моделирования являются программы, визуализирующие результаты расчетов. Удобно представлять и анализировать характер течения через динамические визуализации завихренности $\omega(t) = \partial u / \partial y - \partial v / \partial x$. Визуализации в работе представлены в натуральной тепловой палитре, т.е. положительные значения изображаются оттенками красного цвета, а отрицательные значения — оттенками синего цвета; индекс цвета пропорционален значению изображаемой величины (в случае больших значений цвета зацикливаются). Крыловой профиль окрашивается черным цветом.

Завершая тестовые расчеты, проведем моделирование вихревой дорожки Голубева, порождающей силу тяги. На рис. 3а, б приведены результаты обтекания симметричного крылового профиля, совершающего вертикальные гармонические колебания: $y_0(t) = A \sin(2\pi f t)$, $x_0(t) = 0$, $\alpha_0(t) = 0$. Для сравнения на рис. 3,в, г показаны те же данные для дорожки Кармана за неподвижным профилем.

Слева показана завихренность, красные вихри вращаются по часовой стрелке, синие — против. Справа показаны отклонения горизонтальной скорости от скорости набегающего потока. На рис. 3 наглядно видно, что при осцилляциях происходит обращение вихревой дорожки, и замедленный синий след превращается в ускоренный — красный, а, значит, вместо сопротивления возникает сила тяги.

Вихревая дорожка В.В. Голубева была воспроизведена экспериментально в институте механики МГУ и ленинградской школой биологов (Бродский А.К., 1988) в эксперименте с насекомым. Примечательно, что до исследований В.В. Голубева интенсивное вихреобразование за плывущей рыбой расценивалось как бесполезная трата энергии, а на самом деле оказалось наоборот: вихри вызывают образование тяги.

6. Особенности машущего полета. Всевозможные формы крыльев и кинематики их движений, а соответственно и варианты для моделирования, неисчислимы. Поэтому после отладки алгоритмов перед исследователем неизбежно возникает принципи-

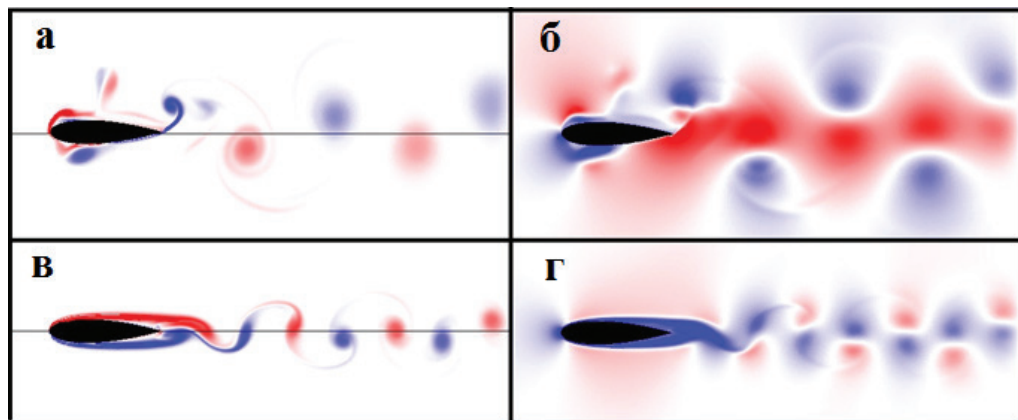


Рис. 3.

альный вопрос — что моделировать и зачем? Выступая на защите Л.В. Шариной [5], Г.И. Петров пошутил, “что в работе сделана попытка научить муху правильно летать, хотя в Божьем КБ было достаточно времени для отработки моделей”. Первым направлением численных экспериментов выберем изучение и освоение особенностей машущего полета, наблюдаемых в природе.

1. Восьмеркообразная кинематика. Для выяснения и понимания особенностей машущего полета начнем численные эксперименты с самой простой кинематики (вырожденной восьмерки): крыло под углом атаки движется вперед по прямой, затем поворачивается (против часовой стрелки) на 90° , затем быстро откатывается назад по той же прямой и затем поворачивается обратно в исходное положение, все движения осуществляются с постоянными скоростями. Форма профиля задается аналитически, как средняя линия $y_m(x)$ и толщина $Y_p(x) = \varepsilon x^{1/2}(1-x)$, так, что $Y^+ = y_m + Y_p$, $Y^- = y_m - Y_p$.

Расчет, как и ожидалось, показывает, кривые 1 на рис. 4, что при отмашке создаются сила тяги и подъемная сила, а при поступательном перемещении крыла вперед с углом атаки подъемная сила тоже создается, но действует сопротивление. Еще хуже дело обстоит при поворотах крыла, так как теперь негативной становится подъемная сила. Была проведена серия численных экспериментов с модификациями кинематики поворотов. Выяснилось, что исправить ситуацию можно, если одновременно с поворотом опускать крыло вниз и отводить назад примерно со скоростью потока. Т.е. чтобы поворот происходил как бы в неподвижной среде, понятно, что при этом негативные воздействия потока становятся минимальными. Таким образом, мы приходим к кинематике в форме удлинненной восьмерки и понимаем ее динамический смысл. Отвод крыла назад и вниз при его развороте в верхней точке с подходящим темпом и амплитудой позволяет не только избежать негативных силовых воздействий, а наоборот дополнительно увеличить и подъемную силу и тягу крыла, кривые 2 на рис. 4.

Видно, что в итоге подъемная сила всегда положительна и значительно возрастает при отмашке; отрицательное сопротивление, соответствующее силе тяги, причем тоже значительной, также наблюдается при отмашке и компенсирует сопротивление, неизбежно возникающее при движении крыла вперед.

2. Ликвидация отрыва с помощью вихрей. Обратимся к гипотезе Г.И. Петрова “птицы ухитряются ... летать как в идеальной жидкости”. Если исходить из парадокса Д’Аламбера — Эйлера, то для снижения сопротивления надо стремиться к безотрывному обтеканию. В случае неподвижного крылового профиля отрыв потока с передней кромки наступает при превышении критического угла атаки ($10 \div 15^\circ$). Тогда

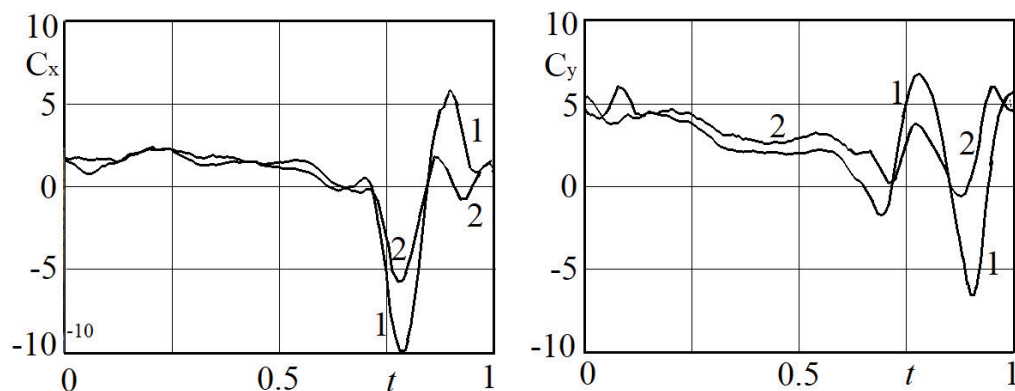


Рис. 4.

слова Г.И. Петрова про искусство полета в идеальной среде следует понимать, как умение махать крыльями так, чтобы за короткое время безотрывного обтекания использовать аэродинамические преимущества больших углов атаки. Из скоростной киносъемки известно, что при машущем полете угол атаки может достигать значений $20\div 30^\circ$, гораздо выше критических. Но киносъемка не видит движение и сопутствующие завихрения воздуха, а двумерное численное моделирование позволяет это сделать очень наглядно. Визуализация вихрей, полученных в расчете, результаты которого приведены на рис. 5, подтверждает гипотезу Г.И. Петрова.

Кадр 1 кинограммы показывает положение профиля в его верхней точке; кадр 2 показывает, что при повороте крыла против часовой стрелки сходящая с его передней кромки вихревая пелена сворачивается в крупный вихрь красного цвета, вращающийся по часовой стрелке. Затем при отмашке, кадр 3, и обратном повороте крыла, кадр 4, вихревая пелена, сходящая с острой задней кромки, сворачиваясь, формирует второй крупный вихрь синего цвета, вращающийся против часовой стрелки. Последующее продвижение крыла вперед происходит между этими интенсивными вихрями, направления вращения которых, кадры 5–7, сначала способствуют быстрой ликвидации отрыва, возникающего при отмашке и повороте крыла, а затем задерживают образование нового отрыва на закритическом угле атаки. В этой игре участвует и набегающий поток, с нижней стороны крыла он способствует ликвидации отрыва, а с верхней стороны, наоборот, ведет к отрыву, но ему противостоит созданный крылом крупный синий вихрь. Важную роль этих вихрей (leading-edge vortex, trailing-edge vortex) отмечают многие авторы [12,15].

3. *Подъемная сила и частота взмахов крыльями.* Сила тяги имеет первостепенное значение для плавания в воде, где весу противостоит сила Архимеда. При полете в воздухе главную роль играет подъемная сила, и на первый план выходит вопрос ее создания. В.В. Голубев, исследуя режим “зависания” птиц и насекомых на месте,

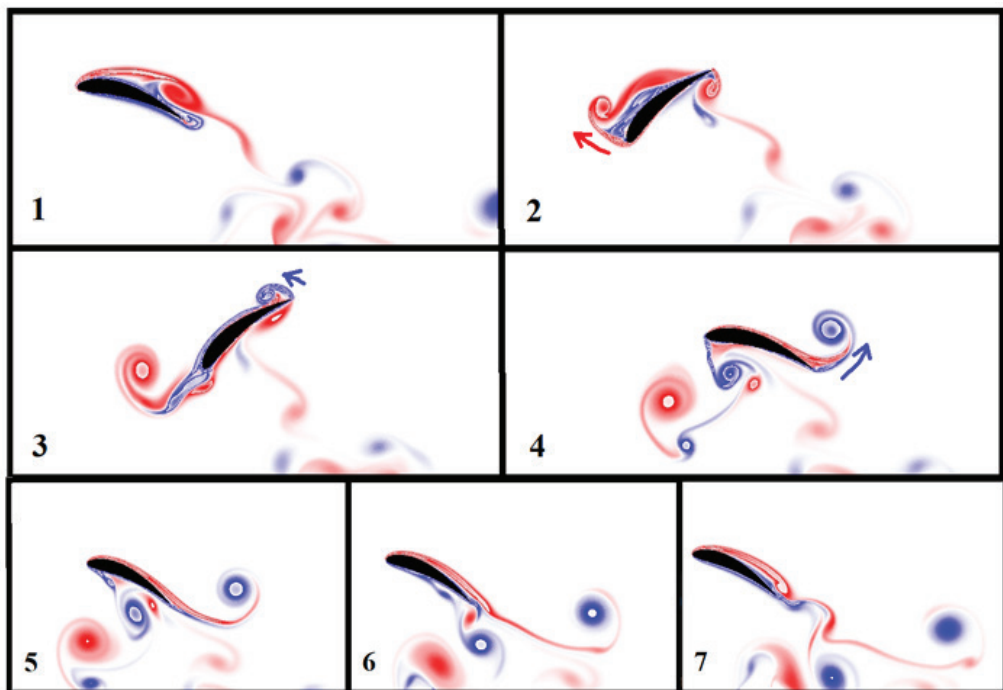


Рис. 5.

объяснял его поворотом направления поступательных осцилляций крыла на 90° , т.е. заменой вертикальных перемещений на горизонтальные перемещения. Тогда создаваемая крылом вихревая дорожка будет направлена вниз и обеспечит подъемную силу.

Наблюдения за полетом птиц и насекомых показывают, что в природе встречаются разные виды маховых движений, совершаемых крыльями. Так как форма крыльев и тел реальных птиц трехмерна, то и кинематика крыльев в общем случае может быть весьма сложной. Но очень распространена и простая — чисто вращательная кинематика, при которой крылья совершают только угловые осцилляции, поднимаясь и опускаясь, как показано в центральной части рис. 6. Тогда, оставаясь по-прежнему в рамках двумерного расчета, можно проводить альтернативное моделирование в плоскости, ортогональной направлению полета. Причем теперь при вычислении подъемной силы появляется возможность учесть влияние, которое оказывает туловище птицы, рис. 6. Отметим, что похожая схема махания крыльями также рассматривалась В.В. Голубевым при описании структуры потока вокруг бабочки-толстоголовки.

Хорошо известно [11], что подъемная сила нелинейно быстро растет при увеличении частоты осцилляций. Все насекомые летают, махая крыльями с высокой частотой, даже не обладая аэродинамической формой, как например майские жуки. На рис. 6,а показано быстрое уменьшение коэффициента подъемной силы $C_y(t)$ при снижении частоты взмахов: кривые 1, 2 и 3 соответствуют числам Струхала 1.0, 0.5 и 0.25. Характерной чертой кинематики птиц и насекомых является равномерность движений, крылья безостановочно поднимаются и опускаются с одинаковой скоростью.

4. *Неравномерная кинематика.* Была предпринята попытка увеличить подъемную силу за счет более резкой отмашки, время которой (при сохранении общего периода цикла t_c) в три раза меньше времени взмаха. Результат этого эксперимента — кривая 2 на рис. 6,б, вместе с которой для сравнения показан равномерный случай — кривая 1. Видно, что, хотя максимум $C_y(t)$ и увеличился в два раза, интегральное значение подъемной силы практически не изменилось, так как время отмашки сократилось. Этот результат говорит в пользу простой равномерной кинематики и нецелесообразности разработки технических моделей с неравномерной вращательной кинематикой.

5. *Крылья.* На рис. 6 так же видно, что при подъеме крыльев действует значительная негативная подъемная сила. Скоростная видеосъемка полета птиц показывает, что они машут крыльями равномерно, но при этом многие птицы частично складывают крылья при подъеме, а потом полностью раскрывают их при отмашке. Очевидно, что

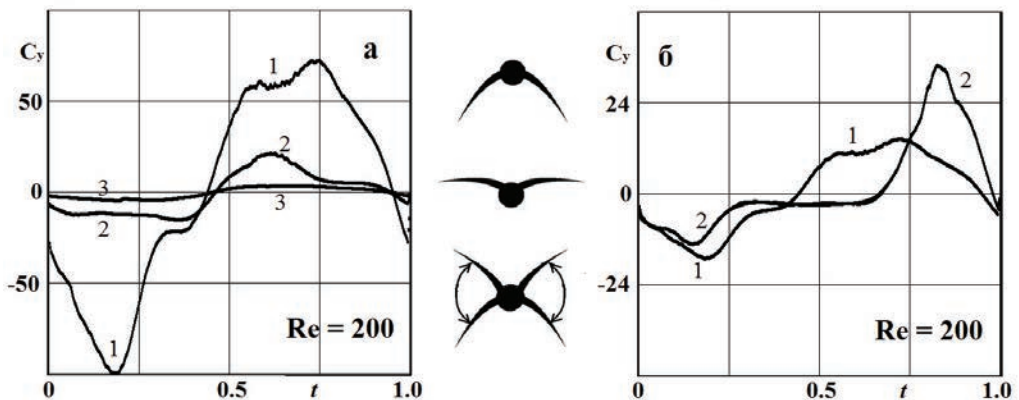


Рис. 6.

сгибание крыла при подъеме должно нивелировать негативный эффект и увеличить интегральную подъемную силу.

Лагранжев подход, используемый в работе для описания движений крыла, позволяет моделировать не только рассмотренные выше твердотельные — поступательно-вращательные перемещения, но и добавлять к ним деформации крыла [12, 15]. Была разработана подпрограмм, реализующая более сложную кинематику, включающую отворот назад половины крыла во время подъема,

В левой части рис. 7 показано поведение коэффициента подъемной силы $C_y(t)$, кривая 1 представляет простые крылья, а кривая 2 — складные. Видно, что негативная подъемная сила значительно уменьшилась, но вместе с ней неожиданно уменьшилась и позитивная часть подъемной силы. Из сравнения кривых на графике видно, что экстремальные значения $C_y(t)$ на складных крыльях уменьшились примерно в три раза по сравнению с простыми крыльями. А так как амплитуды движений крыльев, т.е. их перемещения, в эксперименте были сохранены, то соответственно работа, совершаемая складными крыльями, вдвое меньше, чем энергозатраты в случае простых крыльев. Так в эксперименте со складными крыльями вместо ожидаемого роста подъемной силы неожиданно раскрылся способ трехкратной экономии энергии!

Визуализация завихренности, рис. 7, показывает, что с острой кромки крыла один вихрь сходит при подъеме крыла, а другой при опускании, эти вихри вращаются в разные стороны и поэтому образуют быструю пару. Так как на втором крыле образуется такая же пара вихрей, то вихревая дорожка является симметричной, а создаваемый ею спутный поток прямолинейным, в отличие от извилистых спутных потоков в дорожках Голубева и Кармана.

7. Техническое направление моделирования, циклокоптер. Вторым направлением численных исследований машущего полета являются расчеты перспективных технических моделей летательных аппаратов. Идею создания гибридного летательного аппарата — циклокоптера (еще называемого цикложиром, циклотроном, циклолетом) безуспешно пытались реализовать на протяжении 100 лет. Не удивительно, что в давнем споре: “что лучше крыло, созданное природой, или винт, изобретенный человеком?”, сейчас побеждают получившие широкое распространение винтовые квадрокоптеры. Но интерес изобретателей к аппаратам с вращающимися колесами, в качестве лопастей которых используются крыловые профили, оптимальным образом изменяющие угол атаки в процессе оборота, по-прежнему сохранился. Тем

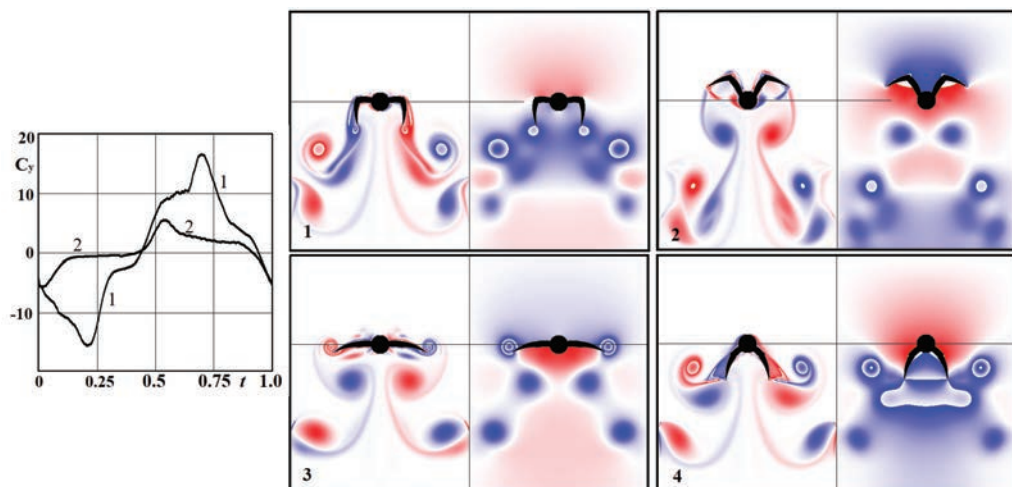


Рис. 7.

более, что совсем недавно циклокоптеры наконец-то смогли оторваться от земли и начали летать.

Представленные выше эксперименты с изогнутыми крыльями, были дублированы такими же расчетами, но с плоскими пластинками (с закругленными концами), и результаты оказались близкими. Это говорит о том, что в машущем полете на первом месте стоит кинематика, а геометрическая форма крыльев играет второстепенную роль [13]. Высокие летные качества сохраняются при замене выпуклого крыла простой пластинкой, если использовать правильную кинематику [10]. Вероятно, изогнутая форма крыльев, прежде всего, связана с биолого-анатомическим строением птиц, с сохранением тепла. Тогда, заменяя крыловые профили в циклокоптере на пластинки, рис. 8, можно смоделировать гибридный вариант кинематики, в котором лопатки вращаются не только вместе с колесом, но и вокруг своей оси.

Так что каждый край пластинки оказывается в роли то передней, то задней кромки, рис. 8. Очевидно, что такая кинематика более проста для технической реализации, чем повороты крыловых профилей в противоположных направлениях.

Результаты моделирования такого 4-х лопастного устройства, вращающегося с постоянной угловой скоростью и с изменяемым (с помощью кулачковых механизмов), как показано на рис. 8, углом атаки, показывают всюду положительные подъемную силу и силу тяги.

Закключение. Предлагаемый численный подход, заменяющий крыло ансамблем лагранжевых частиц, позволяет проводить моделирование машущего полета с произвольной вращательно-поступательной кинематикой, а также с деформацией крыла.

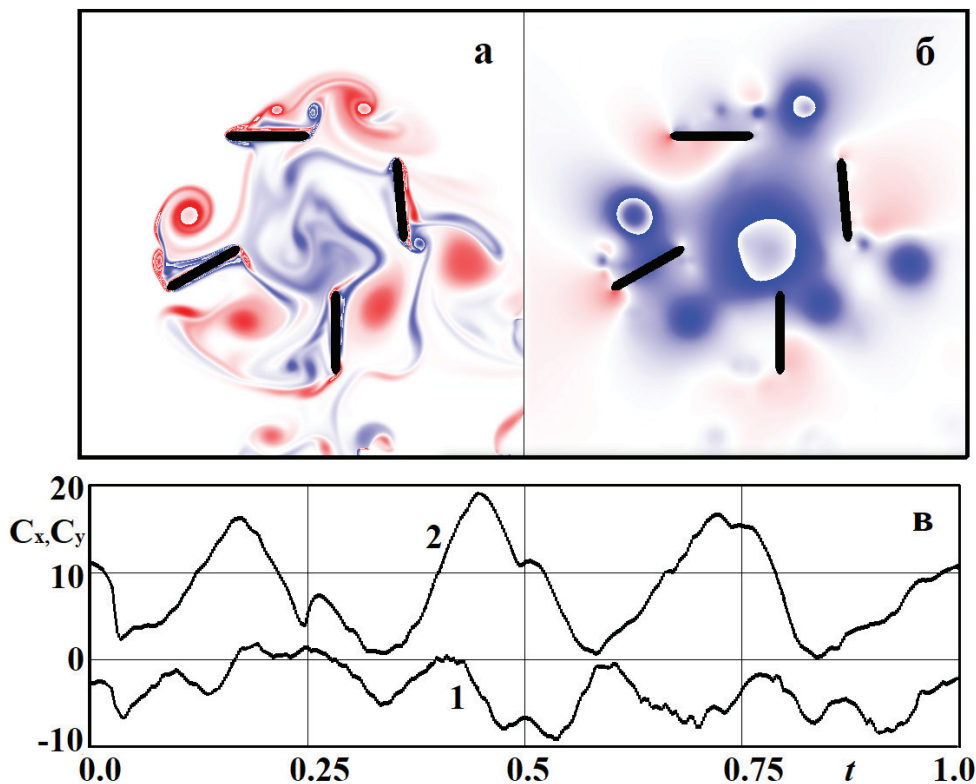


Рис. 8.

Проведение простого и наглядного двумерного моделирования помогает выявить и понять принципиальные особенности машущего полета.

Моделирование обтекания вертикально осциллирующего крыла позволяет визуализировать вихревую дорожку Голубева и спутный поток, чтобы наглядно показать его основной результат — создание силы тяги.

Моделирование обтекания крыла, использующего восьмеркообразную, поступательно-вращательную кинематику, позволило понять ее смысл и достоинства. Повороты крыла, сопровождаемые одновременным отводом его назад и вниз, не только ликвидируют появление негативных силовых воздействий, но и, при умелом выполнении этого маневра, усиливают подъемную силу и силу тяги. Визуализация процесса показывает, что проводка крыла при взмахе между интенсивными вихрями, создаваемыми крылом при резкой отмашке, способствуют безотрывному обтеканию. Таким образом, наше моделирование подтверждает гипотезу Г.И. Петрова об искусстве полета птиц, “как в идеальной жидкости”, представляющую основополагающий принцип аэродинамики машущего полета.

Альтернативное 2D-моделирование машущего полета в плоскости, ортогональной направлению полета, позволяет исследовать вторую часто используемую птицами и насекомыми, чисто вращательную, кинематику крыльев. Визуализация динамики создаваемых при этой кинематике вихрей выявляет их парные структуры с близким расположением двух противоположно вращающихся вихрей, что ускоряет их совместное перемещение. Теперь вихревая дорожка имеет симметричный (не шахматный) вид. Такие парные вихри создают более энергичный спутный поток, который увеличивает подъемную силу.

Лагранжево описание кинематики крыльев позволяет учитывать их деформацию. Исследование аэродинамики складных крыльев показало, что этот прием позволяет втрое уменьшить усилия, которые требуются птицам для совершения маховых движений. Поэтому основным преимуществом складных крыльев является 2–3 кратная экономия энергии, затрачиваемой на работу крыльев.

Идентичность результатов для изогнутых и плоских крыльев свидетельствует о главенстве кинематики и наводит на предположение, что выпуклость крыльев, в первую очередь связана не с аэродинамикой, а с биологическими особенностями строения тела, с лучшим теплосбережением.

Замена изогнутых крыльев плоскими пластинами упрощает и расширяет возможности конструирования новых летательных аппаратов. В частности, появляется возможность создания гибридного летательного аппарата, циклокоптера, сочетающего преимущества машущего и винтового движителей. Вычислены высокие показатели такого гибридного 4-х лопастного воздушного колеса.

Конечно, машущий полет происходит в трехмерном пространстве, и его кинематика является более сложной, чем рассмотренные в работе случаи. Поэтому заметим, что предлагаемый подход и алгоритм легко обобщаются на 3D случай, но при этом не только сильно возрастут затраты машинного времени, но существенно усложнятся анализ и визуализация результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев В.В. Труды по аэродинамике. М.: ГИТТЛ, 1957. 979 с.
2. Лайтхилл Дж. Аэродинамические аспекты полета животных. Сер. Механика. Вып. 23. Биогидродинамика плавания и полета. М.: Мир, 1980. С. 9–78.
3. Зайцев А.А. Теория несущей поверхности: математическая модель, численный метод, расчет машущего полета. М.: Наука, 1995. 160 с.
4. Зайцев А.А., Тюрев В.В. Расчет обтекания несущей поверхности при больших деформациях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 4. С. 72–79.
5. Зайцев А.А., Шарина Л.В. Аэродинамический расчет нормального трепещущего полета // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 4. С. 71–78.

6. Зайцев А.А., Федотов А.А. Обтекание идеальной несжимаемой жидкостью тонкого крыла конечного размаха, колеблющегося с большой амплитудой // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 5. С. 75–82.
7. Gustafson K., Leben R. Computation of dragonfly aerodynamics // Comput. Phys. Commun. 1991. V. 65. P. 121–132.
8. Захаренков М.Н., Никулин М.А., Швец А.И. Аэродинамика машущего полета насекомых // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 6. С. 121–126.
9. Котелкин В.Д. Заметки об аэродинамике машущего полета // В сб.: Гидроаэромеханика и космические исследования / под ред. Баранова В.Б. М.: изд-во МГУ, 2012. С. 176–187.
10. Bos F.M., Lentink D., van Oudheusden B.W., Bijl H. Influence of wing kinematics on aerodynamic performance in hovering insect flight // J. Fluid Mech. 2008. V. 594. P. 341–368.
11. Lun Li, Yongping Hao, Jiulong Xu, Fengli Liu, Shuangjie Liu Numerical simulation of unsteady aerodynamic characteristics of the three-dimensional composite motion of a flapping wing based on overlapping nested grids // AIP Advances. 2020. V. 10. 035109 (China).
12. Toshiyuki Nakata, Hao Liu A fluid-structure interaction model of insect flight with flexible wings // J. of Comput. Phys. 2012. V. 231. P. 1822–1847.
13. Kim D., Choi H. Two-dimensional mechanism of hovering flight by single flapping wing // J. Mech. Sci. Technol. 2007. V. 21(1). P. 207–221.
14. Vanella M., Fitzgerald T., Preidikman S., Balaras E., Balachandran D. Influence of flexibility on the aerodynamic performance of a hovering wing // J. of Experim. Biol. 2009. V. 212. P. 95–105.
15. Ellington C.P., van den Berg C., Willmott A.P., Thomas A. Leading-edge vortices in insect flight // Nature. 1996. V. 384. P. 626–630.
16. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука. 1989, 608 с.
17. Chorin A.J. Numerical Solution of the Navier–Stokes Equations // Math. Comp. 1968. V. 22. P. 745–762.
18. Белоцерковский С.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984. 518 с.
19. Федоренко Р.П. Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // ЖВММФ. 1961. Т. 1. № 5. С. 922–927.
20. Бахвалов Н.С. О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор // ЖВММФ. 1966. Т. 6. № 5. С. 861–883.
21. Wesseling P. An Introduction to Multigrid Methods. New York: Wiley, 1992. 284 p.
22. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир, 1986. 184 с.
23. Al-Mdallal Q., Lawrence M., Kocabiyik S. Forced streamwise oscillations of a circular cylinder: Locked-on modes and resulting fluid forces // J. of Fluids&Struct. 2007. V. 23. P. 681–701.
24. Baek S.J., Sung H.J. Numerical simulation of the flow behind a rotary oscillating circular cylinder // Phys. of Fluids. 1998. V. 10. P. 869–876.

About the Features of Flapping Flight

V. D. Kotelkin^{a,*}

^aLomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

*e-mail: kotelkin@mech.math.msu.su

2D modeling of flapping flight is performed using DNS equations, the wing is simulated by an ensemble of Lagrangian particles. The simulation is carried out in two planes – parallel and orthogonal to the flight direction. The Golubev vortex street, which creates thrust, is reproduced; the meaning of figure-of-eight kinematics is clarified; it is shown that the vortices induced by the wing stroke eliminate the flow separation. It has been established that the use of folding wings reduces the energy consumption of birds by three times. The aerodynamics of a cyclocopter model with hybrid kinematics has been studied.

Keywords: flapping flight, viscous fluid, continuous flow, Navier–Stokes equations, vortices, numerical modeling, thrust force, lift force, figure-of-eight kinematics, cyclocopter

REFERENCES

1. *Golubev V.V.* Works on Aerodynamics. Moscow: GITTL, 1957. 979 p. (in Russian)
2. *Lighthill J.* Aerodynamic aspects of animal flight. Series: Mechanics // Biohydrodynamics of Swimming and Flight. Iss. 23. Moscow: Mir, 1980, pp. 9–78. (in Russian)
3. *Zaitsev A.A.* Theory of the Bearing Surface: Mathematical Model, Numerical Method, Calculation of Flapping Flight. Moscow: Nauka, 1995. 160 p. (in Russian)
4. *Zaitsev A.A., Tyurev V.V.* Calculation of flow around a lifting surface in the case of large deformations // Fluid Dyn., 1980, vol. 15, pp. 532–538.
<https://doi.org/10.1007/BF01089611>
5. *Zaitsev A.A., Sharina L.V.* Aerodynamic calculation of normal hovering flight // Fluid Dyn., 1983, vol. 18, pp. 554–560.
<https://doi.org/10.1007/BF01090620>
6. *Zaitsev A.A., Fedotov A.A.* Ideal incompressible flow over a thin wing of finite span with large-amplitude oscillations // Fluid Dyn., 1986, vol. 21, pp. 740–746.
<https://doi.org/10.1007/BF01050895>
7. *Gustafson K., Leben R.* Computation of dragonfly aerodynamics // Comput. Phys. Commun., 1991, vol. 65, pp. 121–132.
8. *Shakharenkov M.N., Nikulin M.A., Shvets A.I.* Aerodynamics of the flapping flight of insects // Fluid Dyn., 1984, vol. 19, pp. 963–968.
<https://doi.org/10.1007/BF01411587>
9. *Kotelkin V.D.* Notes on the aerodynamics of flapping flight // Hydroaeromechanics and Space Research / ed. by *Baranov V.B.* Moscow: MSU Pub., 2012. pp. 176–187. (in Russian)
10. *Bos F.M., Lentink D., van Oudheusden B.W., Bijl H.* Influence of wing kinematics on aerodynamic performance in hovering insect flight // J. Fluid Mech., 2008, vol. 594, pp. 341–368.
11. *Lun Li, Yongping Hao, Jiulong Xu, Fengli Liu, Shuangjie Liu* Numerical simulation of unsteady aerodynamic characteristics of the three-dimensional composite motion of a flapping wing based on overlapping nested grids // AIP Advances, 2020, vol. 10, 035109 (China).
12. *Toshiyuki Nakata, Hao Liu* A fluid-structure interaction model of insect flight with flexible wings // J. of Comput. Phys., 2012, vol. 231, pp. 1822–1847.
13. *Kim D., Choi H.* Two-dimensional mechanism of hovering flight by single flapping wing // J. Mech. Sci. Technol., 2007, vol. 21(1), pp. 207–221.
14. *Vanella M., Fitzgerald T., Preidikman S., Balaras E., Balachandran D.* Influence of flexibility on the aerodynamic performance of a hovering wing // J. of Experim. Biol., 2009, vol. 212, pp. 95–105.
15. *Ellington C.P., van den Berg C., Willmott A.P., Thomas A.* Leading-edge vortices in insect flight // Nature, 1996, vol. 384, pp. 626–630.
16. *Marchuk G.I.* Methods of Computational Mathematics. Moscow: Nauka. 1989, 608 p. (in Russian)
17. *Chorin A.J.* Numerical solution of the Navier–Stokes equations // Math. Comp., 1968, vol. 22, pp. 745–762.
18. *Belotserkovsky S.M.* Numerical Modeling in Continuous Media Mechanics. Moscow: Nauka, 1984. 518 p. (in Russian)
19. *Fedorenko R.P.* A relaxation method for solving elliptic difference equations // Vychisl. Mat. & Mat. Fiz., 1961, vol. 1, no. 5, pp. 922–927.
20. *Bakhvalov N.S.* On the convergence of a relaxation method with natural constraints on the elliptic operator // Vychisl. Mat. & Mat. Fiz., 1966, vol. 6, no. 5, pp. 861–883.
21. *Wesseling P.* An Introduction to Multigrid Methods. N.Y.: Wiley, 1992. 284 p.
22. *Van Dyke M.* Album of Liquid and Gas Flows. Moscow: Mir, 1986. 184 p. (in Russian)
23. *Al-Mdallal Q., Lawrence M., Kocabiyik S.* Forced streamwise oscillations of a circular cylinder: Locked-on modes and resulting fluid forces // J. of Fluids & Struct., 2007, vol. 23, pp. 681–701.
24. *Baek S.J., Sung H.J.* Numerical simulation of the flow behind a rotary oscillating circular cylinder // Phys. of Fluids, 1998, vol. 10, pp. 869–876.

УДК 533.6.011.3;533.6.011.5;533.6.011.35

ВОЛНОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРОФИЛЯ ПРИ ЕГО ОКОЛОЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ ПОТОКОМ ГАЗА: ИСТОРИЯ, ДОСТИЖЕНИЯ, ПРОБЛЕМЫ

© 2024 г. А. С. Петров^{1,*}, Г. Г. Судаков^{1,**}

¹Центральный Аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия

*e-mail: aspetrov1906@rambler.ru

**e-mail: soudakov@mail.ru

Поступила в редакцию 14.03.2024 г.

После доработки 14.05.2024 г.

Принята к публикации 25.05.2024 г.

В настоящей работе представлен обзор работ по теории волнового сопротивления профиля и сделана попытка проследить процесс развития основных представлений о физических процессах, имеющих место при околозвуковых скоростях обтекания профиля. Следует отметить, что данная область аэродинамики на ранних этапах своего развития изобилвала ошибочными утверждениями. Накопление экспериментальных данных и совершенствование математического аппарата позволило устранить неточности в постановках задач, а также значительно усовершенствовать математические модели, описывающие данное явление. Тем не менее, и в настоящее время ряд задач остается нерешенным, требует дальнейшего углубления в физику явления и совершенствования математического аппарата.

Ключевые слова: обзор, профиль, волновое сопротивление, математические модели.

DOI: 10.31857/S0032823524060032 EDN: IHBDXX

1. Введение

Созданию теории волнового сопротивления профиля посвящено много работ. Среди исследователей, внесших решающий вклад в создание и совершенствование этого направления, следует, прежде всего, назвать фамилии С.А. Христиановича, Я.М. Серебрийского, К. Осватича, Т. Кармана, И.Е. Зеленского, Г.Ф. Бурого и многих других.

В настоящей работе представлен обзор основополагающих работ по теории волнового сопротивления профиля, в котором сделана попытка проследить процесс развития основных представлений о физических процессах, имеющих место при околозвуковых скоростях обтекания профиля, а также проследить процесс совершенствования математических моделей, описывающих это явление. Следует отметить, что данная область аэродинамики на ранних этапах своего развития изобилвала ошибочными утверждениями, многие из которых проникли в учебники и воспринимались как истинные утверждения. Как оказалось впоследствии, ошибки в физических представлениях о характере течения и, как следствие, в построении математических моделей, описывающих этот класс течений, парадоксальным образом не приводили к заметным численным расхождениям с экспериментальными данными. Более того, разные математические модели, содержащие взаимоисключающие предположения давали

результаты, численно близкие друг к другу. Разъяснение этого парадокса также является целью данного обзора.

Большой вклад в совершенствование математических моделей, описывающих рассматриваемый класс течений, внесли российские ученые. Кроме упомянутых выше имен, следует отметить фундаментальную работу А.А. Никольского, Г.И. Таганова [1], в которой удалось в общем виде сформулировать достаточный критерий возникновения скачка уплотнения на поверхности профиля и доказать, что как угодно малой деформацией поверхности профиля можно перевести бескачковый режим обтекания в режим обтекания со скачком уплотнения. В работах В.Д. Боксера и С.В. Ляпунова [2, 3] удалось оценить высоту скачка уплотнения, получить явную формулу для величины волнового сопротивления профиля и оценить пределы применимости методов расчета волнового сопротивления. Экспериментальные результаты исследования структуры течения около профиля при околозвуковых скоростях А.В. Потапчика [4] позволили сформулировать сценарий развития локальной сверхзвуковой зоны над верхней поверхностью профиля с увеличением числа Маха набегающего потока.

Необходимость или исключительность наличия бескачкового режима обтекания профиля при возникновении локальной сверхзвуковой зоны долгое время были предметом дискуссий. В теоретической работе А.В. Зубцова и Г.Г. Судакова [5] удалось доказать, что в рамках трансзвуковой теории малых возмущений в некотором диапазоне чисел Маха набегающего потока бескачковое решение обязательно существует.

В работе А.С. Петрова [6] было впервые показано, что взаимоисключающие постановки задач С.А. Христиановича, Я.М. Серебрянского [7] и Г.Ф. Бураго [8] приводят к численно близким результатам для оценки величины волнового сопротивления профиля, так как при разложении обеих формул по малому параметру $\Delta M_1 = M_1 - 1$ (M_1 — число Маха у основания скачка с наветренной стороны) обе формулы в линейном приближении дают один и тот же результат. Окончательное решение разрешен парадокса Христиановича—Бураго было представлено в работе В.Д. Боксера и Г.Г. Судакова [9].

Таким образом, теория волнового сопротивления за почти 80-летнюю историю прошла большой путь от интуитивных представлений до создания развитых математических моделей для описания течения в локальной сверхзвуковой зоне. Вместе с тем ряд задач остается нерешенными. Так, например, до сих пор остается неясным сценарий возникновения скачка уплотнения. Остается невыясненным вопрос об интерпретации логарифмической расходимости величины скорости течения у основания скачка уплотнения с подветренной стороны в трансзвуковой теории малых возмущений [10]. Отсутствует также математическая модель, описывающая изменение структуры течения у основания скачка с учетом вязкости газа при увеличении числа Маха набегающего потока и ряд других задач.

2. Возникновение теории волнового сопротивления

Интерес к данной проблеме возник во второй половине 40-х годов прошлого столетия в связи с ростом скоростей пассажирских самолетов. Одной из первых работ в этом направлении следует отметить работу [7], основные результаты которой изложены в данном разделе.

Рассмотрим обтекание профиля плоским потоком газа (рис. 1). Пусть $u_{1\infty}$, $\rho_{1\infty}$, $p_{1\infty}$, $T_{1\infty}$, $S_{1\infty}$ — скорость, плотность, давление, температура и энтропия набегающего потока (сечение I). Предполагается следующий сценарий развития течения с ростом скорости набегающего потока. При $u_{1\infty} < u_{1\infty*}$ течение всюду дозвуковое. При $u_{1\infty} = u_{1\infty*}$ на поверхности профиля впервые достигается скорость звука, а при $u_{1\infty} > u_{1\infty*}$ возникает локальная сверхзвуковая зона, замыкающаяся прямым скачком уплотнения.

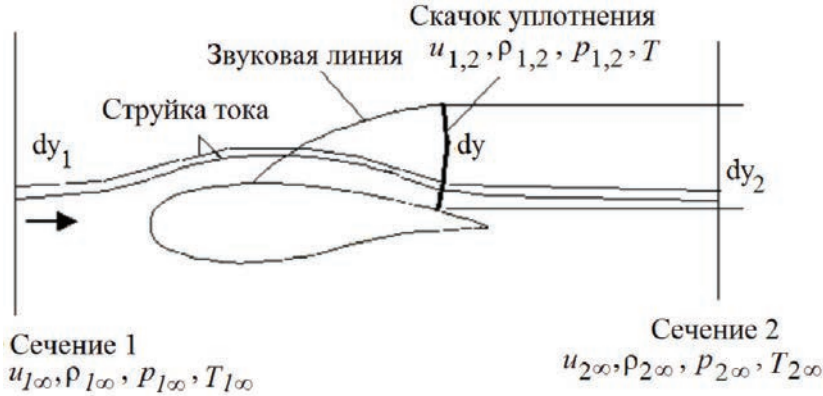


Рис. 1. Схема обтекания профиля при наличии местной сверхзвуковой зоны

С ростом $u_{1\infty}$ размер сверхзвуковой зоны и высота скачка уплотнения растут. Течение всюду невязкое и безотрывное. Соответственно $u_{1,2}, \rho_{1,2}, p_{1,2}, T_{1,2}, S_{1,2}$ – параметры потока непосредственно перед и за скачком уплотнения, а $u_{2\infty}, \rho_{2\infty}, p_{2\infty}, T_{2\infty}, S_{\infty,2}$ – параметры потока в вертикальном сечении 2 на бесконечном удалении от профиля. Высоту скачка обозначим через $h_{ск}$. Обозначим далее элемент высоты струйки тока через dy_1, dy и dy_2 в сечении 1, на скачке уплотнения и в сечении 2 соответственно. Система координат – поточная (ось x направлена вдоль набегающего потока, ось y – перпендикулярно набегающему потоку).

Применяя законы сохранения массы, импульса к массе жидкости, заключенному между контрольными сечениями 1, 2 и поверхностью профиля (рис. 1), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{1\infty} u_{1\infty} dy_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{2\infty} u_{2\infty} dy_2 \quad (2.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (p_{2\infty} + \rho_{2\infty} u_{2\infty}^2) dy_2 - \int_{-\infty}^{\infty} (p_{1\infty} + \rho_{1\infty} u_{1\infty}^2) dy_1 = -X_b \quad (2.2)$$

$$S_{1\infty} = S_1, S_{2\infty} = S_2, \quad (2.3)$$

где X_b – волновое сопротивление профиля. В силу закона сохранения энергии в зонах непрерывности течения (до и после скачка уплотнения) вдоль линии тока сохраняется энтропия. На поверхности прямого скачка уплотнения газодинамические параметры течения испытывают разрыв, при этом выполняются условия сохранения массы, импульса и полной энергии при переходе через скачок уплотнения [11]:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (2.4)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (2.5)$$

$$c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{u_2^2}{2}, \quad (2.6)$$

где c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении. Кроме того, всюду в потоке выполняется уравнение состояния совершенного газа

$$p = RpT, \quad (2.7)$$

где R — газовая постоянная.

Выписанных выше уравнений недостаточно для решения задачи нахождения волнового сопротивления X_b . Для замыкания задачи в [7] было предложено дополнительное условие равенства давлений в следе за скачком уплотнения и равенства импульсов вне следа в сечениях 1 и 2:

$$\int_{\text{в следе}} (p_{2\infty} - p_{1\infty}) dy = 0$$

$$\int_{\text{вне следа}} (p_{2\infty} + \rho_{2\infty} u_{2\infty}^2 - p_{1\infty} - \rho_{1\infty} u_{1\infty}^2) dy \quad (2.8)$$

Тогда из формул (2.1), (2.2) следует

$$X_b = \int_{\text{в следе}} \rho_{1\infty} u_{2\infty} (u_{1\infty} - u_{2\infty}) dy \quad (2.9)$$

Сформулированные условия (2.1)–(2.9) позволяют получить явное выражение для коэффициента волнового сопротивления

$$c_{xb} = \frac{2X_b}{\rho_{1\infty} u_{1\infty}^2}$$

Это выражение достаточно громоздко [7], поэтому имеет смысл привести разложение величины c_{xb} по малому параметру $\Delta M(\bar{y}) = M(\bar{y}) - 1$ (M — число Маха перед скачком уплотнения на высоте $\bar{y} = y/b$, b — хорда профиля):

$$\frac{dc_{xb}}{d\bar{y}} = C\Delta M^3 + O(\Delta M^4), \quad (2.10)$$

где C — некоторый коэффициент. Таким образом, формула (2.10) связывает коэффициент волнового сопротивления с параметрами потока на наветренной части скачка уплотнения. Величина C зависит от формы профиля и параметров набегающего потока, и может быть определена только после решения полной задачи обтекания профиля. Закон изменения $M(\bar{y})$ будет рассмотрен в разд. 4, а расшифровка коэффициента C — в разд. 5.

В [7] неявно предполагалось, что высота скачка уплотнения конечна при любых значениях ΔM_1 . Тогда интегрируя (2.10) вдоль скачка уплотнения, получим оценку величины коэффициента сопротивления для профиля в виде

$$c_{xb} = K\Delta M_1^3, \quad (2.11)$$

где K — некоторый коэффициент, зависящий от формы профиля, а для ΔM_1 принято его значение у основания скачка уплотнения.

Кроме того, работе [7] было сделано предположение, что в (2.11) при малых значениях ΔM_1

$$\Delta M_1 = \beta(M_\infty - M_*) + O((M_\infty - M_*)^2), \quad (2.12)$$

где β — некоторый коэффициент, M_∞ — число Маха набегающего потока, M_* — критическое значение числа Маха набегающего потока, когда на поверхности профиля впервые достигается скорость звука. Тогда из (2.11), (2.12) получаем так называемый «закон кубов» для коэффициента волнового сопротивления:

$$c_{xb} = A(M_\infty - M_*)^3 \quad (2.13)$$

Для величины A в [7] качестве грубой оценки было принято значение $A = 15$ независимо от формы профиля. Приведенные выше результаты явились основой для дальнейшего совершенствования теории волнового сопротивления и вошли в учебники.

Однако, описанная выше постановка задачи содержит целый ряд предположений, которые должны быть подвергнуты серьезному анализу. Прежде всего, неявное предположение о конечности и постоянстве высоты скачка при $\Delta M_1 \ll 1$, очевидно неверно. Более естественно предположить, что высота скачка пропорциональна ΔM_1

$$h_b \sim \Delta M_1 \quad (2.14)$$

Но тогда вместо (2.11) мы получили бы

$$c_{xb} = K \Delta M_1^4, \quad (2.15)$$

а вместо (2.13)

$$c_{xb} = B(M_\infty - M_*)^4 \quad (2.16)$$

Однако, экспериментальные данные и данные современных расчетов с использованием методов вычислительной аэродинамики показывают, что экспериментальным и численным данным соответствуют формулы (2.11) и (2.13). Это означает, что предположение (2.14) справедливо, а (2.12) – ошибочно. Таким образом, “закон кубов” (2.13) является следствием двух ошибочных предположений и представляет собой просто приближенную эмпирическую зависимость. В качестве подтверждения этих утверждений на рис. 2–4 приведены результаты расчетов для профиля NASA-0012 с помощью методов вычислительной аэродинамики. Численные результаты получены в настоящей работе с помощью решения краевой задачи для стационарных уравнений Рейнольдса с моделью турбулентности $k-\omega$ SST при использовании численного метода конечных объемов второго порядка точности. Коэффициенты A в формуле (2.13) и K в формуле (2.15) корректировались для наи-

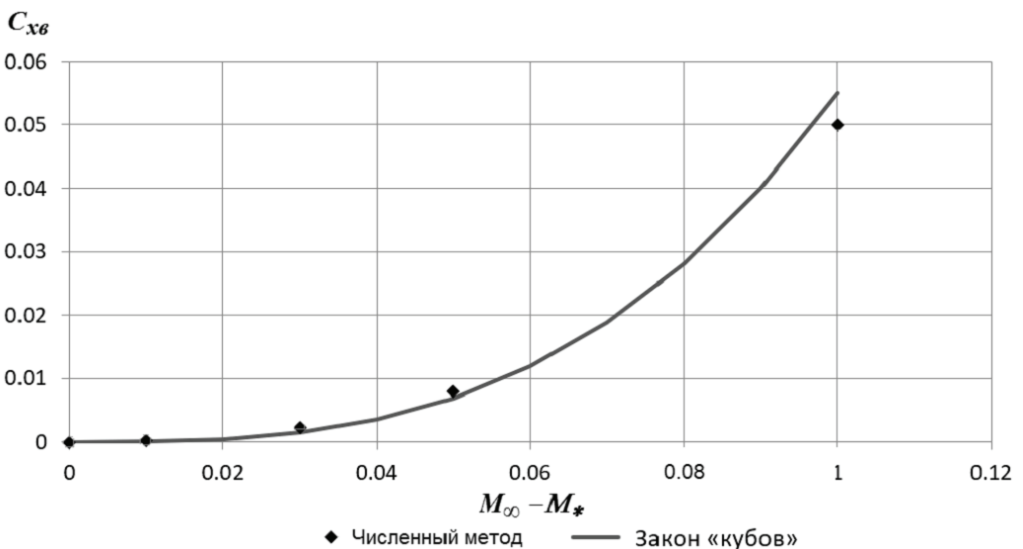


Рис. 2. Коэффициент волнового сопротивления для профиля NASA-0012: угол атаки $\alpha = 0$, уравнения Рейнольдса, модель турбулентности $k-\omega$ SST

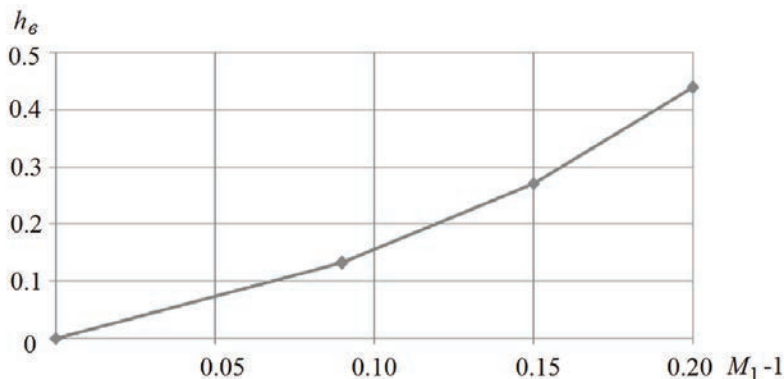


Рис. 3. Высота скачка уплотнения: угол атаки $\alpha = 0$, уравнения Рейнольдса, модель турбулентности $k-\omega$ SST. Зависимость приблизительно линейная. Отклонение от линейной зависимости вызваны смещением скачка уплотнения вниз по потоку с ростом числа M_1 и уменьшением кривизны поверхности профиля в точке основания скачка (см. формулу (4.7))

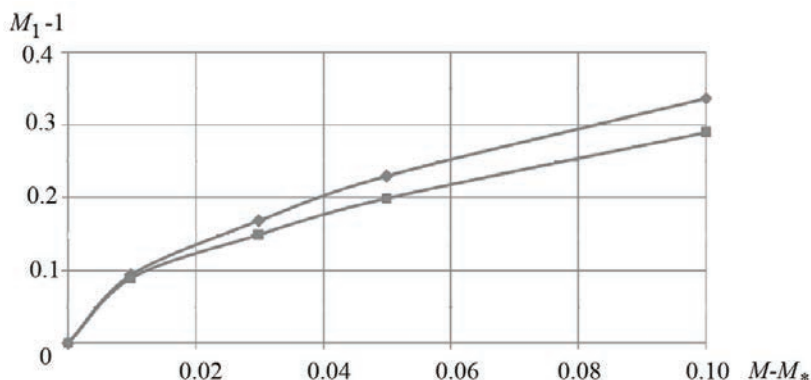


Рис. 4. Число M_1 перед скачком уплотнения: угол атаки $\alpha = 0$, уравнения Рейнольдса, модель турбулентности $k-\omega$ SST. Кривая с ромбовидными маркерами получена визуально с поля числа M , кривая с квадратными маркерами получена по максимальному скачку энтропии на ударной волне. Зависимость существенно нелинейная

лучшего согласования с расчетными данными. Для вычисления волнового сопротивления (рис. 2) использовался следующий способ. Определялось полное сопротивление профиля при возрастающих числах Маха M_∞ набегающего потока. При достижении некоторого критического значения $M_\infty = M_*$ наблюдался резкий рост сопротивления профиля. Волновое сопротивление вычислялось как разность полного сопротивления при заданном $M_\infty > M_*$ и полного сопротивления при $M_\infty = M_*$.

Так как работа [7] была малодоступна, вскоре появилась аналогичная работа [8], результаты которой вошли в учебники [12]. Постановка задачи в [8] полностью аналогична [7] за исключением замыкающего условия в сечении 2. В [8] вместо *выравнивания давлений* в следе за скачком (2.8) было принято, что в следе за скачком уплотнения *выравниваются скорости течения*

$$\int_{\text{в следе}} (u_{2\infty} - u_{1\infty}) dy = 0$$

$$\int_{\text{вне следа}} (p_{2\infty} + \rho_{2\infty} u_{2\infty}^2 - p_{1\infty} - \rho_{1\infty} u_{1\infty}^2) dy = 0 \quad (2.17)$$

В результате была получена альтернативная [7] формула для волнового сопротивления. Совершенно очевидно, что одновременное выравнивание давлений и скоростей в сечении 2 в следе за скачком уплотнения невозможно, так как тогда волновое сопротивление окажется равным нулю.

Однако разложение этой альтернативной формулы в ряд по малому параметру ΔM_1 приводит к формуле (2.10) с точностью до членов $O(\Delta M_1^4)$. В [8] для неизвестного коэффициента в формуле (2.13) было принято $A = 11$.

В теории волнового сопротивления встречается весь спектр гипотез, начиная от выравнивания статического давления [7], до выравнивания скорости в следе [8], температуры [13], а также отношения температуры к скорости [14]. Все эти гипотезы приводят к разным формулам для оценки волнового сопротивления, но, как показано в [6], их разложение в ряд по малому параметру $\Delta M_1 \ll 1$ снова дает соотношение (2.10). Этот удивительный парадокс долгое время не находил своего объяснения. Только сравнительно недавно было получено рациональное объяснение этого факта. Подробный анализ вывода формулы для волнового сопротивления и разрешение парадокса будет дан в заключительном разделе данной статьи.

3. Сценарий возникновения скачка уплотнения в локальной сверхзвуковой зоне

Накопление экспериментальных данных, а также наличие точных решений уравнений Эйлера [15], в которых локальная сверхзвуковая зона замыкается звуковой линией, а не скачком уплотнения, поставило под сомнение предполагавшийся ранее сценарий развития локальной сверхзвуковой зоны. Возникло предположение, что реализуется другой сценарий возникновения скачка уплотнения: при $0 < M_\infty < M_*$ течение всюду дозвуковое, при $M_* < M_\infty < M_{**}$ течение сверхзвуковое и непрерывное, а при $M > M_{**}$ течение в локальной сверхзвуковой зоне замыкается скачком уплотнения.

Для выяснения причин возникновения скачка уплотнения существенную роль сыграла работа [1], где было получено необходимое условие существования непрерывного решения: закон монотонного изменения угла наклона вектора скорости вдоль звуковой линии. В этой же работе была доказана теорема несуществования непрерывного решения: если сверхкритическое обтекание выпуклого профиля является непрерывным, то замена сколь угодно малого участка профиля внутри сверхзвуковой зоны произвольным отрезком приводит к появлению скачка уплотнения. Там же был сформулирован достаточный признак появления скачка уплотнения: обращение в нуль производной угла наклона вектора скорости вдоль звуковой линии.

После [1] появились работы [16–21], авторы которых пришли к выводу, что непрерывные «околозвуковые течения являются исключительными и, следовательно, лишёнными физического смысла и что в общем случае гладкого околозвукового решения задачи обтекания произвольно заданного профиля ожидать нельзя» [21].

Вместе с тем, известны результаты экспериментальных исследований и численных решений уравнений совершенного газа для разных профилей, показывающих, что на сверхкритическом режиме обтекания выпуклого профиля течение может сохранять непрерывный характер [22].

Окончательное решение этого вопроса содержится в [5], в которой найдено асимптотическое решение задачи о сверхкритическом непрерывном обтекании тонкого выпуклого профиля, наклон и кривизна контура которого являются непрерывными функциями длины дуги контура.

Рассмотрим коротко постановку задачи и основные результаты работы [5]. Пусть функция $\lambda = \frac{V}{a_*}$ (a_* – критическая скорость звука) набегающего потока превышает

критическое значение на малую величину $\lambda_\infty - \lambda_{\infty*} = O(\tau^{2/3}\varepsilon)$ ($\tau \ll 1$ — относительная толщина профиля, $\lambda_{\infty*}$ — функция λ набегающего потока, при котором на поверхности профиля впервые возникает точка, где $\lambda = 1$, $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр). В постановку задачи входит малый параметр ε , что позволяет искать ее решение, используя метод асимптотических разложений. При $\varepsilon \sim 1$ имеем существенно нелинейный трансзвуковой режим течения, описываемый трансзвуковой теорией малых возмущений, с продольными размерами локальной сверхзвуковой зоны $l_x \sim 1$. При $\varepsilon \ll 1$ уравнения линеаризуются, а размеры локальной сверхзвуковой зоны малы $l_x \ll 1$.

Рассмотрим дозвуковое обтекание тонкого выпуклого профиля с единичной хордой безвихревым потоком идеального газа со скоростью V_∞ . Основы теории тонкого профиля были заложены еще в работах В.В. Голубева [23]. В качестве искомой величины введем функцию λ по формуле

$$\frac{V}{a_*} = \lambda = 1 + \tau^{2/3} \tilde{\lambda},$$

где V — скорость потока, $\tau \ll 1$ — толщина профиля, $\tilde{\lambda} = O(1)$. Исследуется течение газа в окрестности локальной сверхзвуковой зоны, возникающей на поверхности профиля, когда λ_∞ отличается от его критического значения $\lambda_{\infty*}$ на малую величину $\lambda_\infty - \lambda_{\infty*} = \varepsilon \tau^{2/3} > 0$.

Введем декартову систему координат с осью x , направленной вдоль хорды профиля, и осью y — перпендикулярно к ней, и началом координат в точке $\lambda = 1$ при $\varepsilon = 0$. При $\tau \rightarrow 0$ течение описывается уравнениями трансзвуковой теории малых возмущений [10]:

$$\frac{1 + \gamma}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\lambda}^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\lambda}}{\partial \eta^2} = 0 \quad (3.1)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \eta} = F''(x); \eta \rightarrow \pm 0 \quad (3.2)$$

$$\tilde{\lambda}_\infty \rightarrow \tilde{\lambda}_{\infty*} + O(\varepsilon); x^2 + \eta^2 \rightarrow \infty, \quad (3.3)$$

где $\gamma = 1.4$ — показатель адиабаты, $\eta = \tau^{1/3} y$, а $y = \tau F(x)$ — уравнение верхней поверхности профиля. Далее будем полагать, что в окрестности $x = 0$ все производные функции $F(x)$ конечны и непрерывны. Отсюда следует, что кривизна поверхности профиля в окрестности локальной сверхзвуковой зоны имеет порядок $O(\tau)$.

При $\varepsilon = 0$ течение газа является всюду дозвуковым за исключением одной изолированной точки, соответствующей $x = \eta = 0$. При $\varepsilon > 0$ в окрестности этой точки возникает локальная сверхзвуковая зона, линейные размеры которой $l_x(\varepsilon)$, $l_\eta(\varepsilon)$ стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Область, где $x \sim \eta \sim 1$, является областью слабых возмущений относительно малого параметра ε . В этой области решение задачи (3.1) — (3.3) можно представить в виде

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_0(x, \eta) + \varepsilon \tilde{\lambda}_1(x, \eta),$$

где $\tilde{\lambda}_0(x, \eta)$ — решение нелинейной задачи (3.1)–(3.3) при $\varepsilon = 0$, а функция $\tilde{\lambda}_1(x, \eta)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$(1 + \gamma) \frac{\partial^2 (\tilde{\lambda}_0 \tilde{\lambda}_1)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\lambda}_1}{\partial \eta^2} = 0$$

и граничным условиям

$$\frac{\partial \tilde{\lambda}_1}{\partial \eta} = 0, \eta = 0; \tilde{\lambda}_1 \rightarrow 1, x^2 + \eta^2 \rightarrow \infty$$

Из (3.1)–(3.3) следует, что при $x \rightarrow 0$ функция $\tilde{\lambda}_0(x, \eta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1 + \gamma}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\lambda}_0^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\lambda}_0}{\partial \eta^2} = 0$$

и граничному условию

$$\frac{\partial \tilde{\lambda}_0}{\partial \eta}(x, 0) = a_0 + a_1 x + \frac{1}{2!} a_2 x^2 + O(x^3),$$

где $a_k = \frac{d^{(k+2)} F}{dx^{k+2}}(0)$, $k = 0, 1$. В силу предположения о выпуклости поверхности профиля имеем $a_0 < 0$. Для определения зависимости $I_x(\epsilon)$, $I_\eta(\epsilon)$ необходимо исследовать асимптотику поведения функций $\tilde{\lambda}_0(x, \eta)$, $\tilde{\lambda}_1(x, \eta)$ при $x^2 + \eta^2 \rightarrow 0$.

В [5] получено асимптотическое представление для функции $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_0 + \epsilon \tilde{\lambda}_1$ при $x \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$

$$\tilde{\lambda} = a_0 \eta + A x^2 + a_1 x \eta + B x^3 + \epsilon (D_0 + D_1 x) + O(\eta x^2) + O(x^4), \quad (3.4)$$

где $a_0 < 0$, $A < 0$, $D_0 > 0$. Из (3.4) следуют масштабы зоны, где линеаризация уравнений относительно малого параметра ϵ становится некорректной

$$\eta \sim \epsilon, x \sim \sqrt{\epsilon} \quad (3.5)$$

В соответствии с (3.5) перейдем к новым переменным

$$\tilde{\lambda} = \epsilon \bar{\lambda}(x_1, \eta_1); x = \sqrt{\epsilon} x_1; \eta = \epsilon \eta_1$$

Уравнение и граничные условия для $\bar{\lambda}(x_1, \eta_1)$ имеют вид

$$\frac{\partial^2 \bar{\lambda}}{\partial \eta_1^2} = O(\epsilon^2) \quad (3.6)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \eta_1} \right|_{\eta_1=0} = a_0 + a_1 x_1 \sqrt{\epsilon} + O(\epsilon) \quad (3.7)$$

$$\bar{\lambda} = D_0 + a_0 \eta_1 + A x_1^2 + \sqrt{\epsilon} [D_1 + a_1 \eta_1 + B x_1^2] x_1 + O(\epsilon), x_1^2 + \eta_1^2 \rightarrow \infty \quad (3.8)$$

Очевидно, что соотношение (3.8), определяющее поведение решения при $x_1^2 + \eta_1^2 \rightarrow \infty$, является решением системы (3.6)–(3.7). С точностью до членов порядка $O(\sqrt{\epsilon})$ линия $\bar{\lambda} = 0$, ограничивающая зону сверхзвукового течения, в первом приближении имеет вид

$$\eta_1 = -\frac{1}{a_0} (D_0 + A x_1^2) + \dots \quad (3.9)$$

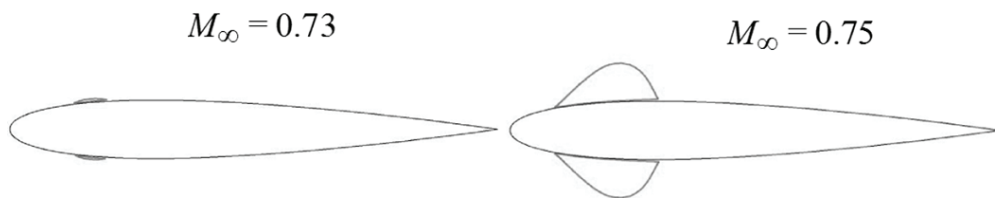


Рис. 5. Положение и форма сверхзвуковой зоны: $M_\infty = 0.73$ — возникновение сверхзвуковой зоны, $M_\infty = 0.75$ — возникновение скачка

Из (3.9) следует, что граница сверхзвуковой зоны описывается параболой. Параболический вид решения для границы локальной сверхзвуковой зоны также следует из точного решения [15] при $M - M_* \ll 1$. Переходя в (3.9) обратно к исходным переменным $x = \sqrt{\varepsilon}x_1, \eta = \varepsilon\eta_1$, получим

$$l_x(\varepsilon) \sim \sqrt{\varepsilon}, l_\eta(\varepsilon) \sim \varepsilon$$

Переходя в этой формуле к размерным переменным, получим

$$\Delta x \sim \tau^{-1/3} \cdot (M_\infty - M_*)^{1/2}; \Delta y \sim \tau^{-1} (M_\infty - M_*)$$

Необходимо отметить, что в окрестности трансзвуковой зоны исходное уравнение (3.1) вырождается в уравнение параболического типа (3.6), решение которого исключает появление скачка уплотнения при $\varepsilon \ll 1$. Из уравнения для характеристик, записанного в плоскости годографа [10], следует, что на звуковой линии изменение угла наклона вектора скорости θ к оси x является монотонной функцией

$$\frac{d\theta}{dx} = \tau [F''(0) + O(\varepsilon)] < 0, \quad (3.10)$$

что согласуется с критерием непрерывного перехода сверхзвукового течения в дозвуковое (см. [1]). Как показано в [1], нарушение условия (3.10) приводит к возникновению скачка уплотнения. Это возможно только при $\varepsilon = O(1)$, т.е. при $M_{**} - M_\infty = O(\tau^{2/3})$, где M_{**} — число Маха, когда впервые появляется скачок уплотнения. Все эти выводы относятся к случаю, когда кривизна профиля является непрерывной функцией x . Разрыв старших производных $F^{(k)}(x)$, $k \geq 3$ не приводит к появлению скачка уплотнения при $\varepsilon \ll 1$.

Возвращаясь к результатам разд. 1, можно констатировать, что все формулы разд. 1 сохраняют свою силу, если вместо M_* использовать M_{**} .

В качестве подтверждения справедливости полученных выше выводов на рис. 5 приведены результаты расчетов для профиля NACA-0012 с помощью методов вычислительной аэродинамики. Численные результаты получены с помощью решения краевой задачи для стационарных уравнений Рейнольдса с моделью турбулентности $k-\omega$ SST при использовании численного метода конечных объемов второго порядка точности. Возникновение локальной сверхзвуковой зоны отмечено при $M_\infty = 0.73$, а появление скачка уплотнения произошло при $M_\infty = 0.75$. Таким образом, существование бесскачковой локальной сверхзвуковой зоны ограничено очень малым диапазоном чисел Маха набегающего потока. В этом диапазоне чисел Маха горизонтальные размеры сверхзвуковой зоны малы, а вертикальные размеры оказываются много меньше горизонтальных. Граница сверхзвуковой зоны приблизительно описывается параболой, как и предсказано теорией.

4. Размер локальной сверхзвуковой зоны и высота скачка уплотнения

Для размеров локальной сверхзвуковой зоны воспользуемся уравнениями Эйлера, записанными в системе координат, в которой за направление координатных линий выбрано направление касательной к линии тока ($\Psi = \text{const}$) и нормаль к ней. Уравнения выписаны А.А. Никольским в работе [1]

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial s} = -\frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial}{\partial n} (\ln p), \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \frac{1 - M^2}{\gamma M^2} \frac{\partial}{\partial s} (\ln p) \quad (4.1)$$

Здесь ϑ — угол наклона вектора скорости к оси x , M — местное число Маха потока, p — статическое давление, $\frac{\partial}{\partial s}$ и $\frac{\partial}{\partial n}$ — операторы дифференцирования по касательной к линии тока и по нормали к ней.

Предполагается, что в локальной сверхзвуковой зоне энтропия постоянна $\Delta S = 0$.

В этом случае статическое давление в уравнениях (4.1) будет зависеть только от местного числа Маха и определяться формулой

$$p = p_{\infty} \frac{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{\infty}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}}{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}}$$

Подставляя полученное выражение в (4.1), получаем следующую систему уравнений

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial s} = \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial n}\right)}{M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \frac{(M^2 - 1) \left(\frac{\partial M}{\partial s}\right)}{M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)} \quad (4.2)$$

Начальные условия для уравнений (4.2) зададим на поверхности профиля. В окрестности основания скачка имеем

$$M(n = 0) = M_1(s), \quad \vartheta(n = 0) = \vartheta_0(s)$$

Координаты s и n будем считать безразмерными и выраженными в долях хорды профиля.

По определению, $\frac{\partial \vartheta}{\partial s}$ есть кривизна линий тока, а $\frac{\partial \vartheta}{\partial n}$ — кривизна семейства линий ортогональных к ним, поэтому введем следующие обозначения:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial s} = K_s, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = K_n$$

На контуре профиля, на котором находится нулевая линия тока, ее кривизна совпадает с кривизной поверхности профиля

$$K_{\tau}(n = 0) = \frac{\partial \vartheta_0(s)}{\partial s} = K_0(s)$$

Рассмотрим местную сверхзвуковую зону на верхней поверхности профиля, которая для реальных крыловых профилей всегда выпуклая, не имеет плоских участков и точек перегиба. Тогда на поверхности профиля $K_0(s) < 0$ во всей сверхзвуковой зоне.

Для нахождения местных чисел Маха в пространстве сверхзвуковой зоны проинтегрируем первое уравнение системы (4.2) вдоль линии $s = \text{const}$ по нормали к линии тока от точки $(s, n = 0)$ на поверхности профиля до точки (s, n) пространства. Вдоль этой линии число M потока меняется от заданной начальными условиями величины $M_0(s)$ до неизвестной искомой величины $M(s, n)$

$$\int_0^n \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s} \right) dn = \int_0^n K_s dn = \int_{M_0}^M \frac{dM}{M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)}$$

Интеграл в правой части легко выражается в квадратурах. Проводя интегрирование и выражая $M(s, n)$ через остальные величины с учетом того, что $K_s(s) < 0$, получаем:

$$M(s, n) = \frac{M_0(s) e^{-h}}{\sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2(s) (1 - e^{-2h})}} \quad (4.3)$$

$$h = \int_0^n |K_\tau| dn \quad (4.4)$$

Формула (4.3) является следствием точных уравнений Эйлера и описывает распределение чисел Маха вдоль линии, нормальной к линиям тока, но кривизна линий тока $K_s(n, s)$ вдоль пути интегрирования и входящая в правую часть полученного выражения неизвестна. Для вычисления интеграла (4.4) поступим следующим образом. Предположим, что во всей сверхзвуковой области течения

$$M - 1 = o(1)$$

Это допущение реализуется в приближении трансзвуковой теории тонкого профиля [10]: $M - 1 \sim \tau^{2/3}$ (τ — относительная толщина профиля). В этом приближении $K_\tau \sim \tau$, $n \sim \tau^{-1/3}$, т.е. $|K_\tau(s)|n \ll 1$, т.е. величина h в (4.3), (4.4) мала.

Оценка правой части второго уравнения (4.2) также приводит к выводу, что в этом случае изменение наклона линий тока также мало

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial n} = o(1)$$

Тогда кривизна линий тока в пространстве сверхзвуковой зоны в первом приближении равна известной кривизне поверхности профиля $K_s(s, n) \approx K_0(s)$. При этом допущении интеграл (4.4) равен

$$h = \int_0^n |K_\tau| dn = |K_0(s)|n$$

Отметим, что произведение $|K_0(s)|n$ — это расстояние по нормали от поверхности профиля, выраженное в долях радиуса кривизны поверхности.

Тогда выражение (4.3) можно разложить в ряд Тейлора по этому малому параметру. Проводя разложение, получаем линейный в главном члене характер изменения чисел Маха в местной сверхзвуковой зоне

$$M(s, n) = M_0(s) - M_0(s) \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2(s) \right] |K_0(s)|n + O((K_0 n)^2) \quad (4.5)$$

Первые эксперименты показали приблизительно линейный характер чисел Маха в сверхзвуковой зоне [2]. На самом деле линейный закон (4.5) наблюдается только при малых расстояниях $|K_0(s)|n$. В работе [24] получен следующий нелинейный член разложения интеграла (4.4)

$$h = \int_0^n |K_\tau| dn \approx |K_0(s)|n + \frac{3}{8} M_0^2 (M_0^2 - 1) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 \right) |K_0(s)|^2 n^2 \quad (4.6)$$

В этом случае расчет по формулам (4.3) и (4.6) хорошо совпадает с экспериментальными данными, полученными в работе [4], где закономерности течения в местной сверхзвуковой зоне профиля исследованы более подробно.

На рис. 6 показано поведение местных чисел Маха в сверхзвуковой зоне профиля при числе Маха $M_0 = 1.3$.

Как и следовало ожидать, местные числа Маха в сверхзвуковой зоне монотонно падают по мере удаления от поверхности профиля, все более отдаваясь от линейного закона по мере роста расстояния от поверхности профиля. На некотором расстоянии значение местного числа Маха становится равным $M = 1$, что и определяет высоту локальной сверхзвуковой зоны в точке $s = \text{fix}$. При $M_0 = M_1$ (M_1 — число Маха у основания скачка уплотнения) условие $M = 1$ в (4.3) определяет высоту скачка уплотнения. Функция $M_0(s)$ и M_1 считаются известными.

Из выражения (4.3) можно оценить вертикальный размер местной сверхзвуковой зоны и высоту скачка уплотнения. На верхней границе сверхзвуковой зоны по определению $M(s, n) = 1$, и тогда, приравнявая правую часть выражения (4.3) единице, находим вертикальный размер сверхзвуковой зоны $h(s)$

$$h(s) = \frac{1}{|K_0(s)|} \ln \frac{M_0}{\sqrt{1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (M_0^2 - 1)}}$$

Строго говоря, это расстояние должно быть отложено вдоль линии, ортогональной линиям тока в сверхзвуковой зоне. Однако, учитывая малость кривизны верхней по-

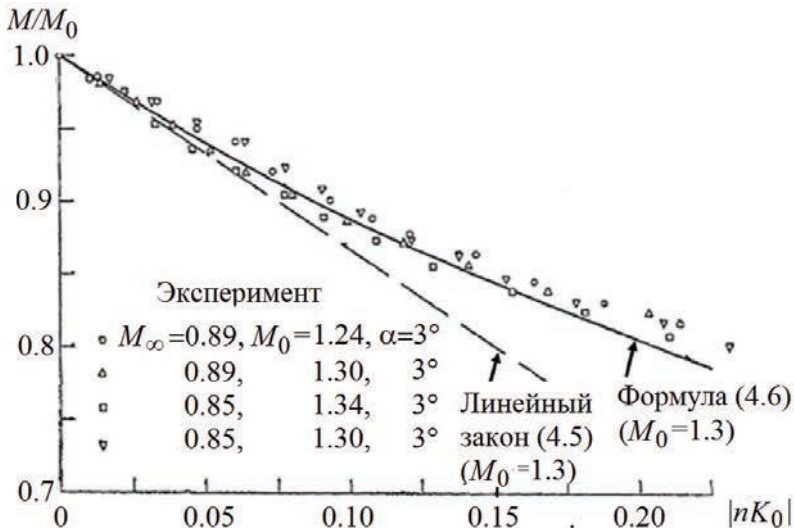


Рис. 6. Распределение чисел Маха по высоте сверхзвуковой зоны

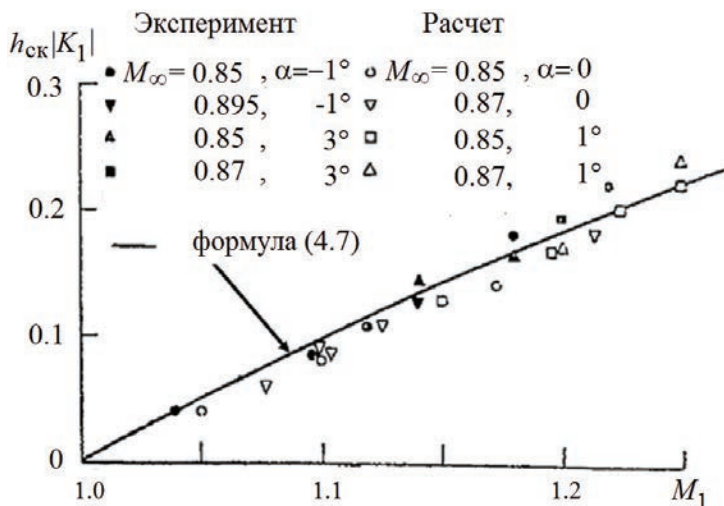


Рис. 7. Сравнение теоретических, расчетных и экспериментальных значений высоты скачка уплотнения

верхности реальных крыловых профилей в зоне ее расположения, можно считать это расстояние отложенным по перпендикуляру к поверхности профиля в точке с местным числом Маха $M_s(s)$. Если теперь на поверхности профиля известна точка s_1 расположения скачка уплотнения, и в этой точке $M_0(s_1) = M_1$, $K_0(s_1) = K_1$, то это же выражение определяет высоту скачка уплотнения $h_{ск}$

$$h_{ск} = \frac{1}{|K_1|} \ln \frac{M_1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}(M_1^2 - 1)}} \quad (4.7)$$

Для малых сверхзвуковых чисел при $M_1 \rightarrow 1$ из (4.7) следует

$$h_{ск} = \frac{2}{(\gamma+1)|K_1|} (M_1 - 1)$$

На рис. 7 приведено сравнение полученной зависимости высоты скачка уплотнения от числа Маха у его основания (4.7) с результатами обработки экспериментальных исследований и расчетными исследованиями, приведенными в работе [24],

Высота скачка здесь отнесена к радиусу кривизны профиля в точке расположения скачка уплотнения. Расчетные исследования околосвукового обтекания профилей, проведенные по методам [25, 26], дают практически те же результаты, и приведены в работе [24].

В разд. 3 было показано, что скачок впервые появляется в уже развитой локальной сверхзвуковой зоне, но формула (4.7) указывает, что скачок возникает при $M_1 \rightarrow 1$, т.е. в окрестности точки замыкания локальной сверхзвуковой зоны. Следует отметить, что задача о возникновении скачка уплотнения в локальной сверхзвуковой зоне в настоящее время еще ждет своего решения.

5. Волновое сопротивление

Классическая теория аэродинамического сопротивления основана на методе контрольной поверхности и интегральной теореме сохранения массы, импульса

и энергии. При этом контрольная поверхность выбирается в виде параллелепипеда с гранями, параллельными вектору набегающего потока. Все грани параллелепипеда расположены достаточно далеко от поверхности летательного аппарата. Выходная грань называется плоскостью Треффтца. На боковых поверхностях контрольной поверхности давление и скорость стремятся к нулю, поэтому баланс потока массы, импульса и энергии есть разность только от потоков в плоскости Треффтца и входной грани.

Начало возникновения этой теории следует отнести к первой половине 20-го века (работы [7, 8]). В последующие годы происходит дальнейшее уточнение понятий и накопление результатов, которые вошли в классические монографии и учебники ([11, 14, 27, 28]). Конец 20-го века и начало 21-го века характеризуется интенсивным ростом числа публикаций (см., например, [2, 3, 6, 9, 12, 24, 29–34]) в данном направлении как в России, так и за рубежом, что связано с увеличивающимся весом расчетных исследований на основе методов вычислительной аэродинамики в процессе проектирования летательных аппаратов.

Следует отметить, что разные авторы при формулировке рассматриваемой проблемы использовали разный математический аппарат и разные предположения. Отсюда вытекает потребность вывода всех соотношений теории сопротивления на основе единого математического аппарата и минимального количества ограничений при постановке задачи.

К числу последних достижений в этом направлении можно отнести работу [35], где была предложен способ разделения компонент сопротивления для нестационарных вязких течений. Следует отметить, что эта работа опирается на основополагающую статью [36], в которой сделана попытка разделения сопротивления на компоненты в стационарном случае без использования предположения о малости величины возмущений скорости и давления на контрольном контуре. Такой подход невозможно реализовать строго, так как в этой постановке теряется связь между введенными компонентами сопротивления и физическими механизмами, ответственными за них. Поэтому статья [36] содержит ряд предположений, являющихся правдоподобными, но не вполне строгими, что и отмечено в [35]. По существу, в [36] неявно предполагается, что возмущения малы.

В данном разделе классическая теория переформулирована в рамках теории малых возмущений для произвольных контрольных поверхностей для случая обтекания профиля в двумерной постановке.

Выпишем интегральные уравнения, которые следуют из теорем сохранения массы, импульса и энергии для уравнений Эйлера (dl – длина дуги, \mathbf{n} – вектор единичной нормали к линии контрольного контура):

$$\int \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})dl = 0 \quad (5.1)$$

$$\int [\rho \mathbf{n} dl + \mathbf{V}(\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n})dl] = -\mathbf{X} \quad (5.2)$$

$$\int \left(i + \frac{V^2}{2} \right) \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})dl = \int i_0 \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})dl \quad (5.3)$$

В соотношениях (5.1)–(5.3) использованы следующие обозначения: p – давление, ρ – плотность, \mathbf{V} – вектор скорости, T – температура, \mathbf{X} – сила сопротивления, i – энтальпия, i_0 – полная энтальпия, $V = |\mathbf{V}|$. Интегрирование производится по произвольной замкнутой линии, охватывающей тело.

Основное термодинамическое тождество имеет вид:

$$di = Tds + \frac{dp}{\rho} \quad (5.4)$$

где s — энтропия. Полагаем, что везде в потоке справедливо предположение о малости возмущений

$$p = p_{\infty} + p', \quad V = V_{\infty} + V' \quad (5.5)$$

$$\frac{p'}{p_{\infty}} = o(1), \quad \frac{V'}{V_{\infty}} = o(1),$$

где $V' = |V'|$. Тогда из (5.4) следует, что

$$i' = Ts' + \frac{p'}{\rho}, \quad (5.6)$$

где $i = i_{\infty} + i'$, $s = s_{\infty} + s'$.

Тогда из (5.1), (5.2) следует, что

$$\int [p' n dl + V'(\rho V \cdot n) dl] = -X, \quad (5.7)$$

а из (5.6) и (5.7) в первом приближении

$$\int [(i' - Ts')\rho_{\infty} n dl + \int V'(\rho V \cdot n) dl] = -X \quad (5.8)$$

Используя (5.3), из (5.8) получаем силу сопротивления

$$(X \cdot V_{\infty}) = \int \left[\left(T_{\infty} s' + \frac{V'^2}{2} \right) \rho_{\infty} (V_{\infty} \cdot n) dl - \int i'_0 \rho_{\infty} (V_{\infty} \cdot n) dl \right] \quad (5.9)$$

В двумерном случае отсутствуют вихревая пелена и, следовательно, индуктивное сопротивление, силы трения и теплоподвод. Единственным ненулевым слагаемым в (5.9) является первый член с энтропией. Источником изменения энтропии в этом случае является скачок уплотнения, поэтому первое слагаемое в (5.9), связанное с ростом энтропии, называется волновым сопротивлением тела [37]

$$V_{\infty} X_b = \int [(T_{\infty} s')\rho_{\infty} (V_{\infty} \cdot n) dl] \quad (5.10)$$

Из формулы (5.10) следует важный вывод: в линейном (по величине энтропии) приближении волновое сопротивление не зависит от поверхности интегрирования. Это замечание и устраняет парадокс Христиановича—Бурого, сформулированный в разд. 1: в работе [7] вместо плоскости Треффца неявно использовалась поверхность $p = \text{const}$, а в работе [8] — поверхность $u = \text{const}$. Прямое доказательство независимости в линейном приближении силы сопротивления от условий замыкания $p = \text{const}$, $u = \text{const}$ или $T = \text{const}$ содержится в [6].

Из (5.10) следует формула для коэффициента волнового сопротивления профиля с хордой $\bar{y} = y/b$, (b — хорда профиля, R — газовая постоянная, а интегрирование ведется вдоль скачка уплотнения):

$$c_{xb} = \frac{2T_{\infty}}{V_{\infty}^2} \int_0^{\bar{h}_{\text{ск}}} s' \cdot (d\bar{y}) = \frac{2}{\gamma M_{\infty}^2 R} \int_0^{\bar{h}_{\text{ск}}} s' \cdot (d\bar{y}) \quad (5.11)$$

Высота скачка уплотнения $h_{\text{ск}}$ определяется соотношением (4.7).

Возрастание энтропии s' при переходе потока через элемент прямого скачка уплотнения зависит только от числа Маха перед ним и хорошо известно [19]:

$$\frac{s'}{R} = -\ln \theta, \quad \theta = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{M_1^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}$$

Решение задачи распределения чисел Маха M_1 перед скачком уплотнения описывается формулой (4.5). Так как все вышеприведенные формулы справедливы только для малых значений $(M_1^2 - 1)$, разложим функцию $\theta(M)$ в ряд Тейлора по степеням малого параметра

$$\theta(M) = 1 - \frac{2\gamma}{(\gamma+1)^2} \frac{(M^2 - 1)^3}{3} + \dots$$

Это разложение соответствует малому возрастанию энтропии в слабых прямых скачках уплотнения [19]. Возрастание энтропии будет при этом равно

$$\frac{s'}{R} \approx \frac{2\gamma}{(\gamma+1)^2} \frac{(M^2 - 1)^3}{3}$$

После интегрирования получаем главный член разложения волнового сопротивления по степеням параметра $(M^2 - 1)$, справедливого для малых сверхзвуковых чисел Маха перед скачком:

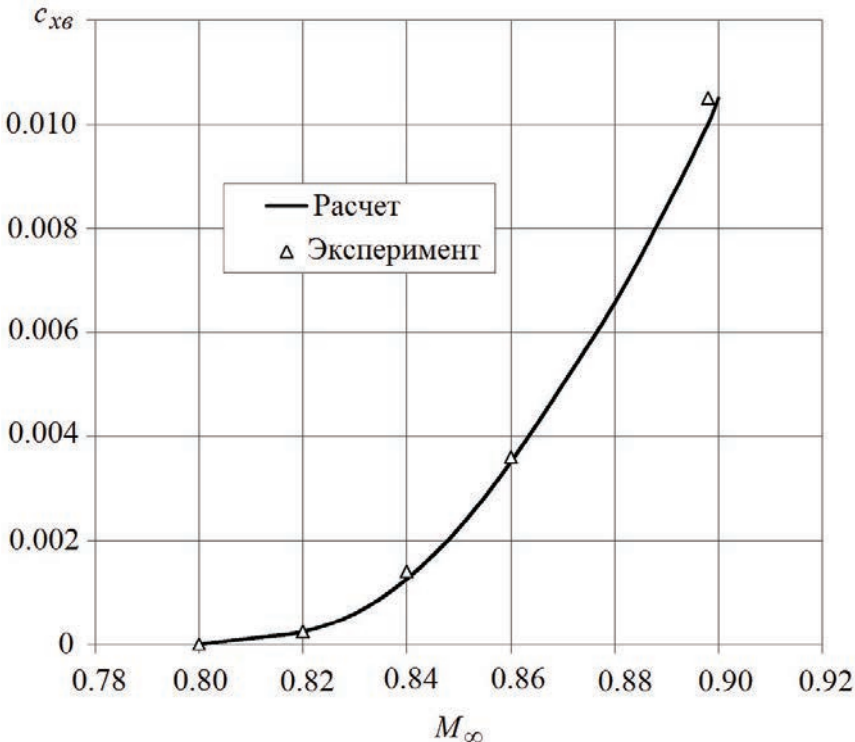


Рис. 8. Сравнение значений волнового сопротивления (5.12) с экспериментальными данными [38]

$$c_{\text{xb}} = \frac{(M_1^2 - 1)^4}{3M_\infty^2 |K_1| (\gamma + 1)^3} + O(M_1^2 - 1)^5 \quad (5.12)$$

На рис. 8 приведены результаты расчетов по формуле (5.12) волнового сопротивления крылового профиля с использованием экспериментальных данных работы [2], из которых было взято значение числа Маха у корня скачка уплотнения. Там же приведены значения волнового сопротивления, полученные с использованием экспериментальных данных о распределении чисел Маха вдоль всего скачка уплотнения, полученных методом интерферометрии. Согласование результатов следует признать удовлетворительным.

Заключение

Теория волнового сопротивления приближается к 80-летию юбилею. За это время пройден большой путь и найдены решения многих задач. Существенно улучшено качество постановок задач, позволивших построить замкнутую теорию волнового сопротивления и получить аналитические формулы, описывающие резкое возрастание сопротивления профиля при переходе числа Маха набегающего потока через критическое значение. Удалось устранить ряд заблуждений, парадоксов и неясностей при построении математических моделей данного явления. Однако ряд задач так и остался нерешенным. Так, например, отсутствует понимание процесса возникновения скачка уплотнения. Остается не до конца выясненным, как взаимодействует верхняя часть скачка со звуковой линией, какова здесь структура течения. Остается в зоне внимания исследователей задача о взаимодействии основания скачка с пограничным слоем с учетом того фактора, что из-за больших градиентов давления течение за скачком уплотнения является турбулентным. В процессе исследований находится также задача о возникновении локального отрыва из-под скачка при достижении числа Маха набегающего потока некоторого критического значения, а также (при последующем увеличении числа Маха набегающего потока) превращении этого локального отрыва в глобальный отрыв, приводящий к возникновению колебаний скачка уплотнения (бафтинга).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никольский А.А., Таганов Г.И.* Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения // ПММ. 1946. Т. 10. Вып. 4. С. 481–502.
2. *Боксер В.Д., Серебрянский Я.М.* Приближенный метод определения волнового сопротивления профиля при наличии местной сверхзвуковой зоны // Уч. Зап. ЦАГИ. 1978. № 5. Т. 9. С. 21–29.
3. *Боксер В.Д., Ляпунов С.В.* Пределы применимости приближенных методов расчета волнового сопротивления профиля при околосвуковых скоростях // Уч. Зап. ЦАГИ. 1995. № 3–4. Т. XXVI. С. 26–34.
4. *Потанич А.В.* Экспериментальное исследование поля течения вблизи профиля при околосвуковых скоростях // Тр. ЦАГИ. 1979. № 2010. С. 22–34.
5. *Зубцов А.Б., Судаков Г.Г.* Асимптотическое решение задачи обтекания профиля дозвуковым потоком газа с образованием локальной сверхзвуковой зоны // Уч. Зап. ЦАГИ. 2011. Т. XLII. № 2. С. 3–9.
6. *Петров А.С.* О вспомогательных гипотезах теории волнового сопротивления // Уч. Зап. ЦАГИ. 1989. Т. XX. № 2. С. 61–65.
7. *Христианович С.А., Серебрянский Я.М.* О волновом сопротивлении // Тр. ЦАГИ. 1944. № 550. С. 1–18.
8. *Бураго Г.Ф.* Теория крыловых профилей с учетом влияния сжимаемости воздуха. М.: Изд-во ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1949. С. 1–166.
9. *Боксер В.Д., Судаков Г.Г.* Аэродинамическое сопротивление тел в околосвуковом потоке: теория и приложения к вычислительной аэродинамике // Изв РАН. МЖГ. 2008. № 4. С. 128–140.

10. Коул Д., Кук Л. Трансзвуковая аэродинамика. М.: Мир, 1989. 360 с.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
12. Краснов Н.Ф. Аэродинамика. Т. 1. М.: Высшая школа, 1976. 310 с.
13. Зеленский И.Е. О лобовом сопротивлении тел, погруженных в газовый поток сверхзвуковой скорости // Уч. Зап. Харьковского ун-та. 1949. Т. 29. С. 1–183.
14. Карман Т.Ф. Основы аэродинамики больших скоростей // В сб. ст. Общая теория аэродинамики больших скоростей / под ред. Супса У.Р. М.: Воениздат, 1962. 667 с. С. 1–30.
15. Ringleb F. Exakte Lösungen der Differentialgleichungen einer adiabatischen Gasströmung // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. Ingenieurwissenschaftliche Forschungsarbeiten. 1940. № 4. V. 20. P. 185–198.
16. Франкль Ф.И. К образованию скачков уплотнения в дозвуковых течениях с местными сверхзвуковыми скоростями // ПММ. 1947. № 11. С. 199–202.
17. Busemann A. The non-existence of transonic potential flow // Proc. of Symp. in Applied Mathematics. 1953. № 4. P. 29–40.
18. Guderley G. On the presence of shocks in mixed subsonic-supersonic flow patterns // Advanced in Appl. Mech. 1953. № 3. P. 145–184.
19. Bers L. Results and conjectures in the mathematical theory of subsonic and transonic gas flows // Commun. on Pure&Appl. Math. 1954. № 7. P. 79–104.
20. Morawetz C.S. On the non-existence of continuous transonic flows past profiles, // Commun. on Pure&Appl. Math. 1956. № 9. P. 45–68.
21. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: Иностран. лит-ра, 1961. 208 с.
22. Sears W.R. Transonic potential flow of a compressible fluid // Appl. Phys. 1951. V. 21. P. 771–778.
23. Голубев В.В. Лекции по теории крыла. М.;Л.: ГИТТЛ, 1949. 480 с.
24. Паньженский В.А., Петров А.С. О течении в местной сверхзвуковой зоне при околозвуковом обтекании крылового профиля // Уч. Зап. ЦАГИ. 1987. Т. 18. № 2. С. 1–8.
25. Лифшиц Ю.Б. К теории трансзвуковых течений около профиля // Уч. Зап. ЦАГИ. 1973. Т. IV. № 5. С. 1–8.
26. Ляпунов С.В. Ускоренный метод решения уравнений Эйлера в задаче о трансзвуковом обтекании профиля // Матем. Моделир. 1991. № 4. С. 83–92.
27. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 744 с.
28. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
29. Giles M.B., Cummings R.M. Wake integration for three-dimensional flowfield computations: Theoretical development // J. of Aircraft. 1999. V. 36. No. 2. P. 357–365.
30. Hunt D.L., Cummings R.M., Giles M.B. Wake integration for three-dimensional flowfield computations: Applications // J. of Aircraft. 1999. № 2. V. 36. P. 366–373.
31. Petruzzelli N., Keane A.J. Wave drag estimation for use with panel codes // J. Aircraft. 2001. № 4. V. 38. P. 778–780.
32. Cole J.D., Malmuth N.D. Wave drag due to lift for transonic airplanes // Proc. Roy. Soc. A. 2005. V. 461. P. 541–560.
33. Gariépy M., Trépanier J.-Y., Improvements in accuracy and efficiency for a far-field drag prediction and decomposition method // AIAA. 2010. 2010–4678. P. 1–15.
34. Судаков Г.Г., Определение компонент аэродинамического сопротивления летательного аппарата в околозвуковом потоке, который описывается системой уравнений Рейнольдса // Уч. Зап. ЦАГИ. 2016. Т. XLVII. № 1. С. 3–12.
35. Toubin H., Bailly D. Development and application of a new unsteady far-field drag decomposition method // AIAA. 2014. V. 2014–2991. P. 1–18.
36. Van der Vooren J., Destarac D. Drag/thrust analysis of a jet-propelled transonic transport aircraft: Definition of physical drag components // Aerospace Sci.&Technol. 2004. V. 8. P. 545–556.
37. Петров А.С. Влияние реальных свойств газа на суммарные аэродинамические силы при дозвуковых скоростях потока // Теплофиз. и аэромех. 2004. Т. 11. № 1. С. 33–50.

Shock–Wave Drag of Profile Flowing by Transonic Gas Flow: History, Achievements, Problems

A. S. Petrov^{a, #}, G. G. Soudakov^{a, ##}

^aCentral Aerohydrodynamic Institute, Zhukovsky, Russia

e-mail: aspetrov1906@rambler.ru[#], soudakov@mail.ru^{##}

This paper presents a review of works on the theory of profile drag and contains an attempt to review the process of basic ideas development about the physical processes that take place at transonic airfoil flow. It should be noted that this field of aerodynamics was replete with erroneous statements at the early stages of its development. The accumulation of experimental data and the improvement of the mathematical apparatus have made it possible to eliminate inaccuracies in the formulation of problems, as well as to significantly improve the mathematical models describing this phenomenon. Nevertheless, a few problems remain unsolved at the present time, requiring further delving into the physics of the phenomenon and improving the mathematical apparatus.

Keywords: overview, profile, wave drag, mathematical models

REFERENCES

1. *Nikolsky A.A., Taganov G.I.* Gas motion in a local supersonic zone and some conditions of potential flow destruction // PMM, 1946, vol. 10, iss. 4, pp. 481–502.
2. *Boxer V.D., Serebriyskiy Ya.M.* Approximate method for determining the wave drag of an airfoil in the presence of a local supersonic zone // Uch. Zap. TsAGI, 1978, no. 5, vol. 9, pp. 21–29.
3. *Boxer V.D., Lyapunov S.V.* Limits of applicability of approximate methods for calculating the wave drag of an airfoil at transonic speeds // Uch. Zap. TsAGI, 1995, no. 3–4, vol. XXVI, pp. 26–34.
4. *Potapchik A.V.* Experimental study of the flow field near an airfoil at transonic speeds // Tr. TsAGI, 1979, no. 2010, pp. 22–34.
5. *Zubtsov A.B., Soudakov G.G.* Asymptotic solution of the problem of subsonic gas flow around an airfoil with the formation of a local supersonic zone // Uch. Zap. TsAGI, 2011, vol. XLII, no. 2, pp. 3–9.
6. *Petrov A.S.* On auxiliary hypotheses of the theory of wave resistance // Uch. Zap. TsAGI, 1989, vol. XX, no. 2, pp. 61–65.
7. *Khristianovich S.A., Serebriyskiy Ya.M.* On wave resistance // Tr. TsAGI, 1944, no. 550, pp. 1–18.
8. *Burago G.F.* Theory of Airfoils Taking Into Account the Influence of Air Compressibility. Moscow: Zhukovsky Air Force Engineering Academy Pub., 1949. pp. 1–166. (in Russian)
9. *Bokser V.D., Soudakov G.G.* Aerodynamic drag of bodies in transonic flow. Theory and applications to computational aerodynamics // Fluid Dyn., 2008, vol. 43, pp. 613–624. <https://doi.org/10.1134/S0015462808040145>
10. *Cole J.D., Cook L.* Transonic Aerodynamics. N.Y.: Elsevier, 1986.
11. *Landau L.D., Lifshits E.M.* Hydrodynamics. Moscow: Nauka, 1986. 736 p. (in Russian)
12. *Krasnov N.F.* Aerodynamics. Vol. 1. Moscow: Higher School, 1976. 310 p. (in Russian)
13. *Zelenskiy I.E.* On the frontal resistance of bodies immersed in a gas flow of supersonic velocity // Uch. Zap. Kharkov Univ., 1949, vol. 29, pp. 1–183.
14. *Karman T.F.* Fundamentals of high-speed aerodynamics // in: General Theory of High Speed Aerodynamics / ed. by *Sears W.R.* Princeton: Univ. Press, 1954. xiv+758 p.
15. *Rinlgel F.* Exakte Lösungen der Differentialgleichungen einer adiabatischen Gasströmung // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. Ingenieurwissenschaftliche Forschungsarbeiten, 1940, vol. 20, no. 4, pp. 185–198.
16. *Frankl F.I.* On the formation of shock waves in subsonic flows with local supersonic velocities // PMM, 1947, iss. 11, pp. 199–202.
17. *Busemann A.* The non-existence of transonic potential flow // Proc. of Symp. in Applied Mathematics, 1953, no. 4, pp. 29–40.
18. *Guderley G.* On the Presence of Shocks in Mixed Subsonic-Supersonic Flow Patterns // Adv. in Appl. Mech., 1953, no. 3, pp. 145–184.

19. *Bers L.* Results and conjectures in the mathematical theory of subsonic and transonic gas flows // Commun. on Pure&Appl. Math., 1954, no. 7, pp. 79–104.
20. *Morawetz C.S.* On the non-existence of continuous transonic flows past profiles // Commun. on Pure &A ppl. Math., 1956, no. 9, pp. 45–68.
21. *Bers L.* Mathematical Problems in Subsonic and Transonic Gas Dynamics. Moscow: Inostr. Lit-ra, 1961. 208 p. (in Russian)
22. *Sears W.R.* Transonic potential flow of a compressible fluid // Appl. Phys., 1951, vol. 21, pp. 771–778.
23. *Golubev V.V.* Lectures on Wing Theory. Moscow;Leningrad: GITTL, 1949. 480 p. (in Russian)
24. *Panzhenskiy V.A., Petrov A.S.* On the flow in the local supersonic zone during transonic flow around an airfoil // Uch. Zap. TsAGI, 1987, vol. 18, no. 2, pp. 1–8.
25. *Lifshits Yu.B.* On the theory of transonic flows around an airfoil // Uch. Zap. TsAGI, 1973, vol. IV, no. 5, pp. 1–8.
26. *Lyapunov S.V.* Accelerated method of the Euler equations solution in transonic airfoil flow problem // Matem. Modelir., 1991, no. 4, pp. 83–92.
27. *Schlichting H., Gersten K.* Boundary Layer Theory. Springer, 2004.
28. *Loitsyansky L.G.* Fluid Mechanics. Moscow: Nauka, 1970. 904 p. (in Russian)
29. *Giles M.B., Cummings R.M.* Wake integration for three-dimensional flowfield computations: Theoretical development // J. of Aircraft, 1999, vol. 36, no. 2, pp. 357–365.
30. *Hunt D.L., Cummings R.M., Giles M.B.* Wake integration for three-dimensional flowfield computations: Applications // J. of Aircraft, 1999, no. 2, vol. 36, pp. 366–373.
31. *Petrizzelli N., Keane A.J.* Wave drag estimation for use with panel codes // J. Aircraft, 2001, no.4, vol. 38, pp. 778–780.
32. *Cole J.D., Malmuth N.D.* Wave drag due to lift for transonic airplanes // Proc. Roy. Soc. A, 2005, vol. 461, pp. 541–560.
33. *Gariépy M., Trépanier J.-Y.* Improvements in accuracy and efficiency for a far-field drag prediction and decomposition method // AIAA, 2010, 2010–4678, pp. 1–15.
34. *Sudakov G.G.* Determination of the components of aerodynamic drag of an aircraft in a transonic flow described by the Reynolds system of equations // Uch. Zap. TsAGI, 2016, vol. XLVII, no. 1, pp. 3–12.
35. *Toubin H., Bailly D.* Development and application of a new unsteady far-field drag decomposition method // AIAA, 2014, 2014–2991, pp. 1–18.
36. *Van der Vooren J., Destarac D.* Drag/thrust analysis of a jet-propelled transonic transport aircraft: Definition of physical drag components // Aerospace Sci.&Technol., 2004, vol. 8, pp. 545–556.
37. *Petrov A.S.* Influence of real properties of gas on total aerodynamic forces at subsonic flow speeds // Thermophys. & Aeromech., 2004, vol. 11, no. 1, pp. 33–50.

УДК 532.5

УДАРНАЯ ВОЛНА И ЦЕНТРИРОВАННАЯ ВОЛНА РАЗРЕЖЕНИЯ В ГАЗЕ АБЕЛЯ–НОБЛЯ

© 2024 г. М. А. Брутян^{1,2,*}, У. Г. Ибрагимов^{1,**}, М. А. Меняйлов^{1,***}¹Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского,
Жуковский, Россия²Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

e-mail: murad.brutyanyan@tsagi.ru*, umar.ibragimov94@yandex.ru**, mickmenn@yandex.ru***

Поступила в редакцию 08.04.2024 г.

После доработки 01.07.2024 г.

Принята к публикации 20.08.2024 г.

Рассматриваются плоские сверхзвуковые течения невязкого газа, подчиняющиеся уравнению состояния Абеля–Нобля (АН). Получены формулы, связывающие параметры течения данного газа до и после скачка уплотнения. Построено также решение задачи Прандтля–Майера о течении газа АН в центрированной волне разрежения. Найдены предельные значения углов отклонения вектора скорости в косой ударной волне и волне разрежения. Приведены сравнения с соответствующими решениями для совершенного газа.

Ключевые слова: сверхзвуковые течения, газ Абеля–Нобля, ударная волна, течение Прандтля–Майера.

DOI: 10.31857/S0032823524060045 EDN: IGZMRY

1. Введение

В работе рассматриваются плоские сверхзвуковые течения в ударной волне и центрированной волне разрежения для газа, подчиняющегося уравнению состояния АН. Данная модель, которая с приемлемой точностью описывает течения при высоких температурах и давлениях от 50 до 2000 МПа, является простым обобщением модели совершенного газа. В практических приложениях модель газа АН используется во внутренней баллистике оружейных каналов, а также при расчетах течения газа в различных ракетных установках [1, 2]. Автомодельные течения газа АН в клине изучены в работе [3], в которой установлена возможность существования таких течений в ограниченном диапазоне чисел Маха и углов раствора клина. Вопросам численного моделирования течений газов с уравнением состояния общего вида, в частности газа АН, посвящены работы [4, 5]. В работе [6] дано сравнение термодинамических параметров газа АН и газа, подчиняющегося уравнению состояния Soave–Redlich–Kwong (SRK). В работе [7] исследуется задача Римана о распаде разрыва для различных моделей газа. В работе [8] получены некоторые формулы для прямого скачка уплотнения в газе АН. Отдельные вопросы детонационных свойств газа АН изучены в работах [8–10]. В настоящей работе наряду с прямым скачком уплотнения рассматривается косой скачок и центрированная волна разрежения в газе АН.

Общая форма уравнения состояния газов может быть записана в виде вириального уравнения состояния [11]:

$$\frac{p}{\rho RT} = 1 + B(T)\rho + C(T)\rho^2 + \dots,$$

где $B(T)$, $C(T)$ и т.д. — функции только температуры и не зависят от давления и плотности. Если во втором приближении функцию $B(T)$ представить в виде $B(T) = b - b_1 / RT$, а $C(T)$ и другие члены положить равными нулю, то получим известное уравнение состояния Ван-дер-Ваальса

$$p + b_1 \rho^2 = \rho RT(1 + b\rho),$$

которое описывает свойства жидкости, как в газообразной, так и в жидкой фазах. Параметр b связан с объемом молекул, а параметр b_1 отвечает за их взаимодействие. При отсутствии взаимодействия, $b_1 = 0$, и малых положительных значениях параметра b , характеризующего отличие газа АН от совершенного газа, приходим к уравнению состояния газа АН [12,13]:

$$p(1 - b\rho) = \rho RT,$$

которое после введения «эффективной» плотности $\tilde{\rho} = \rho / (1 - b\rho)$, опять принимает форму уравнения совершенного газа

$$p = \tilde{\rho} RT$$

Энтропия s газа АН пропорциональна $\ln(p / \tilde{\rho}^\gamma)$, т.е. она принимает постоянное значение при $p / \tilde{\rho}^\gamma = \text{const}$. По определению скорость звука равна, $a = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_s}$, откуда для газа АН имеем:

$$a = \left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho} \right) \sqrt{\gamma RT}$$

или $a = \tilde{a}(\tilde{\rho} / \rho)$, где $\tilde{a} = a(1 - b\rho)$ — «эффективная» скорость звука. Запишем выражения для внутренней энергии e :

$$e = c_v T$$

Здесь и всюду далее предполагается, что теплоемкость газа не зависит от температуры. Энтальпия h газа АН находится по формуле:

$$h = e + p / \rho = e + p \left(b + \frac{RT}{p} \right) = e + RT + bp$$

Отсюда можно сделать вывод, что теплоемкость при постоянном давлении c_p также не зависит от температуры:

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = c_v + R$$

Используя данные формулы, можно выразить энтальпию через скорость звука:

$$h = \frac{a^2}{\gamma - 1} (1 - b\rho) \left(1 - \frac{b\rho}{\gamma} \right); \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

При $b = 0$ полученное выражение совпадает с соответствующей формулой для совершенного газа, $h = a^2 / (\gamma - 1)$ [14].

2. Прямой скачок уплотнения

Аналогично совершенному газу при переходе через прямой скачок уплотнения в газе АН должны сохраняться потоки массы j , импульса I и энергии H :

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 = j \quad (2.1)$$

$$\rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2 = I \quad (2.2)$$

$$\frac{u_1^2}{2} + h_1 = \frac{u_2^2}{2} + h_2 = H \quad (2.3)$$

Здесь индексами 1 и 2 обозначены параметры потока перед и после скачка уплотнения соответственно. По ранее установленному правилу, введем «эффективную» скорость, $\tilde{u}_1 = u_1(1 - b\rho_1)$. Тогда уравнение неразрывности принимает форму:

$$\tilde{\rho}_1 \tilde{u}_1 = \tilde{\rho}_2 \tilde{u}_2 = j,$$

а уравнения импульса и энергии преобразуются к виду:

$$p_1 + \tilde{\rho}_1 \tilde{u}_1^2 + bj^2 = p_2 + \tilde{\rho}_2 \tilde{u}_2^2 + bj^2 = I$$

$$\frac{\tilde{u}_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\tilde{\rho}_1} + bI - \frac{b^2}{2} j^2 = \frac{\tilde{u}_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\tilde{\rho}_2} + bI - \frac{b^2}{2} j^2$$

После сокращения одинаковых членов в левой и правой части полученных уравнений, законы сохранения приобретают вид, совпадающий по форме с соответствующими законами сохранения для совершенного газа:

$$\tilde{\rho}_1 \tilde{u}_1 = \tilde{\rho}_2 \tilde{u}_2 \quad (2.4)$$

$$p_1 + \tilde{\rho}_1 \tilde{u}_1^2 = p_2 + \tilde{\rho}_2 \tilde{u}_2^2 \quad (2.5)$$

$$\frac{\tilde{u}_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\tilde{\rho}_1} = \frac{\tilde{u}_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\tilde{\rho}_2} \quad (2.6)$$

Из уравнений (2.4)–(2.6) находим основные соотношения, связывающие параметры потока перед и за прямым скачком уплотнения:

$$\frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}_1} = \frac{\tilde{u}_1}{\tilde{u}_2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2} \quad (2.7)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (2.8)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)][(\gamma - 1)M_1^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}, \quad (2.9)$$

где число Маха $M_1 = \tilde{u}_1 / \tilde{a}_1 = u_1 / a_1$.

Возвращаясь к физическим переменным скорости u_1 , u_2 и плотности ρ_1 , ρ_2 , для газа АН получаем следующие соотношения на прямом скачке:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2 + 2b\rho_1(M_1^2 - 1)}, \quad (2.10)$$

которые при $b = 0$ переходят в соответствующие формулы для совершенного газа.

Получим зависимость, связывающую число Маха M_1 перед скачком с числом M_2 за прямым скачком в газе АН. Для этого воспользуемся формулами (2.7)–(2.9). Так как $M_{1,2} = \tilde{u}_{1,2} / \tilde{a}_{1,2}$ и $\tilde{a}_{1,2} = \sqrt{\gamma R T_{1,2}}$, из формулы (2.9) находим, что

$$\left(\frac{\tilde{a}_2}{\tilde{a}_1}\right)^2 = \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)][(\gamma - 1)M_1^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}$$

Согласно (2.7) имеем:

$$\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2 = \left(\frac{\tilde{u}_2}{\tilde{u}_1}\right)^2 \left(\frac{\tilde{a}_1}{\tilde{a}_2}\right)^2 = \left[\frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{(\gamma + 1)M_1^2}\right]^2 \frac{(\gamma + 1)^2 M_1^2}{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)][(\gamma - 1)M_1^2 + 2]}$$

или после упрощения:

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}$$

Изменение энтропии при переходе через ударную волну в газе АН дается выражением

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \left(\frac{\tilde{\rho}_1}{\tilde{\rho}_2} \right)^\gamma \quad (2.11)$$

Учитывая соотношения (2.7) и (2.8), уравнение (2.11) перепишем в виде

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left[\frac{(\gamma + 1)(\tilde{\rho}_2 / \tilde{\rho}_1) - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)(\tilde{\rho}_2 / \tilde{\rho}_1)^\gamma - (\gamma - 1)(\tilde{\rho}_2 / \tilde{\rho}_1)^{\gamma+1}} \right]$$

Рассмотрим случай слабого скачка уплотнения, $p_2 - p_1 \ll 1$. Имеем

$$T\Delta s = h_2 - h_1 - \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} \quad (2.12)$$

Используя закон сохранения массы (2.1) и закон сохранения импульса (2.2), из (2.3) после несложных преобразований получаем:

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1) \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right)$$

Тогда уравнение (2.12) принимает форму:

$$T\Delta s = \frac{1}{2}(p_2 - p_1) \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right) - \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho}$$

Для оценки интеграла в (2.12) в случае слабого скачка воспользуемся формулой трапеции

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)[f(x_1) + f(x_2)] - \frac{1}{12}(x_2 - x_1)^3 f''(x_1) + O[(x_2 - x_1)^4]$$

Тогда

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right) (p_2 - p_1) - \frac{1}{12} \left[\frac{\partial^2}{\partial p^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]_1 (p_2 - p_1)^3 + O[(p_2 - p_1)^4]$$

Окончательно получаем

$$T\Delta S = \frac{1}{12} \left[\frac{\partial^2}{\partial p^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]_1 (p_2 - p_1)^3 + O[(p_2 - p_1)^4]$$

Таким образом, как и в совершенном газе, в случае слабых скачков течение газа АН можно считать изэнтропическим с точностью до членов третьего порядка малости.

Из уравнений (2.7) и (2.8) можно получить формулу для ударной адиабаты в газе АН:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1} - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1}} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \frac{1-\bar{b}}{1-\bar{b}(\rho_2/\rho_1)} - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \frac{1-\bar{b}}{1-\bar{b}(\rho_2/\rho_1)}},$$

где $\bar{b} = \rho_1 b$. Из полученной формулы, в частности следует известный результат, что в совершенном газе отношение p_2 / p_1 в адиабате Гюгонии неограниченно возрастает при $\rho_2 / \rho_1 \rightarrow (\gamma + 1) / (\gamma - 1)$, в то время как в изэнтропическом течении $p_2 / p_1 \rightarrow \infty$ при $\rho_2 / \rho_1 \rightarrow \infty$ [15]. На рис. 1 представлены зависимости p_2 / p_1 от ρ_2 / ρ_1 для различных значений параметра \bar{b} в ударной адиабате и в изэнтропе. Видно, что с увеличением этого параметра величина $(\rho_2 / \rho_1)_{\max}$ уменьшается. Здесь и всюду далее расчеты проведены для газа с $\gamma = 1.4$. Заметим, что в отличие от совершенного газа в изэнтропическом течении газа АН отношение $p_2 / p_1 \rightarrow \infty$ при конечном отношении $\rho_2 / \rho_1 \rightarrow 1 / \bar{b}$.

На рис. 2 приведены зависимости $(\rho_2 / \rho_1)_{\max}$ для ударной адиабаты и изэнтропы при $\gamma = 1.4$. Видно, что по мере увеличения \bar{b} максимальная степень сжатия газа уменьшается.

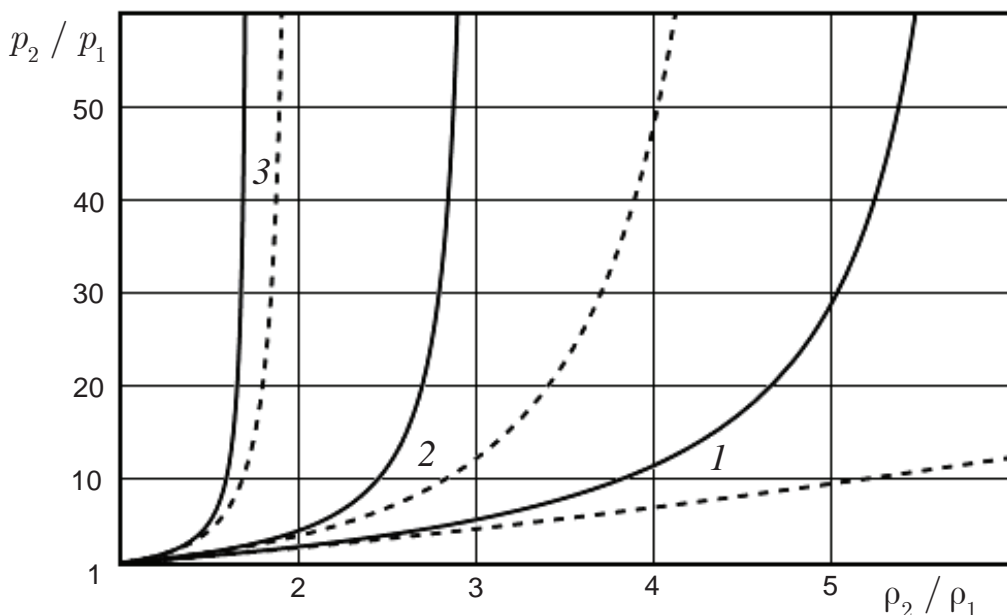


Рис. 1. Семейство ударных адиабат (сплошная линия) и изэнтроп (пунктирная линия); 1) $\bar{b} = 0$; 2) $\bar{b} = 0.2$; 3) $\bar{b} = 0.5$

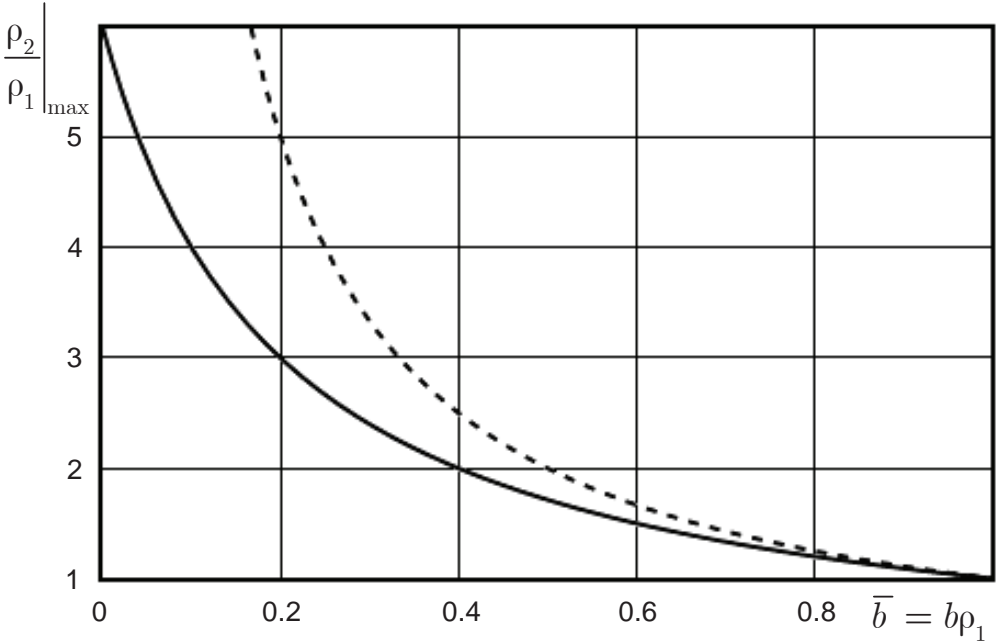


Рис. 2. Максимальное значение отношения ρ_2 / ρ_1 в ударной адиабате (сплошная линия) и в изоэнтропе (пунктирная линия)

3. Косой скачок уплотнения

Рассмотрим течение газа АН в косом скачке уплотнения. Введем прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы ось x совпадала с направлением вектора скорости u_1 . Пусть косой скачок образует с этой осью угол φ , рис. 3.

За скачком вектор скорости потока поворачивается на угол χ . Тогда условие неразрывности тангенциальной составляющей скорости имеет вид:

$$u_1 \cos \varphi = u_{2x} \cos \varphi + u_{2y} \sin \varphi \quad (3.1)$$

Разрыв нормальной составляющей скорости может быть определен с помощью формулы (2.10) для прямого скачка уплотнения:

$$\frac{u_{2x} \sin \varphi - u_{2y} \cos \varphi}{u_1 \sin \varphi} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2a_1^2}{(\gamma + 1)u_1^2 \sin^2 \varphi} + \frac{2b\rho_1}{\gamma + 1} \left(1 - \frac{a_1^2}{u_1^2 \sin^2 \varphi} \right) \quad (3.2)$$

Используя (3.1) и (3.2) найдем связь между компонентами скорости u_{2x} и u_{2y} :

$$u_{2y}^2 = (u_1 - u_{2x})^2 \frac{\frac{2(1 - b\rho_1)}{\gamma + 1} \left(u_1 - \frac{a_1^2}{u_1} \right) - (u_1 - u_{2x})}{u_1 - u_{2x} + \frac{2(1 - b\rho_1)}{\gamma + 1} \frac{a_1^2}{u_1}} \quad (3.3)$$

Как и следовало ожидать, при $b = 0$ формула (3.3) совпадает с выражением, которое описывает форму ударной поляры (строфоиды) в совершенном газе [15].

Используя (3.1) и (3.2) и учитывая, что $\tan \chi = u_{2y} / u_{2x}$, находим угол поворота потока χ за скачком уплотнения, рис. 1:

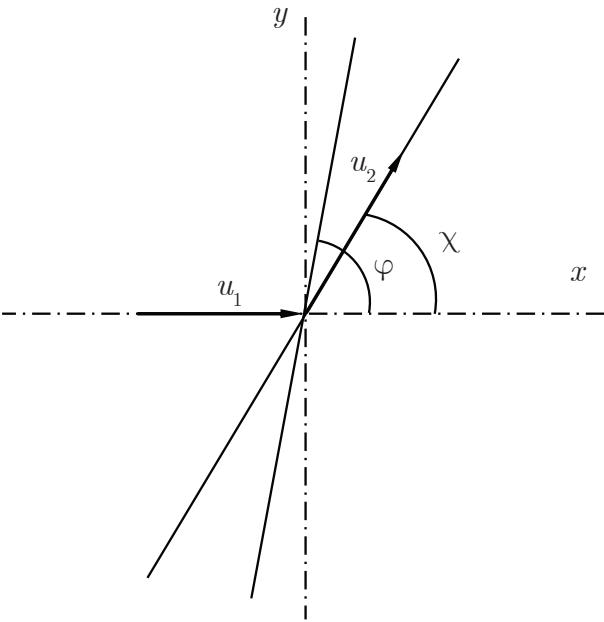


Рис. 3. Схема течения в случае косого скачка уплотнения

$$\operatorname{ctg}\chi=\left[\frac{(\gamma+1)M_1^2}{2(1-b\rho_1)(M_1^2\sin^2\varphi-1)}-1\right]\operatorname{tg}\varphi\tag{3.4}$$

На рис. 4 показана зависимость $u_{2y} = u_{2y}(u_{2x})$, построенная по формуле (3.3) при числе $M_1 = u_1 / a_1 = 2$ и различных значениях параметра $\bar{b} = b\rho_1$.

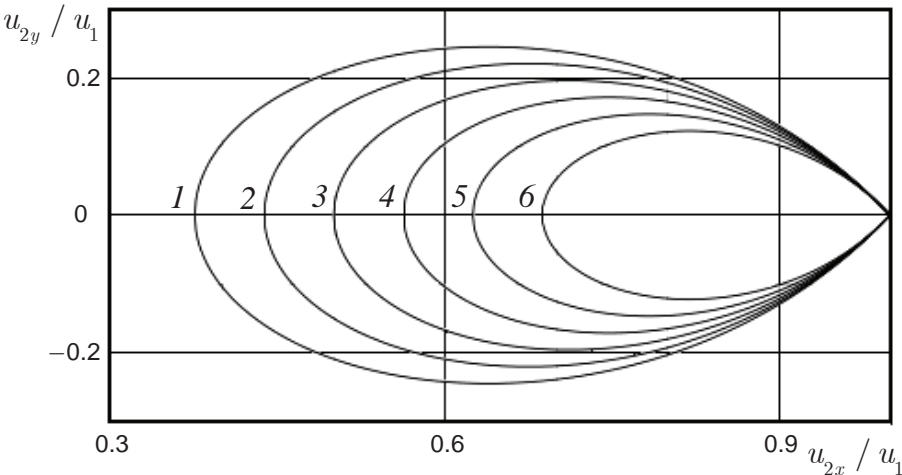


Рис. 4. Диаграмма скоростей для косого скачка уплотнения газа АН:
1) $-\bar{b} = 0$; 2) $-\bar{b} = 0.1$; 3) $-\bar{b} = 0.2$; 4) $-\bar{b} = 0.3$; 5) $-\bar{b} = 0.4$; 6) $-\bar{b} = 0.5$

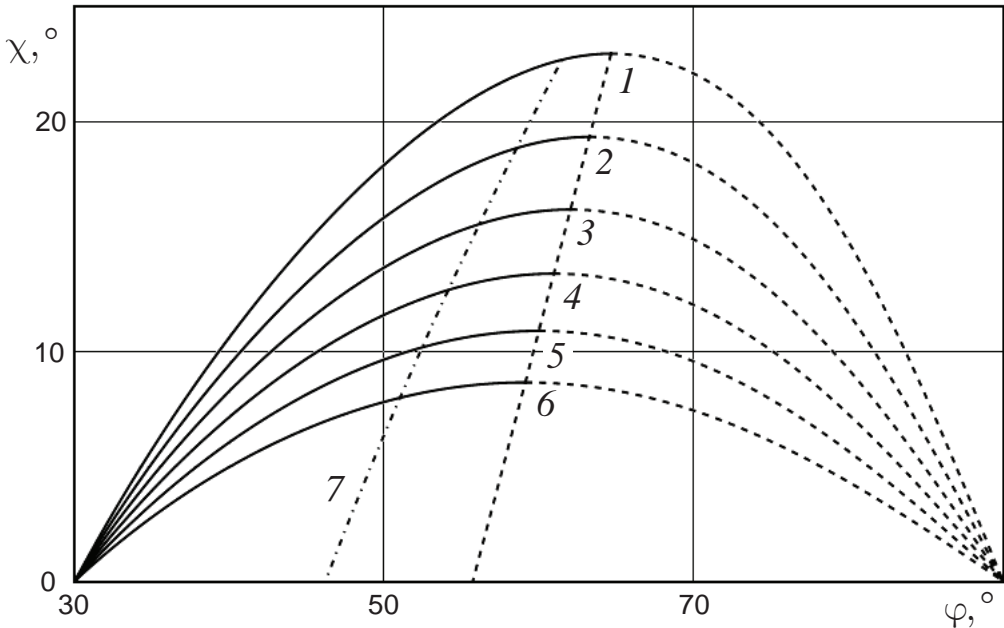


Рис. 5. Зависимость угла поворота потока от угла наклона ударной волны:
 1) $\bar{b} = 0$; 2) $\bar{b} = 0.1$; 3) $\bar{b} = 0.2$; 4) $\bar{b} = 0.3$; 5) $\bar{b} = 0.4$; 6) $\bar{b} = 0.5$;
 7) — линия, соответствующая значению $M=1$ за скачком

Зависимость угла поворота потока χ от угла наклона ударной волны φ , построенная по формуле (3.4) при числе $M_1 = 2$, приведена на рис. 5, где ветви кривых, изображенные сплошными линиями, отвечают ударным волнам слабого семейства, а изображенные пунктиром — ударным волнам сильного семейства. Прямая пунктирная линия соединяет точки максимального угла поворота потока в ударной волне. Из рисунка видно, что при увеличении значения параметра \bar{b} максимально возможный угол поворота потока уменьшается. В совершенном газе это значение примерно равно $\chi_{\max} \approx 23^\circ$. К примеру, в газе АН при $\bar{b} = 0.5$ максимальное значение составляет всего $\chi_{\max} \approx 9^\circ$. При $\chi_{\max} \rightarrow 0$ интенсивность ударной волны (скачок скорости в ней) стремится к нулю, а угол j стремится к углу Маха. На рис. 5 штрихпунктирная линия разделяет области сверхзвукового течения (слева) от области дозвукового течения (справа). Заметим, что дозвуковая область увеличивается при увеличении \bar{b} .

4. Течение Прандтля—Майера

Рассмотрим теперь сверхзвуковое течение газа АН в центрированной волне разрежения (см. рис. 6, где пунктиром показаны линии Маха). По аналогии с совершенным газом, введем полярную систему координат (r, φ) и будем предполагать, что все параметры течения в волне разрежения зависят только от угла φ и не зависят от радиальной координаты r .

В этом случае система уравнений Эйлера, записанная в полярных координатах, имеет следующий вид [15]:

$$\rho u_r + \frac{d}{d\varphi}(\rho u_\varphi) = 0 \quad (4.1)$$

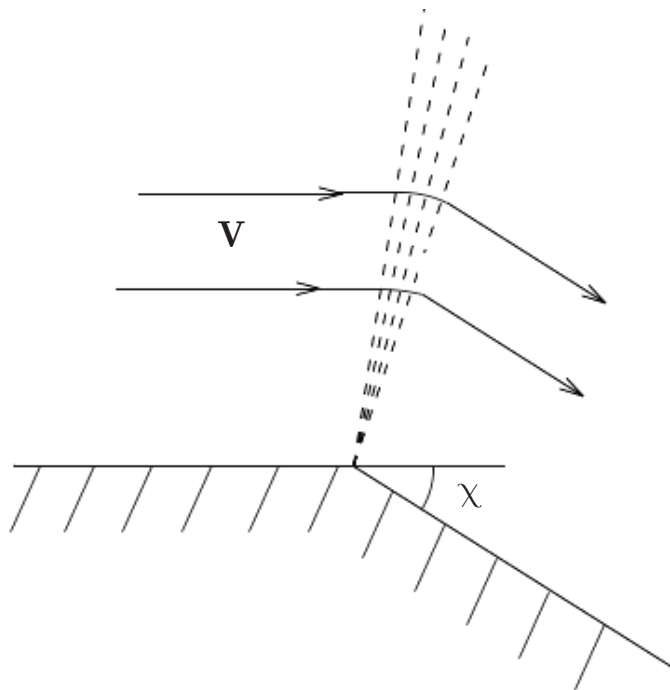


Рис. 6. Схема течения в центрированной волне разрежения

$$\frac{u_\phi}{r} \frac{du_r}{d\phi} - \frac{u_\phi^2}{r} = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{u_\phi}{r} \frac{du_\phi}{d\phi} - \frac{u_r u_\phi}{r} = -\frac{1}{r\rho} \frac{dp}{d\phi} \quad (4.3)$$

$$u_\phi \frac{ds}{d\phi} = 0 \quad (4.4)$$

Здесь ρ , u_r , u_ϕ и s — соответственно плотность, радиальная и азимутальная компоненты скорости, и энтропия. Из (4.4) следует, что условие $s = \text{const}$ выполняется во всем поле течения, поэтому в уравнении (4.3) выражение $\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\phi}$ можно заменить производной $\frac{dh}{d\phi}$. Тогда (4.3) переписывается в форме

$$\frac{u_\phi}{r} \frac{du_\phi}{d\phi} - \frac{u_r u_\phi}{r} = -\frac{1}{r} \frac{dh}{d\phi}$$

Нетривиальное решение системы (4.1)–(4.4) впервые было получено Прандтлем и Майером. В этом решении перпендикулярная к радиус-вектору составляющая u_ϕ скорости в каждой точке равна по величине местной скорости звука:

$$u_\phi = \pm a \quad (4.5)$$

$$u_r = \pm \sqrt{2(H_0 - h) - a^2} \quad (4.6)$$

$$\varphi = - \int \frac{d(\rho a)}{\rho \sqrt{2(H_0 - h) - a^2}} \quad (4.7)$$

Здесь H_0 — полная энтальпия, которая сохраняется во всем поле течения:

$$\frac{u_r^2 + u_\varphi^2}{2} + h = H_0 = \text{const} \quad (4.8)$$

Условие сохранения энтропии s можно записать в форме:

$$a^2 \frac{(1 - b\rho)^{\gamma+1}}{\rho^{\gamma-1}} = a_*^2 \frac{(1 - b\rho_*)^{\gamma+1}}{\rho_*^{\gamma-1}}, \quad (4.9)$$

где a_* и ρ_* — критические скорость звука и плотность газа соответственно, которые, по определению, достигаются при $M = 1$. Перепишем выражение для полной энтальпии через критические параметры течения:

$$H_0 = a_*^2 \frac{(1 - b\rho_*)^2 + (\gamma - b\rho_*)^2 + \gamma - 1}{2\gamma(\gamma - 1)} \quad (4.10)$$

Подставляя (4.8)–(4.10) в (4.7) и, переходя к интегрированию по плотности ρ , имеем:

$$\varphi = - \frac{\gamma + 1}{2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\rho^{(\gamma-3)/2} d\rho}{(1 - b\rho)^{(\gamma+3)/2} \left[C - \frac{\rho^{\gamma-1}}{(1 - b\rho)^{\gamma+1}} \frac{(1 - b\rho)^2 + (\gamma - b\rho)^2 + \gamma - 1}{\gamma(\gamma - 1)} \right]^{1/2}}, \quad (4.11)$$

где константа C равна:

$$C = \frac{\rho_*^{\gamma-1}}{(1 - b\rho_*)^{\gamma+1}} \frac{(1 - b\rho_*)^2 + (\gamma - b\rho_*)^2 + \gamma - 1}{\gamma(\gamma - 1)}$$

Используя формулы (4.9) и (4.10), из уравнения (4.6) находим выражение для радиальной компоненты скорости:

$$u_r = a_* \frac{(1 - b\rho_*)^{(\gamma+1)/2}}{\rho_*^{(\gamma-1)/2}} \left[\frac{\rho^{\gamma-1}}{(1 - b\rho)^{\gamma+1}} \frac{(1 - b\rho)^2 + (\gamma - b\rho)^2 + \gamma - 1}{\gamma(\gamma - 1)} - \frac{\rho^{\gamma-1}}{(1 - b\rho)^{\gamma+1}} \frac{(1 - b\rho)^2 + (\gamma - b\rho)^2 + \gamma - 1}{\gamma(\gamma - 1)} \right]^{1/2} \quad (4.12)$$

Формула для азимутальной компоненты находится из (4.5) и (4.9):

$$u_\varphi = a = a_* \frac{(1 - b\rho_*)^{(\gamma+1)/2}}{\rho_*^{(\gamma-1)/2}} \frac{\rho^{(\gamma-1)/2}}{(1 - b\rho)^{(\gamma+1)/2}} \quad (4.13)$$

Угол поворота вектора скорости χ равен:

$$\chi = \varphi + \arctg \frac{u_\varphi}{u_r} \quad (4.14)$$

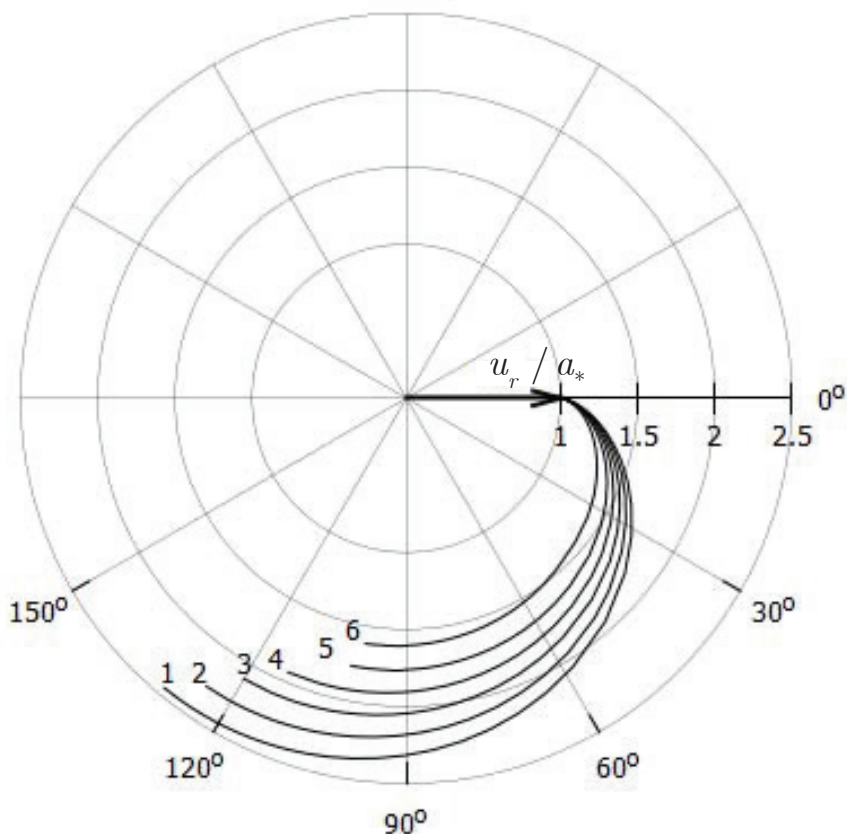


Рис. 7. Зависимость угла поворота вектора скорости в центрированной волне разрежения газа АН, 1) – $b_* = 0$; 2) – $b_* = 0.1$; 3) – $b_* = 0.2$; 4) – $b_* = 0.3$; 5) – $b_* = 0.4$; 6) – $b_* = 0.5$

С помощью полученных формул (4.11)–(4.14) построена зависимость модуля скорости $V = \sqrt{u_r^2 + u_\phi^2}$ от угла поворота χ в полярной системе координат при различных значениях параметра, рис. 7.

Максимальный угол поворота потока χ_{\max} определяется условием возникновения вакуума, $p = 0$. В совершенном газе ($b_* = 0$, $b_* = 0$) величина χ_{\max} составляет примерно $\chi_{\max} \approx 130^\circ$. При увеличении параметра b_* значение χ_{\max} уменьшается и при $b_* = 0.5$ составляет, $\chi_{\max} \approx 102^\circ$.

Заключение

Рассмотрены плоские сверхзвуковые течения невязкого газа, подчиняющиеся уравнению состояния АН. Получены формулы, связывающие параметры газа перед и после прямого и косого скачков уплотнения. Получено также решение задачи о течении газа АН в центрированной волне разрежения.

Определены переменные, при переходе к которым формулы для прямого скачка уплотнения принимают вид, совпадающий по форме с соответствующими формулами для совершенного газа. Установлено, что в случае слабых скачков течение газа АН, как и течение совершенного газа, можно считать изоэнтропическим с точностью до членов третьего порядка малости.

Найден максимальный угол поворота в косом скачке уплотнения для различных значений параметра \bar{b} , определяющего отличие газа АН от совершенного газа. Установлено, что в отличие от совершенного газа в изоэнтропическом течении газа АН отношение $p_2 / p_1 \rightarrow \infty$ при конечном значении отношения $\rho_2 / \rho_1 \rightarrow 1 / \bar{b}$. Показано, что максимальный угол поворота потока в ударной волне уменьшается, а область дозвукового течения за скачком увеличивается с ростом значения \bar{b} . Получено, что максимальный угол разворота в центрированной волне разряжения также уменьшается при увеличении степени отличия газа АН от совершенного газа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Neron L., Saurel R.* Noble–Abel first-order virial equations of state for gas mixtures resulting of multiple condensed reactive materials combustion // *Phys. Fluids*. 2021. V. 93. P. 3090–3097.
2. *Moore F.* Approximate Methods for Weapon Aerodynamics. AIAA Pub., 2000. 464 p.
3. *Брутян М.А., Ибрагимов У.Г., Меняйлов М.А.* Автомодельные течения газа Абеля–Нобля в плоском диффузоре // *Тр. МФТИ*. 2023. Т. 15. № 3. С. 133–143.
4. *Banks J.W.* On exact conservation for the euler equations with complex equations of state // *Commun. in Comput. Phys*. 2010. V. 8. P. 995–1015.
5. *Dumbser M., Casulli V.* A conservative, weakly nonlinear semi-implicit finite volume scheme for the compressible Navier–Stokes equations with general equation of state // *Appl. Math.&Comput*. 2016. V. 272. Pt. 2. P. 479–497.
6. *Tang X., Dzieminska E., Hayashi A.K.* A preliminary discussion of the real gas effect on the isentropic expansion inlet boundary conditions of high-pressure hydrogen jets // *Sci.&Technol. of Energetic Mater*. 2019. V. 80. № 4. P. 150–158.
7. *Menikoff R., Plohr B.J.* The Riemann problem for fluid flow of real materials // *Rev. of Modern Phys*. 1989. V. 61. № 1. P. 75–130.
8. *Radulescu M.I.* Compressible flow in a Noble–Abel stiffened gas fluid // *Phys. Fluids*. 2020. V. 32. 056101. P. 1–5.
9. *Zifeng Wenga, Remy Mevel, Chung K. Law.* On the critical initiation of planar detonation in Noble–Abel and van der Waals gas // *Combust.&Flame*. 2023. V. 255. P. 112890. <https://doi.org/10.1016/j.combustflame.2023.112890>
10. *Gonzales C.A.Q., Pizzuti L., Costa F.* Propagation of combustion waves in Noble–Abel gases // 20th Int. Congr. of Mechanical Engineering. Nov. 15–20, 2009. Gramado, Brazil. P. 1–10.
11. *Бай Шу-И.* Введение в теорию течения сжимаемой жидкости. М.: Иностранная литература, 1962. 440 с.
12. *Johnston I.A.* The Noble–Abel Equation of State: Thermodynamic Derivations for Ballistics Modeling. Edinburgh, South Australia: DSTO, 2005.
13. *Petrik G.G.* Problems of low-parameter equations of state // *J. of Phys.: Conf. Ser.* 2017. V. 891. Art. No. 012328. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/891/1/012328>
14. *Брутян М.А.* Основы трансзвуковой аэродинамики. М.: Наука, 2017. 175 с.
15. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 735 с.

Shock Wave and Centered Rarefaction FAN in Noble–Abel Gas

M. A. Brutyan^{a,b,#}, U. G. Ibragimov^{a,##}, M. A. Meniailov^{a,###}

^aCentral Aerohydrodynamic Institute named after N.E. Zhukovsky,
Zhukovsky, Russia

^bMoscow Institute of Physics and Technology,
Dolgoprudny, Russia

e-mail: murad.brutyan@tsagi.ru[#], umar.ibragimov94@yandex.ru^{##}, mickmenn@yandex.ru^{###}

Planar supersonic flows of inviscid gas, obeyed the Abel – Noble (AN) equation of state, are considered. Formulas connecting flow parameters of considered gas before and after shock wave are obtained. Solution of Prandtl–Meyer problem for flow of AN gas in

centered rarefaction fan is constructed. Critical values of velocity vectors turn angle in oblique shock wave and rarefaction fan are found. Comparisons with corresponding solution for perfect gas are given.

Keywords: supersonic flow, Abel–Noble gas, shock wave, Prandtl–Meyer flow

REFERENCES

1. *Neron L., Saurel R.* Noble–Abel first-order virial equations of state for gas mixtures resulting of multiple condensed reactive materials combustion // *Phys. Fluids*, 2021, vol. 93, pp. 3090–3097.
2. *Moore F.* Approximate Methods for Weapon Aerodynamics. AIAA Pub., 2000. 464 p.
3. *Brutyan M.A., Ibragimov U.G., Meniailov M.A.* Self-similar flows of the Abel–Noble gas in a planar diffuser // *Proc. of MIPT*, 2023, vol. 15, no. 3, pp. 133–143. (in Russian)
4. *Banks J.W.* On exact conservation for the euler equations with complex equations of state // *Commun. in Comput. Phys.*, 2010, vol. 8, pp. 995–1015.
5. *Dumbser M., Casulli V.* A conservative, weakly nonlinear semi-implicit finite volume scheme for the compressible Navier–Stokes equations with general equation of state // *Appl. Math. & Comput.*, 2016, vol. 272, pt. 2, pp. 479–497.
6. *Tang X., Dzieminska E., Hayashi A.K.* A preliminary discussion of the real gas effect on the isentropic expansion inlet boundary conditions of high-pressure hydrogen jets // *Sci. & Technol. of Energetic Mater.*, 2019, vol. 80, no. 4, pp. 150–158.
7. *Menikoff R., Plohr B.J.* The Riemann problem for fluid flow of real materials // *Rev. of Modern Phys.*, 1989, vol. 61, no. 1, pp. 75–130.
8. *Radulescu M.I.* Compressible flow in a Noble–Abel stiffened gas fluid // *Phys. Fluids*, 2020, vol. 32, 056101, pp. 1–5.
9. *Zifeng Weng, Remy Mevel, Chung K. Law.* On the critical initiation of planar detonation in Noble–Abel and van der Waals gas // *Combust. & Flame*, 2023, vol. 255, pp. 112890. <https://doi.org/10.1016/j.combustflame.2023.112890>
10. *Gonzales C.A.Q., Pizzuti L., Costa F.* Propagation of combustion waves in Noble–Abel gases // 20th Int. Congr. of Mechanical Engineering. Nov. 15–20, 2009. Gramado, Brazil. pp. 1–10.
11. *Shih-I Pai.* Introduction to the theory of compressible flow // Literary Licensing, LCC, 2013, pp. 1–400.
12. *Johnston I.A.* The Noble–Abel Equation of State: Thermodynamic Derivations for Ballistics Modeling. Edinburgh, South Australia: DSTO, 2005.
13. *Petrik G.G.* Problems of low-parameter equations of state // *J. of Phys.: Conf. Ser.*, 2017, vol. 891, art. no. 012328. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/891/1/012328>
14. *Brutyan M.A.* Foundation of Transonic Aerodynamics. Moscow: Nauka, 2017. 175 p. (in Russian)
15. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Fluid Mechanics. Moscow: Nauka, 1986. 735 p. (in Russian)

УДК 533.6.011.5;519.63

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ МОДЕЛИ В УДАРНОЙ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

© 2024 г. С. М. Босняков^{1,*}, А. Р. Горбушин^{1,**}, С. В. Матяш¹,
С. В. Михайлов^{1,***}

¹Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского,
Жуковский, Россия

e-mail: bosnyakov@tsagi.ru*, gorbushin@tsagi.ru**, sergey.mikhaylov@tsagi.ru***

Поступила в редакцию 29.03.2024 г.

После доработки 29.05.2024 г.

Принята к публикации 15.06.2024 г.

Исследованы различные подходы повышенной точности к численному решению задачи нестационарного обтекания модели конуса в условиях ударной аэродинамической трубы. Показано, что применение расчетных методов на основе диссипативных численных схем второго порядка приводит к «смазыванию» физических осцилляций решения и влечет за собой значительные ошибки. Проведено сопоставление, которое показало качественное и количественное соответствие результатов расчета и эксперимента на этапе запуска ударной аэродинамической трубы. Сделан вывод о возможности применения предложенной методологии на практике.

Ключевые слова: уравнения Рейнольдса, численные методы, повышенная точность, нестационарная постановка, тестирование, ударная труба, конус, эксперимент, расчет

DOI: 10.31857/S0032823524060058 EDN: IGRDMU

1. Введение

Во все периоды развития авиационной техники актуальными были проблемы определения нестационарных аэродинамических характеристик моделей летательных аппаратов в процессе испытаний в аэродинамических трубах (АДТ). Это связано с рядом факторов, прежде всего повышенными требованиями к динамической прочности модели и необходимостью измерения быстро изменяющихся характеристик, таких как нестационарные силы, моменты и распределения давлений. При этом различают несколько типов зависящих от времени процессов. Сильные возмущения могут инициироваться скачками уплотнения в тракте ударной АДТ при возникновении отрывов пограничного слоя с поверхностей или резких изменениях конфигурации модели, например, разрушениях части крыла.

В настоящее время активно разрабатывается концепция «Электронная Аэродинамическая Труба» [1], которая подразумевает сопровождение эксперимента с целью последующей коррекции и пересчета экспериментальных данных. Созданы «Цифровые двойники» нескольких промышленно важных АДТ и имеется обширный опыт их практического применения [2–4]. Задача решена в рамках системы уравнений RANS [5], замкнутой дифференциальной моделью турбулентности [6, 7] и дополнен-

ной специальными граничными условиями [3], моделирующими работу реальной АДТ, имеющей камеру давления, перфорацию, поддерживающее устройство, камеру смещения и т.д. В данной работе ставится задача подготовки математического базиса для разработки «Цифрового двойника» ударной АДТ [8], в которой реализуется существенно нестационарный процесс, определяемый скачком уплотнения, проходящим по ее тракту.

Нестационарная задача для системы уравнений Навье–Стокса, осредненной по Рейнольдсу (URANS), выписана в нескольких монографиях, например, [11, 12]. Легко заметить, что системы RANS и URANS в данной статье идентичны, но это видимое совпадение. В подходе URANS время имеет четкий физический смысл. В уравнениях RANS, время добавлено в виде математического параметра для организации процедуры установления решения. Существуют и другие процедуры установления, например, итерационные, которые не требуют времени. Отличия RANS и URANS в данной реализации заключаются также в граничных и начальных условиях, и, кроме того, в особенностях применения используемых численных методов. Как уже упоминалось выше, в данной реализации RANS происходит установление решения по времени. При этом промежуточное состояние при условии, что процесс сходится, значения не имеет, важен результат. Для уравнений URANS исследуется развитие решения во времени и каждый промежуточный временной слой является определяющим. Подходы RANS и URANS достаточно часто подвергаются критике. Это связано с тем, что при выводе этих уравнений применяется процедура осреднения по всем масштабам турбулентных движений. Нестационарные процессы в URANS описываются корректно только в случаях, когда их временные масштабы намного больше масштабов турбулентности. Это ограничивает частоты исследуемых явлений. Следует отметить, что, наряду со «стационарными» моделями турбулентности, существуют и нестационарные, например, [13]. По этой причине вопрос о выборе модели решается в каждом отдельном случае, исходя из постановки задачи и результатов тестирования.

Задачи, связанные с распространением и взаимодействием нестационарных ударных волн, вызывают определенные трудности. Их аналитическое решение возможно только в приближенной или линейной постановке [14]. Что же касается нелинейных уравнений, то в настоящее время наиболее перспективными являются численные подходы, основанные на применении ЭВМ. Наиболее удобными являются методы типа Годунова [15–17], в которых естественным образом объединены возможности моделирования подвижных разрывов. Рассматривают два подхода к организации расчета: с выделением [18, 19] и размазыванием нестационарных разрывов [20]. Случай с размазыванием называется «сквозным расчетом», который характерен тем, что вычисления ведутся без специальной обработки зон с разрывами, которые появляются автоматически в виде областей с сильными изменениями параметров потока. Подход полностью оправдывает себя, т.к. позволяет моделировать сложные двумерные и трехмерные течения. В настоящее время получены интересные результаты, например, по дифракции [21] ударной волны на клине и др.

В методах сквозного счета ударная волна размывается за счет схемной вязкости, которая «работает» в ту же сторону, что и физическая вязкость. Тем не менее, численная и физическая вязкости принципиально различны по своей природе. Так, физическая вязкость размывает скачки уплотнения естественным образом, при этом процесс размыва описывается уравнениями Навье–Стокса, а численная вязкость увеличивает размеры области размыва за счет «паразитной» диссипации. С измельчением расчетной сетки влияние численной вязкости уменьшается пропорционально порядку численной схемы, и решение стремится к физически обоснованному. В случае невязкой задачи в постановке уравнений Эйлера ситуация усложняется, т.к. физически обоснованным решением для скачка уплотнения является разрыв, который методом

сквозного счета не воспроизводится. По этой причине измельчение расчетной сетки вместо улучшения решения может приводить к его ухудшению за счет появления искажений, обусловленных локальной неустойчивостью, например, «карбункул-эффект» [22]. С другой стороны, «теряется» понятие аппроксимации скачка уплотнения. Так, в работах [23, 24] показано, что схема повышенного порядка аппроксимации имеет лишь первый порядок сходимости за фронтом ударной волны. В работах [25, 26] предлагаются различные способы преодоления указанных проблем, однако их обобщение на сложные задачи оказывается затруднительным. При этом определяющее значение имеет вопрос качества численной схемы. По соображениям, изложенным в работах [27, 28], приоритет отдается монотонным (или почти монотонным) схемам повышенного порядка точности, основанным на методе Годунова. В схемах Годунова повышение порядка аппроксимации по пространству обычно достигается процедурой реконструкции данных. Простейшими являются кусочно-линейные реконструкции, которые позволяют достичь второго порядка точности. Ключевую роль в создании монотонной схемы на основе кусочно-линейной реконструкции сыграла работа [29], в которой была предложена функция выбора минимального по модулю значения градиента. Указанная функция позволила записать численную схему повышенного порядка точности и обойти «запрет» знаменитой теоремы Годунова [30]. В дальнейшем была предложена схема типа MC [31] (monotonized central-difference), которая обладает меньшей диссипацией по сравнению с [29], но, строго говоря, не является монотонной, а удовлетворяет условию TVD (Total Variation Diminishing). Увеличение точности расчета продолжилось по пути построения численных методов на базе реконструкций пятого порядка. В рамках данной статьи использованы только два подхода. Это WENO5 (Weighted Essentially Nonoscillatory) и MP5, детальное описание которых можно найти в работе [32].

При решении нестационарной задачи важную роль играет способ интегрирования системы уравнений по времени. Из простейших можно указать явный метод Эйлера [33] первого порядка точности. Его дополняет неявный метод с дуальным шагом [34] по времени, который позволяет увеличить скорость расчета и проходить через заранее оговоренные временные интервалы. Определенный интерес представляет двухшаговый метод второго порядка, который является классическим методом Хьюна [35]. Указанный метод базируется на схеме RK (Runge–Kuta) и обладает повышенной устойчивостью при использовании TVD схем. Методы этого типа также идентифицируются как SSP (Strong Stability Preserving) [36]. Так, двухшаговый метод второго порядка точности с ограничением на шаг по времени, определяемым числом $CFL = 1$ (Courant–Friedrichs–Lewy) обозначается аббревиатурой SSP22. Ограничение на CFL является необходимым условием устойчивости численного решения дифференциальных уравнений в частных производных. Иногда для краткости число CFL называется числом Куранта. Пятишаговый метод четвертого порядка точности в этой классификации называется SSP54. В соответствии с работой [37] четырехшаговый метод SSP четвертого порядка построить невозможно. По всей видимости вариант, предложенный в работе [38], является оптимальным. Ограничение на шаг по времени в этом случае определяется числом $CFL = 2.5$.

Для настройки численного метода и оценки его точности применительно к проблеме создания цифрового двойника ударной АДТ используются различные тестовые задачи. Они делятся на две группы, которые отличаются типом продвижения ударной волны по тракту трубы. К первой группе относятся тесты, моделирующие продвижение волны в невозмущенном потоке [27]. При этом возможно появление препятствий, например, уступов [39]. Во второй группе тестов ударная волна движется в возмущенном поле. Здесь следует отметить задачу о нестационарном взаимодействии нескольких ударных волн [40]. Для тестирования метода расчета в случае неравномерного поля хорошо подходит задача Shu–Osher [35]. Она содержит сину-

соидальное возмущение плотности перед «правым» скачком уплотнения задачи Римана, которое приводит к сильному изменению решения указанной задачи.

При тестировании особое внимание следует уделять начальным ошибкам, возникающим у границы расчетной области вследствие искусственного «размазывания» ударной волны. Этот тип ошибки известен и описан в литературе как «start-up errors» [31]. На границе вследствие распада произвольного разрыва [30] возникают три возмущения со скоростями распространения « $u-c$ », « u » и « $u+c$ », где u — скорость потока, а c — скорость звука. Из-за наличия схемной вязкости указанные возмущения «размываются». При этом зона искусственного «размытия» накладывается на «размытие» вследствие действия физической вязкости, как молекулярной, так и турбулентной. Это приводит к образованию объединенного фронта возмущения, из которого трудно выделить физическую составляющую. Для этого требуется проводить специальные исследования.

В данной статье описывается математическая постановка задачи и численная схема для ее решения. Обсуждаются результаты тестовых расчетов и делаются оценки возникающих погрешностей. Исследуется обтекание изолированного конуса в неравномерном потоке. Рассматривается обтекание этого конуса в условиях запуска ударной АДТ. Дается описание экспериментальной установки. Проводится сопоставление расчетных и экспериментальных данных и делается заключение.

2. Система уравнений и математическая постановка задачи

Система нестационарных уравнений Навье—Стокса, осредненных по Рейнольдсу (URANS), записывается в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_j^{Eu}}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{f}_j^{NS}}{\partial x_j} = \mathbf{s}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_i \\ \rho E \\ \rho p'_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_j^{Eu} = \begin{bmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_j + p \delta_{ij} \\ (\rho E + p) u_j \\ \rho p'_m u_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_j^{NS} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{ij} + \tau_{ijt} \\ (\tau_{ij} + \tau_i) u_j + (q_j + q_{jt}) \\ J_j(p'_m) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ S(p'_m) \end{bmatrix}$$

Здесь \mathbf{u} — вектор консервативных переменных, \mathbf{f}_j^{Eu} и \mathbf{f}_j^{NS} — вектора потоковых переменных, \mathbf{s} — вектор источниковых членов, u_i — компоненты вектора скорости, ρ — плотность, p — давление, E — полная энергия единицы массы,

$\tau_{ij} = -\mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \delta_{ij} \right]$ — компоненты тензора вязких напряжений,

$\tau_{ijt} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \mu_t \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \delta_{ij} \right]$ — компоненты тензора турбулентных напряже-

ний, k — кинетическая энергия турбулентных пульсаций, μ и μ_t — коэффициенты молекулярной и турбулентной вязкости. q_j , q_t — молекулярный и турбулентный поток тепла. Для замыкания системы используются уравнения состояния $p = \rho R T$ и одна из двух моделей турбулентности SA [6] или SST [7].

Решается краевая задача с известными начальными и граничными условиями. Решение получается методом интегрирования по времени. В начальный момент во всем пространстве задаются параметры набегающего потока, которые могут быть функцией времени. На твердых, в общем случае, подвижных границах выполняется условие прилипания. На входе и выходе из расчетной области задаются параметры, определяемые внешними условиями и инвариантами Римана. Интегрирование по времени осуществляется с шагами, удовлетворяющими ограничениям по числу Ку-

ранта [30] ($CFL < 1$) в ядре потока. В ряде случаев возможно получение установившегося и не зависящего от времени решения. В тех случаях, когда установившееся решение вследствие физических факторов не получается, а выходит на периодический цикл, может проводиться усреднение.

3. Численная схема и практическая реализация задачи

В условиях АДТ необходимо учитывать не только условия обтекания аэродинамической модели, но также специфические особенности работы экспериментальной установки. На результаты эксперимента оказывают влияние стенки АДТ, поддерживающие устройства модели (державки), турбулентность потока и другие факторы. Следует различать экспериментальные установки различных типов. Так, в случае сверхзвуковой АДТ, модель располагают в «характеристическом ромбе», в ударной АДТ время испытания чрезвычайно мало и т.д. Вследствие малости размеров рабочей части ударной АДТ боковые стенки могут оказаться достаточно близко к модели. В этом случае приходится учитывать взаимодействие отраженных скачков уплотнения с поверхностью модели. Все вышеперечисленные факторы учитываются при подготовке расчетного исследования.

Для лучшего соответствия геометрии аэродинамической модели и АДТ расчетная область делится на блоки, которые стыкуются друг с другом. Это позволяет аппроксимировать сложные геометрии и получать качественные численные решения. Схема исследуемой АДТ приведена на рис. 1. Она взята непосредственно из работы [8]. Пример разбивки геометрии на блоки, которые привязаны к элементам АДТ, представлен на рис. 2. Хорошо видны поверхности конуса и элементов аэродинамической трубы. При построении расчетной сетки учитывается, что все получаемые решения являются сеточно-зависимыми. По этой причине максимально подробно учитываются местные особенности течения, в частности, положение скачков уплотнения.

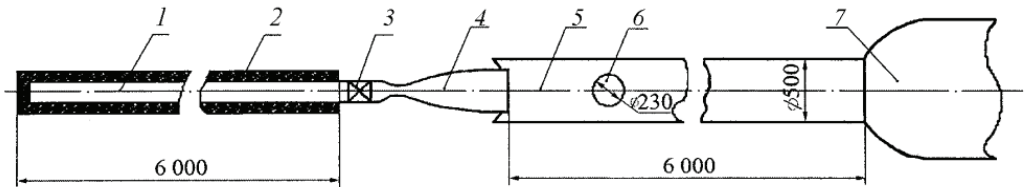


Рис. 1. Схема ударной аэродинамической трубы УТ-1М [8]

1 — тепловая камера, 2 — электрический подогреватель;
3 — диафрагменный отсек; 4 — сверхзвуковое сопло; 5 — рабочая часть;
6 — оптическое окно; 7 — вакуумная емкость

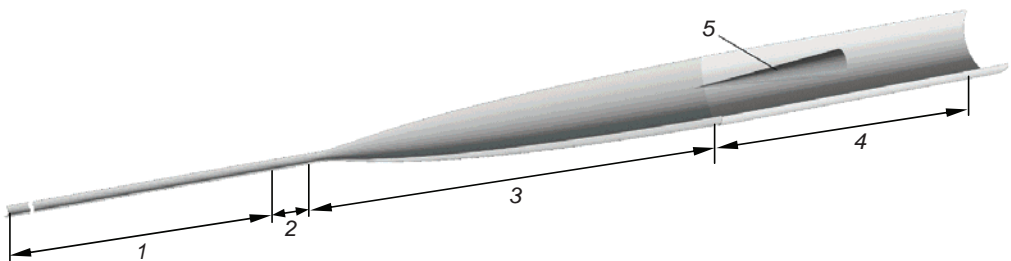


Рис. 2. Математическая модель аэродинамической трубы УТ-1М

1 — камера высокого давления, 2 — форкамера, 3 — сопло, 4 — рабочая часть,
5 — конус

Для построения расчетной схемы используется система координат, связанная с сеточными линиями. Предполагается, что имеется ненулевой определитель матрицы Якоби \mathbf{J} . Переход между декартовой и сеточной системами координат осуществляется по формуле: $\mathbf{V}_\xi = \mathbf{J} \cdot \mathbf{V}_x$. После перехода все действия производятся вдоль сеточных линий по одномерным соотношениям. На рис. 3 приведен пример пятиточечного сеточного шаблона. Границы ячеек изображены пунктирными линиями. Значения функций в центрах ячеек – кружками. Центрам ячеек приписываются целочисленные индексы, граням (пунктиры) – половинные.

Вводятся следующие обозначения:

$$\begin{aligned} u &= u_j, \quad u_l = u_{j-1}, \quad u_r = u_{j+1} \\ \Delta u_l &= u - u_l, \quad \Delta u_r = u_r - u \\ h &= h_j, \quad h_l = (h_j + h_{j-1}) / 2, \quad h_r = (h_j + h_{j+1}) / 2 \end{aligned}$$

Линейная интерполяция возвращает значение $u_{inter} = (u_l h_r + u_r h_l) / (h_l + h_r)$. Для вычисления производных используется тот же шаблон. В результате получается:

$$\begin{aligned} u'_l &= \Delta u_l / h_l, \quad u'_r = \Delta u_r / h_r \\ u' &= (u'_l h_r + u'_r h_l) = (\Delta u_l h_r^2 + \Delta u_r h_l^2) / (h_l h_r^2 + h_r h_l^2) \\ \Delta u &= h u' \end{aligned}$$

Вторая производная записывается как:

$$u'' = (u'_r - u'_l) / h = (\Delta u_r h_l - \Delta u_l h_r) / (h_l h_r h_j), \text{ а кривизна } -\Delta u' = h u'$$

Для конструирования улучшенных схем второго порядка аппроксимации применяются математические функции:

$$\text{minmod}(x, y) = \frac{1}{2}(\text{sign}(x) + \text{sign}(y))\min(|x|, |y|)$$

$$\text{median}(x, y, z) = x + \text{minmod}(y - x, z - x)$$

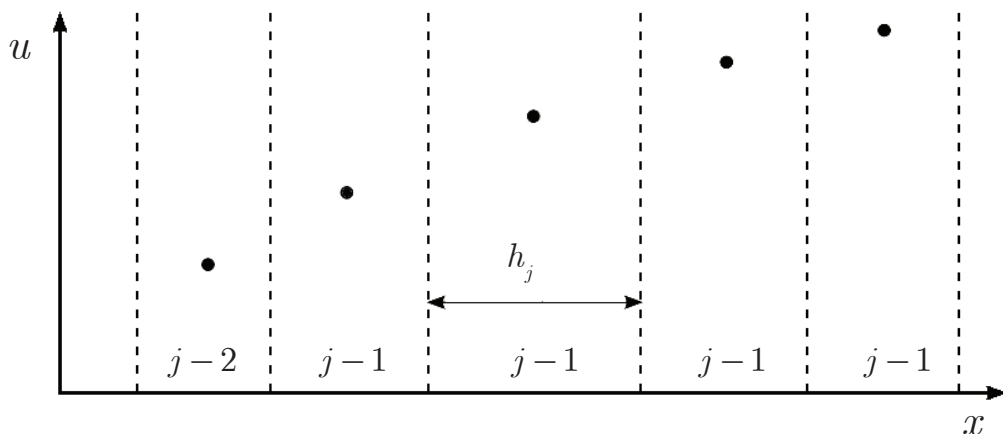


Рис. 3. Пример пятиточечного сеточного шаблона

Но существует и другой подход. Так, для конструирования TVD схемы MUSCL (Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws) [28] значение производной вычисляется из условия, которое несколько отличается от функции $\minmod(x, y)$.

$$u' = \begin{cases} 0, & \text{если } u'_l u'_r \leq 0 \\ \min(q \min(u'_l, u'_r), 0.5(u'_l + u'_r)), & \text{если } u'_l > 0 \text{ и } u'_r > 0 \\ \max(q \max(u'_l, u'_r), 0.5(u'_l + u'_r)), & \text{если } u'_l < 0 \text{ и } u'_r < 0, \end{cases}$$

где $q = 1.25$.

Более точная схема WENO5 основана на пространственной реконструкции пятого порядка [41]. Если решение гладкое и не используется сглаживание, то на равномерной сетке она дает пятый порядок аппроксимации по пространству. При наличии разрывов используется шаблон, дающий гладкое решение, а веса остальных шаблонов считаются близкими к нулю. Вариант монотонизации для схем высокого порядка и, в частности, для схемы WENO5 описан в [32]. Авторы [42] рекомендуют использовать сглаживание [41] и монотонизацию [32] одновременно. Процесс монотонизации разбивается на два этапа. Определяется ограничитель первого порядка на разрывах, а далее производится расширение диапазона на экстремумах. Схема WENO5 первоначально выписана для равномерной расчетной сетки. В случае существенного изменения размеров ячеек сетки (например, на границе блоков) порядок аппроксимации схемы падает до первого. Для решения этой проблемы в работе [43] предложен алгоритм учета неравномерности.

Для интегрирования по времени применяется многошаговая процедура перехода со слоя в момент времени n на следующий слой $n + 1$. В работе исследованы три метода, имеющие разный порядок точности. Явный одношаговый метод Эйлера первого порядка точности описан в работе [30]. Двухшаговый явный метод SSP22 второго порядка точности подробно описан в работе [35]. Пятишаговый метод четвертого порядка точности SSP54. Коэффициенты пятишаговой схемы подобраны в работе [38] и обеспечивают устойчивость расчета.

4. Тестирование качества схемы расчета в нестационарной постановке

В данном разделе рассматривается тестовая задача движения плоской ударной волны по неоднородной среде в постановке Shu–Osher [35]. В начальный момент времени ($t = 0$) фронт ударной волны расположен в сечении $x = 1$. Далее ударная волна распространяется по газу, в котором плотность распределена по синусоидальному закону. Задача решается в приближении полной системы уравнений Эйлера. Начальный разрыв задается параметрами:

$$\begin{aligned} (\rho_l, u_l, p_l) &= (3.857143, 2.629369, 10.33333) \quad \text{при } x < 1 \\ (\rho_r, u_r, p_r) &= (1 + \varepsilon \sin 5x, 0, 1) \quad \text{при } x \geq 1 \end{aligned}$$

Рассмотрен случай $\varepsilon = 0.2$. При этом реализуется полная конфигурация задачи Римана [30] (два скачка уплотнения с контактным разрывом между ними, левый скачок при данных условиях является слабым). Расчет ведется вплоть до момента времени $t = 1.8$. Задача Shu–Osher [35] не имеет точного решения. По этой причине «эталонное» решение получается численно и в дальнейшем используется для изучения качества различных схем. Рассмотрены две сетки с числом ячеек 16000 и 64000 ячеек. Используется схема WENO5 с параметром сглаживания $\varepsilon = 10^{-6}$. Для интегрирования по времени применены двухшаговая схема SSP22 и пятишаговая SSP54. В обоих случаях шаг по времени выбирался, исходя из условия $CFL = 0.5$. Полученные решения представлены на рис. 4. Толстой сплошной линией показано распределение плотности, полученное при решении задачи Римана в классической постановке, а тонкой сплошной, соответственно, решение, полученное для задачи Shu–Osher на подробной сетке (сетка 1) с примене-

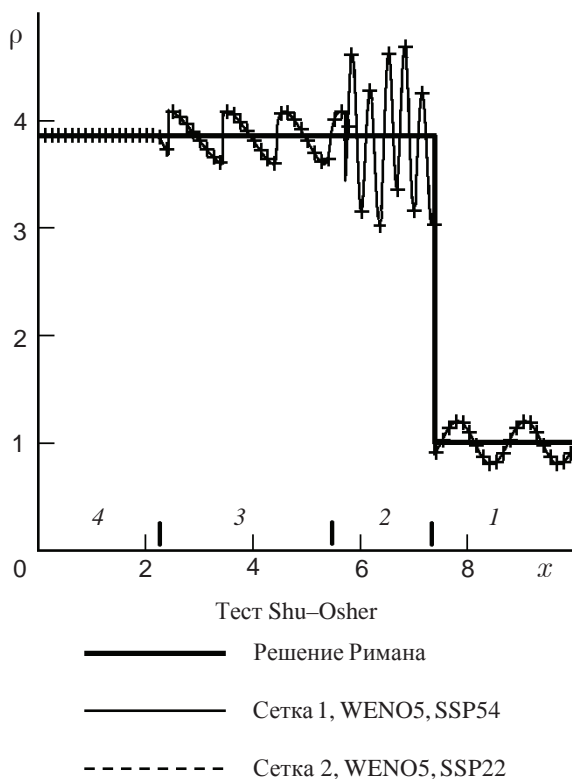


Рис. 4. Выбор эталонного решения для задачи Shu–Osher

нием схемы (WENO5, SSP54). Маркеры в виде крестов соответствуют решению на сетке в 16000 ячеек (сетка 2), которое получено по схеме (WENO5, SSP22). Анализ показывает, что оба решения с применением схемы WENO5 с погрешностью порядка 0.1% совпадают друг с другом. По этой причине маркеры очень точно ложатся на тонкую сплошную линию. Это показывает, что для данного теста решение на подробной сетке (сетке 1) по схеме (WENO5, SSP54) с избытком заменяет отсутствующее точное решение. На графике можно выделить четыре области, соответствующие различным участкам течения. Область 1 располагается перед фронтом правого скачка уплотнения. Область 2 находится между фронтами правого скачка и контактного разрыва. Соответственно, область 3 занимает пространство между фронтами контактного разрыва и левого скачка уплотнения и, наконец, область 4 соответствует невозмущенному потоку перед левым скачком. На рис. 4 наблюдается расщепление решения, обусловленное различными условиями прохождения правого скачка уплотнения и контактного разрыва через область синусоидального возмущения. В области 2 проявляются нерегулярные колебания различной амплитуды, а в области 3 видны ассиметричные «пилообразные» осцилляции. В качестве эталона в дальнейшем используется решение (WENO5, SSP54) на сетке 1.

Для дальнейшего анализа рассматриваются области 2 и 3, см. рис. 5. Для проведения практических расчетов выбирается сетка, которая содержит 400 ячеек (сетка 3). Применяются схемы четвертого (WENO5, SSP54) и второго порядка (MUSCL, SSP22)

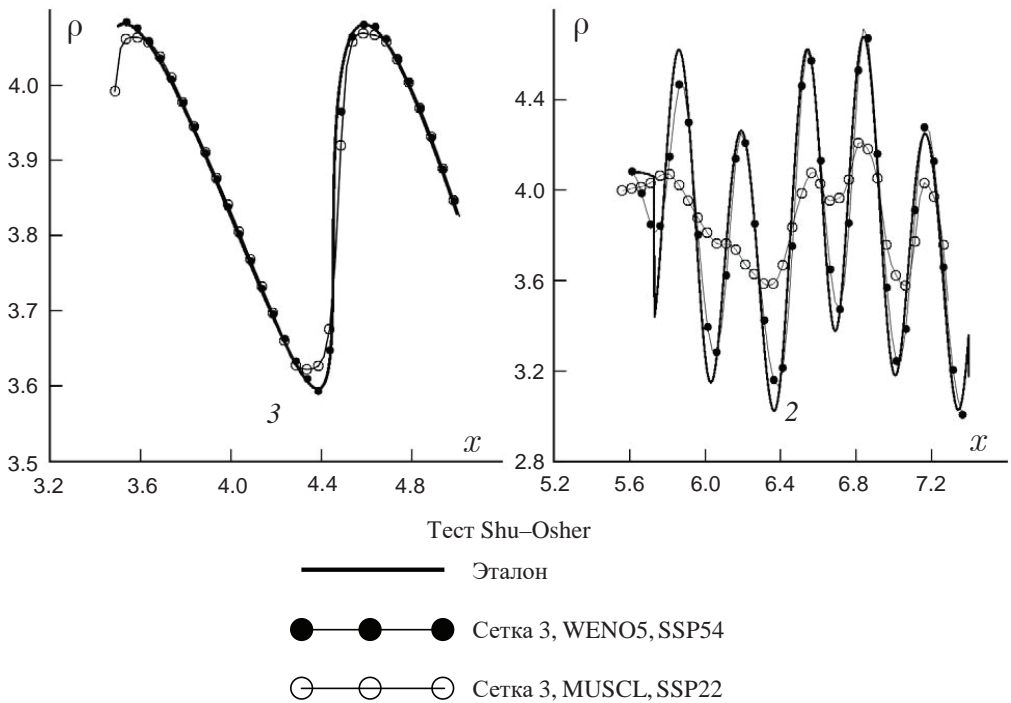


Рис. 5. Сопоставление решений четвертого и второго порядка точности на грубой сетке 3 при $CFL = 0.5$

точности. Сопоставление показывает, что в области 3 на пике осцилляций (сверху) схема четвертого порядка соответствует эталону с погрешностью не хуже, чем 0.2% (график для увеличения масштаба построен в узком диапазоне координаты $5 > X > 3.5$). Схема второго порядка дает на этих пиках погрешность 2%. При этом в донной области (снизу) точность расчета по схеме второго порядка еще ниже. В области 2 ситуация ухудшается, и схема второго порядка дает неприемлемо высокие ошибки. По этой причине, она в дальнейшем не рассматривается.

На рис. 6 представлены результаты, полученные по схеме четвертого порядка с различными числами CFL (многошаговая процедура Рунге–Кутты позволяет работать с числами CFL , превышающими единицу [38]). Рассматривается только область 2 в узком диапазоне координаты $6.2 > X > 5.6$, где уровень ошибок выше, чем в других местах. Сопоставление результатов расчета позволяет сделать вывод, что при значениях $CFL = 0.5$ и $CFL = 1.25$ полученные решения совпадают друг с другом (маркеры на графике перекрываются). При $CFL = 2.5$ диссипация становится заметной. Это учитывается при проведении практических расчетов.

В качестве следующего теста рассматривается осесимметричное обтекание острого конуса с углом полураствора $\theta = 5^\circ$. Геометрия расчетной области представлена на рис. 7.

Внешние границы расположены достаточно близко к поверхности конуса, что требует учета возможного отражения скачка уплотнения. На левой границе происходит втекание сверхзвукового потока. Это означает, что все возмущения входят через эту границу внутрь расчетной области и не оказывают обратного влияния. Технически данное граничное условие реализуется путем жесткого задания параметров

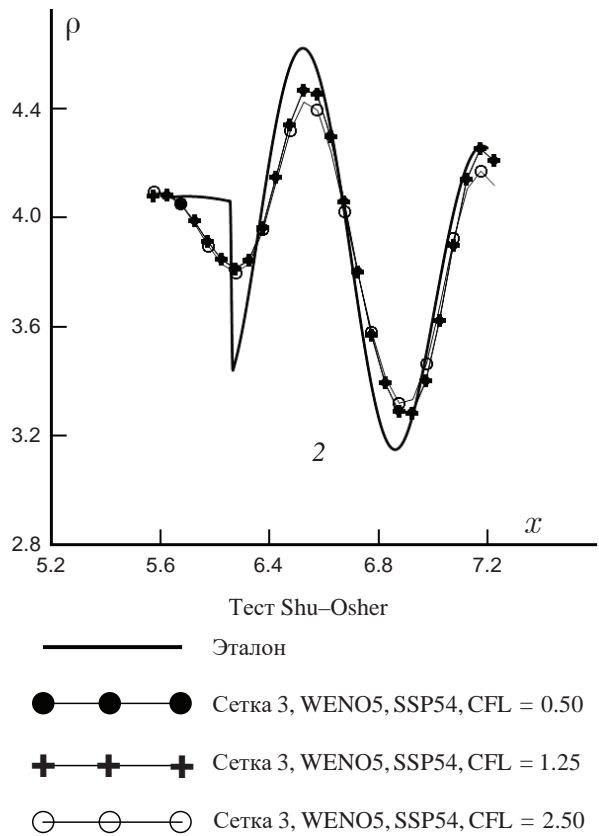


Рис. 6. Сопоставление решений четвертого порядка точности при разных значениях CFL на грубой сетке 3 возмущения течения на границе расчетной области

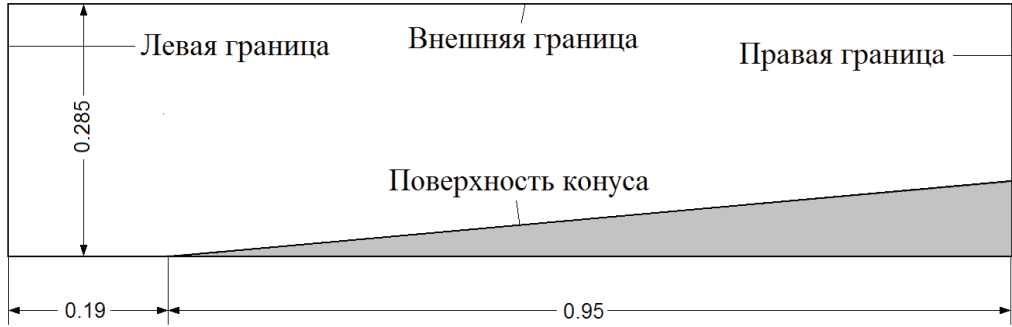


Рис. 7. Геометрия расчетной области

внешнего потока в дополнительных ячейках, прилегающих слева к ячейкам на входной границе расчетной области. На правой границе реализуется граничное условие сверхзвукового вытекания. Это означает, что все возмущения выходят из расчетной области во внешний поток, а обратного влияния внешнего потока на расчетную область не существует. Технически данное граничное условие реализуется путем созда-

ния слоя дополнительных ячеек, прилегающих к выходной границе. В этих ячейках параметры потока задаются методом линейной экстраполяции соответствующих параметров из ячеек, прилегающих к выходной границе. На внешних границах расчетной области выполняется условие непротекания, что косвенно моделирует стенку ударной аэродинамической трубы. На поверхности конуса также ставится условие непротекания. В плоскости симметрии задачи также условие симметрии. Расчет проводится в два этапа. Сначала задается начальное поле с параметрами потока $\rho_{t=0} = 0.161317 \text{ кг/м}^3$, $u_{t=0} = 567.17 \text{ м/с}$, $p_{t=0} = 5930.32 \text{ Па}$, $T_{t=0} = 128.07 \text{ К}$, $M_{t=0} = 2.5$ и устанавливается стационарное поле потока вокруг конуса. Затем на левой границе вводится синусоидальное возмущение числа Маха по временному закону $\Delta M = 0.1 \sin(10\pi u_{t=0} t)$. Частота колебаний выбрана исходя из того, чтобы на длине конуса размещалось не менее пяти пиков осцилляций. Остальные параметры на левой границе вычисляются из условия постоянства полного давления и температуры:

$$p_{total} = p_{t=0} / p(M_{t=0}) = p_{t=0} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{t=0}^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$T_{total} = T_{t=0} / T(M_{t=0}) = T_{t=0} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{t=0}^2 \right)$$

$$M = M_{t=0} + \Delta M, \quad p = p_{total} p(M)$$

$$T = T_{total} T(M), \quad u = M / \sqrt{\gamma R T}$$

Расчет проводится в секторе размером в одну ячейку до тех пор, пока устанавливается квазистационарное периодическое решение. Это происходит через промежуток времени $\tau = 0.005 \text{ с}$. Пример картины возмущенного обтекания конуса приведен на рис. 8, на котором в серой палитре представлено поле плотности. Хорошо видны возмущения, приходящие с левой границы расчетной области. Физическая картина течения на рис. 8 в некотором смысле повторяет течение в области 2 из задача Shu—Osher (см. рис. 4). Действительно, если перейти в систему координат, связанную со скачком уплотнения, то окажется, что синусоидально возмущенный поток набегаёт на указанный скачок. При этом, проявляются нерегулярные колебания плотности различной амплитуды, что и наблюдается в трехмерной реализации на рис. 8. При этом, поле плотности за скачком уплотнения возмущено достаточно сильно. Кроме того, скачок отражается от верхней стенки, но не приходит на конус.

Решение получено на сетке $288 \times 72 \times 1$ ячеек в постановке (WENO5, SSP54). На рис. 9 представлено сопоставление полученного решения с эталоном. В расчетной

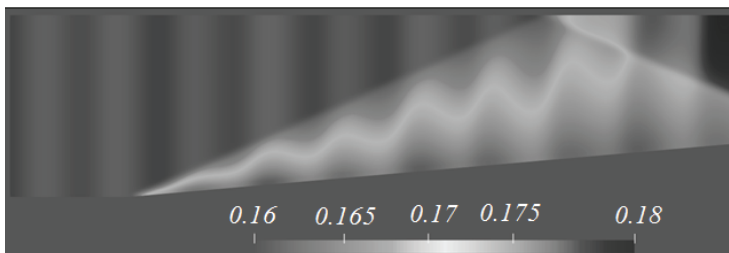


Рис. 8. Поле плотности в момент времени $t = 0.05 \text{ с}$

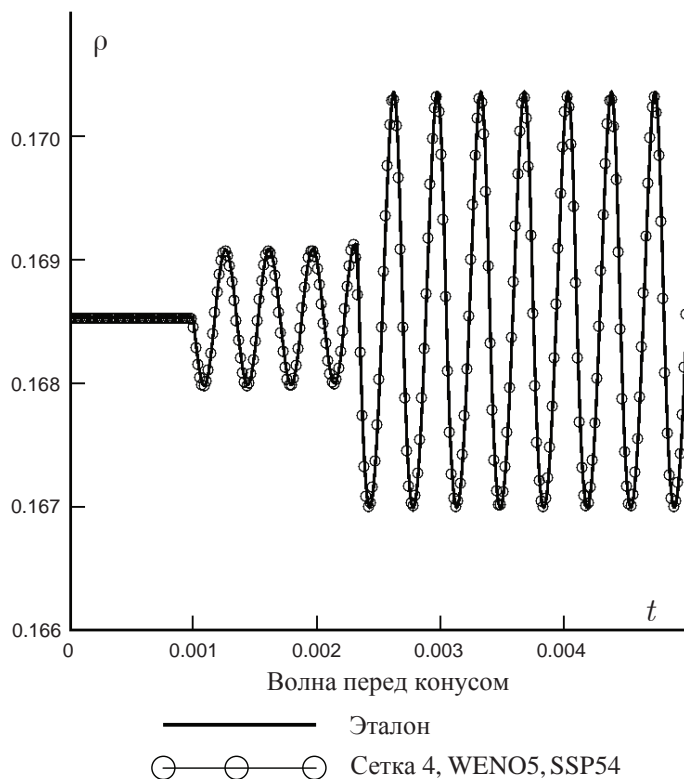


Рис. 9. Сопоставление с эталоном при наличии синусоидального возмущения на границе расчетной области

области выделены 3 точки. Первая точка располагается перед головным скачком уплотнения ($x = 0.3$, $y = 0.2$), вторая — за головным скачком уплотнения ($x = 0.6$, $y = 0.2$), а третья — за головным и отраженным скачками уплотнения ($x = 0.9$, $y = 0.2$). Наибольший интерес представляет точка 2, т.к. это «рабочая зона» исследуемого потока. Именно в этой точке проведено сопоставление с эталоном. Имеется соответствие с точностью порядка 0.1% в пиках. Наличие скачка уплотнения от конуса не повлияло на точность расчета, проведенного на достаточно редкой сетке. Это принципиально отличает данный тест от теста Shu—Oshera, где скачок уплотнения искажается синусоидальным полем перед его фронтом.

На рис. 10 приведены графики поведения плотности во времени для всех трех точек. Решение получено на сетке $288 \times 72 \times 1$ ячеек в постановке (WENO5, SSP54). Наличие отраженного скачка уплотнения качественно не повлияло на результат. Следует отметить, что плотность газа увеличивается за скачками уплотнения. Кроме того, наблюдается заметный сдвиг фазы из-за движения волн.

На следующем шаге приведен пример развития во времени решения в задаче вязкого обтекания острого конуса. Для этого построена подробная сетка у поверхности конуса, которая за пределами пограничного слоя плавно стыкуется с первоначальной «невязкой» сеткой. Размер первой ячейки равняется $y^+ = 1$. Оценка размеров ячейки сделана на основании параметров пограничного слоя, полученных по эмпирическому методу Авдуевского [44]. Полный расчет вязкого течения выполнен в приближении URANS, описанном в разд. 1 данной статьи схемой WENO5 SSP54 с огра-

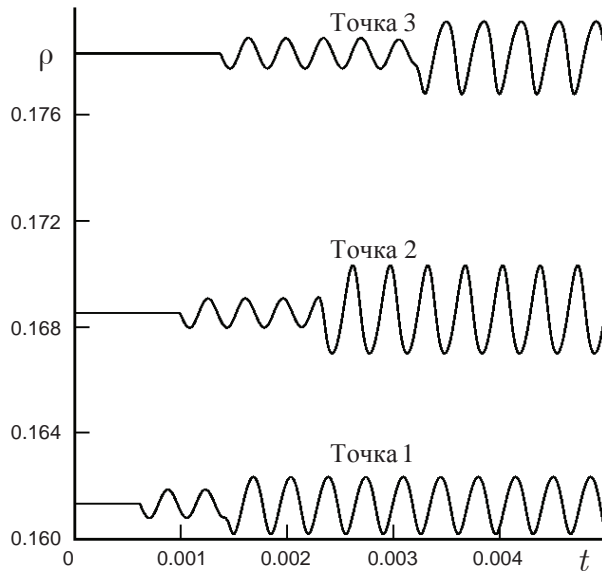


Рис. 10. Сопоставление трех решений с конусом в различных точках пространства при условии синусоидального возмущения течения на границе расчетной области

ничением $CFL = 1$. Режим обтекания задан следующими параметрами потока на левой границе: слева от границы (в дополнительных ячейках) — $M_{\text{л}} = 2.5$, $P_{0\text{л}} = 810600$ Па, $T_{0\text{л}} = 293$ К; справа от границы (в ячейках расчетного поля): $M_{\text{п}} = 0$, $P_{0\text{п}} = 101325$ Па, $T_{0\text{п}} = 293$ К. В результате взаимодействия начальных потоков образуются два скачка уплотнения, разделенные контактным разрывом. Указанная конфигурация движется направо в сторону установленного конуса, см. рис. 11,а.

Статическое давление на контактом разрыве (центральная стрелка на рис. 11,а) равняется $P = 255124$ Па. Перепад статического давления на правом скачке уплотнения равен $P_{\text{к.р.}} / P_{\text{п}} = 2.52$, а на левом, соответственно, $P_{\text{к.р.}} / P_{\text{п}} = 5.38$. После того, как левый скачок уплотнения в момент времени $t = 0.003$ с «набегает» на конус, появляется отрыв, см. рис. 11,б. Он имеет классическую «Лямбда» форму и начинается от носика. Контактный разрыв искривляется, т.к. поле потока за коническим скачком неоднородно. Правый скачок уплотнения уходит за пределы расчетной области. Отрывная зона растет и в момент времени $t = 0.008$ с занимает всю поверхность конуса, см. рис. 11,в. При этом, хорошо видна зона возвратного течения, точка присоединения потока и внутренние скачки уплотнения. В следующий момент времени зона отрыва уходит за пределы расчетной области и устанавливается сверхзвуковое обтекание конуса, см. рис. 11,г.

Для оценки времени установления решения в невязком ядре выбрана прямая линия с углом наклона $\Theta = 14^\circ$, что приблизительно соответствует среднему положению между поверхностью конуса и скачком уплотнения, см. рис. 11,г. На этой линии отмечены три точки. Известно, что с точностью до влияния пограничного слоя течение должно удовлетворять условию коничности. Другими словами, параметры потока в указанных точках должны совпадать друг с другом. На рис. 12 показано, как это условие выполняется во времени. Так, при $t > 0.013$ с относительные значения плотности с точностью лучше, чем 0.1%, совпадают друг с другом. Это

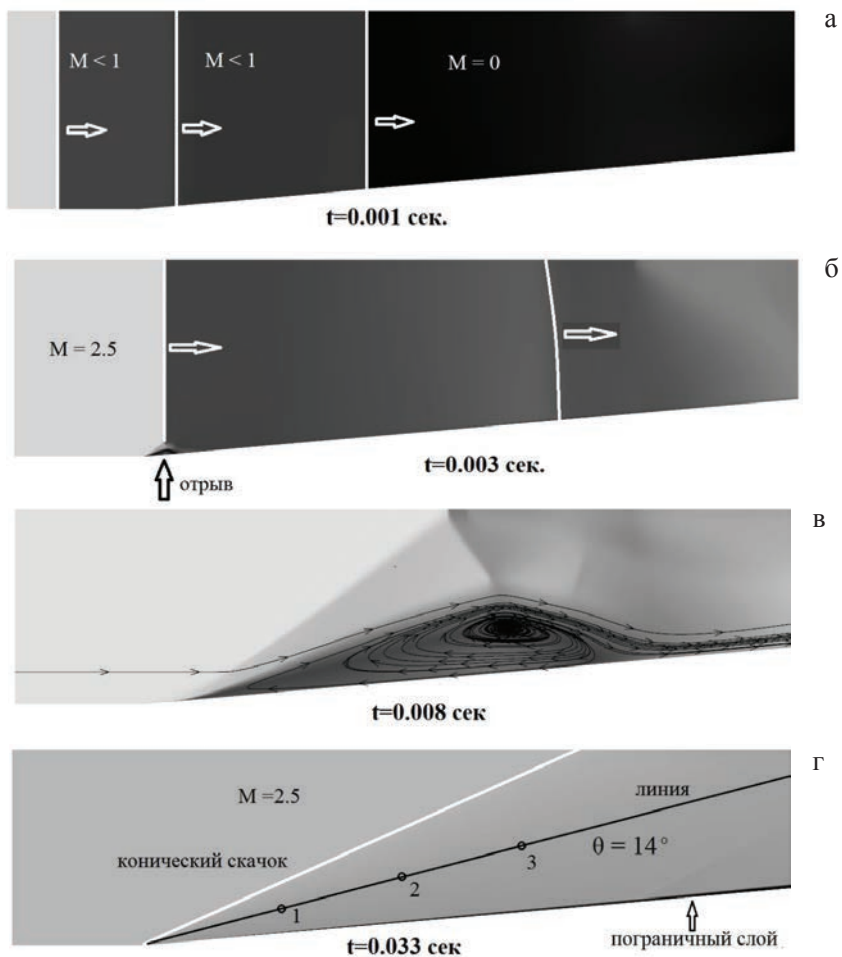


Рис. 11. Стадии установления решения при сверхзвуковом обтекании конуса вязким потоком газа
а — скачки уплотнения и контактный разрыв в начальный момент времени;
б — появление отрыва в носовой части конуса;
в — развитый отрыв на поверхности конуса;
г — установившееся безотрывное обтекание конуса

соответствует моменту времени, когда отрывная зона уходит за пределы расчетной области.

Несмотря на установление потока в невязком ядре, процесс установления в вязком потоке у стенки продолжается. На рис. 13 приведены профили пограничного слоя в три момента времени, построенные в сечении 3. Сопоставление показывает, что в момент времени $t = 0.013$ с профиль скорости u в пограничном слое остается «ненаполненным». Создается впечатление, что толщина пограничного слоя завышена. Но это впечатление ошибочно, так как имеет место неустановившееся течение. Процесс установления проходит достаточно быстро и при $t > 0.023$ с пограничный слой приобретает окончательную форму и перестает изменяться. С этого момента течение считается полностью установленным.

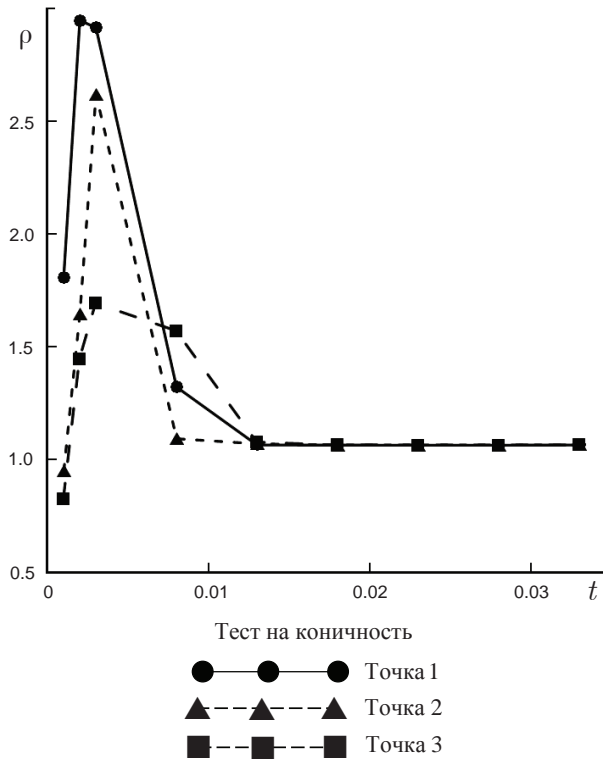


Рис. 12. Выполнение условия коничности во времени

5. Моделирование нестационарного обтекания конуса в ударной АДТ

В данном разделе представлены результаты расчетно-экспериментального исследования. Эксперименты проведены в ударной аэродинамической трубе, работающей по схеме Людвига. Подробное описание указанной установки приведено в статье [45]. Исследовано обтекание конуса с углом 10° и длиной 0.96 м, см. рис. 14.

Площадь дна конуса составляла 0.022 м^2 , а технологический радиус носика — 0.08 мм. Конус устанавливался на шестикомпонентных внутримодельных тензометрических весах. Весы закреплялись в хвостовой державке, которая, в свою очередь, крепилась к вертикальной стойке. На поверхности модели имелись четыре приемных отверстия для измерения статического давления. Диапазоном измерения составлял $\pm 35 \text{ кПа}$. Схема расположения приемных отверстий приведена на рис. 14. Три отверстия (Р1 — Р3) расположены на боковой поверхности конуса и одно (Р4) — на донной поверхности.

Наряду с экспериментальным исследованием, задача решена численно в упрощенной постановке. Конус размещен в ударной аэродинамической трубе. Математическая модель трубы достаточно точно соответствует оригиналу [8,45]. Диаметр выходного сечения сопла составляет 0.5 м. Диаметр камеры высокого давления — 0.07 м, ее длина — примерно 12 м. Блок диафрагм находится на границе между «камерой высокого давления» и форкамерой. В начальный момент времени значение скорости во всем расчетном поле задано равным нулю. В «камере высокого давления» величина полного давления задана равной $p_0 = 3203.1 \text{ кПа}$, а полная температура, соответственно, $T_0 = 530.8 \text{ К}$. В форкамере, сопле и рабочей части АДТ параметры потока заданы равными величинам $p_0 = 150 \text{ Па}$, $T_0 = 293.15 \text{ К}$.

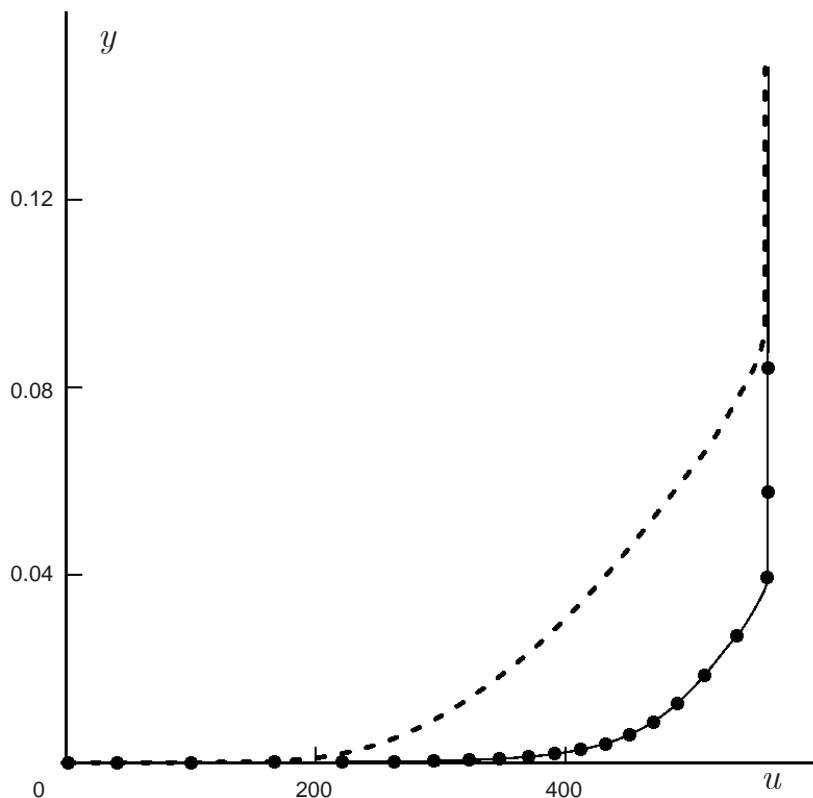


Рис. 13. Установление решения в пограничном слое

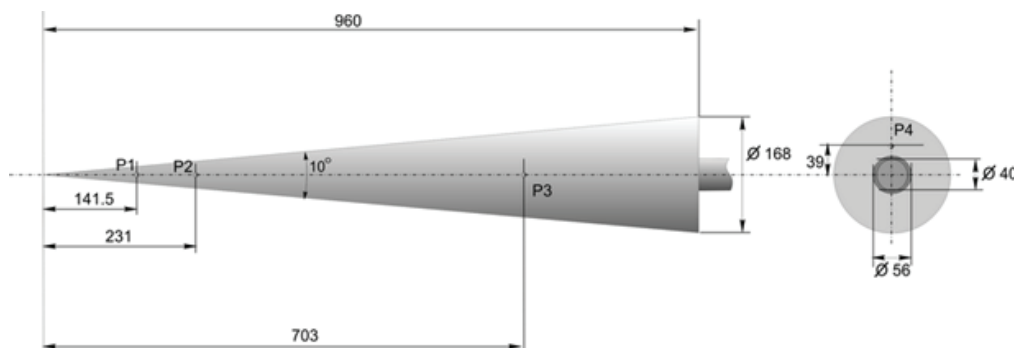


Рис. 14. Схема расположения приемников статического давления на поверхности конуса

Расчеты проведены по схеме (WENO5, SSP54) с условием $CFL=1$. Построена неструктурированная сетка, состоящая из 107721 ячеек, которая сгущена к твердым поверхностям с выполнением условия $y^+ = 1$. В «камере высокого давления» сетка строится максимально грубой, т.к. поток в этой части экспериментальной установки не изучается. На верхней границе камеры ставится условие скольжения, хотя система

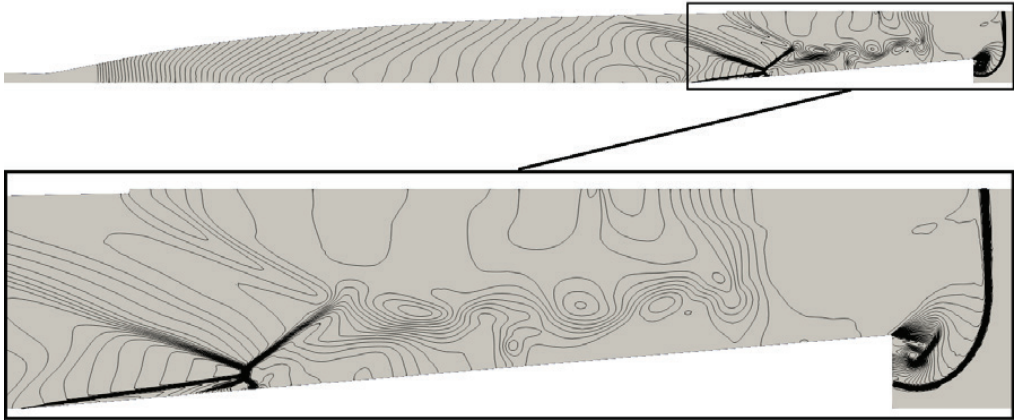


Рис. 15. Физическая картина обтекания конуса в момент времени $t = 0.003$ с

уравнений содержит вязкие члены. Во всех остальных зонах АДТ на твердых поверхностях выполняется условие стенки с прилипанием и постоянной температурой $T_w = 293.15$ К. На «выходе» из расчетной области (справа) задается условие сверхзвукового вытекания потока.

Нестационарная картина обтекания конуса имеет достаточно сложную структуру. Область возмущенного течения, формирующего поток в рабочей части АДТ, достигает конуса в момент времени $t = 0.0018$ с и воздействует на него вплоть до момента $t = 0.0055$ с. При этом образуются скачки уплотнения и области завихрения. В качестве примера на рис. 15 приведены линии постоянства давления (изолинии) в момент времени $t = 0.003$ с.

Видно, что в указанный момент времени основной фронт ударной волны уже прошел лобовую поверхность конуса и взаимодействует с его дном. Скачки уплотнения, образующиеся в сопле АДТ, достигают носовой части конуса и пересекаются с отраженными скачками, а также с зарождающимся коническим скачком уплотнения. Описанная картина взаимодействия подтверждается показаниями датчиков статического давления. На рис. 16,а приведены показания датчика Р1. Значения статического давления отнесены к полному давлению в «камере высокого давления». Хорошо виден пик в момент времени $t = 0.003$ с, когда скачки уплотнения от сопла приходят на поверхность конуса в окрестности расположения датчика Р1. Далее следует провал с последующим восстановлением вплоть до времени $t = 0.007$ с. Расчет хорошо разрешает мелкие волны, которые видны на графике в виде осцилляций. В эксперименте указанные волны также видны, но «смазаны». Проведенная предварительно методическая работа позволяет доверять результатам расчета.

Показания датчика Р3 качественно подтверждают описанную ранее картину течения, см. рис. 16,б. Отмеченный выше пик давления смещается во времени до $t = 0.0035$ с, что связано с его расположением на конусе. Наиболее сложная зависимость давления от времени соответствует датчику Р4 и представлена на рис. 16,в. Датчик расположен в донной области, где имеется отрыв потока и застойная зона. Используемый в данной работе метод на основе уравнений URANS не позволяет разрешать донные отрывные течения, характеризующиеся высокой степенью турбулентности потока. Поэтому к полученному результату в этой области следует относиться, как к модельному.

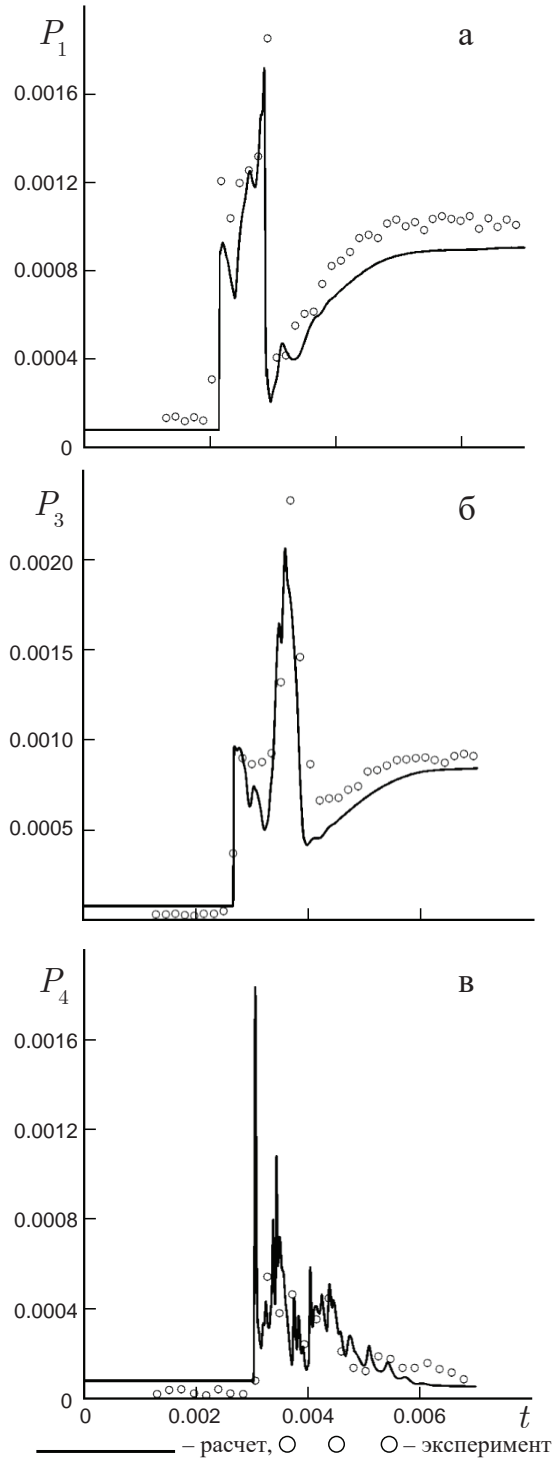


Рис. 16. Сопоставление расчетных и экспериментальных значений статического давления в измерительных точках 1, 3 и 4

Заключение

Предложенная схема расчета на основе подхода (WENO5, SSP54) с условием $CFL = 1$ позволяет моделировать нестационарное обтекание конуса при нестационарных начальных и граничных условиях, включая запуск ударной АДТ.

Применение расчетных схем на основе подхода (MUSCL, SSP22) с условием $CFL = 0.5$ приводит к «смазыванию» физических осцилляций решения за счет повышенной диссипативности численной схемы и влечет за собой значительные погрешности. Она не рекомендуется к моделированию подобных задач.

При использовании предложенной расчетной схемы на этапе подготовки эксперимента удастся предсказать порядки величин статического давления на поверхности модели и временные диаграммы прохождения основных возмущений по тракту ударной АДТ, что позволяет проводить настройку экспериментального оборудования, в частности, выбор опорных давлений, а также понимать суть нестационарных физических процессов, происходящих на стадии запуска ударной АДТ, например, объяснять рассогласование показаний датчиков расположенных в различных сечениях.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда, грант № 23-19-00041.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bosniakov S.* Experience in integrating CFD to the technology of testing models in wind tunnels // *Progr. in Aerosp. Sci.* 1998. № 34. P. 391–422.
2. *Neyland V., Bosniakov S., Glazkov S., Ivanov A., Matyash S., Mikhailov S., Vlasenko V.* Conception of electronic wind tunnel and first results of its implementation // *Progr. in Aerosp. Sci.* 2001. V. 37. № 2. P. 121–145.
3. *Bosnyakov S., Kursakov I., Lysenkov A., Matyash S., Mikhailov S., Vlasenko V., Quest J.* Computational tools for supporting the testing of civil aircraft configurations in wind tunnels // *Progr. in Aerosp. Sci.* 2008. V. 44. № 2. P. 67–120.
4. *Босняков С.М., Нейланд В.Я., Власенко В.В., Курсаков И.А., Матяш С.В., Михайлов С.В., Квест Ю.* Опыт применения результатов численного расчета для подготовки и проведения испытаний в аэродинамических трубах // *Матем. моделир.* 2013. Т. 25. № 9. С. 43–62.
5. *Vos J.B., Rizzi A., Darracq D., Hirschfeld E.H.* Navier–Stokes solvers in European aircraft design // *Progr. in Aerosp. Sci.* 2002. V. 38. P. 601–697.
6. *Spalart P.R., Allmaras S.R.* A One-equation turbulence model for aerodynamic flows // *AIAA Paper.* 1992. № 92-0439.
7. *Menter F.R.* Zonal two-equation $k-\omega$ turbulence model for aerodynamic flows // *AIAA Paper.* 1993. № 93-2906.
8. *Безменов В.Я., Колочинский Ю.Ю.* Конструкция и характеристики гиперзвуковой ударной трубы УТ-1 ЦАГИ // *Тр. ЦАГИ.* 1969. № 9152.
9. *Громыко Ю.В., Цырюльников И.С., Маслов А.А.* К разработке методики определения параметров потока в импульсных аэродинамических трубах // *Теплофиз. и аэромех.* 2022. № 5. С. 695–708.
10. *Котов М.А., Рулева Л.Б., Солодовников С.И., Суржиков С.Т.* Проведение экспериментов по обтеканию моделей в гиперзвуковой ударной аэродинамической трубе // *Физ.-хим. кин. в газ. дин.* 2013. Т. 14. Вып. 4. <http://chemphys.edu.ru/issues/2013-14-4/articles/428/>
11. *Рейнольдс А.Дж.* Турбулентные течения в инженерных приложениях. М.: Энергия, 1979. 408 с.
12. *Хинце И.О.* Турбулентность. Ее механизм и теория. М.: Физматгиз, 1963. 680 с.

13. *Olsen M., Coakley T.* The lag model, a turbulence model for non equilibrium flows // 15th AIAA Comput. Fluid Dyn. Conf. 2001. P. 2564.
14. *Шугаев Ф.В.* Взаимодействие ударных волн с возмущениями. М.: Изд-во МГУ, 1983. 96 с.
15. *Годунов С.К., Забродин А.В., Прокопов Г.П.* Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной // ЖВВММФ. 1961. Т. 1. № 6. С. 1020–1050.
16. *Годунов С.К., Прокопов Г.П.* Об использовании подвижных сеток в газодинамических расчетах // ЖВВММФ. 1972. Т. 12. № 2. С. 429–440.
17. *Русанов В.В.* Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями // ЖВВММФ. 1961. Т. 1. № 2. С. 267–279.
18. *Макаров В.Е.* К выделению поверхностей разрывов при численном решении сверхзвуковых конических течений // ЖВВММФ. 1982. Т. 22. № 5. С. 1218–1226.
19. *Moretti G.* Three-dimensional, supersonic, steady flows with any number of imbedded shocks // AIAA Paper. 1974. № 74–10.
20. *Kutler P., Lomax H.* Shock capturing, finite difference approach to supersonic flows // J. Spacecraft & Rockets. 1971. V. 8. № 12. P. 1175–1182.
21. *Quirk J.J.* A contribution to the great Riemann solver debate // ICASE Rep. No. 92–64. 1992; Int. J. Numer. Meth. Fluids. 1994. V. 18. P. 555–574.
22. *Robinet J.-Ch., Gressier J., Casalis G., Moschetta J.-M.* Shock wave instability and the carbuncle phenomenon: same intrinsic origin? // J. Fluid Mech. 2000. V. 417. P. 237–263.
23. *Иванов М.Я., Крайко А.Н.* Об аппроксимации разрывных решений при использовании разностных схем сквозного счета // ЖВММФ. 1978. Т. 18. № 3. С. 780–783.
24. *Остапенко В.В.* О сходимости разностных схем за фронтом нестационарной ударной волны // ЖВММФ. 1997. Т. 37. № 10. С. 1201–1212.
25. *Nishikawa H., Kitamura K.* Very simple, carbuncle-free, boundary-layer-resolving, rotated-hybrid Riemann solvers // J. Comput. Phys. 2008. V. 227. P. 2560–2581.
26. *Родионов А.В.* Численный метод решения уравнений Эйлера с сохранением аппроксимации на деформированной сетке // ЖВММФ. 1996. Т. 36. № 3. С. 117–129.
27. *Toro E.F.* Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Springer, 2009.
28. *Van Leer B.* Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys. 1979. V. 32. P. 101–136.
29. *Колган В.П.* Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Уч. Зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–78.
30. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
31. *LeVeque R.J.* Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge: Univ. Press, 2002.
32. *Suresh A., Huynh H.T.* Accurate monotonicity-preserving schemes with Runge–Kutta time stepping // J. Comput. Phys. 1997. V. 136. P. 83–99.
33. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: БИНОМ, 2011. 636 с.
34. *Massey S.J., Abdol-Hamid K.S.* Enhancement and validation of PAB3D for unsteady aerodynamics // AIAA Paper. 2003. № 2003–1235.
35. *Shu C.-W., Osher S.* Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes // J. of Comput. Phys. 1988. V. 77. № 2. P. 439–471.
36. *Gottlieb S., Shu C.-W., Tadmor E.* Strong stability-preserving high-order time discretization methods // SIAM Review. 2001. V. 43. № 1. P. 89–112.
37. *Ruuth S.J., Spiteri R.J.* Two barriers on strong-stability-preserving time discretization methods // J. of Sci. Comput. 2002. № 17. P. 211–220.
38. *Spiteri R.J., Ruuth S.J.* A new class of optimal high-order strong-stability-preserving time discretization methods // SIAM J. on Numer. Anal. 2002. V. 40. № 2. P. 469–491.

39. Сидоренко Д.А., Уткин П.С. Метод декартовых сеток для численного моделирования распространения ударных волн в областях сложной формы // Вычисл. методы и программир. 2016. Т. 17. С. 353–364.
40. Баженова Т.В., Гвоздева Л.Г. Нестационарные взаимодействия ударных волн. М.: Наука, 1977.
41. Jiang G.-S., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes // J. of Comput. Phys. 1996. V. 126. P. 202–228.
42. Balsara D.S., Shu C.-W. Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy // J. of Comput. Phys. 2000. V. 160. № 2. P. 405–452.
43. Huang W.-F., Ren Y.-X., Jiang X. A simple algorithm to improve the performance of the WENO scheme on non-uniform grids // Acta Mech. Sinica/Lixue Xuebao. 2018. V. 34. № 1. P. 37–47.
44. Авдеевский В.С. Метод расчета пространственного турбулентного пограничного слоя в сжимаемом газе // Изв. АН СССР. Мех. и машиностр. 1962. № 4.
45. Glazkov S.A., Gorbushin A.R., Semenov A.V. Investigation of the aerodynamic characteristics of a 10° cone in a T-128 transonic wind tunnel // J. Inst. Eng. India Ser. C, 2021. <https://doi.org/10.1007/s40032-021-00749-w>

Mathematical Features of Numerical Simulation of Non-Stationary Flow Around the Model in the Shock Tube

S. M. Bosnyakov^{a,##}, A. R. Gorbushin^{a,##}, S. V. Matyash^a, S. V. Mikhailov^{a,###}

^aCentral Aerohydrodynamic Institute named after prof. N.E. Zhukovsky,
Zhukovsky, Russia

e-mail: bosnyakov@tsagi.ru[#], gorbushin@tsagi.ru^{##}, sergey.mikhaylov@tsagi.ru^{###}

Different approaches of increased accuracy to the numerical solution of the problem about non-stationary flow around a cone model under in shock tube are investigated. It is shown that the computational methods based on dissipative numerical schemes of the second order lead to «smoothing» the physical oscillations of the solution and give significant errors. A comparison is performed. It shows the qualitative and quantitative correspondence of the numerical and experimental results at the start of the shock tube. The conclusion about the possibility of applying the proposed methodology in practice is made.

Keywords: Reynolds equations, numerical methods, increased accuracy, non-stationary formulation, testing, shock tube, cone, experiment, calculation

REFERENCES

1. Bosniakov S. Experience in integrating CFD to the technology of testing models in wind tunnels // Progr. in Aerosp. Sci., 1998, no. 34, pp. 391–422.
2. Neyland V., Bosniakov S., Glazkov S., Ivanov A., Matyash S., Mikhailov S., Vlasenko V. Conception of electronic wind tunnel and first results of its implementation // Progr. in Aerosp. Sci., 2001, vol. 37, no. 2, pp. 121–145.
3. Bosnyakov S., Kursakov I., Lysenkov A., Matyash S., Mikhailov S., Vlasenko V., Quest J. Computational tools for supporting the testing of civil aircraft configurations in wind tunnels // Progr. in Aerosp. Sci., 2008, vol. 44, no. 2, pp. 67–120.
4. Bosnyakov S.M., Neyland V.Ya., Vlasenko V.V., Kursakov I.A., Matyash S.V., Mikhailov S.V., Quest Yu. The experience of applying the numerical calculation results for the preparing and performing the tests in wind tunnels // Mathem. Simul., 2013, vol. 25, no. 9, pp. 43–62.
5. Vos J.B., Rizzi A., Darracq D., Hirschfeld E.H. Navier–Stokes solvers in European aircraft design // Progr. in Aerosp. Sci., 2002, vol. 38, pp. 601–697.
6. Spalart P.R., Allmaras S.R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // AIAA Paper, 1992, no. 92–0439.
7. Menter F.R. Zonal two-equation $k-\omega$ turbulence model for aerodynamic flows // AIAA Paper, 1993, no. 93–2906.
8. Bezmenov V.Ya., Kolochinsky Yu.Yu. The design and characteristics of the TsAGI UT-1 hypersonic shock tube // Proc. of TsAGI, 1969, no. 9152.

9. *Gromyko Yu.V., Tsyryulnikov I.S., Maslov A.A.* To develop a methodology for determining flow parameters in pulsed wind tunnels // *Thermophys.&Aeromech.*, 2022, no. 5, pp. 695–708.
10. *Kotov M.A., Ruleva L.B., Solodovnikov S.I., Surzhikov S.T.* Performing the experiments on the flow around models in a hypersonic shock wind tunnel // *Phys.-Chem. Kinetics in Gas Dyn.*, 2013, vol. 14, iss. 4.
<http://chemphys.edu.ru/issues/2013-14-4/articles/428/>
11. *Reynolds A.J.* Turbulent Flows in Engineering Applications. Moscow: Energia, 1979. 408 p.
12. *Hinze I.O.* Turbulence. Its Mechanism and Theory. Moscow: Fizmatgiz, 1963. 680 p.
13. *Olsen M., Coakley T.* The lag model, a turbulence model for non equilibrium flows // 15th AIAA Comput. Fluid Dyn. Conf., 2001, pp. 2564.
14. *Shugaev F.V.* Interaction of Shock Waves with Perturbations. Moscow: MSU Pub., 1983. 96 p.
15. *Godunov S.K., Zabrodin A.V., Prokopov G.P.* A difference scheme for two-dimensional non-stationary problems of gas dynamics and calculation of flow with a detached shock wave // *J. Comp. Matem.&Math. Phys.*, 1961, vol. 1, no. 6, pp. 1020–1050.
16. *Godunov S.K., Prokopov G.P.* About using movable grids in gasdynamic calculations // *J. Comp. Matem.&Math. Phys.*, 1972, vol. 12, no. 2, pp. 429–440.
17. *Rusanov V.V.* Calculation of the interaction between non-stationary shock waves and obstacles // *J. Comp. Matem.&Math. Phys.*, 1961, vol. 1, no. 2, pp. 267–279.
18. *Makarov V.E.* About the separation of discontinuity surfaces in the numerical solution of supersonic conical flows. // *J. Comp. Matem.&Math. Phys.*, 1982, vol. 22, no. 5, pp. 1218–1226.
19. *Moretti G.* Three-dimensional, supersonic, steady flows with any number of imbedded shocks // AIAA paper, 1974, no. 74–10.
20. *Kutler P., Lomax H.* Shock capturing, finite difference approach to supersonic flows // *J. Spacecraft&Rockets*, 1971, vol. 8, no. 12, pp. 1175–1182.
21. *Quirk J.J.* A contribution to the great Riemann solver debate // ICASE Rep., 1992, no. 92–64; *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 1994, vol. 18, pp. 555–574.
22. *Robinet J.-Ch., Gressier J., Casalis G., Moschetta J.-M.* Shock wave instability and the carbuncle phenomenon: same intrinsic origin? // *J. Fluid Mech.*, 2000, vol. 417, pp. 237–263.
23. *Ivanov M.Ya., Kraiko A.N.* About approximation of discontinuous solutions using difference schemes of end-to-end computation // *J. Comp. Matem.&Math. Phys.*, 1978, vol. 18, no. 3, pp. 780–783.
24. *Ostapenko V.V.* On the convergence of difference schemes behind the front of a non-stationary shock wave // *J. Comp. Matem.&Math. Phys.*, 1997, vol. 37, no. 10, pp. 1201–1212.
25. *Nishikawa H., Kitamura K.* Very simple, carbuncle-free, boundary-layer-resolving, rotated-hybrid Riemann solvers // *J. Comput. Phys.*, 2008, vol. 227, pp. 2560–2581.
26. *Rodionov A.V.* A numerical method for solving Euler equations with preserving the approximation on a deformed grid // *J. Comp. Matem.&Math. Phys.*, 1996, vol. 36, no. 3, pp. 117–129.
27. *Toro E.F.* Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Springer, 2009.
28. *Van Leer B.* Towards the ultimate conservative difference scheme. vol. A second-order sequel to Godunov's method // *J. Comput. Phys.*, 1979, vol. 32, pp. 101–136.
29. *Kolgan V.P.* Using the minimum derivative principle in developing the finite-difference schemes for calculating discontinuous solutions of gas dynamics // *Sci. Notes of TsAGI*, 1972, vol. 3, no. 6, pp. 68–78.
30. *Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Ya., Kraiko A.N., Prokopov G.P.* Numerical Solution of Gasdynamic Multidimensional Problems. Moscow: Nauka, 1976.
31. *LeVeque R.J.* Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge: Univ. Press, 2002.
32. *Suresh A., Huynh H.T.* Accurate monotonicity-preserving schemes with Runge–Kutta time stepping // *J. Comput. Phys.*, 1997, vol. 136, pp. 83–99.
33. *Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M.* Numerical Methods. Moscow: BINOM, 2011. 636 p. (in Russian)
34. *Massey S.J., Abdol-Hamid K.S.* Enhancement and validation of PAB3D for unsteady aerodynamics // AIAA Paper, 2003, no. 2003–1235.
35. *Shu C.-W., Osher S.* Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes // *J. of Comput. Phys.*, 1988, vol. 77, no. 2, pp. 439–471.
36. *Gottlieb S., Shu C.-W., Tadmor E.* Strong stability-preserving high-order time discretization methods // *SIAM Rev.*, 2001, vol. 43, no. 1, pp. 89–112.
37. *Ruuth S.J., Spiteri R.J.* Two barriers on strong-stability-preserving time discretization methods // *J. of Sci. Comput.*, 2002, no. 17, pp. 211–220.

38. *Spiteri R.J., Ruuth S.J.* A new class of optimal high-order strong-stability-preserving time discretization methods // *SIAM J. on Numer. Anal.*, 2002, vol. 40, no. 2, pp. 469–491.
39. *Sidorenko D.A., Utkin P.S.* The Cartesian grid method for numerical simulation of shock wave propagation in zones of complicated shape // *Comput. Methods&Programm.*, 2016, vol. 17, pp. 353–364.
40. *Bazhenova T. V., Gvozdeva L. G.* Non-Stationary Interactions of Shock Waves. Moscow: Nauka, 1977.
41. *Jiang G.-S., Shu C.-W.* Efficient implementation of weighted ENO schemes // *J. of Comput. Phys.*, 1996, vol. 126, pp. 202–228.
42. *Balsara D.S., Shu C.-W.* Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy // *J. of Comput. Phys.*, 2000, vol. 160, no. 2, pp. 405–452.
43. *Huang W.-F., Ren Y.-X., Jiang X.* A simple algorithm to improve the performance of the WENO scheme on non-uniform grids // *Acta Mech. Sinica/Lixue Xuebao*, 2018, vol. 34, no. 1, pp. 37–47.
44. *Avduevsky V.S.* Method of calculating the spatial turbulent boundary layer in a compressible gas // *Izv. AN SSSR, Mekh. i Mashinostr.*, 1962, no. 4. (in Russian)
45. *Glazkov S.A., Gorbushin A.R., Semenov A.V.* Investigation of the aerodynamic characteristics of a 10° cone in a T-128 transonic wind tunnel // *J. Inst. Eng. India Ser. C*, 2021.
<https://doi.org/10.1007/s40032-021-00749-w.s>

УДК 533.6.011

БОЛСУНОВСКИЙ и др.

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОЗВЕННОГО ПРОФИЛЯ В СЖИМАЕМОМ ПОТОКЕ ВЯЗКОГО ГАЗА

© 2024 г. А. Л. Болсуновский^{1,*}, Н. П. Бузоверя¹, С. В. Герасимов¹, М. А. Губанова¹¹Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия

*e-mail: bolsmail@mail.ru

Поступила в редакцию 23.03.2024 г.

После доработки 28.06.2024 г.

Принята к публикации 01.07.2024 г.

Разработан итерационный метод решения обратной/смешанной задачи для многозвонного профиля при больших скоростях в рамках осредненных уравнений Рейнольдса (RANS-методы). Он является развитием аналогичного метода, разработанного ранее авторами для малых скоростей. Метод базируется на известном принципе остаточной коррекции, согласно которому поправки к текущей геометрии генерируются на основе невязки между заданным и полученным распределением давления. Дано краткое описание алгоритма и используемых методов. Приведены примеры построения геометрии элементов многозвонного профиля по заданному распределению давления, в том числе и при наличии скачков уплотнения.

Ключевые слова: обратная задача, осредненные уравнения Навье–Стокса, RANS-методы, многозвонный профиль, большие скорости, целевое распределение давления.

DOI: 10.31857/S0032823524060062 EDN: IGNZCN

1. Введение

Многозвонные или разрезные профили обладают рядом особенностей обтекания, отсутствующих у изолированных профилей. Скорость на задней кромке впереди расположенных элементов может быть заметно выше, чем скорость набегающего потока ($C_p < 0$) (рис. 1, [1]), в связи с чем перепад давления, который должен преодолевать каждый пограничный слой, снижается. Весь перепад давления от передней до задней кромки разрезного профиля преодолевается не одним пограничным слоем, как в случае изолированного профиля, а «эстафетой» свежих пограничных слоев на каждом элементе.

Этот благоприятный для повышения несущих свойств разрезных профилей факт был отмечен еще в довоенных работах В.В. Голубева [2, 3]. Дальнейшие объяснения физики обтекания механизированных профилей и крыльев при малых скоростях были даны значительно позже [4, 5].

При больших скоростях в сжимаемом газе на верхней поверхности изолированного профиля развивается местная сверхзвуковая зона ($M > 1$), заканчивающаяся скачком уплотнения, и далее дозвуковой поток тормозится к задней кромке. На многозвонных профилях, ввиду меньших перепадов давления, можно обеспечить практически бесскачковое обтекание (рис. 2, [6]), получив тем самым выигрыш в подъемной силе или в продвижении по числу Маха.

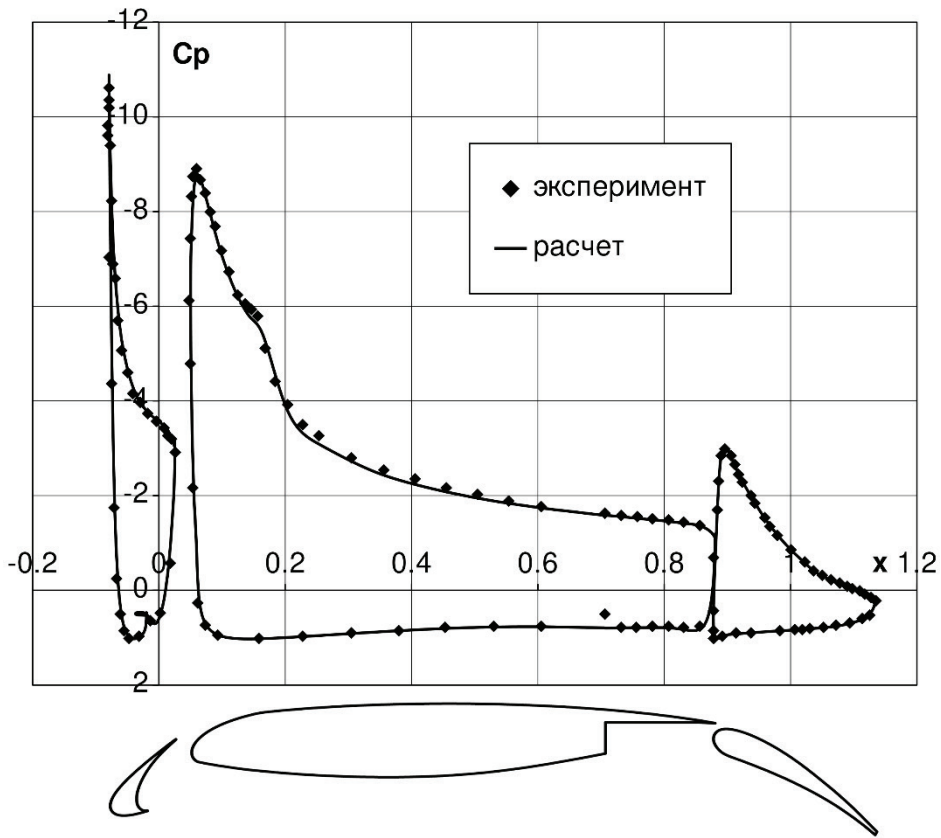


Рис. 1. Расчетное и экспериментальное [1] распределения давления на многозвенном профиле, $M = 0.2$, $Re = 9 \times 10^6$, $\alpha = 16^\circ$

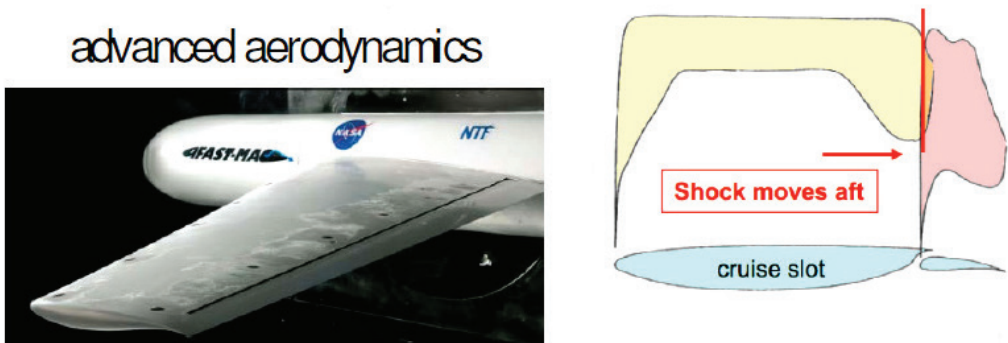


Рис. 2. Концепция щелевого крыла NASA [6]

Для построения формы разрезного профиля в сжимаемом газе по заданному распределению давления необходим метод решения обратной задачи. Ранее авторами был разработан соответствующий метод для изолированного профиля в трансзвуковом потоке [7] и для многозвенного профиля при малых скоростях [8]. В данной

работе дано описание итерационного метода решения обратной/смешанной краевой задачи аэродинамики для многозвонного профиля при больших скоростях в рамках осредненных уравнений Рейнольдса (RANS-методы). Он является развитием предыдущих методов.

Дано краткое описание алгоритма и используемых методов. Приведены примеры построения геометрии элементов двухзвонного профиля по заданному распределению давления, в том числе и при наличии скачков уплотнения.

2. Проектирование многозвонного профиля

Надежные прямые методы CFD, особенно с использованием RANS-уравнений, позволили существенно снизить объем экспериментальных исследований и глубже проникнуть в физику явлений, сопровождающих обтекание разрезных крыльев. Однако для эффективности процедуры аэродинамического проектирования одних лишь прямых методов недостаточно, необходимо также иметь в арсенале оптимизационные и обратные методы [8–12]. Обратные методы позволяют построить геометрию многоэлементного профиля по заданному распределению давления Cp^* на поверхности. Кроме обратных задач, на практике часто решаются и смешанные задачи, в которых часть элементов фиксирована, и на них необходимо найти распределение давления, а геометрия других должна быть определена по заданному целевому Cp^* .

По сравнению с прямыми, обратные методы быстрее ведут к достижению целей аэродинамического проектирования, ведь именно распределение давления определяет подъемную силу и продольный момент профиля/крыла, а также характер развития пограничного слоя (переход, коэффициент трения, отрыв и т.д.). При благоприятном распределении давления не возникает опасений о неправильной форме канала между элементами. Однако оптимальное относительное положение элементов механизированного профиля обратными методами не определяется.

В оптимизационных методах, как правило, определяют оптимальные положения элементов механизации относительно друг друга (величина щели, перекрытия и углы отклонения) и крайне редко видоизменяют геометрию отдельных элементов. К тому же, эти методы часто носят формализованный характер, сводя задачу к математической проблеме поиска оптимума целевой функции в многомерном пространстве проектировочных параметров. Выбор рациональной целевой функции и ограничений при оптимизации зачастую затруднителен.

Один из наиболее распространенных подходов к построению обратных методов основан на принципе остаточной коррекции. При использовании этого принципа задача решается в процессе итераций путем попеременных вызовов прямого метода и блока коррекции геометрии (рис. 3). Коррекция геометрии профиля на каждой итерации определяется тем или иным способом через невязку между текущим и заданным Cp^* распределениями давления.

В данной работе метод остаточной коррекции используется для построения геометрии многоэлементного профиля по заданному распределению давления в сжимаемом потоке вязкого газа при больших скоростях. В качестве прямого метода выбран расчет обтекания многозвонного профиля в рамках уравнений RANS. Блок коррекции геометрии использует панельные методы решения прямой/обратной задачи для механизированного профиля в идеальной несжимаемой жидкости (рис. 4). Ранее авторы использовали метод остаточной коррекции при построении изолированных профилей в трансзвуковом потоке вязкого газа [7], при построении механизированных профилей при малых скоростях [8], а также применительно к решению пространственных обратных задач для крыльев магистральных самолетов при трансзвуковых скоростях [12].

Заметим, что любой обратный метод, так или иначе, связан с конкретным прямым методом. Расчетные распределения давления, полученные различными прямыми

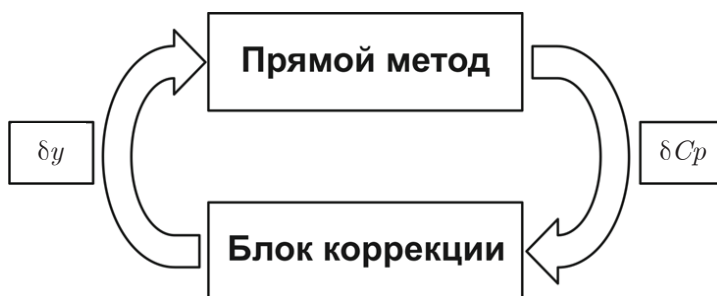


Рис. 3. Принцип построения методов остаточной коррекции



Рис. 4. Структура используемого метода

методами, могут немного отличаться как друг от друга, так и от экспериментальных значений, и поэтому вопрос о “точности” обратного метода некорректен, так как она непосредственно зависит от точности используемого прямого метода.

3. Постановка задачи и алгоритм расчета

Решается обратная задача нахождения геометрии элементов многозвенного профиля по заданному распределению давления в сжимаемом потоке вязкого газа. Возможна и смешанная постановка задачи, когда ряд элементов выстраивается по заданному распределению давления, а остальные элементы не изменяются. Набор элементов, геометрия которых будет изменяться, задается в исходных данных вместе с координатами исходных узловых точек контура каждого j -го элемента многозвенного профиля (x_j, y_j) и желаемым распределением давления на варьируемых элементах (Cp_j^*) . Для корректной постановки задачи необходимо также задать точки элементов, которые должны оставаться неподвижными при изменении геометрии (например, передняя или задняя кромка элемента).

Обратная задача решается методом итераций. На каждой k -й итерации выполняются следующие действия.

1. Строится сетка вокруг многозвенного профиля, геометрия которого получена на предыдущей $(k-1)$ -й итерации; рассчитывается его обтекание при помощи RANS-метода; определяется невязка распределения давления δCp^k как разница между текущим и заданным распределениями давления для вязкого обтекания.

2. Панельным методом рассчитывается обтекание того же профиля несжимаемой жидкостью. При этом отрывные «пузыри» в вырезах предкрылка и основного профиля, полученные по RANS-методу, необходимо «добавить» к исходной геометрии для моделирования обтекания «жидкого» контура.

3.а. В случае докритического обтекания целевое распределение давления для профиля в несжимаемой жидкости формируется путем прибавления разности $\delta_0 Cp^k = r\delta Cp^k$ (где коэффициент демпфирования $r \leq 1$) к распределению давления, найденному на предыдущем шаге.

3.б. При наличии в области течения сверхзвуковых зон разность между рассчитанным и заданным распределением давления на каждом варьируемом элементе расщепляется на дозвуковую и сверхзвуковую части (рис. 5):

$$\delta Cp^k = \delta_- Cp^k + \delta_+ Cp^k$$

Сверхзвуковая часть $\delta_+ Cp^k$ используется для получения модификации поверхностных наклонов в сверхзвуковой зоне по формуле Аккерета

$$\delta y' = \frac{1}{2} \sqrt{M^2 - 1} \delta_+ Cp$$

Затем поправки поверхностных наклонов в сверхзвуковой зоне преобразуют в эквивалентное дозвуковое распределение поправок давления $\delta_- Cp^{equi}$. Для этого проводят два последовательных расчета дозвукового обтекания профиля панельным методом: один раз с исходными поверхностными наклонами, второй раз — с модифицированными. Общая поправка давления в несжимаемой жидкости определяется как сумма двух составляющих

$$\delta_0 Cp^k = r(\delta_- Cp + \delta_- Cp^{equi}); r \leq 1$$

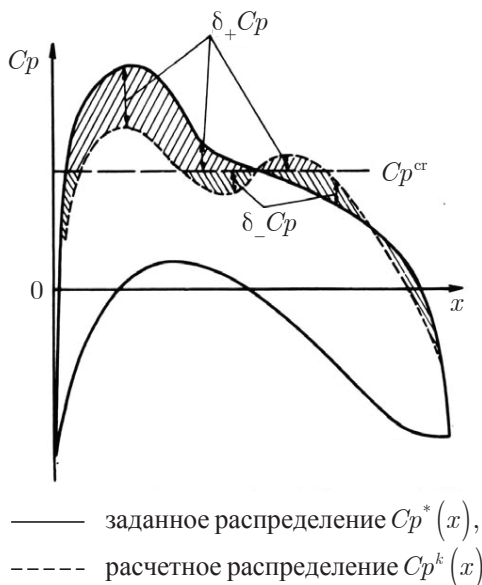


Рис. 5. Расщепление невязки давления на дозвуковую и сверхзвуковую части.

4. По целевому распределению давления с шага 3 решается обратная задача в несжимаемой жидкости и получается $(k+1)$ -я геометрия профиля. Для большей устойчивости алгоритма предусмотрено сглаживание полученных координат вблизи носка контура и в районе скачка уплотнения.

Для полученной геометрии необходимо снова решить прямую задачу RANS, найти распределение давления и т.д. На каждой итерации контролируется невязка давле-

ния по элементам $\varepsilon_{Cp_j} = \sqrt{\frac{1}{N_j} \sum_i^{N_j} (Cp_{ij} - Cp_{ij}^*)^2}$, определяющая отклонение текущего

распределения давления от заданного. Процесс повторяется несколько раз до выхода на некоторую минимально достижимую невязку. Достаточная для практики сходимость соответствует уровню $\varepsilon_{Cp} \leq 0.02$.

Отметим, что обратная задача не может быть решена корректно, если обтекание элементов происходит с диффузорным отрывом, так как давление в отрывной зоне почти постоянно и не зависит от геометрии на данном участке. Такое обтекание типично для закрылка на посадочных режимах. Аналогичная неоднозначность характерна и для течений с большим ламинарным «пузырем». При больших скоростях взаимная интерференция элементов достаточно велика, поэтому обратную задачу рекомендуется решать поочередно, начиная с основного профиля.

4. Используемые расчетные методы

В данной работе расчеты вязкого течения сжимаемого газа проводились на структурированных многоблочных сетках, позволяющих осуществить подробную дискретизацию области пограничного слоя и вязкого следа профиля. Число ячеек равно 150–300 тыс. в зависимости от количества элементов. Границы расчетной области удалены от профиля на 50 хорд. Пример структурированной расчетной сетки, использованной для решения представленных в работе задач, приведен на рис. 6. При изменении контуров элементов профиля в процессе итераций созданная начальная сетка автоматически перестраивается для соответствующей геометрии.

В качестве модели турбулентности выбрана двухпараметрическая дифференциальная модель SST. Течение полагалось полностью турбулентным. Пример расчета трехзвенного профиля, выполненного одним из авторов, приведен на рис. 1, получено хорошее согласование с экспериментом [1].

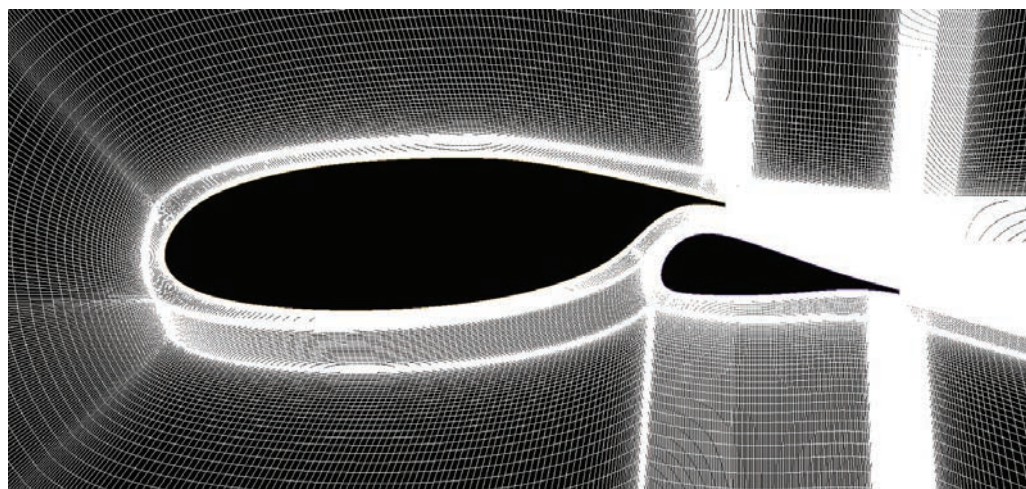


Рис. 6. Структурированная многоблочная сетка

Для прямого/обратного расчета обтекания механизированного профиля несжимаемой жидкостью применяется панельный метод с кусочно-линейным распределением плотности вихревого слоя на плоских панелях (рис. 7). Для замкнутого контура при выполнении условия непротекания касательная скорость равна интенсивности вихревого слоя. Для выполнения условия Жуковского, интенсивности вихревого слоя на задней кромке равны и противоположны по знаку. В случае разомкнутой задней кромки, на ней размещается панель с источниками, интенсивность которых равна интенсивностям вихревого слоя [9].

В основу расчета положено постоянство функции тока на контуре каждого элемента, из которого следует интегральное уравнение, связывающее координаты узловых точек с плотностью вихревого слоя (для упрощения понимания представлено уравнение для одного элемента):

$$\psi_i = y_i \cos \alpha - x_i \sin \alpha - \frac{1}{2\pi} \oint \gamma(s) \ln \sqrt{(x_i - x(s))^2 + (y_i - y(s))^2} ds = \text{const}$$

$$i = 1, 2, \dots, N + 1$$

В прямом методе ищется плотность вихревого слоя в точках координат фиксированного контура. При решении обратной задачи давление (касательная скорость) задается дискретно в узлах контура, а интегральное уравнение разрешается непосредственно относительно координат профиля:

$$y_i = \frac{1}{\cos \alpha} \left[\psi_c + \frac{1}{2\pi} \oint_c \gamma(s) \ln \sqrt{(x_i - x(s))^2 + (y_i - y(s))^2} ds \right] + x_i \tan \alpha$$

Это выгодно отличает подход с применением метода функции тока от других известных методов, в которых, как правило, определяются величины наклонов в центрах панелей. Выбор метода с условием постоянства функции тока обусловлен полным соответствием прямого и обратного метода по граничным условиям и принятой системе гидродинамических особенностей.

Последнее уравнение нелинейное, так как неизвестные значения y_i входят под знак интеграла. Решение ищется в процессе итераций, в результате определяется новая форма контура. Значение ψ_c выбирается в зависимости от того, какая точка на контуре является фиксированной. Это может быть, например, передняя или задняя кромка. Распределение интенсивностей вихревого слоя является заданным для варьируемых элементов, а для фиксированных элементов его необходимо периодически

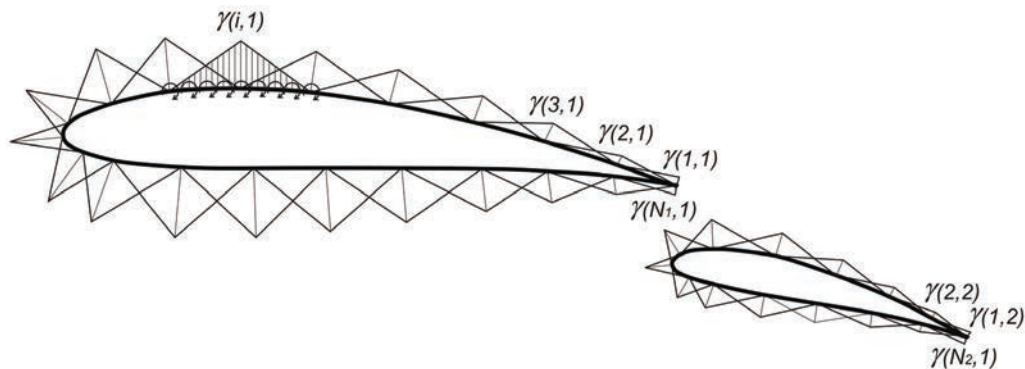


Рис. 7. Вихревые особенности на панелях многозвЕННОГО контура

пересчитывать при помощи прямого метода. В данной работе пересчет циркуляций проводился после каждого шага решения обратной задачи.

В целом, расчетные методы аналогичны тем, которые используются при решении обратной задачи при малых скоростях [8]. Единственным дополнительным методом, который применяется для расчета эквивалентной дозвуковой поправки давления $\delta_{\text{дзв}} C_p^{\text{экв}}$, является панельный метод с тем же распределением гидродинамических особенностей, но с явным выполнением условия непротекания $V_N=0$ в центрах панелей.

5. Примеры расчетов

В первом примере рассматривалась задача практического проектирования профиля с подвесным закрылком. В отличие от обычных, подвесной закрылок в полете не убирается, и основной профиль может иметь гладкую безнишевую нижнюю поверхность, что значительно снижает сопротивление.

В качестве начальной геометрии был выбран разрезной профиль с относительной толщиной $\bar{c} = 22.3\%$, разработанный авторами ранее [8] для малых скоростей и испытанный в нескольких аэродинамических трубах. Расчеты проводились при числе Рейнольдса $Re = 5 \times 10^6$ и полностью турбулентном обтекании. При числе Маха $M = 0.5$ и угле атаки $\alpha = 5^\circ$ на исходном профиле появляется скачок уплотнения (рис. 8). Целевое распределение давления задавалось так, чтобы убрать этот скачок, сохраняя при этом подъемную силу и относительную толщину основного звена. Форма закрылка не менялась. Итерационный процесс сошелся за 12 итераций. Расчетное сопротивление упало на 37 каунтов (один каунт для C_x равен 0.0001) за счет снижения интенсивности скачка.

Полученный при $M = 0.5$ профиль был выбран во втором примере в качестве начального, но уже при $M = 0.6$ и $\alpha = 2^\circ$. При этих условиях на верхней поверхности воз-

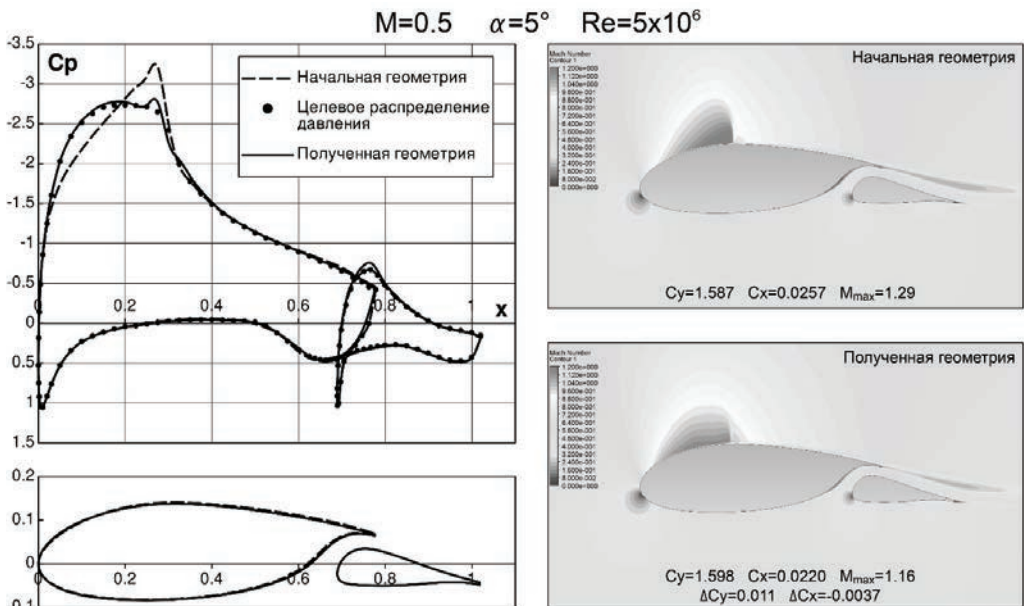
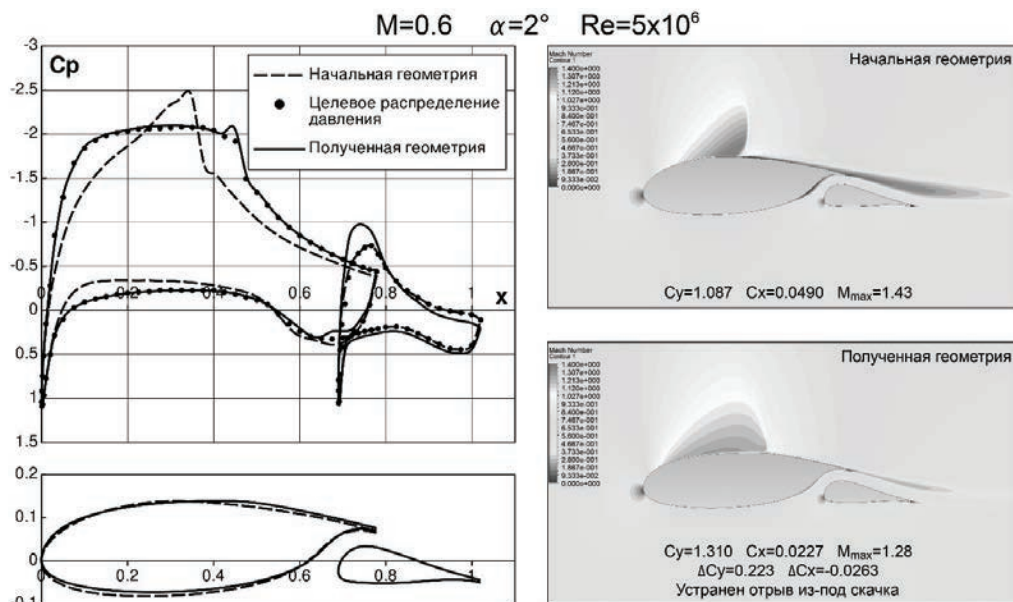
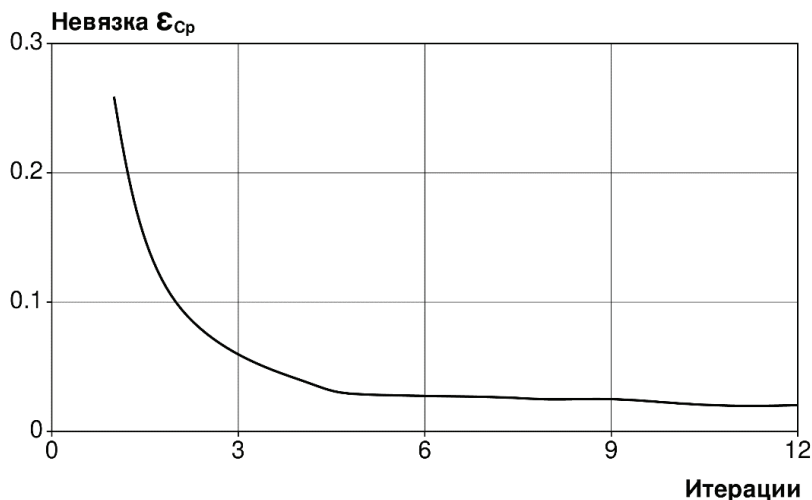


Рис. 8. Пример решения обратной задачи при $M = 0.5$, $\Delta C_y, \Delta C_x$ — изменения интегральных характеристик по сравнению с характеристиками исходного профиля

Рис. 9. Пример решения обратной задачи при $M = 0.6$

никает сильный скачок уплотнения, вызывающий отрыв пограничного слоя (рис. 9). Заданное распределение давления носило полочный характер, часть подъемной силы была дополнительно реализована за счет модификации нижней поверхности. Отметим, что заданное распределение давления несколько раз модифицировалось в процессе проектирования на основании получаемых промежуточных результатов. Закрылок снова был фиксирован.

Рис. 10 иллюстрирует сходимость решения по невязке давления для данного примера. Отметим, что в процессе решения рекомендуется контролировать не только количественную, но и качественную сходимость. В данном примере на последних

Рис. 10. Сходимость решения обратной задачи при $M = 0.6$

итерациях решение уже не сходится количественно, однако по характеру распределения давления последовательно приближается к заданному.

Итерационный процесс сошелся за 14 итераций, относительная толщина снизилась до $\bar{c} = 20.8\%$. Расчетное сопротивление упало на 260 каунтов за счет снижения интенсивности скачка и ликвидации отрыва. Получено безотрывное обтекание при $C_y = 1.31$ – такой уровень несущих свойств недостижим на бесшелевом профиле.

При помощи разработанного метода был спроектирован разрезной профиль, предназначенный для более высоких скоростей ($M = 0.768$), представленный в третьем примере. На рис. 11 приведены геометрия профиля и распределение числа Маха в пространстве, а на рис. 12 – распределение давления по поверхности профиля на

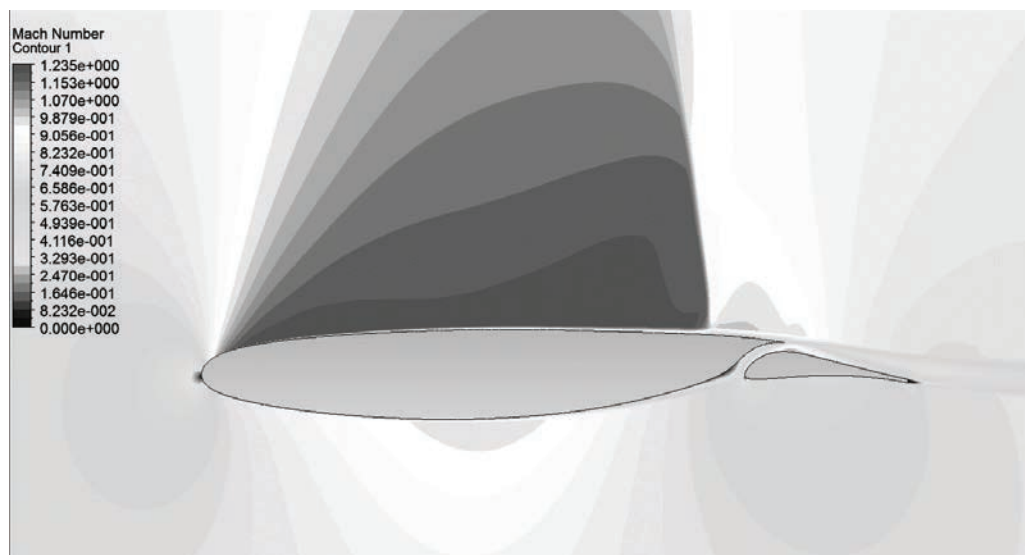


Рис. 11. Поле числа Маха на режиме $M = 0.768$, $C_y = 0.75$

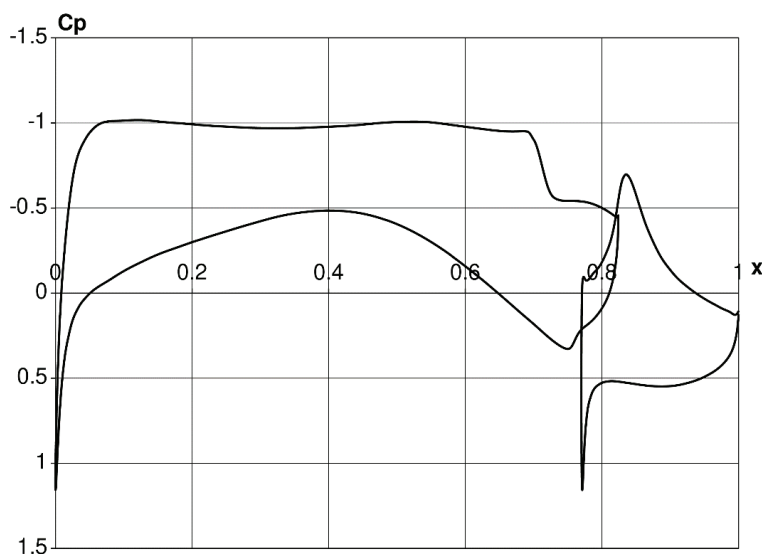


Рис. 12. Распределение давления на режиме $M = 0.768$, $C_y = 0.75$

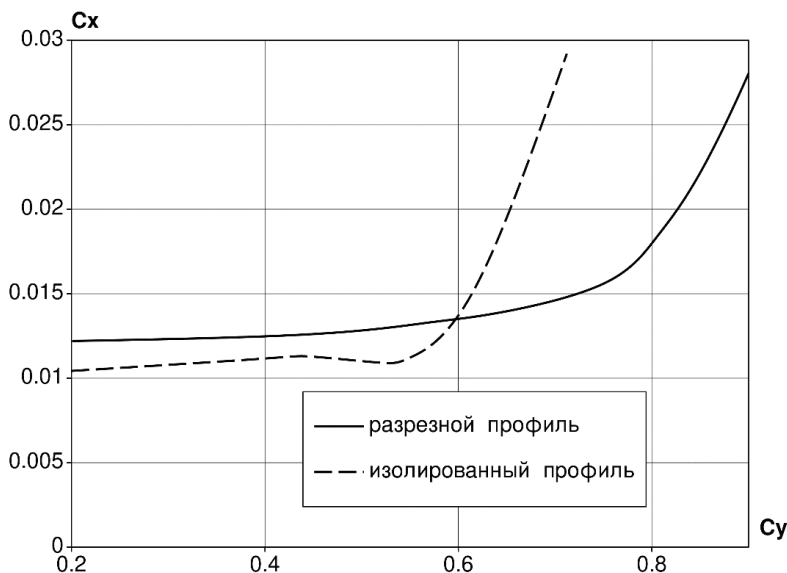


Рис. 13. Расчетные поляры разрезного и изолированного профилей

режиме $M = 0.768$, $Re = 10 \times 10^6$, $C_y = 0.75$. На рис. 13 приведена поляра $C_x(C_y)$ для полученного профиля в сравнении с поларой для бесщелевого профиля, также спроектированного под данный режим. При малых C_y сопротивление щелевого профиля больше на 10–20 каунтов за счет наличия щели. Его преимущество реализуется при более высоких C_y . Он позволяет достигать $C_y = 0.75$, в то время, как на изолированном профиле резкий рост C_x начинается уже с $C_y = 0.55$.

Заключение

Разработан алгоритм и реализован метод решения обратной задачи для многозвеного профиля с использованием RANS уравнений при больших скоростях. Решение осуществляется итерационно по методу остаточной коррекции. В качестве корректора используется панельный метод решения прямой/обратной задачи для многозвеного профиля в идеальной несжимаемой жидкости.

Примеры решения обратной задачи для многозвеного профиля демонстрируют сходимость метода при безотрывном обтекании элементов. Спроектированы высококонесущие профили с подвесным закрылком для использования в крыльях перспективных ЛА. Полученный уровень несущих свойств недостижим для однозвенных профилей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rumsey C.L., Ying S.X. Prediction of high lift: review of present CFD capability // Progr. in Aerosp. Sci. 2002. V. 38. P. 145–180.
2. Голубев В.В. Исследования по теории разрезного крыла. Ч. I // Тр. ЦАГИ. 1933. Вып. 147.
3. Голубев В.В. Исследования по теории разрезного крыла. Ч. II // Тр. ЦАГИ. 1937. Вып. 306.
4. Smith A.M. High-lift aerodynamics // J. of Aircraft. 1975. V. 12. № 6.
5. Петров А.В., Скоморохов С.И. Аэродинамика механизированных крыльев. ЦАГИ – основные этапы научной деятельности 1993–2003 гг. М.: Наука: Физматлит, 2003. С. 95–104.
6. Hiller B.R., Campbell R.L., Lynde M.N., Boyett T.K. Design exploration of a transonic cruise slotted airfoil. // AIAA 2021-0621. 2021.

7. Болсуновский А.Л., Бузоверя Н.П., Губанова И.А., Губанова М.А. Решение обратной задачи для профиля в рамках уравнений Навье—Стокса, осредненных по Рейнольдсу // Уч. Зап. ЦАГИ. 2013. Т. 44. № 3.
8. Болсуновский А.Л., Бузоверя Н.П., Губанова И.А. и др. Решение обратной задачи для многоэлемного профиля в рамках уравнений Навье—Стокса, осредненных по Рейнольдсу // Уч. Зап. ЦАГИ. 2021. Т. 52. № 3.
9. Drela M. Design and optimization method for multi-element airfoils // AIAA-93-0969. 1993.
10. Matsushima K., Shiokawa M., Nakahashi K. An efficient inverse aerodynamic design method for multi component devices // ICAS-2004. Paper 356.
11. Jones D., Fejtek I. Inverse design of high lift systems // ICAS-2002. 2.4.5.
12. Болсуновский А.Л., Бузоверя Н.П., Пушин Н.А. Решение обратной задачи для полной крейсерской компоновки магистрального самолета с использованием уравнений Навье—Стокса, осредненных по Рейнольдсу // Уч. Зап. ЦАГИ. 2020. Т. 51. № 1.

Solving of the Inverse Problem for a Multielement Airfoil in a Compressible Viscous Gas Flow

A. L. Bolsunovsky^{a, #}, N. P. Busoverya^a, S. V. Gerasimov^a, M. A. Gubanova^a

^aCentral Aerohydrodynamic Institute, Zhukovsky, Russia

[#]e-mail: bolsmail@mail.ru

An iterative method for solving the inverse problem for a multielement (slotted) airfoil at high speeds in a viscous compressible flow, using RANS methods, has been developed. It is an evolution of a similar method developed earlier by the authors for low speed conditions. The method is based on the well-known principle of residual correction, according to which corrections to the current geometry are generated on the basis of the difference between the target and current pressure distribution. A brief description of the algorithm and the methods used is given. Examples for the slotted airfoil design corresponding to the target pressure distribution are given, including cases with the shock waves existence.

Keywords: inverse problem, averaged Navier—Stokes equations, RANS methods, slotted airfoil, high velocities, target pressure distribution.

REFERENCES

1. Rumsey C.L., Ying S.X. Prediction of high lift: review of present CFD capability // Progr. in Aerospace Sci., vol. 38, 2002, pp. 145—180.
2. Golubev V.V. Research on the slotted wing theory. Part I // Tr. TsAGI, 1933, iss. 147. (in Russian)
3. Golubev V. V. Research on the slotted wing theory. Part II // Tr. TsAGI, 1937, iss. 306. (in Russian)
4. Smith A.M. High-lift aerodynamics // J. of Aircraft, 1975, vol. 12, no. 6.
5. Petrov A.V., Skomorokhov S.I. High-Lift Wings Aerodynamics. TsAGI — Main Stages of Scientific Work in 1993—2003. Moscow: Fizmatlit, 2003. p. 95—104. (in Russian)
6. Del Rosario R., Follen G., Wahls R., Madavan N. Subsonic fixed wing project overview of technical challenges for energy efficient, environmentally compatible subsonic transport aircraft // AIAA Aerospace Sci. Meeting, Nashville. 2012.
7. Bolsunovsky A.L., Buzoverya N.P., Gubanova I.A., Gubanova M.A. Solution of the inverse problem for an airfoil in the framework of RANS-equations // TsAGI Sci. J., 2013, vol. 44, no. 3. (in Russian)
8. Bolsunovsky A.L., Buzoverya N.P., Gubanova I.A. et al. Solution of the inverse problem for a multi-element airfoil in the framework of RANS-equations // TsAGI Sci. J., 2021, vol. 52, no. 3. (in Russian)
9. Drela M. Design and optimization method for multi-element airfoils // AIAA-93-0969, 1993.
10. Matsushima K., Shiokawa M., Nakahashi K. An efficient inverse aerodynamic design method for multi component devices // ICAS-2004, Paper 356.
11. Jones D., Fejtek I. Inverse design of high lift systems // ICAS-2002. 2.4.5.
12. Bolsunovsky A.L., Buzoverya N.P., Puschin N.A. Solution of the inverse problem for full cruise layout of the passenger aircraft with the use of RANS-equations // TsAGI Sci. J., 2020, vol. 51, no. 1. (in Russian)

УДК 532.526

К ЗАДАЧЕ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ЛАМИНАРНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ НА ПРОНИЦАЕМЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ В СВЕРХЗВУКОВЫХ ПОТОКАХ

© 2024 г. И. Р. Мухаметзянов^{1,*}

¹Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, Филиал “Восток”, Чистополь, Россия

*e-mail: m.ilshat@mail.ru

Поступила в редакцию 21.12.2023 г.

После доработки 12.06.2024 г.

Принята к публикации 18.06.2024 г.

Рассматривается приближенный способ решения краевой задачи для уравнений оптимально управляемого ламинарного пограничного слоя на проницаемых цилиндрических поверхностях в высокоскоростных потоках газа.

Ключевые слова: сверхзвуковое обтекание, ламинарный пограничный слой, оптимальный вдув, закон Дарси, первый интеграл.

DOI: 10.31857/S0032823524060072 EDN: IGNURC

1. Введение. Управление теплообменом в сверхзвуковом пограничном слое является актуальной темой исследований в области фундаментальной и прикладной газодинамики. Вследствие ограниченных энергетических ресурсов естественным образом возникает вариационная задача о построении оптимального закона вдува через проницаемый участок обтекаемой поверхности при заданном ограничении на мощность системы управления вдувом. Задача оптимального управления пограничным слоем на проницаемых поверхностях впервые была поставлена в работе [1] для случая несжимаемой жидкости. Впоследствии такие задачи были рассмотрены в работах [2–8]. В основном они рассматривались для граничных условий, удовлетворяющих на обтекаемой поверхности и на внешней границе пограничного слоя. Отметим, что в работе [2] рассмотрена история и современное состояние исследований теории оптимально управляемого пограничного слоя на проницаемых поверхностях.

В работе рассматривается вариационная задача о минимизации конвективного теплового потока, передаваемого от разогретого пограничного слоя к обтекаемой поверхности, при заданном ограничении на мощность системы управления вдувом. В качестве управления выступает удельный расход охладителя через проницаемый участок поверхности. При этом, согласно условиям трансверсальности, оптимальное управление должно обращаться в ноль на правом конце участка вдува. Данное требование вызывает большие математические затруднения и приводит к увеличению трудоемкости решения вариационной задачи. Автору известны только единичные публикации, в которых оптимальное управление удовлетворяет нулевому условию на правом конце участка вдува. В одной из них [6] было найдено приближенное решение для оптимального управления в аналитической форме; в других [7, 8] – решение находилось достаточно трудоемким конечно-разностным методом. Получение конечного результата в этих работах было сопряжено со значительными трудностями.

Новизна работы состоит в построении алгоритма оптимального управления, который более удобен для применения в инженерной практике. Достигается это путем использования классической теоремы Э. Нётер об инвариантных вариационных задачах, а также следствия из первого интеграла для сопряженной системы, который получен ранее в работе [6]. С содержательной точки зрения, использование следствия из первого интеграла позволило существенно уменьшить трудоемкость построения оптимального управления. Так как в этом случае аппроксимирующая система уравнений (в переменных А.А. Дородницына [9]), участвующая в вычислительных экспериментах, становится замкнутой относительно искомой функции. Таким образом, в рассматриваемой работе предложена процедура построения оптимального управления более удобная для применения в инженерной практике и сводится она к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений с разрешимой особенностью в точке торможения потока. Научное значение работы заключается в развитии теории оптимально управляемого пограничного слоя в сверхзвуковых потоках газа.

2. Постановка задачи. Уравнения ламинарного пограничного слоя на проницаемом цилиндрическом профиле в сверхзвуковом потоке газа в переменных А.А. Дородницына имеют вид [9, 10]:

$$\begin{aligned}\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{s}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} &= \beta (1 - \psi - \bar{u}^2) + \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left[b(\tau) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} \right] \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{s}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} &= 0 \\ \bar{u} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{s}} + \bar{w} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{t}} &= \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left[b(\tau) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{t}} \right] + \alpha_e^2 \left(\frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left[b(\tau) \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial \bar{t}} \right]\end{aligned}\quad (2.1)$$

В системе (2.1):

$$\begin{aligned}\bar{s} &= \frac{1}{l} \int_0^x q dx, \bar{t} = \frac{U_e \eta}{\sqrt{v_{e0} V_{\max} l}}, \eta = \int_0^y \frac{(1 - \alpha_e^2)^{\gamma/(\gamma-1)}}{\tau} dy, \bar{u} = \frac{u}{U_e} \\ \bar{w} &= \sqrt{\frac{V_{\max} l}{v_{e0}}} \left[(1 - \alpha_e^2)^{\gamma/(\gamma-1)} \bar{u} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\eta}{\tau U_e} \right] + \frac{\dot{U}_e \bar{t} \bar{u}}{U_e}, \psi = 1 - \tau - \alpha_e^2 \bar{u}^2 \\ q &= \alpha_e (1 - \alpha_e^2)^{\gamma/(\gamma-1)}, \alpha_e = \frac{U_e}{V_{\max}}, \tau = \frac{T}{T_0}, V_{\max} = V_{\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{(\gamma-1) M_{\infty}^2}},\end{aligned}$$

где $b(\tau) = \frac{\mu}{\mu_0 \tau}$, $\beta = \frac{\dot{\alpha}_e}{\alpha_e (1 - \alpha_e^2)}$, $\dot{\alpha}_e = \frac{d\alpha_e}{d\bar{s}}$, l – некоторый характерный размер; M_{∞} –

число Маха; Pr – число Прандтля; u и η – проекции вектора скорости на координатные оси x и y ; γ – показатель адиабаты; μ – динамическая вязкость газа; T – температура газа; v – кинематическая вязкость газа; индекс « e » соответствует параметрам газа на внешней границе пограничного слоя, индекс «0» – в точке полного торможения потока, индекс « ∞ » – параметрам газа в набегающем потоке; U_e – скорость на внешней границе пограничного слоя, определяющая форму обтекаемой поверхности.

Краевые условия к системе (2.1) имеют вид [10]

$$\begin{aligned}\bar{u} &= 0, \bar{w} = \frac{m(\bar{s})}{q(\bar{s})}, \psi = 1 - \tau_w (\bar{t} = 0) \\ \bar{u} &\rightarrow 1, \psi \rightarrow 0 (\bar{t} \rightarrow \infty) \\ \bar{u} &= 1, \psi = 0 (\bar{s} = 0),\end{aligned}\quad (2.2)$$

где $m = \frac{(\rho g)_w}{\rho_0} \sqrt{\frac{l}{v_0 V_{\max}}}$, индекс «w» соответствует расходу охладителя через проницаемый участок обтекаемого профиля.

Мощность, затрачиваемая системой управления на вдув газа через пористую стенку, в переменных А.А. Дородницына с учетом закона Дарси и минимизируемый функционал с точностью до постоянных запишутся, соответственно, в виде [11] (в дальнейшем для простоты черточки над переменными \bar{t} , \bar{s} , \bar{u} , \bar{w} опустим)

$$\bar{N} = \int_0^{s_k} f(1 - \psi_w)^2 m^2 ds \quad (2.3)$$

$$\bar{Q} = - \int_0^{s_k} \left(b(\tau) \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{t=0} ds, \quad (2.4)$$

где $s_k = \frac{1}{l} \int_0^{x_k} q dx$, $f = 1/\alpha_e (1 - \alpha_e^2)^{3\gamma/(\gamma-1)}$.

Вариационная задача ставится следующим образом. Среди непрерывных на отрезке $[0, s_k]$ управлений $m(s)$ требуется отыскать такое, которое реализует минимальное значение конвективного теплового потока (2.4) при связях (2.1), (2.2) и изопериметрическом условии (2.3). Вариационная задача рассматривается в области D , ограниченной линиями $t = 0$, $s = s_k$, $t \rightarrow \infty$, $s = 0$.

Сопряженная система относительно множителей Лагранжа $\lambda_1(s, t)$, $\lambda_2(s, t)$, $\lambda_3(s, t)$ в соответствии с формализмом Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned}2\beta u \lambda_1 + \lambda_3 \frac{\partial \psi}{\partial s} - u \frac{\partial \lambda_1}{\partial s} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial s} - w \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} - \lambda_1 \frac{\partial w}{\partial t} - b \left[\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial t^2} + 2\alpha_e^2 \left(\frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) u \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial t^2} \right] - \\ - 2\alpha_e^2 u \frac{\partial b}{\partial \tau} \left[\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + 2\alpha_e^2 u \left(\frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \right] \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} \Bigg\} - \\ - \frac{\partial b}{\partial t} \left[\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + 2\alpha_e^2 \left(\frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) u \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \right] = 0, \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_3 \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} = 0 \\ \beta \lambda_1 - \frac{\partial b}{\partial \tau} \left[\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + 2\alpha_e^2 \left(\frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) u \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \right] \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} \Bigg\} - \\ - \frac{\partial}{\partial s} (\lambda_3 u) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\lambda_3 w + \frac{b}{\text{Pr}} \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \right) = 0\end{aligned}\quad (2.5)$$

Краевые условия к системе (2.5) имеют вид

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0, \lambda_3 = \text{Pr} \quad (t = 0) \\ \lambda_1 &\rightarrow 0, \lambda_2 \rightarrow 0, \lambda_3 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \\ \lambda_1 &= \lambda_3 = 0 \quad (s = s_k)\end{aligned}\quad (2.6)$$

Интегрируя третье уравнение системы (2.5) по переменной u в пределах от 0 до 1, с учетом граничных условий (2.2) и (2.6) получим интегральное соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_0^1 \lambda_3 u \theta du = \beta \int_0^1 \lambda_1 \theta du + \left(\lambda_3 w + \frac{b}{\text{Pr}} \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \right) \Big|_{t=0} - \\ - \int_0^1 \left[\frac{\partial \lambda_1}{\partial u} + 2\alpha_e^2 \left(\frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) u \frac{\partial \lambda_3}{\partial u} \right] \frac{\bar{b}}{\theta} du - \frac{1}{\text{Pr}} \int_0^1 \frac{\partial \lambda_3}{\partial u} \bar{q} du, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\bar{b}(\tau) = \frac{\partial b}{\partial \tau}$, $\bar{q} = \bar{b}(\tau) \frac{\partial \psi}{\partial t}$, $\theta = \frac{1}{\partial u / \partial t}$.

Для рассматриваемой оптимальной задачи (2.1)–(2.4) сопряженная система уравнений (2.5) допускает первый интеграл [11], полученный с помощью классической теоремы Эмми Нётер об инвариантных вариационных задачах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} (u \lambda_2) + \left[\lambda_1 w + 2\alpha_e^2 \left(1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) \lambda_3 R_1 + \lambda_4 b(\tau) \right] \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial w}{\partial t} + \\ + \left[\lambda_3 w + \lambda_3 b(\tau) \right] \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\lambda_3}{\text{Pr}} \frac{\partial R_2}{\partial t} - \left[\lambda_1 - 2\alpha_e^2 \left(1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) u \lambda_3 \right] \frac{\partial R_1}{\partial t} = g(s) \\ R_1 = b(\tau) \frac{\partial u}{\partial t}, R_2 = b(\tau) \frac{\partial \psi}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $g(s)$ – произвольная функция интегрирования. Предполагая, что при $t \rightarrow \infty$ функции $\frac{\partial \lambda_1}{\partial t}$, $\frac{\partial \lambda_3}{\partial t}$ являются ограниченными, из этого уравнения, с учетом граничных условий (2.2) и (2.6), получим $g(s) \equiv 0$.

Следствие из первого интеграла имеет вид [11]

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (2.9)$$

Равенство (2.9) устанавливает точную явную связь между градиентами множителей Лагранжа на произвольной поверхности при любых числах Прандтля и при произвольной зависимости вязкости газа от температуры.

Используя метод обобщенных интегральных соотношений А.А. Дородницына, систему уравнений в частных производных (2.1) с краевыми условиями (2.2) приближенно заменим аппроксимирующей системой второго приближения [6, 10, 12]

$$\begin{aligned} \theta'_0 = 18m - 6\beta q \left(\frac{7\theta_1}{6} + \frac{9\theta_0}{6} - \frac{5\omega_1}{3} - \frac{4\omega_0}{3} \right) - \frac{32qb_1}{\theta_1} + \frac{34qb_0}{\theta_0} \\ \theta'_1 = 12m - 12\beta q \left(\frac{\theta_0}{3} + \frac{\theta_1}{2} - \frac{2\omega_1}{3} - \frac{\omega_0}{3} \right) - \frac{16qb_1}{\theta_1} + \frac{20qb_0}{\theta_0} \\ \omega'_1 = 6m \frac{\omega_0}{\theta_0} - 6\beta q \left(\frac{\omega_0}{6} + \frac{\omega_1}{2} - \frac{2\omega_1^2}{3\theta_1} - \frac{\omega_0^2}{6\theta_0} \right) + \frac{6q\omega_0 b_0}{\theta_0^2} + 6q \left(1 + \frac{1}{\text{Pr}} \right) \times \\ \times \left[\frac{b_0}{6\theta_0} \left(4 \frac{\omega_1}{\theta_1} - 3 \frac{\omega_0}{\theta_0} \right) - \frac{2b_1\omega_0}{3\theta_1\theta_0} \right] - \frac{6qb_0}{\text{Pr}\theta_0} \left(4 \frac{\omega_1}{\theta_1} - 3 \frac{\omega_0}{\theta_0} \right) + 4q \left(\frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) \alpha_e^2 \frac{b_1}{\theta_1} \\ \omega'_0 = -\theta_0 \tau'_w + (1 - \tau_w) \theta'_0, \text{ где } \beta q = \alpha'_e / (\alpha_e (1 - \alpha_e^2)) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Уравнения (2.10) получены для произвольной зависимости вязкости газа от температуры. Они значительно упростятся, если допустить линейную зависимость (в этом случае $b_0 = b_1 = 1$).

Начальные условия для интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.10) имеют вид [10,12]

$$\theta_0(\bar{x}_0) = \bar{\theta}_0 \bar{x}_0, \theta_1(\bar{x}_0) = \bar{\theta}_1 \bar{x}_0, \omega_0(\bar{x}_0) = \bar{\omega}_0 \bar{x}_0, \omega_1(\bar{x}_0) = \bar{\omega}_1 \bar{x}_0, \quad (2.11)$$

где \bar{x}_0 – близкая к нулю точка [6]. Постоянные $\bar{\theta}_0, \bar{\theta}_1, \bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1$ определяются из решения алгебраической системы вида [6,10,12]

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_0 &= 18m(0) - 7\bar{\theta}_1 - 9\bar{\theta}_0 + 10\bar{\omega}_1 + 8\bar{\omega}_0 - \frac{32cb_1(0)}{\bar{\theta}_1} + \frac{34cb_0(0)}{\bar{\theta}_0} \\ \bar{\theta}_1 &= 12m(0) - 4\bar{\theta}_0 - 6\bar{\theta}_1 + 8\bar{\omega}_1 + 4\bar{\omega}_0 - \frac{16cb_1(0)}{\bar{\theta}_1} + \frac{20cb_0(0)}{\bar{\theta}_0} \\ \bar{\omega}_1 &= 6m(0)\frac{\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0} - \bar{\omega}_0 - 3\bar{\omega}_1 + \frac{4\bar{\omega}_1^2}{\bar{\theta}_1} + \frac{\bar{\omega}_0^2}{\bar{\theta}_0} + \frac{6cb_0(0)\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0^2} + 6c\left(1 + \frac{1}{\text{Pr}}\right) \times \\ &\times \left[\frac{b_0(0)}{6\bar{\theta}_0} \left(4\frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\theta}_1} - 3\frac{\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0} \right) - \frac{2b_1(0)\bar{\omega}_0}{3\bar{\theta}_1\bar{\theta}_0} \right] - \frac{6cb_0(0)}{\text{Pr}\bar{\theta}_0} \left(4\frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\theta}_1} - 3\frac{\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0} \right) \\ \bar{\omega}_0 &= \bar{\theta}_0(1 - \tau_w(0)) \end{aligned}$$

Оптимальное управление определяется по формуле [6]

$$m(\bar{x}) = \left(1 - \alpha_e^2\right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \frac{\lambda_2(\bar{x}, 0)}{2\alpha\tau_w^2}, \quad (2.12)$$

где α – множитель Лагранжа, определяемый в соответствии с изопериметрическим условием (2.3),

$$\begin{aligned} \lambda_2(\bar{x}, 0) &= -\frac{1}{12} \left[B_1 \left(2l_0 - \frac{2l_0}{\text{Pr}} + l_1 \right) + B_0 \left(\frac{2l_0}{\text{Pr}} + 6l_0 + 2l_1 \right) \right] \\ l_0 &= 4\frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\theta}_1} - 3\frac{\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0}, l_1 = 4\left(\frac{\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0} - 2\frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\theta}_1} \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

B_0 и B_1 – переменные коэффициенты в формуле для множителя Лагранжа λ_2 .

Подчеркнем, что с учетом формулы (2.12) аппроксимирующая система (2.10) становится замкнутой, и мы получаем стандартную задачу Коши.

С целью оценки влияния нулевого «начального» условия для множителя Лагранжа λ_2 на правом конце участка вдува ($\bar{x}_k = 1$) на значение минимизируемого функционала (конвективного теплового потока) рассмотрим три задачи. Аппроксимации для множителей Лагранжа во всех трех задачах зададим в виде, удовлетворяющем граничным условиям на обтекаемой поверхности и на внешней границе пограничного слоя [6]

$$\lambda_1 = u(1-u)A_0, \lambda_3 = (1-u)(B_0 + uB_1); A_0 = \frac{l_0}{\text{Pr}}(B_0 - B_1) \quad (2.14)$$

Граничные условия для множителей Лагранжа во всех задачах имеют вид

$$\lambda_1 = 0 \text{ при } u = 0, \lambda_1 = 0 \text{ при } u = 1$$

$$\lambda_3 = \text{Pr} \text{ при } u = 0; \lambda_3 = 0 \text{ при } u = 1 \quad (2.15)$$

Отметим, что множители Лагранжа автоматически удовлетворяют на поверхности обтекаемого тела и на внешней границе пограничного слоя. В соответствии с работой [11] оптимальное управление на правом конце участка вдува должно обращаться в ноль и, следовательно, согласно формуле (2.13) $B_0(\bar{x}_k) = B_1(\bar{x}_k) = 0$.

Задача 1. Учитываются: граничные условия на поверхности ($u = 0$), на внешней границе пограничного слоя ($u = 1$), а также следствие из первого интеграла (2.9). В этом случае A_0 , B_0 и B_1 , входящие в формулу (2.13), запишутся в виде: $B_0 = \text{Pr}$, $B_1 = 0$, $A_0 = I_0$. Следовательно, выражение (2.13) примет вид

$$\lambda_2(\bar{x}, 0) = \text{Pr} \left[\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2\text{Pr}} \right) \frac{\omega_0}{\theta_0} - \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{\text{Pr}} \right) \frac{\omega_1}{\theta_1} \right]$$

Задача 2. Учитываются: граничные условия на поверхности ($u = 0$), на внешней границе пограничного слоя ($u = 1$), следствие из первого интеграла (2.9), а также «начальное» условие для функции $B_1(\bar{x})$, которую необходимо найти. В этом случае $B_0 = \text{Pr}$, $B_1(\bar{x}_k) = 0$, $A_0(\bar{x}_k) = I_0$.

Интегральное соотношение (2.7) запишется в виде [6]:

$$B_0 Z_0 + B_1 U_0 + \bar{x} \frac{d}{d\bar{x}} (B_0 Z_0 + B_1 U_0) = B_0 W_0 + B_1 S_0 \quad (2.16)$$

$$\text{Здесь } Z_0 = -\frac{\bar{\theta}_0}{6} + \frac{\bar{\theta}_1}{3}, U_0 = -\frac{\bar{\theta}_0}{6} + \frac{\bar{\theta}_1}{4}, W_0 = m(0) - \frac{c}{\text{Pr} \bar{\theta}_0} + \frac{\bar{I}_0}{\text{Pr}} Z_0, S_0 = m(0) - W_0,$$

$$\bar{I}_0 = 4 \frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\theta}_1} - 3 \frac{\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0}, c = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(1 - \frac{p_\infty}{p_0} \right)}.$$

Интегрируя (2.16), получим $B_1(\bar{x}) = \text{Pr} \frac{K_2}{K_1} (\bar{x}^{K_1} - 1)$, где $K_1 = (S_0/U_0) - 1$, $K_2 = (W_0 - Z_0)/U_0$, $B_1(\bar{x}_k) = 0$ при $\bar{x}_k = 1$.

Задача 3. Задача решается с учетом и граничных, и «начальных» условий. В этом случае $B_0(\bar{x}_k) = 0$, $B_1(\bar{x}_k) = 0$. Тогда из выражения (2.13) получим, что $\lambda_2(\bar{x}_k, 0) = 0$ при $\bar{x}_k = 1$ и, следовательно, $m(\bar{x}_k) = 0$. Аппроксимацию $B_0(\bar{x})$ зададим в виде $B_0(\bar{x}) = \text{Pr}(1 - \bar{x}^{\bar{\alpha}})$, где $\bar{\alpha} > 0$ при $0 \leq \bar{x} \leq 1$ и задается в процессе вычислительного эксперимента с учетом значения минимизируемого функционала.

Интегрируя уравнение (2.16), получим функцию

$$B_1(\bar{x}) = \text{Pr} \left[\frac{K_2}{K_1} (\bar{x}^{K_1} - 1) + \frac{\bar{\alpha} K_3 - K_2}{\bar{\alpha} - K_1} (\bar{x}^{\bar{\alpha}} - \bar{x}^{K_1}) \right],$$

$$\text{где } Z_0 = -\frac{\bar{\theta}_0}{6} + \frac{\bar{\theta}_1}{3}, U_0 = -\frac{\bar{\theta}_0}{6} + \frac{\bar{\theta}_1}{4}, S_0 = m(0) - W_0 = \frac{c}{\text{Pr} \bar{\theta}_0} - \frac{\bar{I}_0}{\text{Pr}} Z_0, \bar{I}_0 = 4 \frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\theta}_1} - 3 \frac{\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0},$$

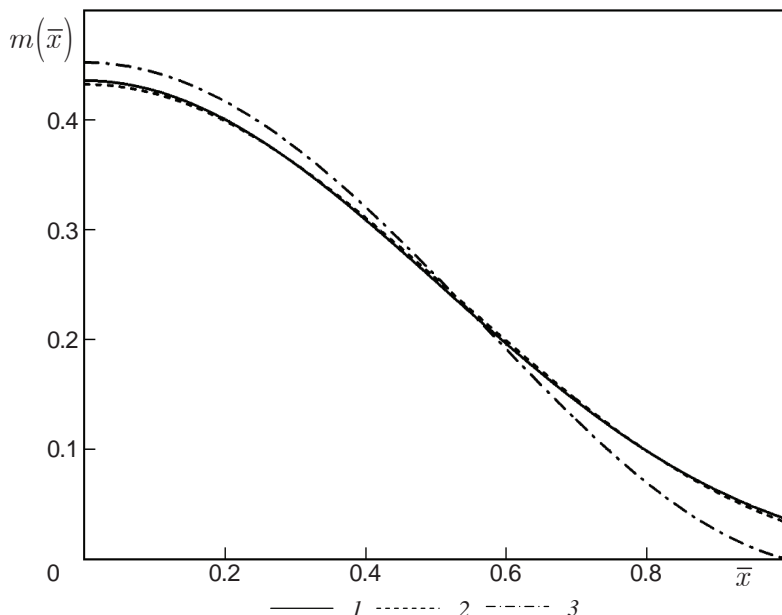
$$W_0 = m(0) - \frac{c}{\text{Pr} \bar{\theta}_0} + \frac{\bar{I}_0}{\text{Pr}} Z_0, K_1 = (S_0/U_0) - 1, K_2 = (W_0 - Z_0)/U_0, K_3 = Z_0/U_0,$$

$$c = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(1 - \frac{p_\infty}{p_0} \right)}, B_1(\bar{x}_k) = 0 \text{ при } \bar{x}_k = 1.$$

3. Вычислительный эксперимент. Вычислительный эксперимент по построению оптимального закона вдува был проведен для случая обтекания прямого кругового

Таблица 1. Сравнение результатов вычислительного эксперимента с данными полученными в работах [6] и [8]

Задача № 1	Задача № 2	Задача № 3	Данные [6]	Данные [8]
24.92	25.03	26.32	31.3	26.12

**Рис. 1.** Зависимость оптимальной скорости вдува решения задач 1–3 от координаты

цилиндра сверхзвуковым потоком воздуха. Параметры эксперимента задавались следующим образом: число Маха $M_\infty = 7$; радиус прямого кругового цилиндра $l = 0.05$ м; число Прандтля $Pr = 0.74$; $\bar{x}_k = 1$; параметры стандартной атмосферы соответствовали высоте 10000 м ($T_\infty = 223.15$ К, $P_\infty = 26491.08$ кг/м · с², $\rho_\infty = 4.1357 \cdot 10^{-1}$ кг/м³, $a = 299.45$ м/с, $v_\infty = 3.5232 \cdot 10^{-5}$ м²/с; безразмерная температура газа на стенке $\tau_w = 0.25$; мощность системы управления вдуваемого газа \bar{N} соответствует постоянному вдуву $m^{(0)}(\bar{x}) = 0.2$. Зависимость вязкости газа от температуры предполагалась линейной. Результаты вычислительного эксперимента по минимизации функционала теплового потока [6]

$$Q = \int_0^{\bar{x}_k} \frac{1}{\theta_0} \left(3 \frac{\omega_0}{\theta_0} - 4 \frac{\omega_1}{\theta_1} \right) \alpha_e (1 - \alpha_e^2)^{1/(\gamma-1)} d\bar{x},$$

записанного с точностью до постоянного множителя, по сравнению с равномерным (автомодельным) вдувом приведены в табл. 1 (в %).

На рис. 1 представлены графики оптимальных управлений для случая $m^{(0)}(\bar{x}) = 0.2$; $\tau_w = 0.25$.

Заключение. Оптимальные управления, полученные в работах [6, 8], по форме совпадают с управлениями, полученными в данной работе.

Значения теплового потока, полученные в задачах 1–3, оказались близкими к значению, полученному методом конечных разностей; при этом следует отметить близость тепловых потоков в задаче 1 и в работе [8]. Следовательно, в инженерных рас-

четах можно ограничиться рассмотрением математической модели, приведенной в задаче 1, которая существенно менее трудоемка нежели при использовании метода конечных разностей. Что касается результатов работы [6], то они дают завышенные значения минимизируемого функционала.

Отметим, что современное состояние исследований по рассматриваемой тематике, а также актуальность, новизна и практическая значимость, полученных ранее результатов, подробно рассмотрены в работе [2].

Подчеркнем, что новизна работы заключается в разработке менее трудоемкого (по сравнению с работами [6, 7, 11]) алгоритма решения вариационной задачи. Полученные результаты могут представить интерес при расчете систем активной тепловой защиты вдувом поверхностей в высокоскоростных потоках газа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимальные задачи газодинамики // Изв. вузов. Авиац. техн. 1963. № 2. С. 11–21.
2. *Гараев К.Г., Мухаметзянов И.Р.* К теории оптимально управляемого пограничного слоя на проницаемых поверхностях при различных режимах течения // Изв. вузов. Авиац. техн. 2020. № 3. С. 42–52.
3. *Гараев К.Г., Мухаметзянов И.Р.* Оптимально управляемые турбулентные пограничные слои в сверхзвуковых потоках газа // Матем. моделир. 2023. Т. 35. № 7. С. 28–40.
4. *Гараев К.Г., Мухаметзянов И.Р.* К задаче оптимального управления турбулентным пограничным слоем на проницаемой поверхности в сверхзвуковом потоке газа // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 4. С. 136–145.
5. *Мухаметзянов И.Р.* Оптимальное управление турбулентным пограничным слоем на проницаемой цилиндрической поверхности в сверхзвуковом потоке газа // Изв. вузов. Авиац. техн. 2020. № 1. С. 64–70.
6. *Гараев К.Г.* Группы Ли и теория Нётер в проблеме управления с приложениями к оптимальным задачам пограничного слоя. Казань: Изд. Казан. гос. техн. ун-та, 1994. 240 с.
7. *Гараев К.Г., Кузнецов В.К.* Об одной инвариантной задаче ламинарного пограничного слоя // ПММ. 2011. № 4. С. 572–580.
8. *Гараев К.Г., Кузнецов В.К.* Оптимально управляемые ламинарные пограничные слои в сверхзвуковых потоках газа. Казань: Изд. Казан. гос. техн. ун-та, 2013. 164 с.
9. *Дородницын А.А.* Ламинарный пограничный слой в сжимаемом газе. М.: Оборонгиз, 1957. С. 140–173.
10. *Лю Шень-Цюань.* Расчет ламинарного пограничного слоя в сжимаемом газе при наличии отсоса или вдува // ЖВММФ. 1962. № 5. С. 868–883.
11. *Гараев К.Г.* Об оптимальном управлении тепломассообменом в ламинарном пограничном слое сжимаемого газа на проницаемых поверхностях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 3. С. 92–100.
12. *Павловский Ю.Н.* Численный расчет ламинарного пограничного слоя в сжимаемом газе // ЖВММФ. 1962. № 5. С. 884–901.

Problem of Optimal Control of a Laminar Boundary Layer on Permeable Cylindrical Surfaces in Supersonic Flows

I. R. Mukhametzyanov^{a,*}

^a*Vostok Branch, Tupolev Kazan National Research Technical University, Chistopol, Russia*

^{*}*e-mail: m.ilshat@mail.ru*

An approximate method for solving the boundary value problem for the equations of an optimally controlled laminar boundary layer on permeable cylindrical surfaces in high-speed gas flows is considered.

Keywords: supersonic flow, laminar boundary layer, optimal injection, Darcy's law, first integral

REFERENCES

1. *Sirazetdinov T.K.* Optimal problems of gas dynamics // *Rus. Aeron.*, 1963, no. 2, pp. 11–21.
2. *Garaev K.G., Mukhametzyanov I.R.* To the theory of an optimally controlled boundary layer on permeable surfaces at various flow modes // *Rus. Aeron.*, 2020, vol. 63, no. 3, pp. 413–424.
3. *Garaev K.G., Mukhametzyanov I.R.* Optimally controlled turbulent boundary layers in supersonic gas flows // *Math. Models&Comput. Simul.*, 2023, vol. 15, suppl. 1, pp. S18–S26.
4. *Garaev K.G., Mukhametzyanov I.R.* Problem of optimal control of the turbulent boundary layer on a permeable surface in supersonic gas flow // *Fluid Dyn.*, 2018, vol. 53, no. 4, pp. 573–581.
5. *Mukhametzyanov I.R.* Optimal control of a turbulent boundary layer on a permeable cylindrical surface in a supersonic gas flow // *Rus. Aeron.*, 2020, vol. 63, no. 1, pp. 67–74.
6. *Garaev K.G.* Lie Groups and Noether Theory in the Control Problem with Applications to Optimal Problems of Boundary Layer. Kazan: KSTU Pub., 1994. 240 p. (in Russian)
7. *Garaev K.G., Kuznetsov V.K.* An invariant variational problem of the laminar boundary layer // *JAMM*, 2011, vol. 75, no. 4, pp. 404–409.
8. *Garaev K.G., Kusnetsov V.K.* Optimally Controlled Laminar Boundary Layers in Supersonic Gas Flows. Kazan: KSTU Pub., 2013. 164 p. (in Russian)
9. *Dorodnitsin A.A.* Laminar Boundary Layer in a Compressible Gas. Moscow: Oborongiz, 1957. pp. 140–173.
10. *Lyu Shen-Tsyuan.* Calculation of the laminar boundary layer in a compressible gas in the presence of suction or blowing // *Comput. Math.&Mathem. Phys.*, 1963, vol. 2, no. 5, pp. 1000–1020.
11. *Garaev K.G.* Optimal control of heat and mass transfer in a laminar compressible-gas boundary layer on permeable surfaces // *Fluid Dyn.*, 1988, vol. 23, no. 3, pp. 399–406.
12. *Pavlovskii Yu.N.* The numerical calculation of the laminar boundary layer in a compressible gas // *Comput. Math.&Mathem. Phys.*, 1963, vol. 2, no. 5, pp. 1021–1042.

УДК 532.5

УПРАВЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТЬЮ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ЛАЗЕРНОЙ НАКАЧКОЙ В УЗКУЮ ЛОКАЛЬНУЮ ЗОНУ. ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННАЯ СТЕНКА

© 2024 г. Ю. Н. Григорьев^{1,*}, И. В. Ершов^{1,2,**}¹Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий,
Новосибирск, Россия²Новосибирский государственный аграрный университет,
Новосибирск, Россия

e-mail: grigor@ict.nsc.ru*, ivershov1969@gmail.com**

Поступила в редакцию 03.09.2024 г.

После доработки 01.10.2024 г.

Принята к публикации 01.10.2024 г.

На основе двухтемпературной системы уравнений одномодового колебательно возбужденного газа выполнено исследование влияния локального подвода колебательной энергии на устойчивость сверхзвукового пограничного слоя на пластине. Рассматривались условия полета в атмосфере на высоте $H = 15$ км с числом Маха $M = 4.5$. Показано, что источник с гауссовым профилем мощности малой дисперсии, расположенный вблизи пластины, повышает температуру на пластине. При локализации источника у верхней границы пограничного слоя происходит прогрев значительной области потока. Для двух положений локального источника рассчитаны нейтральные кривые двумерных временных возмущений для I и II мод Мэка, а также их инкременты нарастания. Данные по критическим числам Рейнольдса $Re_{\delta,cr}$ и амплитудам инкрементов сравнивались с аналогичными данными для совершенного газа в отсутствие источника. Показано, что источник вблизи пластины понижает устойчивость слоя, а в верхнем положении, наоборот, увеличивает устойчивость по сравнению с эталонным случаем. С использованием e^N -метода выполнена оценка смещения зоны ламинарно-турбулентного перехода под действием источника колебательной энергии. Для верхнего положения источника смещение начала зоны ламинарно-турбулентного перехода составило 35%. Результаты расчетов позволяют заключить, что локальный ввод колебательной энергии может стать действенным методом управления устойчивостью сверхзвукового пограничного слоя.

Ключевые слова: пограничный слой, устойчивость, управление, активные методы, источник, подвод энергии.

DOI: 10.31857/S0032823524060089 EDN: IGKNGN

1. Введение. Методы стабилизации и управления устойчивостью пограничных слоев составляют важный раздел современной аэродинамики, позволяя решать многочисленные практические задачи, такие как снижение сопротивления летательных аппаратов, увеличение дальности полета, исключение критических тепловых потоков и другие. Преимущество получили так называемые активные методы управления, в первую очередь, широко известные — отсос пограничного слоя и охлаждение обтекаемой поверхности [1]. В ряде случаев возможно использование вдува в погра-

ничный слой, в частности, инородного газа [2]. Для подавления неустойчивости поперечного течения (cross-flow) на скользящем крыле, воздействие на которую затруднено, перспективным представляется использование плазменных актуаторов с сенсорной системой [3].

Возможным методом управляющего воздействия является подвод тепловой энергии в пограничный слой. В работе [4] был выполнен асимптотический анализ устойчивости пограничного слоя молекулярного газа с возбуждением колебательной моды постоянным источником. Было показано, что в зависимости от характеристик потока и источника возможно как повышение, так и понижение критического числа Рейнольдса. К сожалению, работа основывалась на нефизическом понятии знакопеременной второй вязкости, что делает этот результат, по крайней мере, дискуссионным. В [5] имеется краткое обсуждение недостатков использованной в [4] модели.

С помощью источникового слагаемого, добавленного в уравнение энергии, в [6] изучалось влияние пламени, локализованного вблизи поверхности, на устойчивость сверхзвукового пограничного слоя. Было отмечено повышение устойчивости потока на сильно нагретой стенке при наличии источника тепла по сравнению с режимом без источника.

Влияние локального подвода тепловой энергии на устойчивость поперечного течения на стреловидном крыле рассматривалось в работе [7]. Получено, что по мере удаления источника от обтекаемой поверхности, скорость роста возмущений убывает, а начиная с некоторой высоты над пограничным слоем, источник оказывает стабилизирующее влияние. Было предположено, что конкурируют два фактора нагрева. С одной стороны, увеличивается скорость течения, что снижает устойчивость, а с другой стороны, нагрев уменьшает плотность и увеличивает вязкость газа, понижая эффективное число Рейнольдса, что делает течение более устойчивым. Удаленное от поверхности положение источника приводит к прогреву большего объема слоя, в результате чего превалирует второй фактор.

Как отмечалось в [7], положительный эффект, полученный в модельной задаче, трудно реализуем на практике из-за технологической сложности создания источника для непосредственного подвода тепла в узкой области. Проблема может быть решена сфокусированной лазерной накачкой колебательных мод подогреваемого газа.

В данной работе проблема управления устойчивостью сверхзвукового пограничного слоя исследуется на основе двухтемпературной модели колебательно возбужденного газа с локальным источником в уравнении колебательной энергии. Хотя в реальных условиях при лазерном нагреве часть энергии переходит непосредственно в поступательное и вращательное движение молекул, используемое упрощение является вполне приемлемым на начальном этапе.

2. Модель колебательно возбужденного газа. Рассматривается задача линейной устойчивости пограничного слоя на пластине при объемном подводе энергии в слой. Рассмотрение основывается на двухтемпературной системе уравнений одномодового колебательно возбужденного газа [8] с локализованным источником колебательной энергии I . Используемые в ней термодинамические переменные включают в себя вектор скорости потока $\mathbf{u} = (u, v)$, плотность газа ρ , статическое давление p , удельную внутреннюю энергию, связанную с квазиравновесными внутренними степенями свободы e_i , удельную колебательную энергию молекул e_{v1} , поступательную (статическую) температуру T , колебательную температуру T_v . Процессы переноса описываются с помощью коэффициентов сдвиговой вязкости $\eta(T)$ и теплопроводности $\lambda(T)$.

Удельная поступательно-вращательная энергия e_i определяется как

$$e_i(T) = (c_v^{\text{tr}} + c_v^{\text{rot}})T = c_v T,$$

где

$$c_v^{\text{tr}} = \frac{3}{2} \frac{R}{M}, \quad c_v^{\text{rot}} = \frac{R}{M}$$

теплоемкости при постоянном объеме, связанные, соответственно, с квазиравновесными поступательными и вращательными степенями свободы молекул газа, M — молярная масса газа и R — универсальная газовая постоянная. Все физические постоянные в статье берутся для воздуха, молярная масса которого принимается равной $M = 0.029$ кг/моль.

Удельная колебательная энергия e_v рассчитывается в рамках модели гармонического осциллятора для двухатомных молекул [9]:

$$e_v(T_v) = \frac{R\theta_v}{M} \left[\exp\left(\frac{\theta_v}{T_v}\right) - 1 \right]^{-1},$$

где характеристическая температура $\theta_v = 3395$ К.

Сдвиговая вязкость задается посредством закона Сазерленда [10]

$$\eta(T) = \eta_\infty \left[\frac{T_\infty + T_0}{T + T_0} \right] \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^{3/2}$$

Здесь эмпирическая постоянная Сазерленда $T_0 = 111$ К.

Коэффициент теплопроводности $\lambda(T)$ и коэффициент переноса энергии колебательных квантов λ_v выражаются через коэффициент сдвиговой вязкости с помощью приближенных соотношений Эйкена [11]

$$\lambda = \eta \left(\frac{5}{2} c_v^{\text{tr}} + \frac{6}{5} c_v^{\text{rot}} \right), \quad \lambda_v = \frac{6}{5} \eta c_v^{\text{vib}}$$

Время колебательной релаксации $\tau_v = \tau_v(p, T)$ вычисляется по формуле Милликена—Уайта [12]:

$$\tau_v(p, T) = Cp^{-1} \exp(AT^{-1/3}),$$

где $C = 1.69 \cdot 10^{-6}$ Па·с, $A = 220$ К^{1/3}.

Для обезразмеривания системы выбраны: текущее расстояние вдоль пластины $x = L$, величины невозмущенного течения вне пограничного слоя: U_∞ — скорость, ρ_∞ — плотность, T_∞ — температура, η_∞ — сдвиговая вязкость, λ_∞ — теплопроводность, τ_∞ — время колебательной релаксации. Используются также комбинированные величины: L/U_∞ — время, $\rho_\infty U_\infty^2$ — давление, $T_\infty R/M$ — энергия, $p_\infty U_\infty/L$ — скорость подвода энергии. Введена декартова система координат (x, y) , начало которой совпадает с носиком пластины, координата x ориентирована по направлению невозмущенного потока, координата y соответственно направлена в поток по нормали к пластине. В безразмерных переменных система уравнений плоского течения колебательно возбужденного газа имеет вид.

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.1)$$

Уравнения импульсов

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \eta \left(\mu_b + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \eta}{\partial x} \left(\left(\mu_b + \frac{4}{3} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\mu_b - \frac{2}{3} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \eta \left(\mu_b + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \eta}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial y} \left(\left(\mu_b - \frac{2}{3} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\mu_b + \frac{4}{3} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \quad (2.3)$$

Уравнение для поступательно-вращательной энергии молекул

$$\rho \left(\frac{\partial e_t}{\partial t} + u \frac{\partial e_t}{\partial x} + v \frac{\partial e_t}{\partial y} \right) + \gamma M^2 p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{7}{2 \text{Pr Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] + \\ + \frac{\gamma M^2 \eta}{\text{Re}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\mu_b - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] - \\ - \text{Da}_{VT} \rho \left(\frac{e_v(T) - e_v(T_v)}{\tau_v} \right) \quad (2.4)$$

Уравнение для колебательной энергии

$$\rho \left(\frac{\partial e_v}{\partial t} + u \frac{\partial e_v}{\partial x} + v \frac{\partial e_v}{\partial y} \right) = \frac{6\eta}{5\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 e_v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_v}{\partial y^2} \right) + \frac{6}{5\text{Re}} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial e_v}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial e_v}{\partial y} \right) + \\ + \text{Da}_{VT} \rho \left(\frac{e_v(T) - e_v(T_v)}{\tau_v} \right) + I \quad (2.5)$$

Уравнение состояния

$$\gamma M^2 p = \rho T \quad (2.6)$$

В систему уравнений (2.1)–(2.6) входят безразмерные параметры подобия – число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{\rho_\infty U_\infty L}{\eta_\infty},$$

числа Прандтля Pr и Маха M

$$\text{Pr} = \frac{\eta_\infty c_p}{\lambda_\infty}, \quad M = \frac{U_\infty}{\sqrt{\gamma R T_\infty / M}}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v},$$

число Дамкелера VT – энергообмена

$$\text{Da}_{VT} = \frac{L}{U_\infty \tau_\infty},$$

параметр $\mu_b = \eta_{b\infty} / \eta_\infty$ – коэффициент объемной вязкости.

3. Локально автомодельные уравнения пограничного слоя. В качестве стационарного решения в задаче устойчивости используется локально автомодельное решение [13] уравнений стационарного пограничного слоя в приближении Прандтля. Переход к ним от системы (2.1)–(2.6) осуществляется стандартным образом [14, 15]. Вводится «погранслоное» масштабирование поперечных координаты и скорости

$$\tilde{y} = y \sqrt{\text{Re}}, \quad \tilde{v} = v \sqrt{\text{Re}}$$

Используя разложение перенормированной системы по малому параметру $\text{Re}^{-1/2}$

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \mathbf{f}^{(1)} + \frac{1}{\text{Re}} \mathbf{f}^{(2)} + \dots,$$

где \mathbf{f} – вектор текущих параметров газа, в нулевом приближении имеем классическую систему уравнений пограничного слоя Прандтля.

В локально автомодельном приближении система уравнений пограничного слоя имеет вид:

$$(\rho\eta\varphi'')' + \varphi\varphi'' = 0 \quad (3.1)$$

$$(\rho\eta T')' + \text{Pr}\varphi T' + \frac{\text{Pr}M^2}{10}\rho\eta\varphi''^2 - \frac{8}{7}\text{Da}_{VT}\text{Pr}\xi \frac{[e_v(T) - e_v(T_v)]}{\tau_v} = 0 \quad (3.2)$$

$$(\rho\eta e'_v)' + \frac{5}{6}\varphi e'_v + \frac{10}{3}\text{Da}_{VT}\xi \frac{[e_v(T) - e_v(T_v)]}{\tau_v} + \frac{10}{3}\xi \frac{I}{\rho} = 0 \quad (3.3)$$

Локально автомодельные уравнения (2.1)–(2.3) замыкаются уравнением состояния

$$\rho T = 1, \quad p = 1 / (\gamma M^2) \quad (3.4)$$

Здесь независимые переменные Дородницына – Хоуарда определены как

$$\xi(x) = x, \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \int_0^y \rho(x, z) dz, \quad (3.5)$$

вспомогательная функция

$$\varphi(\zeta) = 2 \int_0^\zeta u(z) dz$$

связана с функцией тока [14]. Штрих в уравнениях (3.1)–(3.3) обозначает дифференцирование по ξ .

На нижней и верхней границах пограничного слоя при $\xi = 0$ и при $\xi \rightarrow \infty$ соответственно ставились граничные условия:

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = T'(0) = T'_v(0) = 0, \quad \varphi'(\infty) = 2, \quad T(\infty) = T_v(\infty) = 1$$

Обратный пересчет локально автомодельных профилей термогидродинамических переменных к исходной поперечной координате осуществляется по формуле

$$y = 2\sqrt{\xi} \int_0^\zeta \frac{dz}{\rho(z)} \quad (3.6)$$

4. Линеаризованные уравнения для амплитуд возмущений. Для линеаризации системы уравнений (2.1)–(2.6) мгновенные значения гидродинамических переменных представлялись в виде

$$u = U_s(y) + u', \quad v = v', \quad \rho = \rho_s(y) + \rho'$$

$$T = T_s(y) + T', \quad T_v = T_{vs}(y) + T'_v, \quad p = p_s + p',$$

где индексом “s” обозначены значения гидродинамических переменных, относящиеся к стационарному решению уравнений пограничного слоя в локально автомодельном приближении, а штрих обозначает возмущения гидродинамических пере-

менных. Возмущения сложных функций вычислялись как полные дифференциалы по возмущениям газодинамических переменных, в которых производные брались на стационарном решении. Например, возмущения коэффициентов переноса представляются как

$$\eta = \eta_s + \eta' = \eta_s + \eta_{Ts} T', \quad \lambda = \lambda_s + \lambda' = \lambda_s + \lambda_{Ts} T',$$

где

$$\eta_{Ts} = \left. \frac{\partial \eta}{\partial T} \right|_{T=T_s}, \quad \lambda_{Ts} = \left. \frac{\partial \lambda}{\partial T} \right|_{T=T_s}$$

Возмущение источника колебательной энергии не рассматривалось.

На основе линеаризованной системы, записанной в переменных возмущений $q' = (u', v', \rho', T', T'_s, p')$, рассматривалась устойчивость двумерных возмущений типа бегущих плоских волн вида

$$\mathbf{q}'(x, y, t) = \mathbf{q}(y) \exp[i(\alpha x - \omega t)], \quad \mathbf{q}(y) = (u, \alpha v, \rho, \theta, \theta_v, p) \quad (4.1)$$

В общем случае $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ – комплексное волновое число вдоль переменной x и $\omega = \omega_r + i\omega_i$ – комплексная частота, i – мнимая единица.

Подстановка (4.1) в линеаризованную систему дает систему уравнений для амплитуд возмущений:

$$D\rho + \alpha\rho_s\sigma + \alpha v \frac{d\rho_s}{dy} = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\eta_s}{\text{Re}} \Delta_y u - \rho_s D u - \alpha v \rho_s \frac{dU_s}{dy} - i\alpha\varepsilon + \frac{1}{\text{Re}} \frac{d\eta_s}{dy} \left(\frac{du}{dy} + i\alpha^2 v \right) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{d}{dy} \left(\eta \frac{dU_s}{dy} \right) = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{\alpha\eta_s}{\text{Re}} \Delta_y v - \alpha\rho_s D v - \frac{d\varepsilon}{dy} + \frac{\alpha}{\text{Re}} \left(\frac{dv}{dy} - iu \right) \frac{d\eta_s}{dy} + \frac{i\alpha\eta}{\text{Re}} \frac{dU_s}{dy} = 0 \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{7\lambda_s}{2\text{PrRe}} \Delta_y \theta - \rho_s D \theta - \alpha v \rho_s \frac{de_s}{dy} - \alpha\gamma M^2 p_s \sigma + \\ & + \frac{2\gamma M^2 \eta_s}{\text{Re}} \left(\frac{du}{dy} + i\alpha^2 v \right) \frac{dU_s}{dy} + \frac{\gamma M^2 \eta}{\text{Re}} \left(\frac{dU_s}{dy} \right)^2 + \frac{7}{2\text{PrRe}} \left[\frac{d\lambda_s}{dy} \frac{d\theta}{dy} + \frac{d}{dy} \left(\lambda \frac{dT_s}{dy} \right) \right] + \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} & - \text{Da}_{VT} \rho_s \left(\frac{e_v(\theta) - e_v(\theta_v)}{\tau_{vs}} \right) - \text{Da}_{VT} \rho \left(\frac{e_{vs}(T_s) - e_{vs}(T_{vs})}{\tau_{vs}} \right) = 0 \\ & \frac{6\eta_s}{5\text{Re}} \Delta_y e_v - \rho_s D e_v - \alpha v \rho_s \frac{de_{vs}}{dy} + \frac{6}{5\text{Re}} \frac{d\eta_s}{dy} \frac{de_v}{dy} + \frac{6}{5\text{Re}} \frac{d}{dy} \left(\eta \frac{de_{vs}}{dy} \right) + \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} & + \text{Da}_{VT} \rho_s \left[\frac{e_v(\theta) - e_v(\theta_v)}{\tau_{vs}} \right] + \text{Da}_{VT} \rho \left[\frac{e_{vs}(T_s) - e_{vs}(T_{vs})}{\tau_{vs}} \right] = 0 \\ & p = p_s \left[\frac{\rho}{\rho_s} + \frac{\theta}{T_s} \right], \quad p_s = \frac{\rho_s T_s}{\gamma M^2}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где

$$\Delta_y = \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2, \quad D = i\alpha \left(U_s - \frac{\omega}{\alpha} \right), \quad \sigma = \frac{dv}{dy} + iu, \quad \varepsilon = p - \frac{\alpha\eta_s}{\text{Re}} \left(\mu_b + \frac{1}{3} \right) \sigma$$

$$\eta = \eta_{Ts} \theta, \quad \lambda = \lambda_{Ts} \theta, \quad e_t = e_{t,Ts} \theta, \quad e_v = e_{v,Ts} \theta_v$$

Принималось, что при $y = 0$ и $y \rightarrow \infty$ все возмущения обращаются в нуль.

5. Результаты расчетов. Для оценки возможности управления устойчивостью сверхзвукового пограничного слоя выбран режим полета в невозмущенной атмосфере на высоте $H = 15$ км при числе Маха набегающего потока $M = U_\infty/c_\infty = 4.5$. Значения скорости звука c_∞ , вязкости η_∞ , температуры T_∞ и плотности ρ_∞ атмосферы на высоте $H = 15$ км взяты из [15,16]: $c_\infty = 295.07$ м/с, $\eta_\infty = 14.45$ мкПа·с, $T_\infty = 216.65$ К, $\rho_\infty = 0.1948$ кг/м³. Скорость потока $U_\infty = 1327.82$ м/с.

5.1. Расчеты стационарного течения. В локально автомодельных переменных (3.5), в которых рассчитывались профили параметров стационарного течения, функция источника задавалась с помощью распределения Гаусса

$$I = I_0 \exp \left[-\frac{(\zeta - \zeta_0)^2}{\Delta^2} \right], \quad (5.1)$$

где I_0 – амплитуда мощности источника, ζ_0 – координата центра источника энергии и Δ – его характерная ширина. Выбор параметров источника исходил из того, чтобы комплекс $I_0 \Delta$, характеризующий вкладываемую мощность, значительно превышал среднюю по слою объемную плотность колебательной энергии. Вместе с тем требовалась достаточная локализация подвода энергии по отношению к толщине слоя, так чтобы $\Delta \ll \delta$. Сравнивалось два положения источника – вблизи верхней границы слоя ζ_{0h} и вблизи пластины ζ_{0p} . На основе оценок и предварительных расчетов были выбраны следующие параметры источника в форме (5.1) – $\zeta_{0p} = 1$, $I_{0p} = 0.5$ и $\zeta_{0h} = 7$, $I_{0h} = 1$. В обоих случаях было принято $\Delta = 0.2$.

Краткое описание численного алгоритма для системы (3.1)–(3.4) дано в работе [18]. Там же было показано, что численные решения системы полных уравнений колебательно возбужденного сверхзвукового пограничного слоя для распространенных граничных условий на больших расстояниях от носика пластины выходят на локально автомодельные решения системы (3.1)–(3.4), чем обосновывается использование последних в задачах устойчивости.

Результаты расчетов профилей скорости и температур стационарного течения приведены на рис. 1. Здесь и на остальных рисунках в статье сплошными линиями

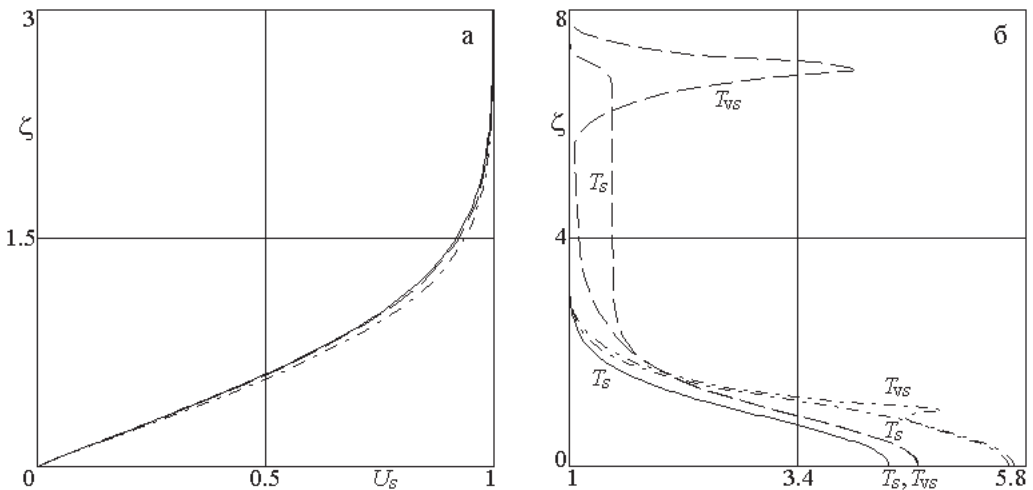


Рис. 1. Профили газодинамических переменных стационарного течения

показаны результаты для совершенного газа, штрихпунктирными — для колебательно возбужденного газа вблизи пластины при $\xi_{0p} = 1$, $I_{0p} = 0.5$ и штриховыми — для колебательно возбужденного газа с источником в верхней части пограничного слоя при $\xi_{0h} = 7$, $I_{0h} = 1$.

Рис. 1 подтверждает ранее установленный факт, что даже сильная термическая [8] и химическая [15] неравновесности практически не влияют на профиль скорости на пластине. Из графиков на рис. 1 видно, что источник при $\xi_{0p} = 1$ сильно увеличивает колебательную T_{vs} и статическую T_s температуры у пластины, но слабо влияет на статическую температуру в средней и верхней частях слоя. В то же время источник при $\xi_{0h} = 7$ дает значительное повышение статической температуры в большей части объема слоя. Это согласуется с отмеченным в [7] эффектом прогрева большей части слоя при положении источника вблизи верхней границы.

5.2. *Характеристики устойчивости в зависимости от положения источника.* Для оценки влияния локального подвода энергии на устойчивость пограничного слоя рассчитывались кривые нейтральной устойчивости и кривые инкрементов роста временных возмущений для двух положений источника, которые сравнивались с соответствующими данными для совершенного газа. Для получения кривых нейтральной устойчивости для системы (4.2)–(4.7) методом коллокаций решались спектральные задачи, в которых собственными значениями являлись вещественные значения частоты ω_r , а числа Рейнольдса $Re_\delta = Re^{-1/2}$ и вещественные части волновых чисел α_r служили параметрами. Подробное описание алгоритма расчета представлено в [8]. Рассчитывались наиболее неустойчивые I и II моды Мэка [19]. Полученные нейтральные кривые даны на рис. 2. Видно, что источник вблизи пластины понижает устойчивость слоя, а в верхнем положении, наоборот, увеличивает устойчивость по сравнению со случаем отсутствия источника. Соответствующие значения критических чисел Рейнольдса $Re_{\delta,cr}$ и частот $\omega_{r,cr}$ приведены в табл. 1. Можно получить, что для наиболее неустойчивой моды II абсолютные относительные смещения $Re_{\delta,cr}$ составляют для нижнего и верхнего положений источника соответственно $\Delta_p Re_{\delta,cr} = 11\%$ и $\Delta_h Re_{\delta,cr} = 35\%$.

На рис. 3 приведены кривые $\omega_i(\alpha)$ инкрементов временных возмущений, полученные для областей неустойчивости мод I и II для чисел Рейнольдса $Re_\delta = 715$ и 830

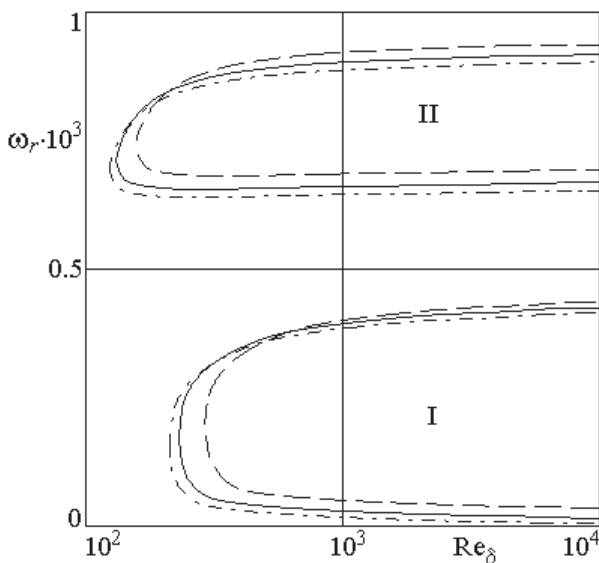
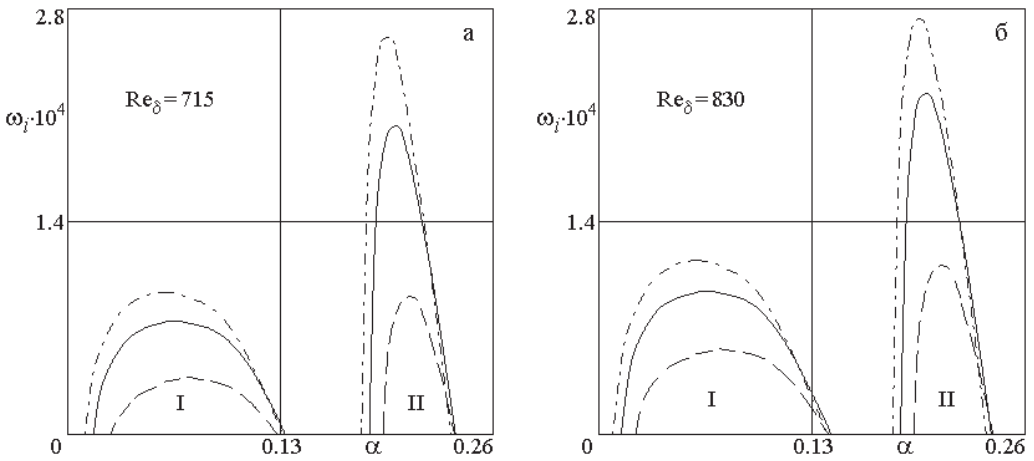


Рис. 2. Кривые нейтральной устойчивости временных возмущений двумерных мод I и II

Таблица 1. Критические числа Рейнольдса $Re_{\delta,cr}$ и соответствующие частоты $\omega_{r,cr}$

I_0	$Re_{\delta,cr}$	$\omega_{r,cr} \cdot 10^4$
Мода I		
0	462	2.031
0.5	427	1.831
1	571	2.341
Мода II		
0	221	6.253
0.5	196	6.109
1	299	6.528

**Рис. 3.** Инкременты роста двумерных мод I и II

соответственно. Можно констатировать, что источник вблизи поверхности приводит к относительно небольшому возрастанию в пределах 20% максимальных значений инкрементов обеих мод. В то время как при верхнем положении источника максимумы инкрементов понижаются более, чем вдвое.

5.3. Влияние источника на зону ламинарно-турбулентного перехода. С практической точки зрения интерес представляет оценка смещения зоны ламинарно-турбулентного перехода (ЛТП) под действием источника колебательной энергии. В расчетах использовался известный e^N -метод [20], основанный на представлении об экспоненциальном нарастании пространственных возмущений до определенного уровня амплитуды начала ЛТП. Подробное изложение численного алгоритма дано в [13]. Диапазон частот пространственных возмущений принимался как разность предельных ординат областей неустойчивости временных возмущений на кривых рис. 2 для моды II. Затем для множества выбранных точек на прямых $\omega_r = \text{const}$ из решения спектральных задач относительно $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ находились инкременты (декременты) $-\alpha_i$ пространственных возмущений. На полученном дискретном наборе рассчитывались кривые N -факторов

$$N_{\omega}(Re_{\delta(x)}) = -2 \int_{Re_{\delta(x0)}}^{Re_{\delta(x)}} \alpha_i^* dRe_{\delta(x)}, \quad \alpha_i^* = \alpha_i \sqrt{\frac{x\eta_{\infty}}{\rho_{\infty} U_{\infty}}} \quad (5.2)$$

по квадратурным формулам для интегралов вида (5.2), рассматриваемых как функция верхнего предела, который наращивался до тех пор, пока монотонное возрастание квадратуры не сменялось на убывание. Для полученного семейства кривых N -факторов на плоскости (Re_x, N) строилась огибающая, точка пересечения которой с заданным значением фактора перехода $N = N_T$ определяла координату Re_{xT} начала зоны ЛТП.

Результаты расчетов кривых N -факторов приведены на рис. 4. Приведены огибающие семейств N -факторов в каждом из рассматриваемых случаев: для совершенного газа, для колебательно возбужденного газа с источником вблизи пластины при $\xi_{0p} = 1$, $I_{0p} = 0.5$, для колебательно возбужденного газа с источником в верхней части пограничного слоя при $\xi_{0h} = 7$, $I_{0h} = 1$.

Выбрано значение $N_T = 8$, которое используется для течений с низким уровнем внешних возмущений. На рис. 4 прямая $N = 8$ нанесена пунктиром. Точки a , b и c определяют начало зоны ЛТП и показывают значения чисел Re_{xT} для совершенного газа и двух положений источника. Соответствующие числовые значения Re_{xT} приведены в табл. 2. Как следует из данных табл. 2, абсолютные отклонения по отношению к эталонному случаю совершенного газа составляют для нижнего положения источника $\Delta \text{Re}_{xT} = 11.1\%$, а для верхнего — $\Delta \text{Re}_{xT} = 35.3\%$. Полученные значения практически совпадают с соответствующими величинами для критических чисел Рейнольдса на нейтральных кривых рис. 2. Это позволяет заключить, что локальный ввод колебательной энергии может служить действенным способом управления устойчивостью сверхзвукового пограничного слоя.

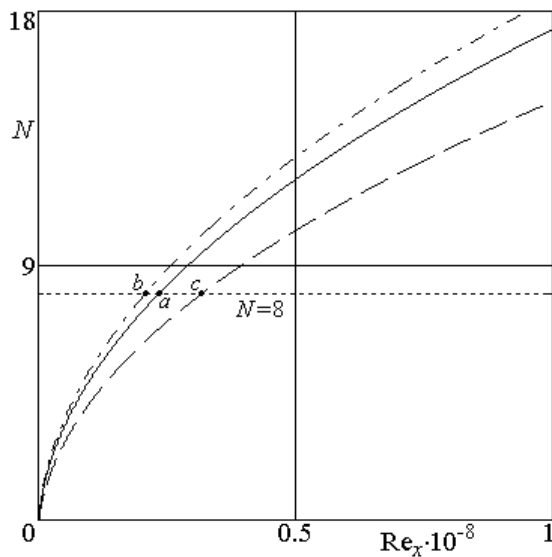


Рис. 4. Кривые N -факторов и положение ЛТП двумерной моды II

Таблица 2. Параметры начала зоны ЛТП

I_0	$\text{Re}_{xT} \cdot 10^{-7}$	$\omega_{IT} \cdot 10^4$
0	2.381	6.125
0.5	2.115 (11.1%)	6.488
1	3.223 (35.3%)	5.523

Характер поведения графиков статической температуры на рис. 1 позволяет дать качественное объяснение влияния положения источника на устойчивость пограничного слоя по аналогии с данной в [1] трактовкой связи устойчивости с нагревом обтекаемой поверхности. Полученное для нижнего положения источника повышение температуры у пластины дает дополнительный нагрев, приводящий к уменьшению устойчивости. В то же время значительный прогрев основного объема слоя при верхнем положении источника увеличивает вязкость и уменьшает плотность в потоке, уменьшая эффективное число Рейнольдса, а также создает эффект относительного «понижения» температуры стенки. В связи с этим устойчивость пограничного слоя возрастает. Этот результат определяется мощностью и геометрией источника, его положением относительно пластины, температурой стенки и другими факторами, роль которых предстоит выяснить при дальнейшем исследовании.

Заключение. В рамках двухтемпературной модели одномодового колебательно возбужденного газа исследовано влияние локального подвода колебательной энергии на устойчивость сверхзвукового пограничного слоя на пластине. Рассматривались условия полета в невозмущенной атмосфере на высоте $H = 15$ км с числом Маха $M = 4.5$. Показано, что источник с гауссовым профилем мощности малой дисперсии, расположенный вблизи пластины, повышает температуру на пластине. При локализации источника у верхней границы пограничного слоя происходит прогрев значительной области потока. Для двух положений локального источника рассчитаны нейтральные кривые двумерных временных возмущений для I и II мод Мэка, а также их инкременты нарастания. Данные по критическим числам Рейнольдса $Re_{\delta,cr}$ и амплитудам инкрементов сравнивались с аналогичными данными для совершенного газа в отсутствие источника. Получено, что источник вблизи пластины понижает устойчивость слоя, а в верхнем положении, наоборот, увеличивает устойчивость по сравнению с эталонным случаем. В частности, для наиболее неустойчивой моды II абсолютные относительные смещения $Re_{\delta,cr}$ составили для нижнего и верхнего положений источника соответственно $\Delta_p Re_{\delta,cr} = 11\%$ и $\Delta_h Re_{\delta,cr} = 35\%$.

С использованием e^N -метода выполнена оценка смещения зоны ламинарно–турбулентного перехода под действием источника колебательной энергии. Полученные абсолютные отклонения чисел Рейнольдса перехода по отношению к эталонному случаю отсутствия источника практически совпали с соответствующими отклонениями критических чисел Рейнольдса $Re_{\delta,cr}$.

В качестве объяснения механизма воздействия источника предположено, что понижение устойчивости при подводе энергии вблизи пластины вызвано повышением ее температуры. При верхнем положении источника значительный прогрев основного объема слоя увеличивает вязкость и уменьшает плотность в потоке, уменьшая эффективное число Рейнольдса, что приводит к повышению устойчивости пограничного слоя.

Результаты расчетов позволяют заключить, что локальный ввод колебательной энергии может стать действенным методом управления устойчивостью сверхзвукового пограничного слоя.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00027, <https://rscf.ru/project/23-11-00027/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
2. Гапонов С.А., Ермолаев Ю.Г., Зубков Н.Н. и др. Исследование влияния вдува тяжелого газа в сверхзвуковой пограничный слой на его ламинарно–турбулентный переход // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 6. С. 61–69.

3. *Abdullaev A, Kotvitskii A, Moralev I, Ustinov M.* On the possibility of cross-flow vortex cancellation by plasma actuators // *Aerospace*. 2023. V. 10. № 5. P. 469.
4. *Молевич Н.Е.* Асимптотический анализ устойчивости плоскопараллельного пограничного слоя сжимаемого релаксирующего газа // *Изв. РАН. МЖГ*. 1999. № 5. С. 82–88
5. *Григорьев Ю.Н., Ершов И.В.* Асимптотическая оценка устойчивости сверхзвукового пограничного слоя в колебательно возбужденном газе на пластине // *ПММ*. 2019. Т. 83. Вып. 5–6. С. 749–769.
6. *Гапонов С.А.* Устойчивость сверхзвукового пограничного слоя при подводе тепла в его узкую полосу // *Теплофиз. и аэромех.* 2021. Т. 28. № 3. С. 351–360.
7. *Мануйлович С.В., Устинов М.В.* Влияние подвода тепла на устойчивость поперечного течения в пространственном пограничном слое // *Изв. РАН. МЖГ*. 2014. № 5. С. 45–51.
8. *Григорьев Ю.Н., Ершов И.В.* Линейная устойчивость сверхзвукового пограничного слоя релаксирующего газа на пластине // *Изв. РАН. МЖГ*. 2019. № 3. С. 3–15.
9. *Vincenti W.G., Kruger C.H.* Introduction to Physical Gas Dynamics. Malabar: Krieger, 1986. 538 p.
10. *Алемасов В.Е., Дрегалин А.Ф., Тишин А.П. и др.* Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания. Т. III. М.: ВИНТИ АН СССР, 1973. 624 с.
11. *Ферцигер Дж., Канер Г.К.* Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 555 с.
12. *Monchik L, Yun K.S., Mason E.A.* Relaxation effects in transport properties of a sough spheres // *J. Chem. Phys.* 1963. V. 38. P. 1282–1287.
13. *Григорьев Ю.Н., Ершов И.В.* Влияние колебательного возбуждения газа на положение зоны ламинарно-турбулентного перехода на пластине // *ПМТФ*. 2021. Т. 62. № 1. С. 14–21.
14. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.;Л.: ГИТТЛ, 1950. 676 с.
15. *Григорьев Ю.Н., Горобчук А.Г., Ершов И.В.* Модель пограничного слоя колебательно-возбужденного диссоциирующего газа // *Теплофиз. и аэромех.* 2021. Т. 28. № 5. С. 667–689.
16. *Таблицы физических величин: Справочник / под ред. Кикоина И.К.* М.: Атомиздат, 1976. 1008 с.
17. *Енохович А.С.* Справочник по физике. М.: Просвещение, 1990. 384 с.
18. *Григорьев Ю.Н., Горобчук А.Г., Ершов И.В.* Расчеты сверхзвукового пограничного слоя в полной и локально автомодельной постановках // *Вычисл. технол.* 2020. Т. 25. № 2. С. 50–62.
19. *Mack L.M.* Boundary Layer Stability Theory. JPL Technical Rep., Document 900–277. Pasadena: California Inst. Technology, 1969. 272 p.
20. *Mack L.M.* A numerical method for the prediction of high-speed boundary-layer transition using linear theory // *Aerodyn. Anal. Requiring Advanced Comput. Pt.I.* Washington: NASA, 1975. P. 101–123.

Stability Control of the Supersonic Boundary Layer by Laser Pumping into a Narrow Local Area. Heat-Insulated Wall

Yu. N. Grigoryev^{a, #}, I. V. Ershov^{a, b, ##}

^a*Federal Research Center for Information and Computational Technologies, Novosibirsk, Russia*

^b*Novosibirsk State Agrarian University, Novosibirsk, Russia*

e-mail: grigor@ict.nsc.ru[#], ivershov1969@gmail.com^{##}

Effect of local supply of vibrational energy on the stability of a supersonic boundary layer on a plate is studied on the base of two-temperature system of equations for a single-mode vibrationally excited gas. The flight conditions in the atmosphere at an altitude of $H = 15$ km with a Mach number $M = 4.5$ were considered. It is shown that a source with a Gaussian power low dispersion profile located near the plate increases the temperature on the plate. When the source is localized at the upper boundary of the boundary layer, a significant area of the flow is heated. For two positions of the local source, neutral curves of two-dimensional temporal disturbances for the I and II Mack modes, as well as their

increase increments, are calculated. Data on critical Reynolds numbers $Re_{\delta,cr}$ and increment amplitudes were compared with similar data for a perfect gas without a source. It is shown that the source near the plate reduces the stability of the layer, and in the upper position, on the contrary, increases the stability compared to the reference case. The displacement of the laminar-turbulent transition zone under the action of vibrational energy source was estimated using the e^N -method. For the upper position of the source, the shift of the beginning of the laminar-turbulent transition zone was 35%. The calculation results allow us to conclude that the local input of vibrational energy can become an effective method for controlling the stability of a supersonic boundary layer.

Keywords: boundary layer, stability, control, active methods, source, energy supply.

REFERENCES

1. *Schlichting H.* Boundary Layer Theory. N.Y.: McGraw-Hill, 1979. 817 p.
2. *Gaponov S.A., Ermolaev Yu.G., Zubkov N.N. et al.* Investigation of the effect of heavy gas injection into a supersonic boundary layer on laminar-turbulent transition // *Fluid Dyn.*, 2017, vol. 52, no. 6, pp. 769–776.
3. *Abdullaev A., Kotvitskii A., Moralev I., Ustinov M.* On the possibility of cross-flow vortex cancellation by plasma actuators // *Aerospace*, 2023, vol. 10, no. 5, p. 469.
4. *Molevich N.E.* Asymptotic analysis of the stability of a plane-parallel compressible relaxing boundary layer // *Fluid Dyn.*, 1999, vol. 34, no. 5, pp. 675–680.
5. *Grigoryev Yu.N., Ershov I.V.* Asymptotic estimate of stability of a supersonic boundary layer in a vibrationally excited gas on a plate // *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, no. 8, pp. 1020–1037.
6. *Gaponov S.A.* Stability of a supersonic boundary layer with heat supply to a narrow band of the layer // *Thermophys. Aeromech.*, 2021, vol. 28, no. 3, pp. 327–335.
7. *Manuilovich S.V., Ustinov M.V.* Heat addition effect on the instability of the crossflow in a three-dimensional boundary layer // *Fluid Dyn.*, 2014, vol. 49, no. 5, pp. 602–607.
8. *Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V.* Linear stability of the boundary layer of relaxing gas on a plate // *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, no. 3, pp. 295–307.
9. *Vincenti W.G., Kruger C.H.* Introduction to Physical Gas Dynamics. Malabar: Krieger, 1986. 538 p.
10. *Alemasov V.E., Dregalin A.F., Tishin A.P. et al.* Thermodynamic and Thermophysical Properties of Combustion Products. Vol. III. Moscow: VINITI AS of the USSR, 1973. 624 p. (in Russian)
11. *Ferziger J.H., Kaper H.G.* Mathematical Theory of Transport Processes in Gases. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1972. 550 p.
12. *Monchik L., Yun K.S., Mason E.A.* Relaxation effects in transport properties of a sough spheres // *J. Chem. Phys.*, 1963, vol. 38, pp. 1282–1287.
13. *Grigoryev Yu.N., Ershov I.V.* Influence of vibrational excitation of the gas on the position of the laminar-turbulent transition region on a flat plate // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 2021, vol. 62, no. 1, pp. 11–17.
14. *Loitsyanskii L.G.* Mechanics of Liquids and Gases. Oxford: Pergamon, 1966. 804 p.
15. *Grigoryev Yu.N., Gorobchuk A.G., Ershov I.V.* Model of the boundary layer of a vibrationally excited dissociating gas // *Thermophys. Aeromech.*, 2021, vol. 28, no. 5, pp. 635–647.
16. *Tables of Physical Quantities, Handbook / ed. by Kikoin I.K.* Moscow: Atomizdat, 1976. 1008 p. (in Russian)
17. *Enochovich A.S.* Handbook of Physics. Moscow: Education, 1990. 384 p.
18. *Grigoryev Y.N., Gorobchuk A.G., Ershov I.V.* Calculations of supersonic boundary layer in the full and locally self-similar formulations // *Comput. Technol.*, 2020, vol. 25, no. 2, pp. 50–62. (in Russian)
19. *Mack L.M.* Boundary Layer Stability Theory. JPL Technical Rep., Document 900–277. Pasadena: California Instit. Technol., 1969. 272 p.
20. *Mack L.M.* A numerical method for the prediction of high-speed boundary-layer transition using linear theory // *Aerodyn. Anal. Requiring Advanced Comput. Part I.* Washington: NASA, 1975. pp. 101–123.

УДК 517.958:533.7

МЕТОДЫ ГРУППОВОЙ КЛАССИФИКАЦИИ РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

© 2024 С. В. Хабиров^{1,*}¹Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия

*e-mail: habirov@anrb.ru

Поступила в редакцию 22.10.2024 г.

После доработки 01.11.2024 г.

Принята к публикации 01.11.2024 г.

Групповая классификация — основная задача группового анализа дифференциальных уравнений с произвольным элементом. Для уравнений идеальной газовой динамики со стационарным уравнением состояния задача решена методом перебора упрощений определяющих соотношений с помощью преобразований эквивалентности. Для уравнений состояния, зависящих от времени, перебор огромен и приходится использовать оптимальную систему подалгебр подалгебры, расширяющей ядро допускаемых алгебр. Комбинация обоих методов приводит к решению задачи групповой классификации релаксирующей газовой динамики.

Ключевые слова: газовая динамика, релаксирующее уравнение состояния, преобразования эквивалентности, определяющие соотношения, групповая классификация, оптимальная система подалгебр.

DOI: 10.31857/S0032823524060092 EDN: IGMBON

1. Введение. Групповой анализ дифференциальных уравнений газовой динамики со стационарным уравнением состояния (произвольный элемент) развит в наибольшей мере [1, 2]. Найдена группа преобразований, оставляющих инвариантной систему уравнений газовой динамики с произвольным уравнением состояния (ядро допускаемых групп). Найдена бесконечная псевдогруппа преобразований эквивалентности, не изменяющие вид системы уравнений газовой динамики, но меняющие лишь уравнение состояния [3]. С точностью до преобразований эквивалентности перечислены классы уравнений состояния, для которых допускаемая системой группа будет шире ядра (групповая классификация). В процессе вычисления алгебры Ли допускаемой группы [4], возникает линейное определяющее соотношение для функции, задающей уравнение состояния, с неопределенными коэффициентами. Некоторым коэффициентам можно придать явные значения с помощью преобразований эквивалентности. Перебор возможностей такого упрощения составляет метод групповой классификации.

Другой метод групповой классификации предложил Ю.А. Чиркунов [5]. Алгебра ядра допускаемых групп является идеалом для всех расширений. Дополнение алгебры ядра любого расширения является подалгеброй расширения. Эти подалгебры содержатся в алгебре преобразований эквивалентности. Для групповой классификации достаточно перечислить все подалгебры алгебры преобразований эквивалентности без ядра с точностью до внутренних автоморфизмов алгебры (оптимальная система подалгебр).

Для каждого расширения ядра построены оптимальные системы подалгебр. При этом можно указать цепочки вложенных друг в друга подалгебр с точностью до внутренних автоморфизмов [6]. Далее рассматривают подмодели, порождаемые подалгебрами: инвариантные, частично инвариантные и дифференциально инвариант-

ные [2, 7]. Подмодели подвергают групповому анализу с целью получить возможно большее количество точных решений. Вложенным подалгебрам соответствуют вложенные подмодели. Решения одних подмоделей будут решениями других при выборе согласованных инвариантов [8]. Цель группового анализа — получение возможно большего числа точных решений и их аналитическое исследование. Исчерпание всех возможностей далеко от завершения.

Основная задача группового анализа — групповая классификация. Имеется прямой функциональный метод решение этой задачи: нахождение преобразований, изменяющих только произвольный элемент. В работе [9] излагается общая теория групповой классификации прямого и алгебраических методов с приложением к нелинейным волновым уравнениям с двумя независимыми переменными. Прямой метод возможен для дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными, порядок уравнений должен быть небольшой. В этом случае дополнительно находят дискретные преобразования эквивалентности, не входящие в однопараметрические группы.

Обобщение классической газовой динамики дает уравнение состояния, зависящее от времени в силу реологии [10] или в результате энергетического усреднения физико-химических процессов в элементарном объеме многофазной среды [11]. Газовая динамика с уравнением состояния, зависящим от времени, задает движение многофазной среды в целом с измеренным изменением внутренней энергии в результате физико-химических превращений в среде при внутренним и (или) внешнем воздействии. Решение задачи групповой классификации релаксирующей газовой динамики приводит к бесконечной группе преобразований эквивалентности и сводится к изучению совместности двух определяющих соотношений для функции, задающей уравнение состояния, одно из которых нелинейно. Групповая классификация уравнений состояния по преобразованиям эквивалентности выполнена алгебраическим методом в работе [12]. Возникает множество возможностей упрощения переопределенной системы определяющих соотношений. Нелинейное уравнение определяющих соотношений преобразуется преобразованиями эквивалентности к более простому виду в четырех взаимно исключающихся случаях в зависимости от значений коэффициентов. Групповая классификация одного такого случая рассмотрена в работе [13] методом перебора возможных упрощений линейного определяющего соотношения. Другой случай рассмотрен в работе [14] с помощью комбинаций метода перебора упрощений определяющих соотношений и метода построения оптимальной системы подалгебр алгебры расширений ядра. В настоящей работе рассматриваются два оставшихся случая упрощения переопределенной системы определяющих соотношений, тем самым окончательно решается задача групповой классификации релаксирующей газовой динамики. Совершенствуются методы решения основной задачи группового анализа — групповой классификации дифференциальных уравнений с произвольным элементом.

2. Уравнения газовой динамики с релаксирующим уравнением состояния

Дифференциальные уравнения газовой динамики есть следствие законов сохранения массы, импульса и энергии [1]

$$V_t + \vec{u} \cdot \nabla V = V \nabla \cdot \vec{u} \quad (2.1)$$

$$\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + V \nabla p = 0 \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \varepsilon + V p \nabla \cdot \vec{u} = 0,$$

где V — удельный объем ($\rho = V^{-1}$ — плотность), \vec{u} — скорость частицы, ε — удельная внутренняя энергия, p — давление, $\nabla = \partial_{\vec{x}}$ — градиент. Уравнение состояния среды меняется со временем $\varepsilon = \varepsilon(t, V, S)$.

В частице выполняется термодинамическое тождество

$$TdS = d\varepsilon + pdV + \mu dt$$

Здесь S – энтропия, $T = e_s > 0$ – температура, $\mu = -e_t$ – мощность выделенной или поглощенной энергии, $p = -e_v$, d – дифференциал. Вычисляя дифференциал вдоль мировой линии частицы $D = \partial_t + \vec{u} \cdot \nabla$, получим уравнение для энтропии

$$e_s DS + e_t = 0 \quad (2.3)$$

Групповую классификацию проводим для замкнутой системы уравнений (2.1)–(2.3), где $\nabla p = -e_{vv} \nabla V - e_{vs} \nabla S$. Произвольный элемент системы задан уравнением состояния с условиями

$$\begin{aligned} e_t \neq 0, e_s \neq 0, e_{vv} \neq 0 \\ e_{x^j} = 0, e_{u^k} = 0; j, k = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где x^j, u^k – декартовы координаты векторов \vec{x}, \vec{u} . Преобразования эквивалентности разыскиваются по правилам работы [4].

Уравнения (2.1)–(2.4) и уравнения на функцию e , возникающие в процессе вычисления, должны быть инвариантными. Для произвольного уравнения состояния алгебра Ли преобразований эквивалентности задается базисными операторами [12]

$$\{X_i\} = \partial_{\vec{x}}, \{X_{3+i}\} = t\partial_{\vec{x}} + \partial_{\vec{u}}, \{X_{6+i}\} = \vec{x} \times \partial_{\vec{x}} + \vec{u} \times \partial_{\vec{u}}; i = 1, 2, 3$$

$$X_{10} = \partial_t \Rightarrow \Pi_1 : \tilde{t} = t + a, \tilde{e}(\tilde{t}, V, S) = e(t, V, S)$$

$$X_{11} = t\partial_t + \vec{x} \cdot \partial_{\vec{x}} \Rightarrow \Pi_2 : \tilde{t} = bt, \vec{\tilde{x}} = b\vec{x}, \tilde{e}(\tilde{t}, V, S) = e(t, V, S)$$

$$X_{12} = V : \partial_v \Rightarrow \Pi_3 : \tilde{V} = d_1 V, \tilde{e}(t, \tilde{V}, S) = e(t, V, S)$$

$$X_{13} = t\partial_t - \vec{u} \cdot \partial_{\vec{u}} - 2e\partial_e \Rightarrow \Pi_4 : \tilde{t} = ct, \vec{\tilde{u}} = c^{-1}\vec{u}, \tilde{e} = c^{-2}e$$

$$X_{14} = V\partial_e \Rightarrow \Pi_5 : \tilde{e} = Vb_1 + e; X_{15} = \partial_e \Rightarrow \Pi_6 : \tilde{e} = e + c_1$$

$$\langle \eta \rangle = \eta(t, S)\partial_S \Rightarrow \Pi : \tilde{S} = h(t, S)$$

Здесь $a, b \neq 0, c \neq 0, d_1, b_1, c_1$ – произвольные постоянные; $\eta(t, S), h(t, S)$ – произвольные функции.

Операторы $X_i; i = 1 \div 9$, образуют 9-мерную алгебру Ли \mathcal{L}_9 , которой соответствует допускаемая системой (2.1) – (2.3) группа преобразований с произвольным уравнением состояния (ядро допускаемых групп). Для специальных классов уравнений состояния преобразования эквивалентности меняются [12], как и допускаемая группа преобразований.

3. Определяющие соотношения групповой классификации

Координаты оператора алгебры Ли, допускаемой системой (2.1)–(2.3)

$$X = \xi^t \partial_t + \vec{\xi} \cdot \partial_{\vec{x}} + \vec{\eta} \cdot \partial_{\vec{u}} + \eta^V \partial_v + \eta^S \partial_S$$

зависят от переменных $t, \vec{x}, \vec{u}, V, S$. Продолжая оператор на производные \vec{x} [5], действуем оператором на каждое уравнение системы в силу этих уравнений. Получим условия инвариантности, которые содержат некоторые производные в качестве свободных параметров. Приравнявая нулю коэффициенты при свободных параметрах (расщепление), получим переопределенную систему уравнений для координат оператора χ . Интегрирование приводит к представлению для координат [13]

$$\xi^t = Nt^2 + Bt + B_0, \vec{\xi} = t(N\vec{x} + \vec{A}) + N_0\vec{x} + A_0 + \vec{\Omega} \times \vec{x} \quad (3.1)$$

$$\vec{\eta} = N\vec{x} + \vec{A} - \vec{u}(Nt + B - N_0) + \vec{\Omega} \times \vec{u}, \eta^V = V(3Nt + E), \eta^S = \eta(t, S),$$

где $N, B, B_0, \vec{A}, N_0, \vec{A}_0, \vec{\Omega}, E$ — произвольные постоянные, $\eta(t, S)$ — произвольная функция, и к двум определяющим соотношениям

$$\gamma_S e_t = e_S (\gamma_t + \beta V + N(2e + 3Ve_V)) \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} e_t (Nt^2 + Bt + B_0) + Ve_V (3Nt + E) + e_S \eta(t, S) = \\ = 2e(N_0 - B - Nt) - V\beta(t) - \gamma(t, S), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\gamma(t, S), \beta(t)$ — произвольные функции.

Если функция $e(t, V, S)$ произвольная, то из (3.2), (3.3) следует, что функции β, γ и все постоянные равны нулю. Представление (3.1) определяет допускаемую алгебру L_γ . Система (2.1)–(2.3) может допускать более широкую алгебру, если функция e удовлетворяет уравнениям типа (3.2) и (3.3) с некоторыми коэффициентами $\tilde{\gamma}(t, S), \tilde{\beta}(t), \tilde{N}, \tilde{N}_0, \tilde{B}, \tilde{B}_0, \tilde{E}$. В зависимости от коэффициентов уравнения типа (3.2) рассмотрим следующие случаи.

1°. $\tilde{\gamma}_S = 0, \tilde{N} \neq 0$. Уравнение типа (3.2) принимает специальный вид

$$3Ve_V + 2e = -\tilde{\beta}(t)V + \tilde{\gamma}(t)$$

Групповая классификация этого случая поведена в работе [13].

2°. $\tilde{\gamma}_S \neq 0, \tilde{N} = 0$. Преобразование эквивалентности Π преобразует уравнение типа (3.2) к виду

$$e_t = e_S \tilde{\beta}(t)V$$

Групповая классификация этого случая поведена в работе [14] методом построения оптимальной системы подалгебр алгебры расширения ядра.

3°. $\tilde{\gamma}_S \neq 0, \tilde{N} \neq 0$. Уравнения типа (3.2), (3.3) преобразованиями эквивалентности приводятся к переопределенной системе вида

$$e_t = e_S (\tilde{\beta} V + 2e + 3Ve_V) \quad (3.4)$$

$$e_t (t^2 + k) + Ve_V (3t + n) + e_S \tilde{\eta}(t, S) = 2e(m - t) - V\tilde{\beta}(t) - S, \quad (3.5)$$

где $\tilde{\beta}(t), \tilde{\eta}(t, S)$ — произвольные функции; k, n, m — произвольные постоянные.

4°. $\tilde{\gamma}_S = 0, \tilde{N} = 0 \Rightarrow \tilde{\gamma} = \circ, \tilde{\beta} = B_1$ — постоянные. Определяющее соотношение (3.2) выполняется тождественно: $N = 0, \gamma = \circ, \beta = B_1$.

Остается определяющее соотношение (3.3)

$$(Bt + B_0)e_t + EVe_V + \eta(t, S)e_S = 2e(N_0 - B) - VB_1 - \circ \quad (3.6)$$

Далее рассмотрим случаи 3° и 4°.

4. Случай $\tilde{\gamma}_S \neq 0, \tilde{N} \neq 0$

Найдем условие совместности системы (3.4), (3.5). Сделаем замену $e = V^{-\frac{2}{3}}e_1(t, V, S)$ и исключим производную e_t из второго уравнения

$$e_{1t} = e_{1S} \left(\tilde{\beta}' V + 3V^{\frac{1}{3}} e_{1V} \right)$$

$$\eta_1 e_{1S} = -(3t + n) V e_{1V} + m_1 e_1 - V^{\frac{2}{3}} (V \tilde{\beta} + S),$$

$$\text{где } m_1 = 2 \left(m + \frac{1}{3} n \right), \eta_1 = \tilde{\eta} + (t^2 + k) \left(\tilde{\beta}' V + 3V^{\frac{1}{3}} e_{1V} \right).$$

Дифференцируем второе линейное уравнение в силу нелинейного первого по t, S и V :

$$\begin{aligned} & \left[\tilde{\eta}_t + 2t \left(\tilde{\beta}' V' + 3V^{\frac{1}{3}} e_{1V} \right) + (t^2 + k) \left(\tilde{\beta}'' V + 3V^{\frac{1}{3}} e_{1V'} \right) \right] e_{1S} + \\ & \eta_1 \left[e_{1SS} \left(\tilde{\beta}' V + 3V^{\frac{1}{3}} e_{1V} \right) + 3V^{\frac{1}{3}} e_{1S} e_{1SV} \right] = -3V e_{1V} - (3t + n) V e_{1V'} + \\ & + m_1 e_{1S} \left(\tilde{\beta}' V + 3V^{\frac{1}{3}} e_{1V} \right) - V^{\frac{5}{3}} \tilde{\beta}' \\ & \eta_1 e_{1SS} = -e_{1VS} \left((3t + n) V + 3(t^2 + k) V^{\frac{1}{3}} e_{1S} \right) + e_{1S} (m_1 - \tilde{\eta}_S) - V^{\frac{2}{3}} \\ & \eta_1 e_{1SV} = -e_{1VV} \left((3t + n) V + 3(t^2 + k) V^{\frac{1}{3}} e_{1S} \right) + \\ & + e_{1V} \left(m_1 - (t^2 + k) V^{-\frac{2}{3}} e_{1S} - 3t - n \right) - (t^2 + k) \tilde{\beta}' e_{1S} - \frac{5}{3} V^{\frac{2}{3}} \tilde{\beta} - \frac{2}{3} V^{-\frac{1}{3}} S \\ & e_{1VV} = e_{1VS} \left(\tilde{\beta}' V + 3V^{\frac{1}{3}} e_{1V} \right) + e_{1S} \left(\tilde{\beta}' + V^{-\frac{2}{3}} e_{1V} + 3V^{\frac{1}{3}} e_{1VV} \right) \end{aligned}$$

Исключая производные e_{1V}, e_{1SV}, e_{1SS} , получим условие совместности

$$3V^{\frac{1}{3}} e_{1V} (2m - \tilde{\eta}_S) + V (\mu(t) - \tilde{\eta}_S \tilde{\beta}') + \tilde{\eta}_t = 2S,$$

$$\text{где } \mu = (t^2 + k) \tilde{\beta}'' + (5t + n) \tilde{\beta}' - 5\tilde{\beta}.$$

Если $\tilde{\eta}_S = 2m$, то $\mu = 2m \tilde{\beta}', \tilde{\eta}_t = 2S \Rightarrow$ противоречие.

$$\text{Значит, } \tilde{\eta}_S \neq 2m, e_{1V} = \frac{1}{3} a(t, S) V^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3} b(t, S) V^{-\frac{1}{3}},$$

$$a(2m - \tilde{\eta}_S) = \tilde{\eta}_S \tilde{\beta}' - \mu, b(2m - \tilde{\eta}_S) = 2S - \tilde{\eta}_t \quad (4.1)$$

Возвращаясь к функции e , получим представление для уравнения состояния

$$e = \frac{1}{2}b + \frac{1}{5}aV + c(t, S)V^{-\frac{2}{3}}; c \neq 0$$

Подстановка в (3.4) и в (3.5), расщепление по V приводит к равенствам

$$\begin{aligned} c_t &= bc_s, c_s(\tilde{\beta}' + a) = 0, a_s(\tilde{\beta}' + a) = 0, b_t = bb_s \\ a_t &= ba_s + \frac{5}{2}b_s(\tilde{\beta}' + a), (t^2 + k)c_t + \tilde{\eta}c_s = m_1c \\ (t^2 + k)a_t + \tilde{\eta}a_s &= (2m - n - 5t)a - 5\tilde{\beta} \\ (t^2 + k)b_t + \tilde{\eta}b_s &= 2(m - t)b - 2S \end{aligned} \quad (4.2)$$

Рассмотрим два случая:

Случай $\tilde{\beta} + a \neq 0$.

Из (4.2) следует $c = C = \text{const} \neq 0, n = -3m, a(t)(a' \neq 0)$

$$b = (S + S_0)(t_0 - t)^{-1}$$

$$\tilde{\eta} = (S + S_0)\left[(t^2 + k)(t - t_0)^{-1} - 2t_0 + 2m\right] + 2S_0(t_0 - t)$$

$$\tilde{\beta} = (m - t)a - \frac{1}{5}(t^2 + k)a', (t^2 + k)a'' + a'(5t - 5m + 2t_0) = 0$$

При этом равенства (4.1) выполнены. Уравнение состояния принимает вид

$$e = CV^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{5}a(t)V - \frac{1}{2}\frac{S + S_0}{t - t_0}, a' = D\left|t^2 + k\right|^{\frac{5}{2}}e^{(5m-2t_0)I}, I = \int \frac{dt}{t^2 + k} \quad (4.3)$$

Допускаемая алгебра находится из определяющих соотношений (3.2) и (3.3). Из (3.2) следует

$$\gamma = \Gamma_0 + (S + S_0)(N + \Gamma_1(t - t_0)^{-1}), \beta' = -Na - \frac{2}{3}a'(N(t - t_0) + \Gamma_1)$$

Из (3.3) следуют равенства $E = 3(B - N_0)$,

$$\begin{aligned} \beta &= a(N_0 - B - Nt) - \frac{1}{5}a'(Nt^2 + Bt + B_0) \\ \eta &= 2(N_0 - B)(S + S_0) + (Nt^2 + Bt + B_0)(S + S_0)(t - t_0)^{-1} + \\ &\quad + 2^\circ_0(t - t_0) + 2(S + S_0)(^\circ_1 - Nt_0) \end{aligned}$$

Исключая функцию $\beta(t)$, получим

$$a''(Nt^2 + Bt + B_0) + a'(5Nt - 5N_0 + 6B + 2t_0N - 2^\circ_1) = 0$$

Сравнение a''/a из двух уравнений для функции $a(t)$ дает

$$^{\circ}_1 = \frac{5}{2}(Nm - N_0) + \frac{1}{2}B, B_0 = Nk + B\left(m - \frac{2}{5}t_0\right), B\left(k + \left(m - \frac{2}{5}t_0\right)^2\right) = 0$$

Если $k + \left(m - \frac{2}{5}t_0\right)^2 \neq 0$, то $B = 0$, $B_0 = Nk$, $E = -3N_0$,

$$\eta = 2^{\circ}_0(t - t_0) + (S + S_0)\left[N\left(5m + \frac{t^2 + k}{t - t_0}\right) - 3N_0\right]$$

Свободным параметрам $N, N_0, ^{\circ}_0$ соответствуют операторы

$$\begin{aligned} (t^2 + k)\partial_t + \vec{k} \cdot \partial_{\vec{x}} + (\vec{x} - t\vec{u}) \cdot \partial_{\vec{u}} + 3tV\partial_V + \left(5m + \frac{t^2 + k}{t - t_0}\right)(S + S_0)\partial_S \\ \vec{x} \cdot \partial_{\vec{x}} + \vec{u} \cdot \partial_{\vec{u}} - 3V\partial_V - 3(S + S_0)\partial_S, (t - t_0)\partial_S \end{aligned} \quad (4.4)$$

Если $k = -\left(m - \frac{2}{5}t_0\right)^2$, то добавляется свободный параметр B и появляется дополнительный оператор

$$t\partial_t - \vec{u} \cdot \partial_{\vec{u}} + 3V\partial_V + \frac{m + \frac{3}{5}t_0}{t - t_0}(S + S_0)\partial_S \quad (4.5)$$

Случай $a = -\tilde{\beta}$. Из (4.2) следует $a \sim 0, \tilde{\beta} = 0, c = g(b)$,

$$2g'(mb - h) = m_1g, S + bt = h(b), \tilde{\eta} = -(t^2 + k)b + 2(mb - h)(h' - t)$$

Здесь $g(b)$ — произвольная функция.

При этом равенства (4.1) выполняются. Для уравнения состояния

$$e = \frac{1}{2}b + g(b)V^{-\frac{2}{3}} \quad (4.6)$$

допускаемые операторы определяются из определяющих соотношений (3.2), (3.3). Из (3.2) находим $\beta = B_1$ — постоянная, $\gamma = -Ntb + \sigma(b)$.

Из (3.3) определяются функции

$$\begin{aligned} \sigma = b(N_0 - B) - \left(N_0 - B + \frac{1}{3}E\right)gg'^{-1} \\ \eta = -b(Nt^2 + Bt + B_0) + 2gg'^{-1}(h' - t)\left(N_0 - B + \frac{1}{3}E\right) \end{aligned}$$

Свободным параметрам N, B, B_0, N_0, E соответствуют операторы, согласно формулам (3.1),

$$\begin{aligned} t^2\partial_t + \vec{k} \cdot \partial_{\vec{x}} + (\vec{x} - t\vec{u}) \cdot \partial_{\vec{u}} + 3tV\partial_V - bt^2\partial_S \\ t\partial_t - \vec{u} \cdot \partial_{\vec{u}} - (tb + 2gg'^{-1}(h' - t))\partial_S \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\partial_t - b\partial_s, \vec{x} \cdot \partial_{\vec{x}} + \vec{u} \cdot \partial_{\vec{u}} + 2gg'(h' - t)\partial_s, V\partial_v + \frac{2}{3}gg'^{-1}(h' - t)\partial_s$$

Теорема. Если уравнение состояния удовлетворяет переопределенной системе (3.4), (3.5), то оно может быть двух типов. Либо оно задается формулой (4.3) и тогда система (2.1)–(2.3) допускает операторы (4.4) и дополнительный оператор (4.5) при $k = -\left(m - \frac{2}{5}t_0\right)^2$; либо уравнение состояния имеет вид (4.6), и тогда допускаются операторы (4.7).

5. Случай $\tilde{\gamma}_S = 0, \tilde{N} = 0$.

Определяющее соотношение (3.2) выполняется: $N = 0, \gamma = \circ, \beta = B_1$ – постоянные. Преобразование эквивалентности Π не изменяют вид системы (2.1)–(2.3), но изменяют уравнение состояния и допускаемые операторы. Таким образом, в равенствах (3.1) можно сделать функцию $\eta(t, S) \sim \eta(S) = 1$ или S . Равенство (3.6) принимает вид

$$(Bt + B_0)e_t + EVe_v + C_0\eta(S)e_S = 2e(N_0 - B) - VB_1 - \circ \quad (5.1)$$

Параметрам B_0, N_0, E, B, C_0 соответствуют базисные операторы алгебры Ли L_5

$$X_{10} = \partial_t, \tilde{X}_{11} = X_{11} - X_{13} = \vec{x} \cdot \partial_{\vec{x}} + \vec{u} \cdot \partial_{\vec{u}}, X_{12} = V\partial_v, X_{13} = t\partial_t - \vec{u} \cdot \partial_{\vec{u}}, X_0 = \eta(S)\partial_S$$

Оператор $X_{11} = t\partial_t + \vec{x} \cdot \partial_{\vec{x}}$ допускается уравнениями газовой динамики со стационарным уравнением состояния [1]. Есть только один не нулевой коммутатор $[X_{10}, X_{13}] = X_{10}, Z = \{X_0, \tilde{X}_{11}, X_{12}\}$ – абелев центр, X_{10} – идеал идеала $J_2 = \{X_{10}, X_{13}\}, L_5 = J_2 \oplus Z$ – прямая сумма идеалов. Внутренние автоморфизмы алгебры вычисляются по правилу [4]

$$\bar{X}_a = [Y, \bar{X}], \bar{X}|_{a=0} = X = x^{10}X_{10} + x^{11}\tilde{X}_{11} + x^{12}X_{12} + x^{13}X_{13} + x^0X_0$$

Имеем два автоморфизма

$$A_1 : \bar{x}^{10} = x^{10} + ax^{13}, A_2 : \bar{x}^{10} = bx^{10}$$

С точностью до внутренних автоморфизмов все подалгебры различных размерностей (оптимальная система) приведены в Приложении.

Заключение. Задача групповой классификации уравнений газовой динамики с уравнением состояния, зависящим от времени, решена. Алгоритм решения этой задачи заключается в следующем. Алгебра Ли преобразования эквивалентности, изменяющих только уравнение состояния, вычислены в работе [12]. Условия инвариантности уравнений газовой динамики с уравнением состояния зависящем от времени задают представление для координат допускаемых операторов (3.1) и два определяющих соотношения нелинейного типа (3.2) и линейного типа (3.3) для функции, задающей уравнение состояния. Преобразованиями эквивалентности приводим нелинейное определяющее соотношение к простейшему виду. Возможны четыре случая упрощений $1^\circ \div 4^\circ$. В случае 1° уравнение типа (3.2) интегрируется, а из уравнения типа (3.3) следуют определяющие соотношения на коэффициенты. Групповая клас-

сификация проведена в работе [13] методом упрощений определяющих соотношений. В случае 2° уравнение типа (3.2) интегрируется. Уравнение типа (3.3) определяет функцию, задающую уравнение состояния, методом составления оптимальной системы подалгебр алгебры расширений ядра. Групповая классификация этого случая проведена в работе [14].

Последние два случая рассмотрены в настоящей статье. В случае 3° определяющие соотношения преобразованиями эквивалентности приводятся к переопределенной системе (3.4), (3.5). Изучение совместности приводит к представлению уравнения состояния по переменной V . Коэффициенты представления удовлетворяют переопределенной системе (4.2). Изучение совместности дает два случая уравнения состояния (4.3) и (4.6). Допускаемые алгебры находятся из соотношений (3.2) и (3.3) в виде (4.4), (4.5) и (4.7). В случае 4° нелинейное определяющее соотношение выполнено тождественно. Линейное соотношение преобразованиями эквивалентности приводится к виду (5.1) с коэффициентами, которым отвечают базисные операторы алгебры Ли преобразований эквивалентности. Строится оптимальная система подалгебр этой алгебры. Для каждой подалгебры определяются функции, задающие уравнения состояния, с которыми уравнения газовой динамики допускают подалгебру. Получено множество расширений ядра допускаемых уравнениями газовой динамики со специальными релаксирующими уравнениями состояния. Это позволит находить множество точных решений и подмоделей для уравнений движения многофазной среды с реагирующими компонентами. Предъявленные работы [12, 13, 14] развивают методы решения задачи групповой классификации — основной задачи группового анализа дифференциальных уравнений с произвольным элементом в случае четырех независимых переменных и произвольного элемента, зависящего от трех переменных. Применяются комбинации двух методов: метода упрощения определяющих соотношений и метода построения оптимальной системы подалгебр, расширяющих ядро допускаемых алгебр.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л.В. Программа подмодели. Газовая динамика // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 30–55.
2. Овсянников Л.В. Некоторые итоги выполнения программы «Подмодели» для уравнений газовой динамики // ПММ. 1999. Т. 63. № 3. С. 362–372.
3. Борисов А.В., Хабиров С.В. Преобразования эквивалентности для уравнений газовой динамики // Многофазные системы. 2024. Т. 19. № 2. С. 44–48.
4. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
5. Чиркунов Ю.А., Хабиров С.В. Элементы симметричного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. 659 с.
6. Мукминов Т.М., Хабиров С.В. Граф вложенных подалгебр 11-мерной алгебры симметрий сплошной среды // СЭМИ. 2019. Т. 16. С. 121–143.
7. Хабиров С.В. Классификация дифференциально инвариантных подмоделей // СМЖ. 2004. Т. 45. № 3. С. 682–701.
8. Мукминов Т.М., Хабиров С.В. Простые волны конических движений // УМЖ. 2022. Т. 14. № 2. С. 82–93.
9. Vaneeva O.O., Bihlo A., Popovich R.O. Equivalence groupoid and group classification of a class of nonlinear wave and elliptic equations // arXiv:2002.08939v1 [math-ph] 20 Feb 2020. 38 p.
10. Малкин А.Я., Исаев А.И. Реология: концепции, методы, приложения. С.-Пб.: Изд-во Профессия, 2010. 557 с.
11. Vladimirov V.A. Modelling system for relaxing media. Symmetry, restrictions and attractive features of invariant solution // Proc. Inst. of Mathematics of NASU. Kiev: 2000. V. 30. Pt. 1. P. 231–238.
12. Хабиров С.В. Групповая классификация идеальных газодинамических релаксирующих сред по преобразованиям эквивалентности // СМЖ. 2023. Т. 64. № 4. С. 936–954.

13. Хабиров С.В. К групповой классификации идеальных газодинамических релаксирующих сред // Тр. ИММ УрО РАН. 2023. Т. 29. № 2. С. 260–270.
14. Хабиров С.В. К групповой классификации релаксирующей газовой динамики методом оптимальной системы подалгебр // СМЖ. 2025. Т. 66, № 1. С. 106–128.

Приложение. Оптимальная система подалгебр в случае $\tau_s = 0, \tilde{N} = 0$

П1. Одномерные подалгебры

- 1.1. $\tilde{X}_{13} + \alpha\tilde{X}_{11} + \beta X_{12} + \gamma X_0$, 1.2. $X_{10} + \alpha\tilde{X}_{11} + \beta X_{12} + \gamma X_0$
- 1.3. $\tilde{X}_{11} + \beta X_{12} + \gamma X_0$, 1.4. $X_{12} + \alpha X_0$, 1.5. X_0

П2. Двухмерные подалгебры

- 2.1. $\{X_{10}, X_{13} + \alpha\tilde{X}_{11} + \beta X_{12} + \gamma X_0\}$
- 2.2. $\{X_{10} + \beta X_{12} + \gamma X_0, \tilde{X}_{11} + \beta_1 X_{12} + \gamma_1 X_0\}$
- 2.3. $\{X_{10} + \alpha\tilde{X}_{11} + \beta X_0, X_{12} + \gamma X_0\}$, 2.4. $\{X_{10} + \alpha\tilde{X}_{11} + \beta X_{12}, X_0\}$
- 2.5. $\{X_{13} + \alpha X_{12} + \beta X_0, \tilde{X}_{11} + \alpha_1 X_{12} + \beta_1 X_0\}$
- 2.6. $\{X_{13} + \alpha\tilde{X}_{11} + \gamma X_0, X_{12} + \beta X_0\}$, 2.7. $\{X_{13} + \alpha\tilde{X}_4 + \beta\tilde{X}_{12}, X_0\}$
- 2.8. $\{\tilde{X}_{11} + \alpha X_0, X_{12} + \beta X_0\}$, 2.9. $\{X_{12}, X_0\}$, 2.10. $\{\tilde{X}_{11}, X_0\}$

П3. Трехмерные подалгебры

- 3.1. $\{X_{10}, X_{13} + \alpha X_{12} + \beta X_0, \tilde{X}_{11} + \alpha_1 X_{12} + \beta_1 X_0\}$
- 3.2. $\{X_{10}, X_{13} + \alpha\tilde{X}_{11} + \gamma X_0, X_{12} + \beta X_0\}$
- 3.3. $\{X_{10}, X_{13} + \alpha\tilde{X}_{11} + \beta X_{12}, X_0\}$, 3.4. $\{X_{10} + \delta X_0, \tilde{X}_{11} + \alpha X_0, X_{12} + \beta X_0\}$
- 3.5. $\{X_{10} + \delta X_{12}, \tilde{X}_{11}, X_0\}$, 3.6. $\{X_{10} + \delta\tilde{X}_{11}, X_{12}, X_0\}$
- 3.7. $\{X_{13} + \alpha X_0, \tilde{X}_{11} + \beta X_{10}, X_{12} + \gamma X_0\}$, 3.8. $\{X_{13} + \alpha X_{12}, \tilde{X}_{11}, X_0\}$
- 3.9. $\{X_{13} + \alpha\tilde{X}_{11}, X_{12}, X_0\}$, 3.10. $\{\tilde{X}_{11}, X_{12}, X_0\}$

П4. Четырехмерные подалгебры

- 4.1. $\{X_{10}, X_{13} + \alpha X_0, \tilde{X}_{11} + \beta X_0, X_{12} + \gamma X_0\}$
- 4.2. $\{X_{10}, \tilde{X}_{11}, X_{12}, X_0\}$, 4.3. $\{X_{13}, \tilde{X}_{11}, X_{12}, X_0\}$

Здесь α, β, γ – постоянные, $\delta = 0$ или 1. Для любой подалгебры произвольный оператор $X = B_0 X_{10} + N_0 \tilde{X}_{11} + E X_{12} + B X_{13} + C_0 X_0$ алгебры L_5 равен линейной комбинации базисных операторов подалгебры с произвольными коэффициентами $\lambda, \mu, \nu, \sigma$. Постоянные B_i, \circ в равенстве (5.1) линейно выражаются через произвольные коэффициенты. Их нет в выражениях для оператора X . Они определяются уравнением состояния. Каждая подалгебра определяет с помощью соотношения (5.1) уравнения состояния, с которыми система (2.1) – (2.3) допускает эту подалгебру.

Подалгебра 1.1 $X = \lambda(X_{13} + \alpha\tilde{X}_{11} + \beta X_{12} + \gamma X_0) \Rightarrow B_0 = \lambda\gamma, N_0 = \lambda\alpha, E = \lambda\beta,$

$B = \lambda, C_0 = \lambda\gamma, B_1 = \lambda b_1, \circ = \lambda b_0$. Равенство (5.1) после сокращения на λ определяет уравнение для функции, задающей уравнение состояния, чтобы подалгебра допускалась уравнениями газовой динамики (2.1)–(2.3),

$$te_t + \beta Ve_v + \gamma \eta(S)e_s = 2e(\alpha - 1) - \nu b_1 - b_0$$

Аналогичные вычисления для других подалгебр из оптимальной системы определяют уравнения для функций, задающих уравнения состояния.

Подалгебра 1.2. $\Rightarrow B_0 = \lambda, N_0 = \lambda\alpha, E = \lambda\beta, B = 0, C_0 = \lambda\gamma$

$$e_t + \beta Ve_v + \gamma \eta(S)e_s = 2\alpha e - \nu b_1 - b_0$$

Подалгебра 1.3. $\Rightarrow B_0 = 0, N_0 = \lambda, E = \lambda\beta, B = 0, C_0 = \lambda\gamma$

$$\beta V e_\nu + \gamma r(S) e_s = 2e - V b_1 - b_0$$

$$\text{Подалгебра 1.4.} \Rightarrow B_0 = N_0 = B = 0, E = \lambda, C_0 = \lambda \alpha$$

$$V e_\nu + \alpha r(S) e_s = -V b_1 - b_0$$

$$\text{Подалгебра 1.5.} \Rightarrow B_0 = N_0 = E = B = 0, C_0 = \lambda$$

$$e = g(t, V) - (V b_1 + b_0)(S \text{ или } \ln|S|)$$

$$\text{Подалгебра 2.1. } X = \lambda X_{10} + \mu(X_{13} + \alpha \tilde{X}_{11} + \beta X_{12} + \gamma X_0) \Rightarrow B_0 = \lambda, N_0 = \mu \alpha, \\ E = \mu \beta, B = \mu, C_0 = \mu \gamma, B_1 = \lambda b_1 + \mu b_2, \circ = \lambda b_{01} + \mu b_{02}.$$

Равенство (5.1) после расщепляется по λ и μ дает 2 уравнения для функции e

$$e_t = -b_1 V - b_{01} \Rightarrow e = -(b_1 V + b_{01})t + e_1(V, S)$$

$$t e_t + \beta V e_\nu + \gamma r(S) e_s = 2(\alpha - 1)e - V b_2 - b_{02} \Rightarrow (2\alpha - 3)b_{01} = 0$$

$$(2\alpha - \beta - 3)b_1 = 0, \beta V e_{1V} + \gamma r(S) e_{1S} = 2(\alpha - 1)e_1 - V b_2 - b_{02}$$

$$\text{Подалгебра 2.2.} \Rightarrow B_0 = \lambda, N_0 = \mu, E = \lambda \beta + \mu \beta_1, B = 0, C_0 = \lambda \gamma + \mu \gamma_1$$

$$(5.1) \Rightarrow e_t + \beta V e_\nu + \gamma r(S) e_s = -b_1 V - b_{01}$$

$$\beta_1 V e_\nu + \gamma_1 r(S) e_s = 2e - b_2 V - b_{02} \Rightarrow b_{02} \sim 0$$

$$\text{Если } \beta \neq 0, \text{ то } e = -\frac{b_1}{\beta} V - \frac{b_{01}}{\beta} \ln V + e_1(V, S_1), V_1 = V e^{-\beta t}$$

$$S_1 = -\gamma t + (S \text{ или } \ln|S|); b_{01} = 0, b_2 = (\beta_1 - 2)b_1 \beta^{-1}$$

$$\beta_1 V_1 e_{1V_1} + \gamma_1 e_{1S_1} = 2e$$

$$\text{Если } \beta = 0, \text{ то } e = -t(b_1 V + b_{01}) + e_1(V, S_1); b_{01} = 0$$

$$b_1(\beta_1 - 2) = 0, \beta_1 V e_{1V} + \gamma_1 e_{1S_1} = 2e_1 - b_2 V$$

$$\text{Подалгебра 2.3.} \Rightarrow B_0 = \lambda, N_0 = \alpha \lambda, E = \mu, B = 0, C_0 = \lambda \beta + \mu \gamma$$

$$(5.1) \Rightarrow e_t + \beta r(S) e_s = -b_1 V - b_{01} \Rightarrow e = -t(b_1 V + b_{01}) + e_1(V, S_1)$$

$$S_1 = -\beta t + (S \text{ или } \ln|S|); V e_\nu + \gamma r(S) e_s = -b_2 V - b_{02} \Rightarrow b_1 = 0, b_2 \sim 0$$

$$V e_{1V} + \gamma e_{1S_1} = -b_{02}$$

$$\text{Подалгебра 2.4.} \Rightarrow B_0 = \lambda, N_0 = \lambda \alpha, E = \lambda \beta, B = 0, C_0 = \mu$$

$$(5.1) \Rightarrow \eta(S) e_s = -b_2 V - b_{02} \Rightarrow e = e_1(t, V) - (b_2 V + b_{02})(S \text{ или } \ln|S|)$$

$$e_t + \beta V e_\nu = 2\alpha e - b_1 V - b_{01} \Rightarrow \alpha b_{02} = 0, (\beta - 2\alpha)b_2 = 0$$

$$e_{1t} + \beta V e_{1V} = 2\alpha e_1 - b_1 V - b_{01}$$

$$\text{Подалгебра 2.5.} \Rightarrow B_0 = 0, N_0 = \mu, E = \lambda \alpha + \mu \alpha_1, B = \lambda, C_0 = \lambda \beta + \mu \beta_1$$

$$(5.1) \Rightarrow te_t + \alpha Ve_\nu + \beta \eta(S)e_s = -2e - b_1V - b_{01} \Rightarrow b_1 \sim 0; b_{01} \sim 0$$

$$e = t^{-2}g(V_1, S_1), V_1 = Vt^{-\alpha}, S_1 = -\beta \ln|t| + (S \text{ или } \ln|S|)$$

$$\alpha_1 Ve_\nu + \beta_1 \eta(S)e_s = 2e - b_2V - b_{02} \Rightarrow b_{02} = 0$$

$$\alpha_1 V_1 g_{V_1} + \beta_1 g_{S_1} = 2g - b_2 V_1, b_2 = 0 \text{ при } \alpha \neq -2 \text{ или } \alpha_1 \neq 2$$

$$\text{Подалгебра 2.6.} \Rightarrow B_0 = 0, N_0 = \lambda\alpha, E = \mu, B = \lambda, C_0 = \lambda\gamma + \mu\beta$$

$$(5.1) \Rightarrow te_t + \gamma \eta(S)e_s = 2(\alpha - 1)e - b_1V - b_{01}, Ve_\nu + \beta \eta(S)e_s = -b_2V - b_{02}$$

$$\text{Если } \alpha \neq 1, \text{ то } b_1 \sim 0, b_{01} \sim 0, e = 2(\alpha - 1)\ln|t| + e_1(V, S_1)$$

$$S_1 = t^{-\gamma}(e^S \text{ или } S), e_{1V} + \beta S_1 e_{1S_1} = -b_{02}, b_2 \sim 0$$

$$\text{Если } \alpha = 1, \text{ то } e = -b_{01}\ln|t| + e_1(V, S_1), Ve_{1V} + \beta S_1 e_{1S_1} = -b_{02}$$

$$b_1 = 0, b_2 \sim 0$$

$$\text{Подалгебра 2.7.} \Rightarrow B_0 = 0, N_0 = \lambda\alpha, E = \lambda\beta, C_0 = \mu, B = \lambda$$

$$(5.1) \Rightarrow \eta(S)e_s = -b_2V - b_{02} \Rightarrow e = e_1(t, V) - (b_2V + b_{02})(S \text{ или } \ln|S|)$$

$$te_t + \beta Ve_\nu = 2(\alpha - 1) - Vb_1 - b_{01} \Rightarrow (\alpha - 1)b_{02} = 0, (\beta - 2\alpha - 2)b_2 = 0$$

$$te_{1t} + \beta Ve_{1V} = 2(\alpha - 1)e_1 - Vb_1 - b_{01}$$

$$\text{Подалгебра 2.8.} \Rightarrow B_0 = 0, N_0 = \lambda, E = \mu, B = 0, C_0 = \lambda\alpha + \mu\beta$$

$$(5.1) \Rightarrow \alpha \eta(S)e_s = 2e - b_1V - b_{01} \Rightarrow b_1 \sim 0, b_{01} \sim 0, \alpha \neq 0$$

$$e = e_1(t, V)(e^S \text{ или } S)^{\frac{2}{\alpha}}$$

$$Ve_\nu + \beta \eta(S)e_s = -b_2V - b_{02} \Rightarrow b_2 = b_{02} = 0, e_1 = V^{-\frac{2\beta}{\alpha}}g(t)$$

$$\text{Подалгебра 2.9.} \Rightarrow B_0 = B = N_0 = 0, E = \lambda, C_0 = \mu$$

$$(5.1) \Rightarrow Ve_\nu = -b_1V - b_{01} \Rightarrow b_1 \sim 0; b_{01} \neq 0, e = -b_{01}\ln V + e_1(t, S)$$

$$\eta(S)e_s = -b_2V - b_{02} \Rightarrow b_2 = 0; b_{02} \neq 0, e_1 = g(t) - b_{02}(S \text{ или } \ln|S|)$$

$$\text{Подалгебра 3.1.} \Rightarrow B_0 = \lambda, N_0 = \nu, E = \alpha\mu + \alpha_1\nu, B = \mu, C_0 = \beta\mu + \beta_1\nu$$

$$(5.1) \Rightarrow e_t = -b_1V - b_{01} \Rightarrow e = -(b_1V + b_{01})t + e_1(V, S)$$

$$te_t + \alpha Ve_\nu + \beta \eta(S)e_s = -2e - b_2V - b_{02} \Rightarrow b_{02} \sim 0; b_{01} = 0, b_1 \neq 0$$

$$\alpha = -3, b_2 \sim 0$$

$$\alpha_1 Ve_\nu + \beta_1 r(S)e_s = 2e - b_3V - b_{03} \Rightarrow \alpha_1 = 2, b_3 = b_{03} = 0; \beta_1 \neq 0.$$

Изучая совместность последних двух уравнений отдельно при $\beta \neq 0$ и при $\beta = 0$, получим единую формулу

$$e = -b_1 t V + G V^{\frac{2}{3} + \frac{\beta}{9\beta_1}} (e^S \text{ или } |S|)^{\frac{1}{3\beta_1}}$$

Подалгебра 3.2. $\Rightarrow B_0 = \lambda, N_0 = \alpha\mu, E = \nu, B = \mu, C_0 = \gamma\mu + \beta\nu$

$$(5.1) \Rightarrow e_t = -b_1 V - b_{01} \Rightarrow e = -t(b_1 V + b_{01}) + e_1(V, S)$$

$$te_t + \gamma\eta(S)e_S = 2(\alpha - 1)e - b_2 V - b_{02} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}, \gamma \neq 0, e_1 = g(V)(e^S \text{ или } |S|)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$Ve_V + \beta\eta(S)e_S = -b_3 V - b_{03} \Rightarrow b_3 = b_{03} = 0, b_1 = 0, b_{01} \neq 0, g = G V^{\frac{\beta}{\gamma}}$$

Уравнение состояния имеет вид

$$e = -b_{01} t + G V^{\frac{\beta}{\gamma}} (e^S \text{ или } |S|)^{\frac{1}{\gamma}} \text{ при } \alpha = \frac{3}{2}, \gamma \neq 0$$

Подалгебра 3.3. $\Rightarrow B_0 = \lambda, N_0 = \mu\alpha, E = \mu\beta, B = \mu, C_0 = \nu$

$$(5.1) \Rightarrow e_t = -b_1 V - b_{01} \Rightarrow e = -t(b_1 V + b_{01}) + e_1(V, S)$$

$$te_t + \beta Ve_V = (\alpha - 1)e - b_2 V - b_{02} \Rightarrow b_{01}(\alpha - 2) = 0, b_1(\beta - \alpha + 2) = 0$$

$$\eta e_S = -Vb_3 - b_{03} \Rightarrow e_1 = g(V) - (Vb_3 + b_{03})(S \text{ или } \ln|S|)$$

$$b_{03}(\alpha - 1) = 0, b_3(\beta - \alpha + 1) = 0, \beta Vg' = (\alpha - 1)g - Vb_2 - b_{02}$$

Если $b_1 \neq 0, b_{01} \neq 0$, то $\alpha = 2, \beta = 0, b_{03} = 0, b_3 = 0 \Rightarrow e_S = 0$ противоречие.

Если $b_1 \neq 0, b_{01} = 0$, то $\beta = \alpha - 2, b_3 = 0, b_{03} \neq 0, \alpha = 1, \beta = -1$

$$g \sim b_{02} \ln V, e = -b_1 Vt + b_{02} \ln V - b_{03}(S \text{ или } \ln|S|)$$

Если $b_1 = 0, b_{01} \neq 0$, то $\alpha = 2, b_{03} = 0, \beta = \alpha - 1 = 1, g \sim -b_2 V \ln V$

$$e = -b_{01} t - b_2 V \ln V - b_3(S \text{ или } \ln|S|)$$

Подалгебра 3.4 $\Rightarrow B_0 = \lambda, N_0 = \mu, E = \nu, B = 0, C_0 = \lambda\delta + \mu\alpha + \nu\beta$

$$(5.1) \Rightarrow \alpha\eta(S)e_S = 2e - b_2 V - b_{02} \Rightarrow b_2 \sim 0, b_{02} \sim 0, \alpha \neq 0$$

$$e = e_1(t, V)(e^S \text{ или } |S|)^{\frac{2}{\alpha}}$$

$$e_t + \delta\eta e_S = -b_1 V - b_{01} \Rightarrow b_1 = b_{01} = 0, e_1 = g(V)e^{-\frac{2\delta}{\alpha}t}$$

$$Ve_V + \beta\eta e_S = -b_3 V - b_{03} \Rightarrow b_3 = b_{03} = 0, g = G V^{-\frac{2\beta}{\alpha}}$$

Подалгебра 3.6. $\Rightarrow B_0 = \lambda, N_0 = \mu, E = \lambda\delta, B = 0, C_0 = \nu$

$$(5.1) \Rightarrow Ve_V = -b_2 V - b_{02} \Rightarrow b_2 \sim 0, e = -b_{02} \ln V + e_1(t, S)$$

$$\eta e_S = -b_3 V - b_{03} \Rightarrow e_1 = g(t) - (b_3 V + b_{03})(S \text{ или } \ln|S|)$$

$$e_t = 2\delta e - b_1 V - b_{01} \Rightarrow \delta = 0, b_1 = 0, g = -b_{01} t$$

Подалгебра 3.7. $\Rightarrow B_0 = 0, N_0 = \mu, E = \nu, B = \lambda, C_0 = \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$

$$(5.1) \Rightarrow \beta \eta e_s = 2e - b_2 V - b_{02} \Rightarrow b_2 \sim 0, b_{02} \sim 0, \beta \neq 0, e = e_1(t, V) e^{\frac{2\gamma}{\beta} S}$$

$$\gamma \eta e_s + V e_\nu = -b_3 V - b_{03} \Rightarrow b_3 = b_{03} = 0, e_1 = g(t) V^{-\frac{2\gamma}{\beta}}$$

$$t e_t + \alpha \eta e_s = -2e - b_1 V - b_{01} \Rightarrow b_1 = b_{01} = 0, g = G t^{-2\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)}$$

Подалгебра 3.9. $\Rightarrow B_0 = 0, N_0 = \lambda\alpha, E = \mu, B = \lambda, C_0 = \nu$

$$(5.1) \Rightarrow V e_\nu = -b_2 V - b_{02} \Rightarrow b_2 \sim 0, e = -b_{02} \ln V + e_1(t, S)$$

$$\eta e_s = -b_3 V - b_{03} \Rightarrow e_1 = -(b_3 V + b_{03})(S \text{ или } \ln|S|) + g(t)$$

$$t e_t = 2(\alpha - 1)e - b_1 V - b_{01} \Rightarrow \alpha = 1, b_1 = 0, g = -b_{01} \ln|t|$$

Замечание. Подалгебры 2.10, 3.5, 3.8, 3.10, 4.1, 4.2, 4.3 не производят уравнения состояния с условиями $e_{\nu\nu} \neq 0, e_s \neq 0, e_t \neq 0$.

Итак, в случае 4° для коэффициентов уравнения типа (3.2) проведена групповая классификация уравнений газовой динамики методом построения оптимальной системы подалгебр, расширяющих ядро.

Methods of Group Classification for Relaxing Gasdynamics

S. V. Khabirov^{1,*}

¹Mavlyutov Institute of Mechanics UFRS RAS, Ufa, Russia

*e-mail: khabirov@anrb.ru

Group classification is the basic problem of the group analysis of differential equations with an arbitrary element. For the equations of the ideal gas dynamics with a state equation invariable on time the problem was solved by enumerating simplifications of the determining relations using equivalence transformations. For a state equation depending on time the exhaustive search is vast and it can be used optimal systems of subalgebras for the subalgebra extending the kernel of admitted algebras. Combination of the both methods solves the problem of the group classification for the relaxing gas dynamics.

Keywords: gas dynamics, relaxing state equation, equivalence transformation, determining relation, group classification, optimal system of subalgebras

REFERENCES

- 1 Ovsyannikov L.V. The “podmodeli” program. Gas dynamics // JAMM, 1994, vol. 58, iss. 4, pp. 601–627.
- 2 Ovsyannikov L.V. Some results of the implementation of the “podmodeli” program for the gas dynamics equations // JAMM, 1999, vol. 58, iss. 4, pp. 349–358
- 3 Borisov A.V., Khabirov S.V. Equivalence transformations for gas dynamics equations // Multi-phase Syst., 2024, vol. 19, no. 2, pp. 44–48.
- 4 Ovsyannikov L.V. Group Analysis of Differential Equations. Moscow: Nauka. 1978. 399 p. (in Russian)
- 5 Chirkunov Yu.A., Khabirov S.V. Elements of Symmetry Analysis of Differential Equations of Continuum Mechanics. Novosibirsk: NSTU, 2012. 659 p.
- 6 Mukminov T.M., Khabirov S.V. Graph of nested subalgebras of the 11-dimensional symmetry algebra of a continuous medium // SEMI, 2019, vol. 16, pp. 121–143.
- 7 Khabirov S.V. Classification of differentially invariant submodels // Sib. Math. J., 2004, vol. 45, no. 3, pp. 682–701.

- 8 *Mukminov T.M., Khabirov S.V.* Simple waves of conical motions // Ufa J. of Math., 2022, vol. 14, no. 2, pp. 82–93.
- 9 *Vaneeva O.O., Bihlo A., Popovich R.O.* Equivalence groupoid and group classification of a class of nonlinear wave and elliptic equations // arXiv:2002.08939v1 [math-ph] 20 Feb 2020. 38 p.
- 10 *Malkin A.Ya., Isaev A.I.* Rheology: Concepts, Methods, Applications. St. Petersburg: Professiya Pub., 2010. 557 p.
- 11 *Vladimirov V.A.* Modelling system for relaxing media. Symmetry, restrictions and attractive features of invariant solution // Proc. of Inst. of Mathematics of NASU, 2000, vol. 30, Pt. 1, pp. 231–238.
- 12 *Khabirov S.V.* Group classification of ideal gas-dynamic relaxing media by equivalence transformations // Sib. Math. J., 2023, vol. 64, no. 4, pp. 936–954.
- 13 *Khabirov S.V.* On group classification of ideal gas-dynamic relaxing media // Proc. of the Krasovskii Inst. of Mathematics and Mechanics of the UB RAS, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 260–270.
- 14 *Khabirov S.V.* On group classification of relaxing gas dynamics by the method of optimal system of subalgebras // Sib. Math. J., 2025, vol. 66, no. 1, pp. 106–128.

УДК 533.6.011

МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДОЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ С ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ПЕРЕМЕШАНЫМ ТУРБУЛЕНТНЫМ ГОРЕНИЕМ В КАНАЛАХ

© 2024 В. В. Власенко^{1,2,*}, Р. А. Балабанов^{1,2}, Вэньчао Лю²,С. С. Молев¹, В. А. Сабельников¹¹ФАУ ЦАГИ, Жуковский, Россия²МФТИ, Долгопрудный, Россия

*e-mail: vlasenko.vv@yandex.ru

Поступила в редакцию 08.08.2024 г.

После доработки 20.10.2024 г.

Принята к публикации 30.10.2024 г.

Дан обзор работ по численному моделированию турбулентного горения. Обсуждаются три класса моделей, необходимых для замыкания математической модели течения (модели турбулентности, модели химической кинетики и модели взаимодействия турбулентности с горением). Описан математический подход к моделированию дозвуковых течений с предварительно перемешанным турбулентным горением в каналах в рамках уравнений Рейнольдса, замкнутых моделями турбулентности класса $k - \omega$. Рассмотрены модели влияния турбулентности на средние скорости реакций класса PaSR (Partially Stirred Reactor – модели реактора частичного перемешивания) – квазистационарные модели PaSR и PFR, а также модель с учетом предистории EPaSR. Предлагается новая модель для учета влияния горения на интенсивность турбулентного переноса – переменных турбулентных чисел Прандтля и Шмидта, совместимая с моделью турбулентности класса $k - \omega$ и с моделями класса PaSR. В Приложении описана дифференциальная модель для турбулентного потока скаляра, откалиброванная априорно с использованием базы данных DNS турбулентного течения Рэля–Тейлора.

Ключевые слова: предварительно перемешанное турбулентное горение; численное моделирование; взаимодействие турбулентности и горения.

DOI: 10.31857/S0032823524060108 EDN: IGLUTY

1. Введение. Исследование турбулентного горения – одна из сложнейших проблем механики жидкости и газа. Эксперименты с горением в потоке газа в каналах очень дороги и обычно не обеспечивают достаточной точности из-за наличия большого числа разных физических эффектов. Поэтому существенную роль в исследовании должно играть численное моделирование, которое должно дать предварительные оценки течения в канале, позволить оптимизировать геометрию, подобрать режим течения, обеспечивающий лучшие характеристики, и тем самым уменьшить затраты на проведение эксперимента. Расчет также дополняет данные эксперимента и позволяет получить физическую интерпретацию экспериментальных данных.

Турбулентное горение – многомасштабное явление; характерные масштабы протекающих физических процессов могут отличаться на несколько порядков величины. Это создает существенные трудности при численном моделировании: требует

использования очень подробных расчетных сеток, приводит к большим затратам компьютерной памяти и большим временам счета.

В отличие от турбулентных течений без горения, метод крупных вихрей (LES) не гарантирует улучшение предсказания турбулентного горения по сравнению с расчетами на базе уравнений Рейнольдса (RANS) (см., напр., [1]). Дело в том, что в турбулентном горении существенную роль играет молекулярное смешение топлива с окислителем и молекулярная диффузия тепла, которые происходят на масштабах мельчайших турбулентных вихрей. Поскольку LES не позволяет опуститься до столь мелких масштабов, то даже в LES приходится использовать приближенные (полуэмпирические) модели микросмешения и горения, что в значительной степени понижает превосходство LES-расчета над RANS-расчетами, приводит к падению точности результатов и необходимости настройки эмпирических констант подсеточной модели. Правда, сохраняется важное преимущество LES-расчета перед RANS-расчетом — намного более высокая точность определения локальных условий горения, что связано с использованием гораздо более подробных расчетных сеток. Данная статья ограничивается моделями, предназначенными к применению в рамках подхода RANS.

Для замыкания системы уравнений RANS или LES необходимы три модели: модель турбулентности (в случае LES — модель подсеточной турбулентности), модель взаимодействия турбулентности и горения (Turbulence–Combustion Interaction, TCI) и модель химической кинетики. К сожалению, физико-математические модели, описывающие корректно многомасштабные физические процессы, протекающие в турбулентном пламени (смешение компонентов, диффузию тепла, воспламенение, стабилизацию и срыв горения), до сих пор не созданы. Качество моделирования явления в значительной степени зависит от правильного выбора перечисленных трех моделей.

В настоящей работе основное внимание будет уделяться проблемам моделирования TCI и выбора подходящей модели химической кинетики. В качестве модели турбулентности будут использоваться двухпараметрические дифференциальные модели класса $k - \omega$, использующие специальную функцию для плавного перехода от пристеночной (низкорейнольдсовой) версии модели к модели, рассчитанной на описание свободной турбулентности. Это естественный выбор при описании течений в каналах, где есть области и пристеночной, и свободной турбулентности. Дополнительными полезными свойствами моделей класса $k - \omega$ являются их хорошие свойства в окрестности твердых стенок (модели этого класса имеют хорошую асимптотику у стенок без использования пристеночных коррекций [2]), а также то, что они позволяют оценить локальное значение характерного интегрального временного масштаба турбулентных пульсаций скорости $\tau = 1 / \omega$. Отметим, что первая дифференциальная модель этого класса (и вообще первая в истории дифференциальная модель турбулентности) была сформулирована еще А.Н. Колмогоровым [3].

Наибольшие трудности возникают с описанием взаимодействия турбулентности и горения (TCI). Детальное обсуждение проблем турбулентного горения можно найти в книгах [4–8].

Существует два основных канала TCI. 1-й канал TCI связан с влиянием турбулентности на средние скорости химических реакций, 2-й — с влиянием горения на турбулентные потоки тепла и массы компонент реагирующей смеси. Существуют и другие пути взаимодействия турбулентности и горения [9], но они имеют косвенный характер (т.е. представляют собой цепочки взаимодействий различных факторов, которые приводят, в конечном счете, к влиянию турбулентности на горение или обратно).

К настоящему моменту наибольшее внимание исследователей было привлечено к 1-му каналу TCI, т.к. он в значительной степени связан с эффектами молекуляр-

ного смещения, проявляющимися в основном на уровне мелкомасштабной турбулентности. Это принципиально отличает моделирование 1-го канала ТСІ от классических моделей турбулентности, которые описывают в основном эффекты, главный вклад в которые дает крупномасштабная турбулентность.

В практических расчетах 1-й канал ТСІ часто не учитывается, и используется т.н. *квазиламинарное приближение*, при котором средние скорости реакций вычисляются по обычным формулам, в которые подставляются средние параметры течения. Однако квазиламинарное приближение часто приводит к большим ошибкам, поскольку при турбулентном горении пульсации параметров могут быть сопоставимы со средними величинами и даже превосходить их на порядок величины. Поэтому к настоящему времени предложено много способов описания 1-го канала ТСІ. Среди этих способов стоит выделить следующие классы:

1) статистические методы (метод моментов, метод функции плотности вероятности – ФПВ) – наиболее формальный подход, учитывающий статистические характеристики турбулентного течения с горением, но не опирающийся на физические представления о структуре турбулентного пламени [10–14];

2) модели микроламинарных пламен (флеймлетов) как для неперемешанного, так и для предварительно перемешанного горения – подход, применимый в случае, когда характерное время тепловыделения мало по сравнению с характерным временем молекулярного смещения на уровне мельчайших турбулентных вихрей [15–18]; существуют расширения этого подхода на другие случаи, связанные с введением переменной прогресса реакции (например, [19]), но они опираются на много сильных допущений и менее надежны;

3) модели реактора частичного перемешивания (PaSR – Partially Stirred Reactor) [20–23]. В этих моделях предполагается, что при высоких числах Рейнольдса горение протекает в основном в т.н. “тонких структурах”, связанных с мелкомасштабной турбулентностью. В моделях класса PaSR тонкие структуры рассматриваются как реакторы, в которых непрерывно протекает горение. В работах [24,25] представлен успешный опыт применения моделей класса PaSR к описанию утолщенных пламен, в которых толщина фронта пламени в несколько раз превышает микромасштаб Колмогорова;

4) фронтальные модели для предварительно перемешанного горения [26–28], основанные на оценке скорости турбулентного пламени. Стоит отметить, что первые оценки этой скорости для различных режимов турбулентного горения были получены еще К.И. Щелкиным [29] и А.Г. Прудниковым [30]. Во фронтальных моделях, как правило, делается предположение, что в случае сильной турбулентности, типичном для практических приложений, горение происходит в мгновенных тонких реакционных зонах, структура которых слабо отличается от реакционных зон в ламинарном пламени. Такая картина течения была получена в ряде экспериментальных данных как для предварительно перемешанного горения [31–33], так и неперемешанного горения [34], а также средствами прямого численного моделирования турбулентности [35].

Главной проблемой многих моделей ТСІ является узкая область их применимости. Авторам настоящей работы представляется весьма перспективным класс моделей реактора частичного перемешивания (PaSR), поскольку практически любой режим турбулентного горения можно рассматривать в терминах реакторов (вообще говоря, неидеальных), движущихся вместе с потоком и обменивающихся массой и теплом с окружающей средой. Поэтому можно рассчитывать на то, что модели класса PaSR могли бы быть использованы для описания сложных течений со смешанными режимами турбулентного горения, если определять их параметры с учетом реальных физических механизмов разных режимов горения. Однако современные модели этого класса данным свойством не обладают и не могут претендовать на универсаль-

ное описание турбулентного горения. В настоящей работе будут подробно описаны несколько современных моделей TCI класса PaSR.

Менее исследован 2-й канал TCI. Нередко считают, что разработка моделей 2-го канала TCI важна в RANS-моделях течения (на основе уравнений Рейнольдса) и не важна при использовании вихреразрешающих подходов к моделированию турбулентных течений, т.к. основную роль во 2-м канале TCI играет крупномасштабная турбулентность, которая в вихреразрешающих подходах описывается напрямую. Однако при описании течений в каналах и обтекания тел приходится применять гибридные вихреразрешающие методы [36], которые в пристеночной области течения переходят в моделирование на базе нестационарных уравнений RANS. В этом случае в пристеночной области учет 2-го канала TCI оказывается существенным.

Чаще всего используется гипотеза об изотропном характере переноса скалярных величин (энтальпии и массовых долей компонент смеси), и тогда 2-й канал TCI учитывают путем введения переменных турбулентных чисел Прандтля и Шмидта. Формула, выражающая турбулентное число Прандтля через характерные времена пульсаций скорости и скаляра, предложена в [37]. Алгебраические модели для турбулентных чисел Прандтля и Шмидта предложены, например, в [38,39]. Различные дифференциальные модели для турбулентных чисел Прандтля и Шмидта рассмотрены в [40]. Алгебраическая модель [39] и дифференциальная модель [41] предсказывают подобные распределения чисел Прандтля для эксперимента Берроуза и Куркова [42], включающие уменьшение турбулентного числа Прандтля вблизи фронта пламени. Тем не менее, более современная модель [43] не описывает данный эффект. Возможно, ошибкой модели [43] является отождествление характерных частот пульсаций скорости и скалярных параметров. Перспективные модели различных членов в уравнениях, которые используются при расчете турбулентных чисел Прандтля и Шмидта, описаны в работах [44–47].

В работе [48] описан подход к численному моделированию турбулентного горения в струйных течениях, в котором учитываются оба основных канала TCI. Для учета 1-го канала TCI задаются ФПВ концентраций и температуры, а для учета 2-го канала используется модель для переменных турбулентных чисел Прандтля и Шмидта, восходящая к работе [37]. К сожалению, использованный в [48] статистический метод учета 1-го канала TCI не учитывает физические особенности реальных турбулентных пламен; к тому же в [48] не учитываются химические источники в уравнениях для нахождения турбулентных чисел Прандтля и Шмидта.

Современные методы учета TCI требуют значительных компьютерных ресурсов, а точность описания течений с турбулентным горением остается довольно низкой. Разработанные методы описания TCI реализованы в коммерческих пакетах вычислительной аэродинамики (ANSYS CFX [49], FASTRAN [50] и др.), но применение этих методов для решения сложных практических задач требует высокой квалификации вычислителя, глубокого понимания физики течения, умения вторгаться в программу для повышения ее устойчивости и качества.

В связи с большими вычислительными затратами при расчете трехмерных турбулентных течений с горением приходится использовать упрощенные модели химической кинетики, что приводит к погрешностям. Последовательность химических процессов в турбулентном потоке определяет локализацию зон тепловыделения и играет существенную роль в формировании газодинамической структуры течения и практически значимых характеристик энергетических устройств. Поэтому исследование взаимодействия модели химической кинетики с другими математическими моделями (моделью турбулентности, моделью турбулентного горения) важно для правильного воспроизведения физических процессов турбулентного горения в расчетах.

По количеству компонентов и реакций модели химической кинетики можно условно разделить на четыре категории: детальные, скелетные, упрощенные и гло-

бальные. Детальные механизмы горения водорода в воздухе, не учитывающие окисление азота и реакции с участием атомов углерода, обычно содержат около 20 реакций между 9 компонентами (напр., [51]). Детальные механизмы для углеводородов (напр., GriMech 3.0 [52]) включают сотни компонент и тысячи реакций. Скелетные механизмы [53] получаются из детальных путем исключения несущественных для условий задачи веществ и реакций; для углеводородов они могут включать десятки компонент и десятки или сотни реакций. Например, скелетный механизм окисления метана [54] содержит 35 реакций между 15 активными компонентами, а его уточненный аналог [55] — 42 реакций между 17 активными компонентами. Дальнейшее упрощение механизма (за счет сужения области применимости) обеспечивают редуцированные кинетические схемы [56, 57], которые получаются из скелетных с помощью методов квазистационарного состояния и квазиравновесных реакций. Самыми компактными (но и наиболее узкими по применимости) являются глобальные кинетические схемы, которые не выводятся напрямую из других механизмов, а представляют собой небольшой набор брутто-реакций, заменяющих целые этапы реального кинетического процесса. Скорости этих брутто-реакций могут аппроксимироваться абстрактными выражениями, отличающимися от аррениусовых зависимостей (см., напр., [58–60]). Рассматриваются также квазиглобальные модели, в которых одна или несколько глобальных реакций (напр., реакция разложения углеводорода на CO и H₂O) дополнены элементарными реакциями между более простыми частицами (пример — [61]).

Модели химической кинетики играют важную роль в получении точного результата моделирования турбулентного горения. Одновременно с развитием технологий компьютерного моделирования совершались отдельные попытки исследования влияния различных моделей химической кинетики на результат моделирования турбулентного горения. В работе [62] сравнивалось влияние моделей химической кинетики с 8 реакциями и с 25 реакциями на результаты расчетов кругового сверхзвукового потока всасываемого воздуха и двумерной щели в стенке аэродинамической трубы. В работах [63, 64] изучалось влияние неопределенности коэффициентов скорости на вычисленные времена задержки воспламенения, скорости горения и интегральные характеристики течения. Позже в работе [65] были рассмотрены и сопоставлены три кинетики для описания процесса воспламенения перемешанной системы водород/воздух в сверхзвуковом слое смешения с температурами более 1000 K. В работе [66] на базе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье—Стокса (RANS) исследовано влияние модели химической кинетики на приподнятые сверхзвуковые пламена. Также в работе [67] было исследовано влияние модели химической кинетики на распределение компонентов в пристеночном высокоскоростном горении водорода в воздухе. В последнее десятилетие большое внимание привлекло сочетание метода крупных вихрей (LES) с химическими кинетическими моделями и моделью турбулентного горения. Влияние кинетики на моделирование течения с высокоскоростным горением водорода в канале было рассмотрено в [68–70].

В разд. 2 настоящей статьи представлена базовая система уравнений и замыкающие ее модели турбулентности и химической кинетики. В разд. 3 рассматриваются различные модели 1-го канала TCI класса PaSR. Разд. 4 посвящен модели для переменных турбулентных чисел Прандтля и Шмидта PrOm и ее сопряжению с моделью EPaSR.

Применение описанных моделей к воспроизведению конкретного эксперимента с дозвуковым предварительно перемешанным турбулентным горением будет представлено в следующей статье.

2. Математическая формулировка задачи. Подход Рейнольдса (RANS) основан на решении осредненных по времени нестационарных уравнений Навье—Стокса для

многокомпонентного сжимаемого реагирующего газа с конечными скоростями реакций:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{u}_k) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_k + \bar{p} \delta_{ik} + \tau_{ik}) = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{E}) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{\rho} \tilde{H} \tilde{u}_i + \tau_{ik} \tilde{u}_k + q_i + \sum_{j=1}^{N_{sp}} J_{ij} \Delta h_{0,j} \right) = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{Y}_j) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{Y}_j \tilde{u}_i + J_{ij}) = \tilde{s}_j \quad (2.4)$$

Здесь t – время, x_i ($i = 1, 2, 3$) – декартовы координаты, ρ – плотность, u_i ($i = 1, 2, 3$) – компоненты вектора скорости \vec{V} , $p = \rho R_0 T \sum_j Y_j / W_j$ – давление (R_0 – универсальная газовая постоянная, Y_j и W_j – массовая доля и молекулярный вес j -й компоненты газовой смеси), $E, H = E + p / \rho$ – полная энергия и полная энтальпия потока на единицу массы газа, \tilde{s}_j – химический источник массы j -й компоненты, связанный со скоростями химических реакций.

В статье принято суммирование по повторяющимся пространственным индексам. Черта сверху обозначает осреднение по Рейнольдсу, тильда – осреднение по Фавру.

Газ рассматривается как смесь N_{sp} компонент, так что необходимо решать N_{sp} уравнений переноса (2.4) для массовых долей \tilde{Y}_i . Фактически, можно было бы решать только $N_{sp} - 1$ уравнений, т.к. сумма \tilde{Y}_i всегда равна единице; но ради универсальности алгоритма лучше не исключать уравнение для какой-либо массовой доли. Этот подход требует процедуру перенормировки для поддержания единичной суммы \tilde{Y}_i на каждом шаге по времени в течение расчета.

Уравнения (2.2) и (2.3) содержат сумму напряжений Рейнольдса и вязких напряжений, которая представляется как

$$\tau_{ik} = \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_k'' - 2\tilde{\mu} \left(\tilde{S}_{ik} - \frac{1}{3} \frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_m} \delta_{ik} \right), \quad (2.5)$$

где $\tilde{S}_{ik} = (\partial \tilde{u}_i / \partial x_k + \partial \tilde{u}_k / \partial x_i) / 2$ – тензор скоростей деформации, μ – динамическая молекулярная вязкость, определяемая по формуле Сазерленда. Для воздуха

$$\mu = 1.72 \cdot 10^{-5} \left(\frac{T}{273} \right)^{3/2} \frac{273 + 122}{T + 122} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}$$

Уравнение (2.3) включает полную энтальпию $\tilde{H} = \tilde{u}_i \tilde{u}_i / 2 + \tilde{k} + \tilde{\Delta h}_0 + \tilde{h}_s$, где $\tilde{k} = \tilde{u}_i \tilde{u}_i'' / 2$ – кинетическая энергия турбулентности, $\tilde{\Delta h}_0 = \sum_j \tilde{Y}_j \Delta h_{0,j}$ – удельная энтальпия образования смеси, $\tilde{h}_s = \sum_j \tilde{Y}_j h_{s,j}(\tilde{T})$ – явная, или же тепловая энтальпия смеси. Для аппроксимации суммарных энтальпий отдельных компонент,

$h_j(T) = \Delta h_{0,j} + h_{s,j}(T) = \Delta h_{0,j} + \int_{T_0}^T c_{p,j}(T') dT'$, используется база данных [71]. Полная энергия \tilde{E} равна $\tilde{H} - \bar{p} / \bar{\rho}$. Включение энтальпии образования компонент в \tilde{H} и \tilde{E} позволяет устранить химический источник в правой части уравнения энергии (2.3). Теплоемкость смеси при постоянном давлении считается как $c_p = \sum_j \tilde{Y}_j dh_j / dT$.

Также (2.3) содержит сумму турбулентных и молекулярных потоков явной энтальпии:

$$q_i = \bar{\rho} \widetilde{h_s''} u_i'' - \frac{\tilde{\mu}}{\text{Pr}} \frac{\partial \tilde{h}_s}{\partial x_i} \quad (2.6)$$

Уравнения (2.3) и (2.4) содержат также сумму турбулентного и молекулярного потоков массы j -го компонента:

$$J_{ji} = \bar{\rho} \widetilde{Y_j''} u_i'' - \frac{\tilde{\mu}}{\text{Sc}} \frac{\partial \tilde{Y}_j}{\partial x_i} \quad (2.7)$$

Для замыкания системы уравнений (2.1)–(2.4) необходимы три физические модели: модель турбулентности, модель химической кинетики и модель взаимодействия турбулентности и горения (TCI – turbulence combustion interaction).

В рамках данной работы используются дифференциальные модели турбулентности класса $k - \omega$ (модель SST [72] и модель Baseline $k - \omega$ [73]). Эти модели основаны на гипотезе Буссинеска, а турбулентные потоки в (2.5)–(2.7) представлены по аналогии с молекулярными потоками:

$$\bar{\rho} \widetilde{u_i''} u_k'' \approx \frac{2}{3} \rho \tilde{k} \delta_{ik} - 2\mu_T \left(\tilde{S}_{ik} - \frac{1}{3} \frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_m} \delta_{ik} \right) \quad (2.8)$$

$$\bar{\rho} \widetilde{h_s''} u_i'' \approx - \frac{\mu_T}{\text{Pr}_T} \frac{\partial \tilde{h}_s}{\partial x_i} \quad (2.9)$$

$$\bar{\rho} \widetilde{Y_j''} u_i'' \approx - \frac{\mu_T}{\text{Sc}_T} \frac{\partial \tilde{Y}_j}{\partial x_i} \quad (2.10)$$

В моделях класса $k - \omega$ турбулентная вязкость считается следующим образом:

$$\mu_T = \rho F_\mu \frac{\tilde{k}}{\omega}, \quad (2.11)$$

где ω – характерная частота пульсаций скорости, а F_μ – пристеночная функция, которая равна единице в свободной турбулентности. В модели SST, $F_\mu = \min(1; 0.31\omega/(SF_2))$, где $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$, и F_2 – гладкая функция, которая равна единице у стенок и стремится к нулю при удалении от них. В модели Baseline $k - \omega$, $F_\mu = 1$.

Параметры \tilde{k} и ω определяются из решения дополнительных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{k}) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{\rho}\tilde{k}\tilde{u}_i - \left(\tilde{\mu} + \frac{\mu_T}{\text{Pr}_T^k} \right) \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_i} \right) &= \bar{\rho}(\tilde{P} - \tilde{\varepsilon}) \\ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\omega) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{\rho}\omega\tilde{u}_i - \left(\tilde{\mu} + \frac{\mu_T}{\text{Pr}_T^\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) &= \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} &= \bar{\rho} \left(C_{\omega 1} \frac{\tilde{P}}{\mu_T} - C_{\omega 2} \frac{\omega}{\tilde{k}} \tilde{\varepsilon} \right) + C_{\omega 3} \bar{\rho} (1 - F_1) \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \\ \frac{1}{\text{Pr}_T^k} &= \frac{1}{\text{Pr}_{T,1}^k} F_1 + \frac{1}{\text{Pr}_{T,2}^k} (1 - F_1), \quad \frac{1}{\text{Pr}_T^\omega} = \frac{1}{\text{Pr}_{T,1}^\omega} F_1 + \frac{1}{\text{Pr}_{T,2}^\omega} (1 - F_1) \\ C_{\omega 2} &= C_{\omega 2,1} F_1 + C_{\omega 2,2} (1 - F_1), \quad C_{\omega 1} = \frac{C_{\omega 2}}{C_\mu} - \frac{0.41^2}{\text{Pr}_T^\omega \sqrt{C_\mu}}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $\tilde{P} = -\widetilde{u_i'' u_k''} \cdot \partial \tilde{u}_i / \partial x_k$ – производство кинетической энергии турбулентности \tilde{k} , $\tilde{\varepsilon} = 0.09 \tilde{k} \omega$ – скорость диссипации \tilde{k} и F_1 – гладкая функция, которая равна единице у стенок и стремится к нулю при удалении от них, $\text{Pr}_{T,1}^k, \text{Pr}_{T,1}^\omega, C_{\omega,2,1}$ – значения эмпирических коэффициентов для пристеночной турбулентности, $\text{Pr}_{T,2}^k, \text{Pr}_{T,2}^\omega, C_{\omega,2,2}$ – для свободной турбулентности. Эмпирические коэффициенты $\text{Pr}_{T,1}^k, \text{Pr}_{T,1}^\omega, C_{\omega,2,1}, \text{Pr}_{T,2}^k, \text{Pr}_{T,2}^\omega, C_{\omega,2,2}$ и $C_{\omega,3}$ указаны в работе [72] (для модели SST) и в работе [73] (для модели Baseline $k - \omega$). Они отличаются только значениями коэффициента $\text{Pr}_{T,1}^k$, равного 1.176 в модели SST и 2 в Baseline $k - \omega$.

Модель химической кинетики определяет список веществ и формулы для скоростей реакций, $\dot{\omega}_j$, входящих в массовые источники компонентов \dot{s}_i в уравнении (2.4).

В настоящей работе используются модели обоих основных каналов TCI. Модели 1-го канала TCI (влияние турбулентности на средние скорости химических реакций, $\bar{\omega}_j$) будут обсуждаться в разд. 3. Если модели 1-го канала TCI не используются, $\bar{\omega}_j$ можно рассчитать путем подстановки средних параметров в стандартные формулы химических реакций (так называемое квазиламинарное приближение). В рамках гипотезы Буссинеска второй канал TCI можно описать введением переменных турбулентных чисел Прандтля и Шмидта (см. (2.9), (2.10)). Модель для переменных Pr_T и Sc_T будет рассмотрена в разделе 4. Если 2-й канал TCI не учитывается, то расчеты можно выполнить с постоянными числами $\text{Pr}_T = 0.9, \text{Sc}_T = 1.0$.

3. Модели 1-го канала TCI. На основе успешного опыта [24, 25] в данной работе для описания первого канала TCI используется класс моделей реакторов с частичным перемешиванием (PaSR).

Концепция PaSR рассматривает турбулентное течение с горением как двухфазный поток, состоящий из так называемых тонких структур, в которых происходит горение, и окружающей среды, в которой реакции отсутствуют. Экспериментальные данные подтверждают существование тонких структур, см. [20]. Тонкие структуры рассматриваются как реакторы, осуществляющие обмен массой и теплом с окружающей средой за счет диффузии. Параметры в тонких структурах будем обозначать верхним индексом “*”, а параметры окружающей среды индексом “0”. Практичнее решать уравнения для тонких структур и для средних параметров, обозначаемых чертой (осреднение по Рейнольдсу) и тильдой (осреднение по Фавру). Зная объемную долю тонких структур γ^* , можно выписать следующие соотношения между этими тремя типами условно осредненных параметров:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \gamma^* \rho^* + (1 - \gamma^*) \rho^0, \quad \bar{\rho} \tilde{Y}_j = \gamma^* \rho^* Y_j^* + (1 - \gamma^*) \rho^0 Y_j^0 \\ \bar{\rho} \sum_{j=1}^{N_{sp}} \tilde{Y}_j h_j(\tilde{T}) &= \gamma^* \rho^* \sum_{j=1}^{N_{sp}} Y_j^* h_j(T^*) + (1 - \gamma^*) \rho^0 \sum_{j=1}^{N_{sp}} Y_j^0 h_j(T^0) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Наиболее известными моделями этого класса являются Eddy Dissipation Concept (EDC) [20, 74] и PaSR [21]. Эти модели основаны на предположении, что время реакции в тонких структурах существенно меньше характерного времени изменения среднего потока. В этом случае состояние тонких структур является квазистационарным и описывается следующей системой алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \rho^* \frac{Y_j^* - Y_j^0}{\tau^*} &= \dot{s}_j \left(\rho^*, T^*, Y_1^*, \dots, Y_{N_{sp}}^* \right) \\ \sum_{j=1}^{N_{sp}} Y_j^* h_j(T^*) &= \sum_{j=1}^{N_{sp}} Y_j^0 h_j(T^0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Значение ρ^* / τ^* является средним потоком массы через единичный объем тонких структур, и τ^* может быть интерпретировано как характерное время смешения, определяющее скорость обмена тонких структур массой и теплом с окружающим пространством. Скорость газа, как в тонких структурах, так и в окружающей среде предполагается равной локальной средней скорости потока. Следовательно, естественно принять, что

$$\rho^* = \rho^0 = \bar{\rho} \quad (3.3)$$

Соотношение (3.3) используется в реализации подхода PaSR в программе **zFlare**, разработанной в ЦАГИ [75]. Тем не менее, в программе ANSYS Fluent© [49] используется другое предположение вместо (3.3):

$$\rho^* = \rho^0 = \bar{\rho} \quad (3.4)$$

Уравнения (3.1)–(3.2) образуют замкнутую систему алгебраических уравнений, позволяющую через заданные параметры осредненного потока $(\bar{\rho}, \tilde{T}, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_{N_{sp}})$ найти параметры газа в тонких структурах и в окружающей среде. После нахождения параметров газа в тонких структурах средние скорости химических реакций определяются по следующей формуле:

$$\bar{s}_j \approx \gamma^* \dot{s}_j(\rho^*, T^*, Y_1^*, \dots, Y_{N_{sp}}^*) = \gamma^* \rho^* \frac{Y_j^* - Y_j^0}{\tau^*} \quad (3.5)$$

В модели PaSR [21] объемная доля тонких структур γ^* и характерное время смешения газа в тонких структурах выражаются формулами

$$\gamma^* = \frac{\tau_{chem}}{\tau_{chem} + \tau^*}, \quad \tau^* = C_\tau \sqrt{\tau_T \tau_K}, \quad (3.6)$$

где τ_{chem} – характерное время реакции в тонких структурах, $\tau_T = \tilde{k} / \tilde{\varepsilon} \sim 1 / \omega$ – интегральный временной масштаб турбулентных пульсаций, а $\tau_K = \sqrt{\tilde{\nu}} / \tilde{\varepsilon}$ – микромасштаб Колмогорова. Отметим, что формулу (3.6) можно переписать в виде $\gamma^* = [1 + C_\tau \sqrt{Da / Ka}]^{-1}$, где $Da = \tau_T / \tau_{chem}$ и $Ka = \tau_{chem} / \tau_K = \sqrt{Re_T} / Da$ – числа Дамкелера и Карловица, сочетание которых определяет режим турбулентного горения [4]. Коэффициент C_τ в работе [21] принят равным единице.

Решение системы алгебраических уравнений (3.1)–(3.2) в **zFlare** реализовано с использованием установления по псевдовремени. Следующие уравнения интегрируются по псевдовремени t' до достижения стационарного состояния ($d / dt' \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} \rho^* \frac{dY_j^*}{dt'} + \rho^* \frac{Y_j^* - Y_j^0}{\tau^*} &= \dot{s}_j(\rho^*, T^*, Y_1^*, \dots, Y_{N_{sp}}^*) \\ \sum_{j=1}^{N_{sp}} Y_j^* h_j(T^*) &= \sum_{j=1}^{N_{sp}} Y_j^0 h_j(T^0) \end{aligned} \quad (3.7)$$

При интегрировании по псевдовремени используется формула (3.3).

В ANSYS Fluent© используется модификация модели PaSR – так называемая PFR (Plug Flow Reactor [76–78]), где (3.2) с допущением (3.4) заменяется на систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{dY_j^*}{dt'} &= \dot{s}_j \left(\bar{\rho}, T^*, Y_1^*, \dots, Y_{N_{sp}}^* \right) \\ \sum_{j=1}^{N_{sp}} Y_j^* h_j(T^*) &= \sum_{j=1}^{N_{sp}} Y_j^0 h_j(T^0) \end{aligned} \quad (3.8)$$

В начальный момент псевдовремени, $t' = 0$, параметры в тонких структурах принимаются равными параметрам окружающего газа: $Y_j^*(0) = Y_j^0$, $T^*(0) = T^0$. Интегрирование (3.8) по псевдовремени ведется в интервале $t' \in [0; \tau^*]$. В итоге, вместо (3.5) используется следующая формула:

$$\bar{s}_j \approx \gamma^* \int_0^{\tau^*} \dot{s}_j \left(\bar{\rho}, T^*(t'), Y_1^*(t'), \dots, Y_{N_{sp}}^*(t') \right) dt' = \gamma^* \bar{\rho} \frac{Y_j^*(\tau^*) - Y_j^0}{\tau^*} \quad (3.9)$$

В работах [22,79] была предложена расширенная модель PaSR (Extended PaSR – EPaSR). Для учета изменения параметров тонких структур в пространстве и во времени было предложено решать дополнительные уравнения в частных производных для параметров тонких структур:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\gamma^* \rho^* Y_j^*)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [\gamma^* (\rho^* Y_j^* \tilde{u}_i + J_{ji}^*)] &= \\ = -\gamma^* \rho^* \left(C_g \frac{\tilde{\epsilon}}{\bar{k}} (Y_j^* - Y_j^0) \right) + \gamma^* \rho^* \bar{s}_j \left(\rho^*, T^*, Y_1^*, \dots, Y_{N_{sp}}^* \right) + \\ + \frac{\dot{m} + |\dot{m}|}{2} Y_j^0 + \frac{\dot{m} - |\dot{m}|}{2} Y_j^*; \quad j = 1, \dots, N_{sp} - 1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\gamma^* \rho^* E^*)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\gamma^* \left(\rho^* E^* \tilde{u}_i + \bar{p} \tilde{u}_i + \tau_{ki} \tilde{u}_k + q_i^* + \sum_{j=1}^{N_{sp}} J_{ji}^* \Delta h_{0,j} \right) \right] &= \\ = -\gamma^* \rho^* C_g \frac{\tilde{\epsilon}}{\bar{k}} \sum_{j=1}^{N_{sp}} (Y_j^* h_j(T^*) - Y_j^0 h_j(T^0)) + \\ + \frac{\dot{m} + |\dot{m}|}{2} \sum_{j=1}^{N_{sp}} Y_j^0 h_j(T^0) + \frac{\dot{m} - |\dot{m}|}{2} \sum_{j=1}^{N_{sp}} Y_j^* h_j(T^*) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial(\gamma^* \rho^*)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [\gamma^* \rho^* \tilde{u}_i] = \dot{m}; \quad \dot{m} = -\rho^* \frac{\gamma^* - \gamma_{eq}^*}{\tau^*} \quad (3.12)$$

Константа C_g в релаксационных терминах (описывающая диффузионный обмен между тонкими структурами и окружающей средой) была выбрана равной 10.5, исходя из теоретических соображений [24]. Это было подтверждено параметрическими расчетами [80].

Слагаемые с множителем \dot{m} ответственны за изменение параметров вследствие обмена массы от тонких структур к окружающему газу и обратно. Объемная доля тонких структур, γ^* , определяется из уравнения (3.12), где $\gamma_{eq}^* = \tau_{chem} / (\tau_{chem} + \tau^*)$. На практике вместо решения уравнения (3.12) уравнение (3.10) решается также для $j = N_{sp}$. (Сумма уравнений (3.10) для $j = 1, 2, \dots, N_{sp}$ эквивалентна уравнению (3.12).) Вместе с системой (3.10)–(3.12) используется соотношение (3.3). Также предполагается, что турбулентная вязкость и турбулентные числа Прандтля и Шмидта для тон-

ких структур такие же, как и для среднего течения, и используются следующие формулы для диффузионных потоков:

$$q_i^* = - \left(\frac{\mu(T^*)}{Pr} + \frac{\mu_T}{Pr_T} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{N_{sp}} Y_j^* h_{s,j}(T^*) \right) \quad (3.13)$$

$$J_{ji}^* = - \left(\frac{\mu(T^*)}{Sc} + \frac{\mu_T}{Sc_T} \right) \frac{\partial Y_j^*}{\partial x_i} \quad (3.14)$$

4. Модели 2-го канала TCI. Модель PrOm [81] описывает турбулентный перенос на основе переменных турбулентных чисел Прандтля и Шмидта для потоков тепла и массы соответственно. Этот подход рассматривает турбулентное число Прандтля для произвольного скаляра f как функцию частоты пульсаций скорости ω и частоты пульсаций скаляра ω_f . Первая частота находится из уравнений для модели турбулентности класса $k - \omega$ (Baseline $k - \omega$ или SST). Для нахождения частоты пульсаций скаляра ω_f требуется решение дополнительных дифференциальных уравнений для среднего квадрата пульсаций скаляра $\overline{f''^2}$, а также для самой частоты пульсаций скаляра ω_f . Более предпочтительно решать отдельные дифференциальные уравнения для частот, поскольку асимптотическое поведение их решения вблизи стенки близко к реальному [2], и их низкорейнольдсовые версии не требуют искусственных эмпирических пристеночных коррекций.

Формула для турбулентного числа Прандтля была впервые предложена в работе [37]. Существуют различные способы получения этой формулы. Один из способов представлен в Приложении. Он основан на рассмотрении дифференциального уравнения для турбулентного потока скаляра $f''u_i''$. Обзор различных замыканий для этого уравнения представлен в Приложении. В результате применения этих замыканий и приравнивания нулю правой части уравнения для $f''u_i''$ можно получить следующую простую формулу для турбулентного числа Прандтля в приближении Буссинеска $\overline{f''u_i''} \approx - \frac{\mu_T}{\bar{\rho} Pr_T^f} \frac{\partial f}{\partial x_i}$:

$$Pr_T^f = C_\Phi \sqrt{\frac{\omega_f}{\omega}} \quad (4.1)$$

Для простоты определим частоту пульсаций скаляра по формуле, аналогичной формуле для частоты пульсаций скорости $\omega = \tilde{\varepsilon} / (C_\mu \tilde{k})$, $C_\mu = 0.09$:

$$\omega_f = \frac{\varepsilon_f}{0.09 \sigma_f}, \quad (4.2)$$

где $\sigma_f \equiv \overline{f''^2}$ – квадрат пульсаций скаляра и $\varepsilon_f = 2 \frac{\tilde{\mu}}{\bar{\rho}} \frac{\partial f''}{\partial x_j} \frac{\partial f''}{\partial x_j}$ – его диссипация.

Согласно измерениям [82] соотношение частот пульсаций скаляра и скорости варьируется в диапазоне от 0.67 до 2.38. По данным Сринивасана и др., в экспериментах для сдвиговых течений [83] число Прандтля варьируется от 0.4 до 1.1. Предположим, что наименьшее турбулентное число Прандтля 0.4 достигается при $\omega_f = 0.67\omega$, тогда, согласно формуле (4.1), $C_\Phi = 0.51$. Это значение будет в дальнейшем использоваться в данной статье.

Стоит отметить, что существует сильный разброс в оценке этой константы, например, в работе [37] предлагается значение C_Φ , равное 0.82. В диссертации [48], значение $C_\Phi = 0.52$ было получено путем применения соотношения между квадратом

пульсации нормальной к линии тока компоненты скорости и кинетической энергией турбулентности: $v_n''^2 / \bar{k} \approx 0.5$.

Точные уравнения для квадрата пульсации скаляра σ_f и его диссипации ϵ_f приведены ниже:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \sigma_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\bar{\rho} \sigma_f \tilde{u}_i + \bar{\rho} \widetilde{f''^2 u_i''} - \tilde{\mu} \frac{\partial \sigma_f}{\partial x_i} \right] = \\ = -2\bar{\rho} \widetilde{f'' u_k''} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_k} - 2\tilde{\mu} \frac{\partial f''}{\partial x_k} \frac{\partial f''}{\partial x_k} + 2\overline{f'' s_f} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \epsilon_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\bar{\rho} \epsilon_f \tilde{u}_i + \bar{\rho} \widetilde{\epsilon_f u_i''} - \tilde{\mu} \frac{\partial \epsilon_f}{\partial x_i} \right] = \\ = -4\tilde{\mu} \underbrace{\frac{\partial f''}{\partial x_m} \frac{\partial f''}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_m}}_{\text{EI}} - 4\tilde{\mu} \underbrace{\frac{\partial f''}{\partial x_m} \frac{\partial u_k''}{\partial x_m} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_k}}_{\text{EII}} - \\ - 4\tilde{\mu} \cdot \underbrace{\frac{\tilde{\mu}}{\bar{\rho}} \frac{\partial^2 f''}{\partial x_m \partial x_k} \frac{\partial^2 f''}{\partial x_m \partial x_k}}_{\text{EIII}} - 4\tilde{\mu} \underbrace{\frac{\partial f''}{\partial x_m} \frac{\partial f''}{\partial x_k} \frac{\partial u_k''}{\partial x_m}}_{\text{EIV}} + 4 \underbrace{\frac{\tilde{\mu}}{\bar{\rho}} \frac{\partial f''}{\partial x_m} \frac{\partial s_f''}{\partial x_m}}_{\text{EIV}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

В правой части уравнения для скалярной диссипации (4.4) имеются четыре незамкнутых члена. Слагаемое EI ответственно за производство ϵ_f градиентами среднего поля скорости. Однако, это одно из самых противоречивых слагаемых, так как оно может также вести себя как сток, особенно для положительной дивергенции скорости и для расширяющихся топологий тензора градиента скорости $\partial \tilde{u}_i / \partial x_j$ (как было показано в [45]). Замыкание, предложенное в текущей статье, разрешает отрицательные значения этого слагаемого при помощи добавления к стандартной аппроксимации (основанной на производстве кинетической энергии турбулентности \bar{P}) дополнительного слагаемого, отрицательного и квадратичного по дивергенции скорости, как показано ниже:

$$\text{EI} = \bar{\rho} \frac{\epsilon_f}{\bar{k}} \left\{ C_{P2} \bar{P} - C_{P3} \mu_T \left(\frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_m} \right)^2 \right\}$$

Здесь $C_{P2} = 1.45$ [40]. Значение коэффициента C_{P3} было получено авторами в параметрических расчетах эксперимента [42]. Второе слагаемое препятствует чрезмерному росту Pr_T^f в областях с повышенными значениями дивергенции скорости, например, области с косым скачком уплотнения и отраженной волной. Слагаемое, обозначенное как EII, представляет собой производство ϵ_f вследствие среднего градиента скаляра и является сверткой среднего градиента скаляра с вектором диссипации турбулентного потока скаляра: $\text{FIII}_k = 4\mu \partial f'' / \partial x_m \partial u_k'' / \partial x_m$, рассмотренным в Приложении. Пренебрегая вторым слагаемым в выражении для FIII_k (П.2), и применяя формулу Буссинеска для потока скаляра, можно предложить следующее замыкание для слагаемого EII:

$$\text{EII} = C_{P1} \frac{\epsilon_f}{\sigma_f} 2 \frac{\mu_T}{\text{Pr}_T^f} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_m} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_m} = C_{P1} \bar{\rho} \frac{\epsilon_f}{\sigma_f} P_f, \quad C_{P1} = \frac{0.46}{(\text{Pr}_T^f)^2}$$

Два отдельных слагаемых в EIII представляют собой деструкцию ϵ_f из-за кривизны изоповерхностей поля скаляра и за счет механизма турбулентного растяжения,

соответственно. Замыкание этих членов для режима флеймлетов рассматривалось в [47]. Авторы считают, что слагаемое, ответственное за турбулентное растяжение, должно быть линейным по скалярной диссипации, тогда как член, связанный с кривизной изоповерхностей скаляра, должен быть квадратичным. Несмотря на наличие зависимости от турбулентного числа Рейнольдса, эта модель упускает один важный факт, который был получен для пассивного скаляра в [44]. Согласно экспериментальным данным для сдвиговых потоков [83] анизотропия поля средней скорости приводит к резкому уменьшению турбулентного числа Прандтля. С другой стороны, Ши, Ламли и Яника [44] вывели зависимость квадратичной деструкции от второго инварианта II тензора анизотропии a_{ij} , где

$$a_{ij} = \frac{\overline{u_i' u_j'}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij}, \quad II = a_{ij} a_{ij}$$

Принимая во внимание это исследование, предложенное замыкание для члена ЕIII имеет вид:

$$\text{ЕIII} = -\bar{\rho} \varepsilon_f \left\{ C_{D1} \frac{\varepsilon_f}{\sigma_f} + C_{D2} \bar{\rho} \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} \right\}; \quad C_{D1} = 1 + \frac{3}{4} b_{ij} b_{ij}, \quad b_{ij} = \frac{a_{ij}}{2}, \quad C_{D2} = 0.9$$

Тензор анизотропии рассчитывается по формуле Буссинеска (2.8). Следовательно, первый коэффициент в замыкании выражается как

$$C_{D1} = 1 + \frac{3}{4} S_{ij}^{dil} S_{ij}^{dil} / \omega^2,$$

$$\text{где } S_{ij}^{dil} = \tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_n} \delta_{ij}.$$

Слагаемое EIV рассматривалось в [46] для активного скаляра в случае предварительно перемешанного пламени и выражается через скорость ламинарного фронта пламени и включается в деструкцию на основе кривизны изоповерхностей скаляра, квадратичную по скалярной диссипации.

Другой подход, который используется в текущей статье, заключается в том, чтобы выразить EIV как функцию от химического источника $Q_f^{\text{chem}} \equiv 2f''\dot{s}_f$. Итоговое замыкание записывается следующим образом:

$$\text{EIV} = C_{w1} \frac{\varepsilon_f}{\sigma_f} Q_f^{\text{chem}}; \quad C_{w1} = 0.4$$

Замыкание Q_f^{chem} на основе модели EPaSR рассмотрено ниже.

Уравнения для частоты пульсаций скаляра ω_f могут быть легко выведены из (4.3) и (4.4), применяя соотношение (4.2).

Ради краткости, мы, наконец, рассмотрим уравнения, описывающие турбулентный перенос явной энтальпии h_s и массовых долей Y_i . Согласно (2.9) и (2.10), они требуют определения турбулентного числа Прандтля Pr_T и турбулентного числа Шмидта Sc_T . Эти числа могут быть посчитаны по формулам, аналогичным (4.1):

$$\text{Pr}_T = C_\Phi \sqrt{\frac{\omega_h}{\omega}}, \quad \text{Sc}_T = C_\Phi \sqrt{\frac{\omega_c}{\omega}} \quad (4.5)$$

В этих формулах (см. (4.2)):

$$\omega_h = \frac{\varepsilon_h}{0.09\sigma_h}, \quad \omega_c = \frac{\varepsilon_c}{0.09\sigma_c} \quad (4.6)$$

Здесь $\sigma_h = \widetilde{h_s''^2}$, $\sigma_c = \sum_{j=1}^{N_{sp}} \widetilde{Y_j''^2}$, и ε_h , ε_c – их диссипации соответственно. Следовательно, определение турбулентного числа Прандтля Pr_T и турбулентного числа Шмидта Sc_T требует решения четырех дополнительных дифференциальных уравнений для σ_h , ω_h , σ_c и ω_c . Эти уравнения приведены ниже:

$$\frac{\partial \bar{\rho} \sigma_h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\bar{\rho} \sigma_h \tilde{u}_k - D_T^h \frac{\partial \sigma_h}{\partial x_k} \right] = 2 \frac{\mu_T}{Pr_T^h} \left(\frac{\partial \tilde{h}_s}{\partial x_k} \right)^2 - \bar{\rho} \varepsilon_h + 2 \overline{\tilde{h}_s'' \dot{s}_h} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \omega_h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\bar{\rho} \omega_h \tilde{u}_k - D_T^h \frac{\partial \omega_h}{\partial x_k} \right] = & \bar{\rho} \frac{\omega_h}{\sigma_h} \left(C_{p1}^h - 1 \right) 2 \frac{\mu_T}{Pr_T^h} \left(\frac{\partial \tilde{h}_s}{\partial x_k} \right)^2 + \\ & + C_{p2} \mu_T \frac{\omega_h}{\tilde{k}} 2 S_{ij}^{dil} S_{ij}^{dil} - C_{p3} \mu_T \frac{\omega_h}{\tilde{k}} \left(\frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_m} \right)^2 + \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} & + (1 - C_{D1}) C_{\mu} \bar{\rho} \omega_h^2 - C_{D2} \bar{\rho} \frac{\tilde{\varepsilon} \omega_h}{\tilde{k}} - 2 \left(1 - \frac{C_{W1}}{2} \right) \frac{\omega_h}{\sigma_h} \overline{\tilde{h}_s'' \dot{s}_h} \\ \frac{\partial \bar{\rho} \sigma_c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\bar{\rho} \sigma_c \tilde{u}_k - D_T^c \frac{\partial \sigma_c}{\partial x_k} \right] = & 2 \frac{\mu_T}{Sc_T} \sum_{j=1}^{N_{sp}} \frac{\partial \tilde{Y}_j}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{Y}_j}{\partial x_k} - \bar{\rho} \varepsilon_c + 2 \sum_{j=1}^{N_{sp}} \overline{\tilde{Y}_j'' \dot{s}_j} \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \omega_c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\bar{\rho} \omega_c \tilde{u}_k - D_T^c \frac{\partial \omega_c}{\partial x_k} \right] = & \bar{\rho} \frac{\omega_c}{\sigma_c} \left(C_{p1}^c - 1 \right) 2 \frac{\mu_T}{Sc_T} \sum_{j=1}^{N_{sp}} \frac{\partial \tilde{Y}_j}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{Y}_j}{\partial x_k} + \\ & + C_{p2} \mu_T \frac{\omega_c}{\tilde{k}} 2 S_{ij}^{dil} S_{ij}^{dil} - C_{p3} \mu_T \frac{\omega_c}{\tilde{k}} \left(\frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_m} \right)^2 + \\ & + (1 - C_{D1}) \bar{\rho} C_{\mu} \omega_c^2 - C_{D2} \bar{\rho} \frac{\varepsilon \omega_c}{\tilde{k}} - 2 \left(1 - \frac{C_{W1}}{2} \right) \frac{\omega_c}{\sigma_c} \sum_{j=1}^{N_{sp}} \overline{\tilde{Y}_j'' \dot{s}_j} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Здесь использованы обозначения $D_T^h = \tilde{\mu} / Pr + \mu_T / Pr_T$ и $D_T^c = \tilde{\mu} / Sc + \mu_T / Sc_T$. Коэффициенты C_{p1}^h и C_{p1}^c равны $0.46 / Pr_T^2$ и $0.46 / Sc_T^2$, соответственно.

Слагаемое с перекрестной диффузией $\mu_T \partial \tilde{f}''^2 / \partial x_k \partial \omega_f / \partial x_k$, которое появляется при переходе от уравнений класса $\sigma_f - \varepsilon_f$ к уравнениям класса $\sigma_f - \omega_f$, подлежит удалению из моделей для частоты пульсаций. Дело в том, что это слагаемое ведет к нефизичному росту турбулентного числа Прандтля в слоях смешения и струях, что противоречит экспериментальным данным для сдвиговых течений [82].

Химические источники $Q_h^{\text{chem}} = \overline{2 \tilde{h}_s'' \dot{s}_h}$ и $Q_c^{\text{chem}} = 2 \sum_{j=1}^{N_{sp}} \overline{\tilde{Y}_j'' \dot{s}_j}$ представляют собой корреляции между флуктуациями скаляра и их источниками, где \dot{s}_h – скорость тепловыделения, \dot{s}_j – источник массы для j -го компонента, они определяются через скорости реакций $\dot{\omega}_k$ и разность стехиометрических коэффициентов в левой и правой частях уравнения прямой реакции: $\Delta v_{jr} = v_{jr}^f - v_{jr}^b$:

$$\dot{s}_j = -W_j \sum_{r=1}^{N_{\text{react}}} \left(\Delta v_{jr} \dot{\omega}_r^f - \Delta v_{jr} \dot{\omega}_r^b \right), \quad \dot{s}_h = - \sum_{j=1}^{N_{sp}} \Delta h_j^0 \dot{s}_j$$

Здесь W_j — молярная масса j -го компонента. В прямых реакциях $\Delta v_{jr} > 0$ для исходных веществ и $\Delta v_{jr} < 0$ для продуктов.

Существует множество подходов к моделированию корреляций источника скаляра вида $Q_h^{\text{chem}} = 2\overline{h_s''\dot{s}_h}$ и $Q_C^{\text{chem}} = 2\sum_{j=1}^{N_{sp}}\overline{Y_j''\dot{s}_j}$. Простейший подход, описанный в [41, 84], — алгебраическая модель, выражающая корреляцию $2\overline{f''\dot{s}_f}$ через средние источники, \dot{s}_f , и среднеквадратичное отклонение пульсаций скаляра, $\sqrt{\sigma_f}$. Был проведен [85] анализ предварительно перемешанного турбулентного пламени на основе функций плотности вероятности (ФПВ), предложены аппроксимации данных слагаемых, основанные на переменной прогресса реакции. В текущей статье используется модель, основанная на методе PaSR для первого канала TCI:

$$\sum_{j=1}^{N_{sp}}\overline{Y_j''\dot{s}_j} = \gamma^* \sum_{j=1}^{N_{sp}}(Y_j^* - \widetilde{Y}_j)\dot{s}_j^*, \quad \overline{h_s''\dot{s}_h} = \gamma^*(h_s^* - \widetilde{h}_s)\dot{s}_h^* \quad (4.11)$$

Это замыкание должно в основном оставаться положительным. Действительно, если j -й компонент представляет собой реагент, расходующийся при горении, то наиболее вероятно, что в тонких структурах массовая доля реагента меньше, чем в окружающем пространстве: $Y_j^* < Y_j^0$ и, следовательно, $Y_j^* < \widetilde{Y}_j$ (см. (3.1)). В то же время, мы можем ожидать, что $\dot{s}_j^* < 0$. Следовательно, произведение $(Y_j^* - \widetilde{Y}_j)\dot{s}_j^*$ будет в основном положительным. Легко проверить, что оно также будет преимущественно положительным, если j -й компонент представляет собой продукт, образующийся при горении. Следовательно, в большинстве случаев $Q_C^{\text{chem}} = 2\sum_{j=1}^{N_{sp}}\overline{Y_j''\dot{s}_j} > 0$. Аналогич-

ный вывод может быть сделан для Q_h^{chem} , так как явная энтальпия смеси должна увеличиваться вследствие тепловыделения. Однако, отрицательное значение корреляции тоже возможно, если состав и явная энтальпия в окружающем газе формируются не только вследствие обмена с тонкими структурами, но также подвержены сильному влиянию диффузии от соседних ячеек расчетной области. Чтобы предотвратить возможные осцилляции, которые не могут и не должны разрешаться в рамках RANS подхода, следует ограничить значение замыкания для Q^{chem} нулем снизу.

Граничные условия для модели PrOm сравнительно простые. Квадрат пульсаций скаляра на стенке принимается равным нулю $\sigma_h|_w = 0$, $\sigma_c|_w = 0$. Градиенты турбулентных чисел Прандтля и Шмидта предполагаются равными нулю на стенке: $\partial \text{Pr}_T^h / \partial n|_w = 0$, $\partial \text{Sc}_T / \partial n|_w = 0$. Эти условия совместно с соотношением (4.5) позволяют связать граничные значения частоты пульсации скаляра с граничным условием для ω .

Было также обнаружено [86], что модель градиентной диффузии Буссинеска может нарушать критерий реализуемости турбулентного потока. Критерий реализуемости формулируется согласно неравенству Шварца:

$$\widetilde{f''u_i''f''u_i''} \leq 2\tilde{k}\sigma_f$$

Принимая во внимание аппроксимацию Буссинеска $\widetilde{f''u_i''} \approx -\frac{\tilde{k}}{\omega \text{Pr}_T^f} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}$ и соотношение (4.1), получаем нижнюю границу для Pr_T^f :

$$\text{Pr}_T^f \geq \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\tilde{k}}{\sigma_f} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}}$$

Заключение. В следующей статье авторы представят применение моделей двух каналов ТСИ и моделей химической кинетики, которые были описаны выше, к численному моделированию эксперимента с дозвуковым турбулентным горением предварительно перемешанного метана и воздуха.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят рецензента за внимательное прочтение работы и сделанные замечания и предложения, учтенные при доработке статьи. Представленные в статье новые результаты получены при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (Договор № 14.G39.31.0001 от 13 февраля 2017).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соломатин Р.С.* Численное моделирование процессов высокоскоростного смешения и горения в неоднородных топливно-воздушных смесях / Дисс. на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2022, 191 с.
2. *Wilcox D.C.* Turbulence Modeling for CFD. La Cañada: DCW Industries, 2006. 544 p.
3. *Колмогоров А.Н.* Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Сер. Физ. 1942. Т. 6. № 1–2. С. 56–58.
4. *Poinsot T., Veynante D.* Theoretical and Numerical Combustion. Flouertown: RT Edwards Inc., 2005. 522 p.
5. *Peters N.* Turbulent Combustion. Cambridge: Univ. Press, 2000. 304 p.
6. *Lipatnikov A.* Fundamentals of Premixed Turbulent Combustion. Boca Raton: CRC Press, 2012. 548 p.
7. *Щетинков Е.С.* Физика горения газов. М.: Наука, 1965. 292 с.
8. *Kuznetsov V.R., Sabel'nikov V.A.* Turbulence and Combustion. New York: Hemisphere, 1990. 384 p.
9. *Su J., Liu A., Xiao H., Luo K., Fan J.* Entropy: an inspiring tool for characterizing turbulence–combustion interaction in swirling flames via direct numerical simulations of non-premixed and premixed flames // Entropy. 2023. V. 25. № 8. P. 1151.
10. *Borghi R.* Turbulent combustion modeling // Progress in Energy&Combust. Sci. 1988. V. 14. № 4. P. 245–292.
11. *Klimenko A.Y., Bilger R.W.* Conditional moment closure for turbulent combustion // Progress in Energy&Combust. Sci. 1999. V. 25. № 6. P. 595–687.
12. *Baurle R.A., Girimaji S.S.* Assumed PDF turbulence-chemistry closure with temperature-composition correlations // Combust.&Flame. 2003. V. 134. № 1–2. P. 131–148.
13. *Зимонт В.Л., Мещеряков Е.А., Сабельников В.А.* Простая модель для учета молекулярного смешения при турбулентном горении неперемешанных газов // Физика горения и взрыва. 1978. Т. 14. № 3. С. 55–62.
14. *Molchanov A.M., Yanyyshev D.S., Bykov L.V.* Influence of turbulent fluctuations on non-equilibrium chemical reactions in the flow // J. of Phys.: Conf. Ser. IOP. 2017. V. 891. № 1. Art. No. 012106.
15. *Мещеряков Е.А., Сабельников В.А.* Горение водорода в сверхзвуковом турбулентном потоке в канале при спутной подаче горючего и окислителя // Физика горения и взрыва. 1981. Т. 17. № 2. С. 55–64.
16. *Peters N.* Laminar flamelet concepts in turbulent combustion // Int. Symp. on Combustion. Elsevier, 1988. V. 21. № 1. P. 1231–1250.
17. *Zheng L.L., Bray K.N.C.* The application of new combustion and turbulence models to H₂-air nonpremixed supersonic combustion // Combust.&Flame. 1994. V. 99. № 2. P. 440–448.
18. Flamelet Model Application for Non-Premixed Turbulent Combustion: NAS 1.26: 202176 / ed. by *Secundov A. et al.* Washington D.C.: NASA, 1996.
19. *Piffaretti S.G.* Flame age model: a transient laminar flamelet approach for turbulent diffusion flames. Дисс. на соискание уч. ст. доктора физ.-мат. наук. Цюрих: Швейцарский федеральный институт технологии, 2007. 194 с.
20. *Magnussen B.F.* The eddy dissipation concept: A bridge between science and technology // ECCOMAS Conf. on Comput. Combust. Lisbon, Portugal. 2005.

21. *Chomiak J., Karlsson A.* Flame liftoff in diesel sprays // Int. Symp. on Combust. Elsevier. 1996. V. 26. № 2. P. 2557–2564.
22. *Sabelnikov V., Fureby C.* LES combustion modeling for high Re flames using a multi-phase analogy // Combust.&Flame. 2013. V. 160. № 1. P. 83–96.
23. *Moule Y., Sabelnikov V., Mura A.* Highly resolved numerical simulation of combustion in supersonic hydrogen–air coflowing jets // Combust.&Flame. 2014. V. 161. № 10. P. 2647–2668.
24. *Petrova N., Sabelnikov V., Bertier N.* Numerical simulation of a backward-facing step combustor using RANS/Extended Partially Stirred Reactor model // EUCASS-2015. 17 p.
25. *Власенко В.В., Ноздрачев А.Ю., Сабельников В.А., Ширяева А.А.* Анализ механизмов стабилизации турбулентного горения по данным расчетов с применением модели реактора частичного перемешивания // Горение и взрыв. 2019. Т. 12. № 1. С. 43–57.
26. *Zimont V.L.* Gas premixed combustion at high turbulence // Turbulent Flame Closure Combust. Model. Experim. Thermal&Fluid Sci. 2000. V. 21. № 1–3. P. 179–186.
27. *Lipatnikov A.N., Chomiak J.* Turbulent flame speed and thickness: phenomenology, evaluation, and application in multi-dimensional simulations // Progr. in Energy&Combust. Sci. 2002. V. 28. № 1. P. 1–74.
28. *Августинович В.Г., Куценко Ю.Г.* Создание и применение методологии комплексного расчета малоэмиссионной камеры сгорания // Изв. вузов. Авиаци. техника. 2011. № 2. С. 37–42.
29. *Шелкин К.И.* К вопросу о турбулентном горении и фазах горения в двигателе // Изв. АН СССР. ОТН. 1953. № 3. С. 463–471.
30. *Раушенбах Б.В., Белый С.А., Беспалов И.В., Бородачев В.Я., Волинский М.С., Прудников А.Г.* Физические основы рабочего процесса в камерах сгорания воздушно-реактивных двигателей. М.: Машиностроение, 1964. 526 с.
31. *Chen Y.C., Mansour M.S.* Investigation of flame broadening in turbulent premixed flames in the thin-reaction-zones regime // Int. Symp. on Combustion. 1998. V. 27. P. 811–818.
32. *Skiba A.W., Wabel T.M., Carter C.D., Hammack S.D., Temme J.E., Driscoll J.F.* Premixed flames subjected to extreme levels of turbulence. Part I: Flame structure and a new measured regime diagram // Combust.&Flame. 2018. V. 189. P. 407–432.
33. *Wabel T.M., Skiba A.W., Driscoll J.F.* Evolution of turbulence through a broadened preheat zone in a premixed piloted Bunsen flame from conditionally-averaged velocity measurements // Combust.&Flame. 2018. V. 188. P. 13–27.
34. *Ratner A., Driscoll J.F., Donbar J.M., Carter C.D., Mullin J.A.* Reaction zone structure of non-premixed turbulent flames in the intensely wrinkled regime // Proc. Combust. Inst. 2000. V. 28. P. 245–252.
35. *Sabelnikov V.A., Yu R., Lipatnikov A.N.* Thin reaction zones in highly turbulent medium // Int. J. Heat Mass Transfer. 2019. V. 128. P. 1201–1205.
36. *Heinz S.* A review of hybrid RANS-LES methods for turbulent flows: Concepts and applications // Progr. in Aerospace Sci. 2020. V. 114. P. 100–597.
37. *Nagano Y., Kim C.* A two-equation model for heat transport in wall turbulent shear flows // J. of Heat Transfer. 1988. V. 110. P. 583–589.
38. *Wikström P.M., Wallin S., Johansson A.V.* Derivation and investigation of a new explicit algebraic model for the passive scalar flux // Phys. of Fluids. 2000. V. 12. № 3. P. 688–702.
39. *Goldberg U.* Variable turbulent Schmidt and Prandtl number modeling // Eng. App. Comp. Fluid Mech. 2010. V 4. P. 511–520.
40. *Sanders J.P.H., Gokalp I.* Scalar dissipation rate modelling in variable density turbulent axisymmetric jets and diffusion flames // Phys. of Fluids. 1998. V. 10. № 4. P. 938–948.
41. *Xiao X., Hassan H.A., Baurle R.A.* Modeling scramjet flows with variable turbulent Prandtl and Schmidt numbers // AIAA J. 2006. V. 45. P. 1415–1423.
42. *Burrows M.C., Kurkov A.P.* An analytical and experimental study of supersonic combustion of hydrogen in vitiated air stream // AIAA J. 1973. V. 11. № 9. P. 1217–1218.

43. *Hoste J.J.O.E., Fechter S., Karl S., Hannemann K.* Study of a supersonic reacting wall jet with a variable turbulent Prandtl and Schmidt number approach // *Aerospace Sci.&Technol.* 2020. V. 106. Art. No. 106070.
44. *Shih T., Lumley J., Janicka J.* Second-order modelling of a variable-density mixing layer // *J. of Fluid Mech.* 1987. V. 180. P. 93–116.
45. *Danish M., Sinha S., Girimaji S.* Influence of flow topology and dilatation on scalar mixing in compressible turbulence // *J. of Fluid Mech.* 2016. V. 793. P. 633–655.
46. *Mantel T., Borghi R.* A new model of premixed wrinkled flame propagation based on a scalar dissipation equation // *Combust.&Flame.* 1994. V. 96. № 4. P. 443–457.
47. *Mura A., Borghi R.* Towards an extended scalar dissipation equation for turbulent premixed combustion // *Combust.&Flame.* 2003. V. 133. № 1–2. P. 193–196.
48. *Тушканов А.С.* Термически и химически неравновесные процессы в факеле маршевого двигателя твердого топлива / Дисс. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук. М.: МАИ, 2019. 167 с.
49. ANSYS CFD. <https://www.ansys.com/products/fluids#tab1-2>
50. CFD-FASTRAN. <https://www.esi.com.au/software/cfd-ace/fastran>
51. *Zettervall N., Fureby C.* A computational study of ramjet, scramjet and dual-mode ramjet combustion in combustor with a cavity flameholder // *AIAA Aerospace Sci. Meeting.* AIAA paper. 2018: 1146. 14 p.
52. *Smith G.P., Golden D.M., Frenklach M., Moriarty N.W., Eiteneer B., Goldenberg M., Bowman C.T., Hanson R.K., Song S., William C. Gardiner J., Lissianski V.V., Qin Z.* GRI-MECH 3.0. http://www.me.berkeley.edu/gri_mech/
53. *Лебедев А.В., Окунь М.В., Баранов А.Е., Деминский М.А., Потапкин Б.В.* Систематическая процедура упрощения кинетических механизмов химических процессов // *Химич. физика и мезоскопия.* 2011. Т. 13. № 1.
54. *Smooke M.D.* Reduced Kinetic Mechanisms and Asymptotic Approximations for Methane-Air Flames: A Topical Volume. Lecture Notes in Physics. Vol. 384. Berlin: Springer, 1991. 251 p.
55. *Larsson A., Zettervall N., Hurtig T., Nilsson E., Ehn A., Petersson P., Alden M., Larfeldt J., Fureby C.* Skeletal methane–air reaction mechanism for large eddy simulation of turbulent microwave-assisted combustion // *Energy&Fuels.* 2017. V. 31. № 2. P. 1904–1926.
56. *Peters N., Rogg B.* Reduced Kinetic Mechanisms for Applications in Combustion Systems. Berlin: Springer Sci.&Business Media, 1993. 362 p.
57. *Goussis D.* On the construction and use of reduced chemical kinetic mechanisms produced on the basis of given algebraic relations // *J. of Comput. Phys.* 1996. V. 128. № 2. P. 261–273.
58. *Westbrook C.K., Dryer F.L.* Chemical kinetic modeling of hydrocarbon combustion // *Progr. in Energy&Combust. Sci.* 1984. V. 10. № 1. P. 1–57.
59. *Franzelli B., Riber E., Gicquel L.Y., Poinot T.* Large eddy simulation of combustion instabilities in a lean partially premixed swirled flame // *Combustion and Flame.* 2012. V. 159. № 2. P. 621–637.
60. *Басевич В.Я., Беляев А.А., Фролов С.М.* Глобальные кинетические механизмы для расчета турбулентных реагирующих течений. Ч. 1. Основной химический процесс тепло-выделения // *Хим. физ.* 1998. Т. 7. № 9. С. 112–128.
61. *Kundu K., Penko P., Yang S.* Reduced reaction mechanisms for numerical calculations in combustion of hydrocarbon fuels // 36th AIAA Aerospace Sci. Meeting&Exhibit. AIAA paper. 1998. V. 98. Art. No. 0803. 16 p.
62. *Evans J.S., Schexnayder Jr.C.J.* Influence of chemical kinetics and unmixedness on burning in supersonic hydrogen flames // *AIAA J.* 1980. V. 18. № 2. P. 188–193.
63. *An Analytical Study of the Hydrogen-Air Reaction Mechanism with Application to Scramjet Combustion: NASA Tech. Rep. 2791 / ed. by Jachimowski C.J.* Washington D.C.: NASA, 1988.
64. *Chemical Kinetic Analysis of Hydrogen-Air Ignition and Reaction Times: NASA Tech. Rep. 1856 / ed. by Rogers R.C., Schexnayder C.J.* Washington D.C.: NASA, 1981.
65. *Ju Y., Niioka T.* Reduced kinetic mechanism of ignition for nonpremixed hydrogen/air in a supersonic mixing layer // *Combust.&Flame.* 1994. V. 99. № 2. P. 240–246.

66. Gerlinger P., Nold K., Aigner M. Investigation of hydrogen-air reaction mechanisms for supersonic combustion // 44th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conf.&Exhibit. 2008.
67. Shiryayeva A., Vlasenko V., Anisimov K. Development and application of numerical technology for simulation of different combustion types in high-speed viscous gas turbulent flows // 44th AIAA Fluid Dyn. Conf. Amer. Inst. of Aeron.&Astron. 2014.
68. Berglund M., Fedina E., Fureby C., Tegnér J., Sabel'nikov V. Finite rate chemistry large-eddy simulation of self-ignition in supersonic combustion ramjet // AIAA J. 2010. V. 48. № 3. P. 540–550.
69. Liu B., He G.-Q., Qin F., An J., Wang S., Shi L. Investigation of influence of detailed chemical kinetics mechanisms for hydrogen on supersonic combustion using large eddy simulation // Int. J. of Hydrogen Energy. 2019. V. 44. № 10. P. 5007–5019.
70. Fureby C. Subgrid models, reaction mechanisms, and combustion models in large-eddy simulation of supersonic combustion // AIAA J. 2021. V. 59. № 1. P. 215–227.
71. Third Millennium Ideal Gas and Condensed Phase Thermochemical Database for Combustion (with Update from Active Thermochemical Tables). Rep. No. ANL-05/20 / ed. by Burcat A., Ruscic B. Argonne, IL: Argonne National Lab (ANL), 2005. 414 p.
72. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model // Turbul., Heat Mass Transfer. 2003. V. 4. № 1. P. 625–632.
73. Menter F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA J. 1994. V. 32. № 8. P. 1598–1605.
74. Magnussen B.F. On the structure of turbulence and a generalized eddy dissipation concept for chemical reaction in turbulent flow // 19th AIAA Aerospace Sci. Meeting: Missouri. USA, 1981. 7 p.
75. Трошин А.И., Молев С.С., Власенко В.В., Михайлов С.В., Бахнэ С., Матяш С.В. Моделирование турбулентных течений на основе подхода iddes с помощью программы *zflare* // Вычисл. мех. сплошн. сред. 2023. Т. 16 № 2. С. 203–218.
76. Lewandowski M.T., Ertesvåg I.S. Analysis of the eddy dissipation concept formulation for MILD combustion modelling // Fuel. 2019. V. 224. P. 687–700.
77. Li Z., Cuoci A., Sadiki A., Parente A. Comprehensive numerical study of the Adelaide jet in Hot-Coflow burner by means of RANS and detailed chemistry // Energy. 2017. V. 139. P. 555–570.
78. De A., Oldenhof E., Sathiah P., Roekaerts D. Numerical simulation of delft-jet-in-hot-coflow (djhc) flames using the eddy dissipation concept model for turbulence–chemistry interaction // Flow, Turbul.&Combust. 2011. V. 87. P. 537–567.
79. Moule Y., Sabel'nikov V., Mura A. Modelling of self-ignition processes in supersonic non premixed coflowing jets based on a PaSR approach // 17th AIAA Int. Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conf. 2011. P. 2396.
80. Ширяева А.А. Моделирование высокоскоростных течений со смешанными режимами турбулентного горения на основе трехмерных уравнений Рейнольдса. Дисс. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук. Москва: МФТИ, 2019. 217 с.
81. Балабанов Р.А., Власенко В.В., Ноздрачев А.Ю. Описание предварительно перемешанного турбулентного горения в канале со ступенькой при помощи моделей класса PaSR // Физика горения и взрыва. Т. 60. № 4. С. 44–55.
82. Warhaft Z., Lumley J. An experimental study of the decay of temperature fluctuations in grid-generated turbulence // J. of Fluid Mech. 1978. V. 88. № 4. P. 659–684.
83. Sreenivasan K.R., Antonia R.A., Chambers A.J. On the variation of the turbulent Prandtl number in shear flows // Int. Commun. in Heat&Mass Transfer. 1984. V. 11. № 5. P. 497–501.
84. Keistler P., Xiao X., Hassan H., Rodriguez C. Simulation of supersonic combustion using variable turbulent Prandtl/Schmidt number formulation // 36th AIAA Fluid Dyn. Conf.&Exhibit. 2006. 3733.
85. Libby P.A. A non-gradient theory for premixed turbulent flames // in: Mech. Today: Vol. 5. New York: Pergamon, 1980. P. 215–232.
86. Shih T.-H., Lumley J.L., Chen J.-Y. Second-order modeling of a passive scalar in a turbulent shear flow // AIAA J. 1990. V. 28. № 4. P. 610–617.
87. Dakos T., Gibson M.M. On Modelling the Pressure Terms of the Scalar Flux Equations. Berlin;Heidelberg: Springer, 1987.

88. *Craft T.J., Ince N.Z., Launder B.E.* Recent developments in second-moment closure for buoyancy-affected flows // *Dyn. of Atmosph.&Oceans*. 1996. V. 23. № 1–4. P. 99–114.
89. Johns Hopkins University Turbulence Database. <http://turbulence.pha.jhu.edu/> (дата обращения: 22 декабря 2023)
90. *Balabanov R., Usov L., Troshin A., Vlasenko V., Sabelnikov V.* A differential subgrid stress model and its assessment in large eddy simulations of non-premixed turbulent combustion // *Appl. Sci.* 2022. V. 12. Art No. 8491.

Приложение. Для вывода алгебраической формулы для турбулентного числа Прандтля необходимо рассмотреть уравнение для турбулентного потока скаляра $f''u_i''$. Незамкнутое уравнение записывается так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho} \widetilde{f''u_i''})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{\rho} \widetilde{f''u_i''u_j''} + \bar{\rho} \widetilde{u_j''u_i''f''} + \overline{p'f\delta_{ij}} - \bar{\mu} \frac{\partial \widetilde{f''u_i''}}{\partial x_j} \right] = \\ - \underbrace{\bar{\rho} \widetilde{f''u_j''} \frac{\partial \widetilde{u_i''}}{\partial x_j}}_{\text{FI}} - \underbrace{\bar{\rho} \widetilde{u_i''u_j''} \frac{\partial \widetilde{f''}}{\partial x_j}}_{\text{FII}} + \underbrace{\overline{p' \frac{\partial f''}{\partial x_i}}}_{\text{FIII}} - \underbrace{2\bar{\mu} \frac{\partial f''}{\partial x_j} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}_{\text{FIV}} + \underbrace{\overline{u_i' \dot{s}_f}}_{\text{FV}} \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

Первое слагаемое в правой части, обозначенное как FI, является производством градиентами среднего поля скорости и градиентом среднего поля скаляра, эти слагаемые не требуют замыкания. Слагаемые, отмеченные FII, являются корреляцией пульсации давления с градиентом скаляра, которое тоже обычно разделяют на медленную и быструю часть. Первая часть ведет себя как медленная изотропизация турбулентного потока, которая похожа на диссипацию и пропорциональна самому потоку. Вторая часть члена FII более сложная, она также считается быстрой частью обменного слагаемого и представляет собой реакцию направления турбулентного потока на пульсации давления. Физическая интерпретация этого слагаемого заключается в его стремлении повернуть вектор турбулентного потока скаляра в направлении, параллельном направлению собственного вектора бездивергентного тензора скоростей деформации $S_{ij}^{dil} = \tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_m} \delta_{ij}$, который соответствует собственному

числу, приводящему к разрежению α^S , которое положительно и удовлетворяет условию $\alpha^S > \beta^S > \gamma^S$. Последнее собственное число γ^S отрицательное, тогда как знак β^S определяет форму трехмерного сжатия-растяжения жидкой частицы. Подобные рассуждения, анализирующие топологию градиентов скорости, использовались для описания производства скалярной диссипации в [45]. Простое замыкание для члена FII записывается так:

$$\text{FII}_i = -C_{\Phi 1} \bar{\rho} \frac{1}{T_f} \widetilde{f''u_i''} + C_{\Phi 2} \bar{\rho} S_{ij}^{dil} \widetilde{f''u_j''} \quad (\text{П.2})$$

Здесь $C_{\Phi 1} = 3.0$ и $C_{\Phi 2} = 1.0$; T_f – смешанный масштаб времени, $T_f^{-1} \approx \sqrt{\omega_f \omega}$. Конечно, это замыкание нужно лишь для вывода алгебраической модели. Существует множество работ, где представлены очень изощренные модели (см., напр., [86–88]). Простое замыкание (П.2), которое предлагается в этой статье, было протестировано на DNS базе данных турбулентного течения Рэлея–Тейлора с плавучестью [89] и продемонстрировало коэффициент корреляции, близкий к 0.4–0.45, тогда как гораздо более сложные модели не превышали значения коэффициента корреляции, равного 0.6. Коэффициент корреляции определяется следующим образом:

$$\frac{\sum_{ijk}^{N_{\text{cells}}} \text{FII}_m^{\text{real}} \text{FII}_m^{\text{model}}}{\sqrt{\sum_{ijk}^{N_{\text{cells}}} (\text{FII}_m^{\text{real}})^2 \sum_{ijk}^{N_{\text{cells}}} (\text{FII}_m^{\text{model}})^2}}$$

Процедура калибровки, похожая на градиентный спуск, описана в статье [90]. Согласно полученным коэффициентам корреляции упрощение, вносимое уравнением (П.2), можно считать приемлемым.

Следующее слагаемое, обозначаемое как FIII, является анизотропной диссипацией. Оно может быть описано более точно с дополнительным слагаемым, которое является сверткой потока скаляра с тензорами напряжений Рейнольдса:

$$\text{FIII}_i = \bar{\rho}\omega_f \left(C_{\epsilon 1} \widetilde{f'' u_i''} - C_{\epsilon 2} \frac{\widetilde{u_i'' u_j''}}{\tilde{k}} \widetilde{f'' u_j''} \right) \quad (\text{П.3})$$

Значения коэффициентов $C_{\epsilon 1}$ и $C_{\epsilon 2}$ были подобраны для оптимального описания базы данных DNS турбулентного течения Рэлея–Тейлора [89] и смогли воспроизвести точное значение FIII_i с коэффициентом корреляции 0.73. Эффекты мелкомасштабной анизотропии в этом конкретном потоке были связаны с эффектами плавучести, что привело к появлению второго дополнительного слагаемого. Значения $C_{\epsilon 1}$ и $C_{\epsilon 2}$ оказались низкими, поэтому членом FIII_i можно пренебречь при создании алгебраической модели. Легко продемонстрировать, что этот член пренебрежимо мал для изотропного случая, поскольку для изотропной турбулентности корреляция между градиентами скаляра и градиентами скорости определяется мелкомасштабными вихрями, для которых не существует выделенного направления градиента скаляра, поэтому мелкомасштабная скорость и скалярные градиенты статистически независимы, что приводит к нулевому пределу этого члена при числе Рейнольдса, стремящемся к бесконечности. Более того, этот член на самом деле является вектором и не должен иметь выделенного направления для мелкомасштабной изотропной турбулентности, поэтому им пренебрегают в случае пассивного скаляра. Однако он может быть существенным из-за мелкомасштабной анизотропии, которую можно наблюдать для активного скаляра в факельном режиме горения, где число Карловица $\text{Ka} = \tau_{\text{chem}} / \tau_k$ меньше единицы. Рассматривая режим расширенного фронта пламени, где $\text{Ka} \gg 1$ и много микромасштабных вихрей присутствует внутри фронта пламени, можно допустить локальную изотропность и пренебречь членом FIII_i .

Слагаемое FV не существует для пассивного скаляра. Его замыкание для активного скаляра в режиме предварительно перемешанных флеймлетов рассмотрено Либби в [85], где предполагается Гауссова функция плотности вероятности скорости и добавляя ее зависимость от переменной прогресса реакции. Замыкание для этого источника на основе подхода PaSR, аналогичное (4.11), может быть сформулировано следующим образом:

$$\text{FIV}_i = \overline{u_i' \dot{s}_f} = \gamma^* (u_i^* - \tilde{u}_i) \dot{s}_f (T^*, f^*) \quad (\text{П.4})$$

В рамках классического подхода PaSR, которое используется в настоящей статье, скорость газа в тонких структурах и в окружающем пространстве одинакова: $u_i^* = u_i^0 = \tilde{u}_i$. Тогда (П.4) дает $\text{FIV}_i = u_i' \dot{s}_f \approx 0$.

Однако для предварительно перемешанных пламен, используя некоторые идеи из статьи Либби [85], можно предложить более точную трактовку этого члена, основанную на PaSR:

$$\text{FIV}_i = \overline{u_i' \dot{s}_f} = C_B \gamma^* \left(1 - \gamma^* \right) \frac{\delta_f}{\tau^*} n_i \dot{s}_f (T^*, f^*) \quad (\text{П.5})$$

Здесь n_i – нормаль к фронту пламени, направленная в сторону горячей области, δ_f – толщина пламени, τ^* – характерное время протекания газа через тонкие струк-

туры. Это замыкание легко получить, предположив совместную ФПВ, которая зависит как от мгновенной скорости, так и от дискретной случайной величины $\hat{\gamma}$, которая равна единице в тонких структурах и нулю в окружающем пространстве. Среднее значение скорости, которое присутствует в гауссовом распределении, зависит от $\hat{\gamma}$ следующим образом:

$$\tilde{u}_i(\hat{\gamma}) = \tilde{u}_i^0 + \theta \left(\hat{\gamma} - \frac{1}{2} \right) \frac{\delta_f}{\tau} n_i, \quad \tilde{u}_i^0 = \tilde{u}_i - \gamma^* \frac{\delta_f}{\tau} n_i$$

Здесь θ — функция Хэвисайда. Интегрируя $u_i' \dot{s}_f$ с совместной функцией плотности вероятности $\text{PDF}(\tilde{u}, \hat{\gamma})$, можно получить аналитическое выражение (П.5). Процесс вывода аналогичен описанному в статье Либби [85].

Наконец, вернемся к выводу алгебраического выражения для турбулентного числа Прандтля. Будем рассматривать f как пассивный скаляр, тогда членами FIII и FIV можно пренебречь. Для получения решения необходимо приравнять сумму слагаемых FI и FII в правой части уравнения к нулю. Очевидно, что производство градиентами скорости полностью компенсируется быстрой частью обменного члена, если в обоих случаях брать бездивергентные тензоры скорости деформации. Таким образом, два оставшихся слагаемых — это производство градиентами скаляра и изотропизация:

$$C_{\Phi 1} \bar{\rho} T_f^{-1} \widetilde{f'' u_i''} = -\bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_j''} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}$$

Для случая изотропных пульсаций скорости ($\widetilde{u_1''^2} = \widetilde{u_2''^2} = \widetilde{u_3''^2} = 2\tilde{k}/3$) это выражение превращается в формулу Буссинеска, которую можно приравнять к формуле градиентной диффузии с турбулентным числом Прандтля:

$$\widetilde{f'' u_i''} = -\bar{\rho} \frac{2}{C_{\Phi 1}} \tilde{k} T_f \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} = -\frac{\mu_T}{Pr_T^f} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}; \quad \mu_T = \bar{\rho} \frac{\tilde{k}}{\omega}$$

Тогда турбулентное число Прандтля определяется следующим образом:

$$Pr_T^f = \frac{C_{\Phi 1}}{2} \frac{1}{\omega T_f} = C_{\Phi} \sqrt{\frac{\omega_f}{\omega}}$$

Models for Description of Subsonic Flows with Premixed Turbulent Combustion in Channels

V. V. Vlasenko^{a,b,#}, R. A. Balabanov^{a,b}, Wenchao Liu^b, S. S. Molev^a, V. A. Sabelnikov^a

^aTsAGI, Zhukovsky, Russia

^bMIPT, Dolgoprudny, Russia

[#]e-mail: vlasenko.vv@yandex.ru

The review of works on numerical modeling of turbulent combustion is presented. The article presents the discussion about three classes of models, which are necessary for closure of mathematical model of flow (turbulence model, model of chemical kinetics, model of turbulence combustion interaction). The description of mathematical approach for modeling of subsonic flows with premixed turbulent combustion in channels within Reynolds equations with closure based on $k-\omega$ turbulence models is provided. Various models of turbulent combustion interaction based on PaSR (Partially Stirred Reactor) — quasi-steady models PaSR and PFR, and also model with memory effects EPaSR. The new model for influence of combustion on turbulent heat and mass transfer intensity — variable turbulent Prandtl and Schmidt model, compatible with $k-\omega$ turbulence models

and PaSR based turbulence combustion interaction models. The appendix includes the description of differential model for turbulent scalar flux, which was a priori calibrated against DNS database of turbulent Rayleigh–Taylor flow.

Keywords: premixed turbulent combustion; numerical modeling; turbulence combustion interaction.

REFERENCES

1. *Solomatin R.S.* Numerical modeling of high speed mixing and combustion processes in heterogeneous fuel–air mixtures. Phd Thesis. Moscow: Keldysh Inst. of Appl. Math., 2022, 191 p. (in Russian)
2. *Wilcox D.C.* Turbulence modeling for CFD. La Cañada: DCW Industries, 2006. 544 p.
3. *Kolmogorov A.N.* Equations of turbulent motion in an incompressible fluid // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1942, vol. 6, no. 1–2, pp. 56–58. (in Russian)
4. *Poinsot T., Veynante D.* Theoretical and Numerical Combustion. Flourtown: RT Edwards Inc., 2005. 522 p.
5. *Peters N.* Turbulent Combustion. Cambridge: Univ. Press, 2000. 304 p.
6. *Lipatnikov A.* Fundamentals of Premixed Turbulent Combustion. Boca Raton: CRC Press, 2012. 548 p.
7. *Schetnikov E.S.* Physics of Gas Combustion. Moscow: Nauka, 1965. 292 p. (in Russian)
8. *Kuznetsov V.R., Sabel'nikov V.A.* Turbulence and Combustion. N.Y.: Hemisphere, 1990. 384 p.
9. *Su J., Liu A., Xiao H., Luo K., Fan J.* Entropy: an inspiring tool for characterizing turbulence–combustion interaction in swirling flames via direct numerical simulations of non-premixed and premixed flames // *Entropy*, 2023, vol. 25, no. 8, pp. 1151.
10. *Borghi R.* Turbulent combustion modeling // *Progr. in Energy&Combust. Sci.*, 1988, vol. 14, no. 4, pp. 245–292.
11. *Klimenko A.Y., Bilger R.W.* Conditional moment closure for turbulent combustion // *Progr. in Energy&Combust. Sci.*, 1999, vol. 25, no. 6, pp. 595–687.
12. *Baurle R.A., Girimaji S.S.* Assumed PDF turbulence–chemistry closure with temperature–composition correlations // *Combust.&Flame*, 2003, vol. 134, no. 1–2, pp. 131–148.
13. *Zimont V.L., Meshcheryakov E.A., Sabel'nikov V.A.* A simple model for calculation of molecular mixing in the turbulent combustion of unmixed gases // *Combust., Explos.&Shock Waves*, 1978, vol. 14, no. 3, pp. 315–320.
14. *Molchanov A.M., Yanyushev D.S., Bykov L.V.* Influence of turbulent fluctuations on non-equilibrium chemical reactions in the flow // *J. of Physics: Conf. Ser. IOP*, 2017, vol. 891, no. 1, art. no. 012106.
15. *Meshcheryakov E.A., Sabel'nikov V.A.* Combustion of hydrogen in a supersonic turbulent flow in a channel with simultaneous delivery of fuel and oxidant // *Combust., Explos.&Shock Waves*, 1981, vol. 17, no. 2, pp. 159–167.
16. *Peters N.* Laminar flamelet concepts in turbulent combustion // *Int. Symp. on Combustion*. Elsevier, 1988. vol. 21. no. 1. pp. 1231–1250.
17. *Zheng L.L., Bray K.N.C.* The application of new combustion and turbulence models to H₂–air nonpremixed supersonic combustion // *Combust.&Flame*, 1994, vol. 99, no. 2, pp. 440–448.
18. Flamelet model application for non-premixed turbulent combustion: NAS 1.26: 202176 / ed. by *Secundov A. et al.* Washington D.C.: NASA, 1996.
19. *Piffaretti S.G.* Flame age model: a transient laminar flamelet approach for turbulent diffusion flames. Ph.D. Thesis. Zurich: Swiss Federal Inst. of Technol., 2007. 194 p.
20. *Magnussen B.F.* The eddy dissipation concept: A bridge between science and technology // *ECCOMAS Conf. on Comput. Combust.*, Lisbon, 2005.
21. *Chomiak J., Karlsson A.* Flame liftoff in diesel sprays // *Int. Symp. on Combust.*, Elsevier, 1996, vol. 26, no. 2, pp. 2557–2564.
22. *Sabelnikov V., Fureby C.* LES combustion modeling for high Re flames using a multi-phase analogy // *Combust.&Flame*, 2013, vol. 160, no. 1, pp. 83–96.
23. *Moule Y., Sabelnikov V., Mura A.* Highly resolved numerical simulation of combustion in supersonic hydrogen–air coflowing jets // *Combust.&Flame*, 2014, vol. 161, no. 10, pp. 2647–2668.
24. *Petrova N., Sabelnikov V., Bertier N.* Numerical simulation of a backward-facing step combustor using RANS/Extended Partially Stirred Reactor model // *EUCASS-2015*. 17 p.

25. *Vlasenko V.V., Nozdrachev A.Yu., Sabelnikov V.A., Shirayeva A.A.* Analysis of stabilization mechanisms of turbulent combustion on the data of calculations with application of partially stirred reactor // *Combust.&Explos.*, 2019, vol. 12, no. 1, pp. 43–57. (in Russian)
26. *Zimont V.L.* Gas premixed combustion at high turbulence // *Turbulent Flame Closure Combust. Model. Experim. Thermal&Fluid Sci.*, 2000, vol. 21, no. 1–3, pp. 179–186.
27. *Lipatnikov A.N., Chomiak J.* Turbulent flame speed and thickness: phenomenology, evaluation, and application in multi-dimensional simulations // *Progr. in Energy&Combust. Sci.*, 2002, vol. 28, no. 1, pp. 1–74.
28. *Avgustinovich V.G., Kutsenko Y.G.* Creation and application of combined calculation methodology for low emission combustion chamber // *Izv. vuzov. Rus. Aeron.*, 2011, vol. 54, no. 2, pp. 170–178.
29. *Schelkin K.I.* On the issue of turbulent combustion and combustion phases in the engine. // *Izv. AN SSSR. OTN*, 1953, no. 3, pp. 463–471. (in Russian)
30. *Rauschenbach B.V., Belyi S.A., Bespalov I.V., Borodachev V.Ya., Volynskiy M.S., Prudnikov A.G.* The Physical Basis of the Working Process in the Combustion Chambers of Air-Jet Engines. Moscow: Mashinostroenie, 1964. 526 p. (in Russian)
31. *Chen Y.C., Mansour M.S.* Investigation of flame broadening in turbulent premixed flames in the thin-reaction-zones regime // *Int. Symp. on Combustion*, 1998, vol. 27, pp. 811–818.
32. *Skiba A.W., Wabel T.M., Carter C.D., Hammack S.D., Temme J.E., Driscoll J.F.* Premixed flames subjected to extreme levels of turbulence part I: Flame structure and a new measured regime diagram // *Combust.&Flame*, 2018, vol. 189, pp. 407–432.
33. *Wabel T.M., Skiba A.W., Driscoll J.F.* Evolution of turbulence through a broadened preheat zone in a premixed piloted Bunsen flame from conditionally-averaged velocity measurements // *Combust.&Flame*, 2018, vol. 188, pp. 13–27.
34. *Ratner A., Driscoll J.F., Donbar J.M., Carter C.D., Mullin J.A.* Reaction zone structure of non-premixed turbulent flames in the intensely wrinkled regime // *Proc. Combust. Inst.*, 2000, vol. 28, pp. 245–252.
35. *Sabelnikov V.A., Yu R., Lipatnikov A.N.* Thin reaction zones in highly turbulent medium // *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2019, vol. 128, pp. 1201–1205.
36. *Heinz S.* A review of hybrid RANS-LES methods for turbulent flows: Concepts and applications // *Progr. in Aerospace Sci.*, 2020, vol. 114, pp. 100–597.
37. *Nagano Y., Kim C.* A two-equation model for heat transport in wall turbulent shear flows // *J. of Heat Transfer*, 1988, vol. 110, pp. 583–589.
38. *Wikström P.M., Wallin S., Johansson A.V.* Derivation and investigation of a new explicit algebraic model for the passive scalar flux // *Phys. of Fluids*, 2000, vol. 12, no. 3, pp. 688–702.
39. *Goldberg U.* Variable turbulent Schmidt and Prandtl number modeling // *Engng. App. Comp. Fluid Mech.*, 2010, vol. 4, pp. 511–520.
40. *Sanders J.P.H., Gokalp I.* Scalar dissipation rate modelling in variable density turbulent axisymmetric jets and diffusion flames // *Phys. of Fluids*, 1998, vol. 10, no. 4, pp. 938–948.
41. *Xiao X., Hassan H.A., Baurle R.A.* Modeling scramjet flows with variable turbulent Prandtl and Schmidt numbers // *AIAA J.*, 2006, vol. 45, pp. 1415–1423
42. *Burrows M.C., Kurkov A.P.* An analytical and experimental study of supersonic combustion of hydrogen in vitiated air stream // *AIAA J.*, 1973, vol. 11, no. 9, pp. 1217–1218.
43. *Hoste J.J.O.E., Fechter S., Karl S., Hannemann K.* Study of a supersonic reacting wall jet with a variable turbulent Prandtl and Schmidt number approach // *Aerospace Sci.&Technol.*, 2020, vol. 106, art. no. 106070.
44. *Shih T., Lumley J., Janicka J.* Second-order modelling of a variable-density mixing layer // *J. of Fluid Mech.*, 1987, vol. 180, pp. 93–116.
45. *Danish, M., Sinha, S., Girimaji, S.* Influence of flow topology and dilatation on scalar mixing in compressible turbulence // *J. of Fluid Mech.*, 2016, vol. 793, pp. 633–655.
46. *Mantel T., Borghi R.* A new model of premixed wrinkled flame propagation based on a scalar dissipation equation // 1994, vol. 96, no. 4, pp. 443–457.
47. *Mura A., Borghi R.* Towards an extended scalar dissipation equation for turbulent premixed combustion // *Combust.&Flame*, 2003, vol. 133, no. 1–2, pp. 193–196.
48. *Tushkanov A.S.* Thermally and chemically unsteady processes in jet of solid fuel propulsion engine. Phd Thes. Moscow: Moscow Aviation Institute, 2019. 167 p. (in Russian)
49. ANSYS CFD // <https://www.ansys.com/products/fluids#tab1-2>

50. CFD-FASTRAN // <https://www.esi.com.au/software/cfd-ace/fastran>
51. Zettervall N., Fureby C. A computational study of ramjet, scramjet and dual-mode ramjet combustion in combustor with a cavity flameholder // AIAA Aerospace Sci. Meeting, AIAA paper, 2018, vol. 1146, 14 p.
52. Smith G.P., Golden D.M., Frenklach M., Moriarty N.W., Eiteneer B., Goldenberg M., Bowman C.T., Hanson R.K., Song S., William C., Gardiner J., Lissianski V.V., Qin Z. GRI-MECH 3.0. http://www.me.berkeley.edu/gri_mech/
53. Lebedev A.V., Okun M.V., Baraniv A.E., Deminsky M.A., Potapkin B.V. Systematic procedure of kinetic mechanisms reduction of chemical processes // Chem. Phys. & Mesoscopy, 2011, vol. 13, no. 1. (in Russian)
54. Smooke M.D. Reduced Kinetic Mechanisms and Asymptotic Approximations for Methane-Air Flames: A Topical Volume. Lecture Notes in Physics. Vol. 384. Berlin: Springer, 1991. 251 p.
55. Larsson A., Zettervall N., Hurtig T., Nilsson E., Ehn A., Petersson P., Alden M., Larfeldt J., Fureby C. Skeletal methane-air reaction mechanism for large eddy simulation of turbulent microwave-assisted combustion // Energy & Fuels, 2017, vol. 31, no. 2, pp. 1904–1926.
56. Peters N., Rogg B. Reduced kinetic mechanisms for applications in combustion systems. Berlin: Springer Science & Business Media. 1993. 362 p.
57. Goussis D. On the construction and use of reduced chemical kinetic mechanisms produced on the basis of given algebraic relations // J. of Comput. Phys., 1996, vol. 128, no. 2, pp. 261–273.
58. Westbrook C.K., Dryer F.L. Chemical kinetic modeling of hydrocarbon combustion // Progr. in Energy & Combust. Sci., 1984, vol. 10, no. 1, pp. 1–57.
59. Franzelli B., Riber E., Gicquel L.Y., Poinso T. Large eddy simulation of combustion instabilities in a lean partially premixed swirled flame // Combust. & Flame, 2012, vol. 159, no. 2, pp. 621–637.
60. Basevich V.Ya., Belyaev A.A., Frolov S.M. Global kinetic mechanisms for calculation of turbulent reacting flows. P. 1. Basic chemical process of heat release // Chem. Phys., 1998, vol. 7, no. 9, pp. 112–128. (in Russian)
61. Kundu K., Penko P., Yang S. Reduced reaction mechanisms for numerical calculations in combustion of hydrocarbon fuels // 36th AIAA Aerospace Sci. Meeting & Exhibit, AIAA paper, 1998, vol. 98, no. 0803. 16 p.
62. Evans J.S., Schexnayder Jr. C.J. Influence of chemical kinetics and unmixedness on burning in supersonic hydrogen flames // AIAA J., 1980, vol. 18, no. 2, pp. 188–193.
63. An analytical study of the hydrogen-air reaction mechanism with application to scramjet combustion: NASA Tech. Rep. 2791 / ed. by Jachimowski C.J. Washington D.C.: NASA, 1988.
64. Chemical kinetic analysis of hydrogen-air ignition and reaction times: NASA Tech. Rep. 1856 / Ed. by Rogers R.C., Schexnayder C.J. Washington D.C.: NASA, 1981.
65. Ju Y., Niioka T. Reduced kinetic mechanism of ignition for nonpremixed hydrogen/air in a supersonic mixing layer // Combust. & Flame, 1994, vol. 99, no. 2, pp. 240–246.
66. Gerlinger P., Nold K., Aigner M. Investigation of hydrogen-air reaction mechanisms for supersonic combustion // 44th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conf. & Exhibit., 2008.
67. Shiryaeva A., Vlasenko V., Anisimov K. Development and Application of Numerical Technology for simulation of different combustion types in high-speed viscous gas turbulent flows // 44th AIAA Fluid Dyn. Conf. Amer. Inst. of Aeron. & Astron., 2014.
68. Berglund M., Fedina E., Fureby C., Tegnér J., Sabel'nikov V. Finite rate chemistry large-eddy simulation of self-ignition in supersonic combustion ramjet // AIAA J., 2010, vol. 48, no. 3, pp. 540–550.
69. Liu B., He G.-Q., Qin F., An J., Wang S., Shi L. Investigation of influence of detailed chemical kinetics mechanisms for hydrogen on supersonic combustion using large eddy simulation // Int. J. of Hydrogen Energy, 2019, vol. 44, no. 10, pp. 5007–5019.
70. Fureby C. Subgrid models, reaction mechanisms, and combustion models in large-eddy simulation of supersonic combustion // AIAA J., 2021, vol. 59, no. 1, pp. 215–227.
71. Third millenium ideal gas and condensed phase thermochemical database for combustion (with update from active thermochemical tables): Rep. No. ANL-05/20 / ed. by Burcat A., Ruscic B. Argonne, IL: Argonne National Lab (ANL), 2005. 414 p.
72. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model // Turbul., Heat Mass Transfer, 2003, vol. 4, no. 1, pp. 625–632.

73. *Menter F.R.* Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // *AIAA J.*, 1994, vol. 32, no. 8, pp. 1598–1605.
74. *Magnussen B.F.* On the structure of turbulence and a generalized eddy dissipation concept for chemical reaction in turbulent flow // 19th AIAA Aerospace Sci. Meeting: Missouri. USA, 1981. 7 p.
75. *Troshin A.I., Molev S.S., Vlasenko V.V., Mikhailov S.V., Bakhne S., Matyash S.V.* Modeling of turbulent flows on the basis of ideas method in *zflare* program // *Comput. Contin. Mech.*, 2023, vol. 16, no. 2, pp. 203–218. (in Russian)
76. *Lewandowski M.T., Ertesvåg I.S.* Analysis of the eddy dissipation concept formulation for MILD combustion modelling // *Fuel*, 2019, vol. 224, pp. 687–700.
77. *Li Z., Cuoci A., Sadiki A., Parente A.* Comprehensive numerical study of the Adelaide jet in Hot-Coflow burner by means of RANS and detailed chemistry // *Energy*, 2017, vol. 139, pp. 555–570.
78. *De A., Oldenhof E., Sathiah P., Roekaerts D.* Numerical simulation of delft-jet-in-hot-coflow (djhc) flames using the eddy dissipation concept model for turbulence–chemistry interaction// *Flow, Turbul.&Combust.*, 2011, vol. 87, pp. 537–567.
79. *Moule Y., Sabel'nikov V., Mura A.* Modelling of self-ignition processes in supersonic non premixed coflowing jets based on a PaSR approach // 17th AIAA Int. Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conf., 2011, pp. 2396.
80. *Shiryaeva A.A.* Modeling of high speed flows with mixed regimes of turbulent combustion on the basis of three dimensional Reynolds equations. Phd Thes. Moscow: MIPT, 2019. 217 p. (in Russian)
81. *Balabanov R.A., Vlasenko V.V., Nozdrachev A.Yu.* Description of premixed turbulent combustion in a channel with a step using partially stirred reactor models // *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2024, vol. 60, no. 4, pp. 460–470.
82. *Warhaft Z., Lumley J.* An experimental study of the decay of temperature fluctuations in grid-generated turbulence // *J. of Fluid Mech.*, 1978, vol. 88, no. 4, pp. 659–684.
83. *Sreenivasan K.R., Antonia R.A., Chambers A.J.* On the variation of the turbulent Prandtl number in shear flows // *Int. Commun. in Heat&Mass Transfer*, 1984, vol. 11, no. 5, pp. 497–501.
84. *Keistler P., Xiao X., Hassan H., Rodriguez C.* Simulation of supersonic combustion using variable turbulent Prandtl/Schmidt number formulation // 36th AIAA Fluid Dyn. Conf.&Exhibit. 2006. 3733.
85. *Libby P.A.* A non-gradient theory for premixed turbulent flames // in: *Mechanics Today: Vol. 5.* N.Y.: Pergamon, 1980. pp. 215–232.
86. *Shih T.-H., Lumley J.L., Chen J.-Y.* Second-order modeling of a passive scalar in a turbulent shear flow // *AIAA J.*, 1990, vol. 28, no. 4, pp. 610–617.
87. *Dakos T., Gibson M.M.* On Modelling the Pressure Terms of the Scalar Flux Equations. Berlin;Heidelberg: Springer, 1987.
88. *Craft T.J., Ince N.Z., Launder B.E.* Recent developments in second-moment closure for buoyancy-affected flows // *Dyn. of Atmos.&Oceans*, 1996, vol. 23, no. 1–4, pp. 99–114.
89. Johns Hopkins University Turbulence Database.
<http://turbulence.pha.jhu.edu/> (date of access: 22 december 2023).
90. *Balabanov R., Usov L., Troshin A., Vlasenko V., Sabelnikov V.* A differential subgrid stress model and its assessment in large eddy simulations of non-premixed turbulent combustion // *Appl. Sci.*, 2022, vol. 12, art. no. 8491.