

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ¹⁾

© 2024 г. Д. А. Маслов^{1,*}

¹111250 Москва, ул. Красноказарменная, 14, НИУ МЭИ, Россия
*e-mail: maslovdma@mpei.ru

Поступила в редакцию 10.11.2023 г.

Переработанный вариант 10.11.2023 г.

Принята к публикации 14.01.2024 г.

В работе предлагается новый способ численного решения нелинейных жестких задач, основанный на численной реализации метода голоморфной регуляризации задачи Коши для сингулярно возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений. Библ. 31. Фиг. 6. Табл. 4.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное дифференциальное уравнение, задача Коши, жесткость, нелинейность, метод голоморфной регуляризации, численное решение.

DOI: 10.31857/S0044466924050099, EDN: YDEVYQ

ВВЕДЕНИЕ

Существует много важных прикладных задач, описываемых задачами Коши для жестких систем дифференциальных уравнений: задачи химической кинетики, задачи моделирования нестационарных процессов в электрических цепях и др. [1]. Примером жесткой задачи является задача Коши для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения [2]. К такой задаче применимы методы численного решения жестких задач, а также численные реализации асимптотических методов [1]. Подробному обзору методов численного решения жестких задач посвящена обширная литература, см., например, [1–4]. Многие методы и рекомендации по решению жестких задач хорошо подходят для линейных и слабонелинейных жестких задач, однако, для существенно нелинейных сверхжестких задач они становятся ненадежными, требуют сильного уменьшения шага в некоторые критические моменты, причем для определения этих моментов не разработаны достаточно надежные алгоритмы [5]. Применение явных методов типа Рунге–Кутты и Адамса требует выбора неприемлемо малого шага, гарантирующего устойчивость численного решения, что приводит к возрастанию трудоемкости и делает данные методы непригодными для решения жестких задач, и тем более неприемлемыми для нелинейных сверхжестких задач. Поэтому для решения жестких задач используют так называемые А-устойчивые методы, которые не накладывают ограничений на шаг. Среди явных многошаговых методов не существует А-устойчивых, а порядок неявных А-устойчивых многошаговых методов не может быть выше второго (барьер Далквиста [1]). Для решения сверхжестких задач требуется также Lp-устойчивость, что дополнительно сужает класс допустимых методов численного решения жестких задач. Многошаговые методы требовательны к выбору стартовых приближений, чувствительны к адаптивному изменению шага и уступают в устойчивости неявным схемам и схемам типа Розенброка [6]. Неявные методы Рунге–Кутты применяются достаточно редко, так как требуют итерационного процесса на каждом шаге с вытекающей из этого проблемой сходимости и увеличением трудоемкости. Наиболее широкое распространение получили методы типа Розенброка, в которых для решения нелинейной системы алгебраических уравнений используется одна итерация метода Ньютона. Методы типа Розенброка относительно просты в реализации и обладают достаточно хорошими свойствами точности и устойчивости. В [5] проведено тестирование на нелинейной задаче методов, которые считаются наиболее надежными и превосходно справляются со сверхжесткими линейными задачами, и сделан вывод, что ни одна из известных схем не является гарантированно надежной для существенно нелинейных сверхжестких задач. Заметим, что жесткой может быть не только задача Коши для системы уравнений, но и для одного скалярного уравнения, что используется для тестирования и разработки методов решения жестких задач [5]. Перспективными

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 23-21-00496).

методами решения нелинейных сингулярно возмущенных задач являются численно-аналитические методы, в связи с чем стоит отметить активное развитие теории численных методов для задач с переходными слоями на основе асимптотических методов решения сингулярно возмущенных задач [7–10], в том числе развитие самих асимптотических методов решения задач с контрастными структурами [10–14].

В данной работе предлагается численная реализация метода голоморфной регуляризации нелинейных сингулярно возмущенных задач [15–23]. Данный метод позволяет строить приближение к решению в виде ряда по степеням малого параметра, сходящегося не только асимптотически, но и в обычном смысле. Учитывая трудоемкость вычислений, предлагается численное приближение функций, составляющих первые два члена ряда по малому параметру, имеющие погрешность, соответственно, первого и второго порядка по малому параметру. Такой подход к решению позволяет снять проблему нарушения устойчивости при увеличении шага по времени, однако точность метода зависит от малого параметра. Поэтому данный метод ориентирован на уравнения высокой жесткости, а также он применим к задачам с существенными нелинейностями.

1. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СКАЛЯРНОГО СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

1.1. Метод голоморфной регуляризации

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dy}{dt} &= f(t, y), \quad t \in (t_0, T], \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Потребуем выполнение условий теоремы Тихонова о предельном переходе [24], адаптированных для уравнений, содержащих только быстрые переменные [25].

I. Пусть функция $f(t, y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по y в некоторой области

$$\bar{\Omega} = \{(t, y) : |y| \leq H, t_0 \leq t \leq T\}.$$

II. Пусть вырожденная задача, полученная из (1) при $\varepsilon = 0$,

$$f(t, \bar{y}) = 0, \quad t \in [t_0, T],$$

имеет непрерывный изолированный корень $\bar{y} = \psi(t)$ на отрезке $[t_0, T]$, т.е. существует такое $\delta > 0$, что в некоторой окрестности $U = \{y : \|y(t) - \psi(t)\| < \delta, t_0 \leq t \leq T\}$ нет других корней: $f(t, y) \neq 0, (t, y) \in U$.

III. Уравнение

$$\frac{d\tilde{y}}{ds} = f(t, \tilde{y}),$$

где t выступает в роли параметра, называется присоединенным. Пусть точка покоя $\tilde{y} = \psi(t)$ присоединенного уравнения является асимптотически устойчивой по Ляпунову равномерно по $t \in [t_0, T]$. В таком случае корень вырожденной задачи $\bar{y} = \psi(t)$ называют устойчивым.

IV. Пусть точка y_0 такова, что решение $\tilde{y}(s)$ начальной задачи для присоединенного уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{y}}{ds} &= f(\tilde{y}, t_0), \\ \tilde{y}(t_0) &= y_0, \end{aligned}$$

существует при всех $s \geq t_0$ и $\tilde{y}(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \psi(t_0)$. В этом случае говорят, что y_0 принадлежит области влияния точки покоя $\tilde{y} = \psi(t_0)$.

При выполнении условий I–IV справедлива теорема (Тихонова) [24]: найдется постоянная $\varepsilon_0 > 0$ такая, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ решение $y(t, \varepsilon)$ задачи (1) существует на $[t_0, T]$, единственно и справедлив предельный переход

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} y(t, \varepsilon) = \bar{y}(t) = \psi(t), \quad t \in (t_0, T].$$

Теорема А.Н. Тихонова устанавливает предельный переход, что имеет большое значение в следующем смысле: какими бы методами ни решалась сингулярно возмущенная задача, построенные с их помощью асимптотические приближения должны сходиться при $\varepsilon \rightarrow +0$ к предельному решению, указанному в теореме. Могут применяться методы Васильевой–Бутузова–Нефедова, Крылова–Боголюбова–Митропольского и др. Мы

применим метод голоморфной регуляризации, который является логичным продолжением метода регуляризации С.А. Ломова [26], [27]. В рамках метода регуляризации С.А. Ломова было доказано существование сходящихся в обычном смысле рядов по степеням малого параметра, представляющих решения линейных сингулярно возмущенных задач. Трудности переноса теории на нелинейные задачи привели к поиску новых подходов к проблеме аналитической зависимости от малого параметра решений сингулярно возмущенных уравнений, и таким подходом стало введение понятия псевдоголоморфного решения сингулярно возмущенной задачи [28]. Решение $y(t, \varepsilon)$ задачи (1) называется псевдоголоморфным в точке $\varepsilon = 0$, если при представлении $y = Y\left(t, \frac{\varphi(t)}{\varepsilon}, \varepsilon\right)$ функция $Y(t, \eta, \varepsilon)$ голоморфна по третьей переменной в точке $\varepsilon = 0$ равномерно по $t \in [t_0, T]$ при каждом η из некоторого неограниченного множества.

В [15] доказана теорема о псевдоголоморфности решения задачи Коши (1). Пусть функция $f(t, y)$ является голоморфной в некоторой замкнутой области $\Omega_{t,y} \in \mathbb{R}^2$ и не обращается в ноль в $\Omega_{t,y}$, а отрезок $[t_0, T]$ и начальная точка (t_0, y_0) принадлежат области $\Omega_{t,y}$. Если голоморфная на $[t_0, T]$ функция $\varphi(t)$, такая что $\varphi(t_0) = 0$, $\varphi'(t) < 0$ для $\forall t \in [t_0, t_0 + \Delta]$, и уравнение

$$\varphi'(t) \int_{y_0}^y \frac{ds}{f(t, s)} = \frac{\varphi(t)}{\varepsilon} \quad (2)$$

имеет решение $y = Y_0\left(t, \frac{\varphi(t)}{\varepsilon}\right)$, равномерно ограниченное при $\varepsilon \rightarrow +0$ на отрезке $[t_0, T]$, то решение $y(t, \varepsilon)$ задачи Коши (1) является псевдоголоморфным в точке $\varepsilon = 0$ и определяется общим интегралом [15]:

$$U(t, y, \varepsilon) = 0, \\ U(t, y, \varepsilon) = \varphi(t) - \varepsilon \int_{y_0}^y \frac{\varphi'(t) ds}{f(t, s)} + \varepsilon^2 \int_{y_0}^y \left(\int_{y_0}^s \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi'(t)}{f(t, \xi)} \right) d\xi \right) \frac{ds}{f(t, s)} - \dots \quad (3)$$

Замечание 1. Из условия III для теоремы Тихонова (асимптотической устойчивости точки покоя присоединенного уравнения) следует равномерная ограниченность решения $Y_0(t, \varphi/\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ на отрезке $[t_0, T]$.

Замечание 2. Если $f(t_0, y_0) = 0$, то введением новой неизвестной функции $v = y + t$ задача (1) может быть сведена к задаче, для которой применим метод голоморфной регуляризации. Если нет цели применения метода голоморфной регуляризации, то в случае согласованности начального условия с правой частью, $f(t_0, y_0) = 0$, приближение порядка $O(\varepsilon)$ может быть получено по теореме Тихонова [24] решением алгебраического уравнения $f(t, y) = 0$, $t \in (t_0, T]$.

Замечание 3. Коэффициенты ряда

$$y(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n\left(t, \frac{\varphi(t)}{\varepsilon}\right) \varepsilon^n \quad (4)$$

могут быть определены по теореме о неявной функции из соотношения [15]:

$$V(t, y, \varepsilon) = \frac{\varphi(t)}{\varepsilon},$$

где

$$V(t, y, \varepsilon) = \int_{y_0}^y \frac{\varphi'(t) ds}{f(t, s)} - \varepsilon \int_{y_0}^y \left(\int_{y_0}^s \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi'(t)}{f(t, \xi)} \right) d\xi \right) \frac{ds}{f(t, s)} + \dots,$$

например,

$$Y_1 = - \left. \frac{V'_\varepsilon}{V'_y} \right|_{\varepsilon=0, y=Y_0(t, \varphi(t)/\varepsilon)}, \quad (5)$$

где

$$V'_y|_{\varepsilon=0} = \frac{\varphi'(t)}{f(t, y)}, \quad V'_\varepsilon|_{\varepsilon=0} = - \int_{y_0}^y \left(\int_{y_0}^s \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi'(t)}{f(t, \xi)} \right) d\xi \right) \frac{ds}{f(t, s)}.$$

Замечание 4. Ряд (4) сходится к решению задачи (1) на $[t_0, T]$, и остаточный член имеет вид

$$r_n(t, \varepsilon) = \tilde{Y}_{n+1}\left(t, \frac{\varphi(t)}{\varepsilon(t)}\right) \varepsilon^{n+1}, \quad (6)$$

где $0 < \tilde{\varepsilon}(t) < \varepsilon$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(t, \varepsilon) = 0$$

равномерно по $t \in [t_0, T]$.

Из (6) и сходимости ряда (4) следует оценка, удобная для вычислений:

$$|r_n(t, \varepsilon)| < |Y_n(t)| \cdot \varepsilon^{n+1}, \quad t \in [t_0, T]. \tag{7}$$

1.2. Численная реализация

Введем разбиение отрезка $[t_0, T]$ на n частей с равномерным шагом $h_t = (T - t_0) / n$, и сетку $\{t_i\}_{i=0}^n, t_i = t_0 + i \cdot h_t, i = 0, 1, \dots, n$. Выбираем голоморфную функцию $\varphi(t)$, такую что $\varphi(t_0) = 0, \varphi'(t) < 0 \quad \forall t \in [t_0, T]$. Положим $\varphi(t) = -\text{sh}(t - t_0)$. Далее для каждого $t_i, i = 1, \dots, n$, решаем нелинейное алгебраическое уравнение (2) и получаем сеточную функцию $\{Y_0^{(i)}\}_{i=0}^n$. Для численного интегрирования с контролем погрешности применяются формулы Гаусса-Кронрода [29]: сначала пара формул (G7, K15), если погрешность превышает заданную, то делается перерасчет по паре формул (G15, K31). Для уточнения корней при решении нелинейных алгебраических уравнений используется гибридный гарантированно сходящийся алгоритм Деккера-Брента [30], [31]. По формулам (5) определяется сеточная функция $\{Y_1^{(i)}\}_{i=0}^n$ с применением для вычисления повторного интеграла формул Гаусса-Кронрода.

Погрешности значений сеточной функции $\{Y_0^{(i)}\}_{i=0}^n$ равны погрешностям решения нелинейного алгебраического уравнения (2) при каждом $t_i, i = 1, \dots, n$. Однако в данных уравнениях, заданных в виде интеграла с переменным верхним пределом, интервалом неопределённости корня будет

$$\bar{\Delta}Y_0^{(i)} \approx \Delta I_i \cdot |f(t_i, y)|, \tag{8}$$

точнее которого не может быть определено значение $Y_0^{(i)}, i = 1, \dots, n$. Из формулы (8) следует, что минимально возможная погрешность определения $Y_0^{(i)}, i = 1, \dots, n$, прямо пропорциональна погрешности ΔI_i вычисления интеграла из (2). Из оценки (8) следует, что погрешность численного приближения не зависит от шага по времени h_t и длины отрезка $[t_0, T]$, на котором ведётся решение задачи Коши.

Введем относительную погрешность для численного решения через евклидову норму сеточных функций:

$$\delta Y = \frac{\|Y - y\|}{\|y\|}, \tag{9}$$

$$\|Y - y\| = \sqrt{\sum_{i=0}^n (Y^{(i)} - y(t_i))^2}, \quad \|y\| = \sqrt{\sum_{i=0}^n (y(t_i))^2},$$

где $Y = \{Y^{(i)}\}_{i=0}^n$ — сеточная функция численного решения, $\{y(t_i)\}_{i=0}^n$ — точные значения решения задачи Коши на сетке $\{t_i\}_{i=0}^n$.

Выведем оценки относительных погрешностей приближений δY_0 и δY_ε для сеточных функций $Y_0 = \{Y_0^{(i)}\}_{i=0}^n$ и $Y_\varepsilon = \{Y_0^{(i)} + \varepsilon Y_1^{(i)}\}_{i=0}^n$. δ_m будем обозначать погрешность, которая следует из заданной в алгоритме точности r определения Y_0 , δ_n — погрешность метода голоморфной регуляризации, которая неустраиваема с точки зрения численной реализации, и согласно (7) имеет порядок $O(\varepsilon)$ для Y_0 и $O(\varepsilon^2)$ для Y_ε . Из (7) следует, что

$$\delta_n Y_0 \leq \frac{\|Y_0\| \cdot \varepsilon}{\|y\|} \approx \varepsilon,$$

и при выборе $r = 0.05\varepsilon$ получим оценку погрешности

$$\delta Y_0 \leq \delta_n Y_0 + \delta_m Y_0 = 1.05\varepsilon. \tag{10}$$

При оценке δY_ε заметим, что погрешность определения Y_0 приводит к изменению всего уточненного выражения $Y_\varepsilon = Y_0 + \varepsilon Y_1$ на $\tilde{Y}_\varepsilon = \tilde{Y}_0 + \varepsilon \tilde{Y}_1$: пусть найдено приближение $\tilde{Y}_0^i, Y_0^i \in [\tilde{Y}_0^i(1 - r), \tilde{Y}_0^i(1 + r)]$, которое удовлетворяет (2) в пределах погрешности, но тогда точное равенство будет справедливо при некотором новом значении малого параметра $\tilde{\varepsilon}$:

$$\int_{y_0}^{\tilde{Y}_0} \frac{ds}{f(t, s)} = \frac{\varphi(t)}{\tilde{\varepsilon} \varphi'(t)},$$

что соответствует применению метода голоморфной регуляризации к задаче

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon} \frac{d\tilde{y}}{dt} &= f(t, \tilde{y}), \quad t \in (t_0, T], \\ \tilde{y}(t_0) &= y_0, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} \left(\int_{y_0}^{\tilde{Y}_0} \frac{ds}{f(t, s)} \right)^{-1}.$$

Очевидно, что, если для задачи (1) выполняется условие

$$\frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \leq -\sigma < 0, \quad (t, y) \in \bar{\Omega}_{t, y}, \quad \sigma = \text{const},$$

то можно вывести

$$\begin{aligned} (y(t) - \tilde{y}(t))' &= \frac{f(t, y)}{\varepsilon} - \frac{f(t, \tilde{y})}{\tilde{\varepsilon}}, \\ (y(t) - \tilde{y}(t))' &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f(t, \hat{y})}{\partial y} (y(t) - \tilde{y}(t)) + f(t, \hat{y}) \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \right), \quad \hat{y} \in (y, \tilde{y}), \end{aligned}$$

и с учетом начального условия

$$y(t_0) - \tilde{y}(t_0) = 0,$$

получить оценку

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| = \left| \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \right) \cdot \int_{t_0}^t e^{\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f(t, \hat{y})}{\partial y} (t-s)} f(s, \tilde{y}(s)) ds \right| \leq \left| \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \right| \cdot \int_{t_0}^t e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} (t-s)} |f(s, \tilde{y}(s))| ds.$$

Поскольку точное решение \tilde{y} неизвестно, для вычисления приближенной оценки будем использовать интерполяцию сплайнами по сеточной функции \tilde{Y}_ε :

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq \left| \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \right| \cdot \int_{t_0}^t e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} (t-s)} |f(s, \tilde{Y}_\varepsilon)| ds, \quad t \in (t_0, T]. \quad (12)$$

Из (7) следует, что

$$\delta_n Y_\varepsilon \leq \frac{\|Y_1\|}{\|y\|} \varepsilon^2,$$

также имеется погрешность численного интегрирования при вычислении \tilde{Y}_1 , которую оцениваем по методу Гаусса-Кронрода [29]:

$$\Delta \tilde{Y}_1 = |\tilde{Y}_1 - \tilde{Y}_1^*| \approx \left(200 |\tilde{Y}_1^{(G)} - \tilde{Y}_1^{(K)}| \right)^{1.5}, \quad (13)$$

где $\tilde{Y}_1^{(G)}$ — значение, рассчитанное по квадратурной формуле Гаусса с n узлами, $\tilde{Y}_1^{(K)}$ — значение, рассчитанное по квадратурной формуле Кронрода с $2n + 1$ узлами.

Таким образом, получим итоговую оценку

$$\delta Y_\varepsilon = \frac{\|y - \tilde{Y}_\varepsilon^*\|}{\|y\|} \leq \frac{\|y - \tilde{y}\|}{\|y\|} + \frac{\|\tilde{y} - \tilde{Y}_\varepsilon\|}{\|y\|} + \frac{\|\tilde{Y}_\varepsilon - \tilde{Y}_\varepsilon^*\|}{\|y\|} \approx \frac{\|y - \tilde{y}\|}{\|\tilde{Y}_\varepsilon^*\|} + \frac{\|\tilde{Y}_1\|}{\|\tilde{Y}_\varepsilon^*\|} \varepsilon^2 + \frac{\|\Delta \tilde{Y}_1\|}{\|\tilde{Y}_\varepsilon^*\|}, \quad (14)$$

где должны использоваться оценки (12) и (13).

Компьютерная программа для разработанного численного метода написана на языке программирования C++.

Основной проблемой численного решения по методу голоморфной регуляризации является значительное возрастание вычислительной трудоемкости, если возрастает $|y(t) - y_0|$ при возрастании t , особенно, если велика длина отрезка $[t_0, T]$. Предлагается рассматривать задачи, про которые известна ограниченность решения: $|y(t)| \leq C \forall t \geq t_0, C = \text{const}$. Также программа выдает предупреждение о возможности прекратить вычисления при существенном возрастании значения $|y(t) - y_0|$, влияющего на трудоемкость и время вычислений.

К важнейшим преимуществам численной реализации метода голоморфной регуляризации следует отнести отсутствие ограничения на шаг по времени; отсутствие зависимости точности полученных приближений от шага по времени; возможность вычисления на больших временных отрезках, если нет сильного возрастания решения, в том числе возможность прохождения с большим шагом по времени длительного промежутка с последующими вычислениями без потери точности; наличие оценки погрешности приближенного решения; возможность эффективного применения параллельного программирования для ускорения программы (распараллеливание алгоритма вычисления интегралов).

1.3. Вычислительные эксперименты

Рассмотрим сначала задачи с известными точными решениями: кубический тест на отрезке $[0, 1]$ [5] и линейную сингулярно возмущенную задачу на большом временном промежутке $[0, T]$, $T \gg 1$. Вычисления проводились на процессоре Intel Core i5 10210U (базовая частота 1.6 ГГц, максимальная частота 4.2 ГГц, уровни кэша: 256 КБ, 1 МБ, 6МБ). Проводилось измерение времени вычислений встроенной функцией времени C++, имеющей точность 15 миллисекунд.

Пример 1. Рассмотрим кубический тест, который хорошо иллюстрирует характерные особенности задач химической кинетики [5]:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dy}{dt} &= -y(y^2 - a^2), \quad t \in (0, 1], \\ y(0) &= y_0, \end{aligned} \tag{15}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, параметр $a > 0$, рекомендуется брать $a \approx 1$, функция $y(t)$ имеет смысл концентрации, поэтому осмысленным будет начальное значение $0 \leq y_0 \leq 1$. Данная задача является нелинейной с уравнением с разделяющимися переменными, поэтому известно точное решение:

$$y(t) = \frac{ay_0}{\sqrt{y_0^2 + (a^2 - y_0^2) \cdot e^{-2a^2t/\varepsilon}}}.$$

Положим $y_0 = 0.5$, $a = 1$, шаг сетки по времени $h_t = 0.1$, $n = 10$. В табл. 1 приведены зависимости от ε погрешностей δY_0 и δY_ε , рассчитанных по формуле (9). Значения малого параметра ε уменьшаем на порядок с 10^{-1} до 10^{-13} , меньшее значение не может рассматриваться из-за машинной точности $\sim 10^{-16}$ при стандартных вычислениях с типом вещественных данных “double”.

Таблица 1

ε	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}
δY_0	$1.03 \cdot 10^{-3}$	$9.7 \cdot 10^{-10}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$
δY_ε	$6.7 \cdot 10^{-4}$	$9.6 \cdot 10^{-10}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$

ε	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-13}
δY_0	$1.1 \cdot 10^{-16}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$
δY_ε	$1.1 \cdot 10^{-16}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$

Из полученных значений погрешности следует, что кубический тест успешно пройден. Кроме того, полученные погрешности для данного примера гораздо меньше оценочных и с уменьшением малого параметра быстро достигли машинной точности вычислений. Простота прохождения кубического теста объясняется спецификой численной реализации метода голоморфной регуляризации, которая кардинально отличает его от пошаговых реализаций традиционных методов численного решения задачи Коши. Аналогично не представляет трудности и тест Далквиста для линейной задачи.

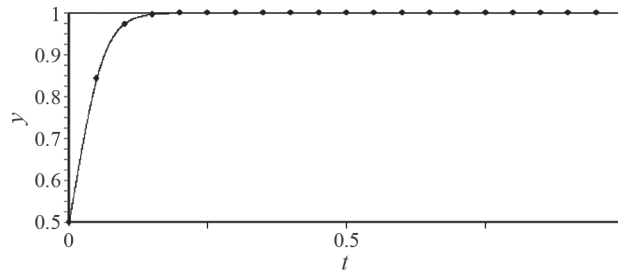
Для лучшего визуального восприятия профиль точного $y(t)$ и приближенного Y_0 решений построены на фиг. 1 при $h_t = 0.05$, $n = 20$, $\varepsilon = 0.05$. В данном случае получены погрешности $\delta Y_0 = 3.4 \cdot 10^{-4}$, $\delta Y_\varepsilon = 2.2 \cdot 10^{-4}$.

Пример 2. В качестве линейной задачи на большом временном промежутке рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dy}{dt} &= -y + \sin t, \quad t \in (0, T], \\ y(0) &= 1, \end{aligned} \tag{16}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Точное решение задачи Коши с линейным дифференциальным уравнением

$$y(t) = \left(1 + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2}\right) e^{-t/\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \left(\frac{\sin t}{\varepsilon} - \cos t\right) \tag{17}$$



Фиг. 1. График точного решения задачи (15) $y(t)$ — сплошная линия, график численного решения Y_0 — набор точек, $n = 20$.

будем использовать для оценки погрешности численного решения. Также из (17) видно, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ вблизи $t = 0$ имеется пограничный слой и при малых t можно приближенно записать $y(t) \approx e^{-t/\varepsilon}$, а при увеличении t первое слагаемое в (17) становится малым и $y(t) \approx \sin t$, что делает (16) классическим примером жесткой задачи.

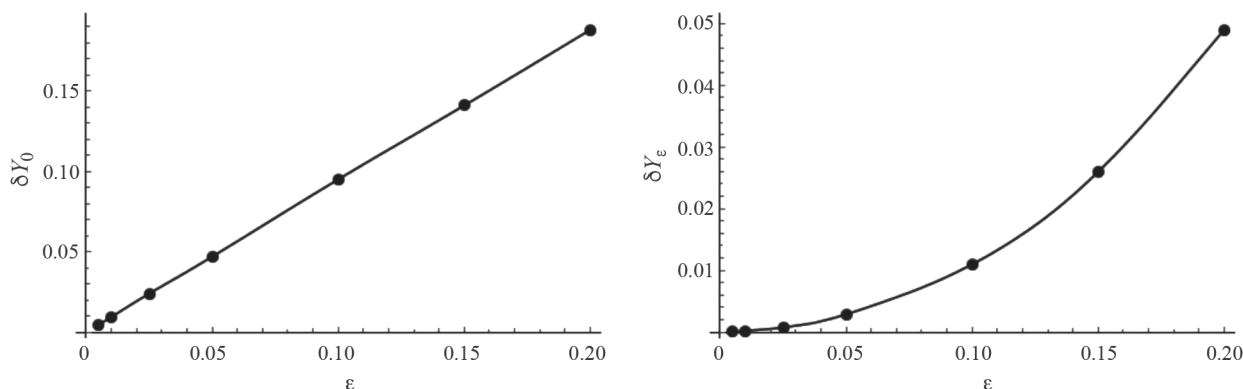
Положим $y_0 = 1$, $T = 100$, шаг сетки по времени $h_t = 5$, $n = 20$. В табл. 2 приведены зависимости от малого параметра ε погрешностей δY_0 и δY_ε , рассчитанных по формуле (9), их оценок $\delta \bar{Y}_0$ и $\delta \bar{Y}_\varepsilon$, рассчитанных по формулам (10), (14), и соответствующего времени вычислений time_0 и time_ε (в миллисекундах).

Таблица 2

ε	0.2	0.15	0.1	0.05	0.025	10^{-2}
δY_0	0.188	0.141	0.095	0.047	0.024	$9.5 \cdot 10^{-3}$
$\delta \bar{Y}_0$	0.21	0.16	0.11	0.053	0.027	$1.1 \cdot 10^{-2}$
time_0	< 15	< 15	< 15	< 15	< 15	< 15
δY_ε	0.049	0.026	0.011	$2.9 \cdot 10^{-3}$	$7.5 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-4}$
$\delta \bar{Y}_\varepsilon$	0.054	0.031	0.014	$3.9 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$3.9 \cdot 10^{-4}$
time_ε	15	15	31	31	47	94
ε	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}
δY_0	$4.7 \cdot 10^{-3}$	$9.5 \cdot 10^{-4}$	$9.5 \cdot 10^{-5}$	$9.5 \cdot 10^{-6}$	$9.5 \cdot 10^{-7}$	$9.5 \cdot 10^{-8}$
$\delta \bar{Y}_0$	$5.3 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-5}$	$1.1 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-7}$
time_0	< 15	< 15	< 15	< 15	< 15	< 15
δY_ε	$1 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-5}$	$2.3 \cdot 10^{-6}$	$2.5 \cdot 10^{-7}$	$3.2 \cdot 10^{-8}$	$4.2 \cdot 10^{-9}$
$\delta \bar{Y}_\varepsilon$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$3.3 \cdot 10^{-5}$	$2.9 \cdot 10^{-6}$	$3.1 \cdot 10^{-7}$	$3.9 \cdot 10^{-8}$	$4.6 \cdot 10^{-9}$
time_ε	141	359	1703	8781	42828	227046
ε	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-13}
δY_0	$9.5 \cdot 10^{-9}$	$9.5 \cdot 10^{-10}$	$9.5 \cdot 10^{-11}$	$9.5 \cdot 10^{-12}$	$9.5 \cdot 10^{-13}$	$9.5 \cdot 10^{-14}$
$\delta \bar{Y}_0$	$1.1 \cdot 10^{-8}$	$1.1 \cdot 10^{-9}$	$1.1 \cdot 10^{-10}$	$1.1 \cdot 10^{-11}$	$1.1 \cdot 10^{-12}$	$1.1 \cdot 10^{-13}$
time_0	< 15	< 15	< 15	< 15	< 15	< 15

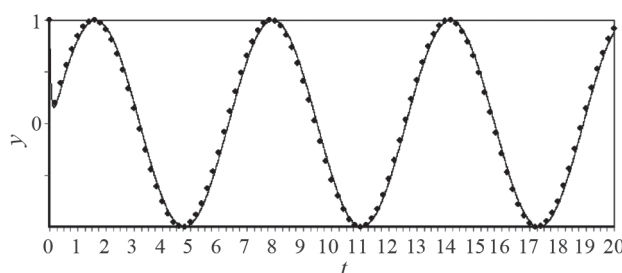
Для рассмотренного примера выявлена прямо пропорциональная зависимость δY_0 от малого параметра ε (фиг. 2), что полностью соответствует теоретической оценке (10). Также получена зависимость δY_ε от ε , но она имеет более сложный характер: квадратичная зависимость имеет место при относительно больших значениях малого параметра, $10^{-2} < \varepsilon < 0.2$ (фиг. 2), а при меньших значениях ε наблюдается почти линейная зависимость, что в целом соответствует оценке (14), по которой рассчитаны значения $\delta \bar{Y}_\varepsilon$. Также из значений времени вычислений time_ε следует, что при уменьшении ε значительно вырастает трудоемкость расчета Y_ε и делает его

нецелесообразным при $\varepsilon < 10^{-5}$. Из полученных данных следует, что наилучшие соотношения точности и трудоемкости ориентируют предложенный метод на вычисление приближений Y_0 для задач средней жесткости и сверхжестких задач при экстремально малых значениях малого параметра, $10^{-13} < \varepsilon < 10^{-4}$. Расчет уточненного приближения Y_ε имеет смысл только для умеренно жестких задач, $10^{-4} < \varepsilon < 10^{-1}$.



Фиг. 2. Графики зависимости погрешностей δY_0 и δY_ε от малого параметра ε .

Для лучшего визуального восприятия профиль точного $y(t)$ и приближенного Y_0 решений построены на фиг. 3 при $T = 20$, $h_t = 0.2$, $n = 100$, $\varepsilon = 0.05$. В данном случае получены погрешности $\delta Y_0 = 4.8 \cdot 10^{-2}$, $\delta Y_\varepsilon = 3.1 \cdot 10^{-3}$. Построенные графики точного и приближенного решений визуально почти неотличимы (фиг. 3).



Фиг. 3. График точного решения (17) $y(t)$ – сплошная линия, график численного решения Y_0 – набор точек, $n = 100$.

Пример 3. Рассмотрим нелинейную задачу Коши на большом временном промежутке

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dy}{dt} &= -y(y^2 + 1) + 4 \cos^2 t, \quad t \in (0, T], \\ y(0) &= 0, \end{aligned} \tag{18}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Положим $T = 500$, $n = 100$, шаг сетки по времени $h_t = 5$. В табл. 3 приведены зависимости от малого параметра ε оценок $\delta \bar{Y}_0$ и $\delta \bar{Y}_\varepsilon$, рассчитанных по формулам (10), (14), и соответствующего времени вычислений time_0 и time_ε (в миллисекундах).

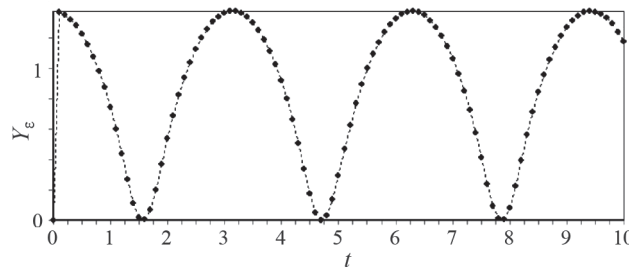
Для лучшего визуального восприятия профиль точного $y(t)$ и приближенного Y_ε решений построены на фиг. 4 при $T = 10$, $h_t = 0.1$, $n = 100$, $\varepsilon = 0.01$. В данном случае получены оценки погрешностей $\delta \bar{Y}_0 = 1.05 \cdot 10^{-2}$, $\delta \bar{Y}_\varepsilon = 1.03 \cdot 10^{-3}$. Построен график приближенного решения Y_ε (фиг. 4).

Из приведенных примеров видно, что предложенный в статье метод позволяет строить численные решения задач Коши с нелинейными сингулярно возмущенными дифференциальными уравнениями и дает гарантированные оценки погрешностей построенных приближенных решений.

Таблица 3

ε	0.1	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
$\delta\bar{Y}_0$	0.11	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-5}$	$1.1 \cdot 10^{-6}$
time ₀	< 15	< 15	15	15	23	23
$\delta\bar{Y}_\varepsilon$	0.017	$1 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$9.2 \cdot 10^{-7}$	$9.8 \cdot 10^{-8}$
time _{ε}	110	437	2032	10110	50578	267500

ε	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}
$\delta\bar{Y}_0$	$1.1 \cdot 10^{-7}$	$1.1 \cdot 10^{-8}$	$1.1 \cdot 10^{-9}$	$1.1 \cdot 10^{-10}$	$1.1 \cdot 10^{-11}$	$1.1 \cdot 10^{-12}$
time ₀	23	31	31	31	39	39

Фиг. 4. График численного решения Y_ε – набор точек, $n = 100$, соединенных штриховой линией.

2. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

2.1. Метод голоморфной регуляризации

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} \varepsilon y'' &= f(t, y, y'), \quad t \in (t_0, T], \\ y(t_0) &= y_0, \quad y'(t_0) = v_0, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, и перепишем ее для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v, \\ \varepsilon \frac{dv}{dt} &= f(t, y, v), \\ y(t_0) &= y_0, \quad v(t_0) = v_0. \end{aligned} \quad (20)$$

Пусть для задачи (20) выполнены условия теоремы Тихонова о предельном переходе [17], [24]. Пусть функция $f(t, y, v)$ является голоморфной в некоторой замкнутой области $\Omega_{t,y,v} \in \mathbb{R}^3$ и не обращается в ноль в $\Omega_{t,y,v}$, а отрезок $[t_0, T]$ и начальная точка (t_0, y_0, v_0) принадлежат области $\Omega_{t,y,v}$. Пусть $\bar{V}(t, y)$ – изолированный корень уравнения $f(t, y, v) = 0$, и соответствующая (20) вырожденная задача

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{y}}{dt} &= \bar{V}(t, \bar{y}), \quad t \in (t_0, T], \\ \bar{y}(t_0) &= y_0, \end{aligned} \quad (21)$$

имеет единственное голоморфное на $[t_0, T]$ решение $\bar{y}(t)$.

При наложенных условиях, из доказанных в [16] теорем, следует голоморфность первого интеграла

$$\varphi(t, y) - \varepsilon \int_{v_0}^v \frac{L\varphi(t, y) ds}{f(t, y, s)} + \varepsilon^2 \int_{v_0}^v \left(L \int_{v_0}^s \left(\frac{L\varphi(t, y)}{f(t, y, \xi)} \right) d\xi \right) \frac{ds}{f(t, y, s)} - \dots = 0, \quad (22)$$

где введен оператор $L = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial y}$.

Построим два независимых первых интеграла, применяя в (22) регуляризирующие функции $\varphi_1(t, y) = \varphi(t)$ и $\varphi_2(t, y) = y - \bar{y}(t)$:

$$\int_{v_0}^v \frac{\varphi'(t) ds}{f(t, y, s)} - \varepsilon \int_{v_0}^v \left(L \int_{v_0}^s \left(\frac{\varphi'(t)}{f(t, y, \xi)} \right) d\xi \right) \frac{ds}{f(t, y, s)} + \dots = \frac{\varphi(t)}{\varepsilon},$$

$$y - \bar{y}(t) - \varepsilon \int_{v_0}^v \frac{(s - \bar{y}'(t)) ds}{f(t, y, s)} + \varepsilon^2 \int_{v_0}^v \left(L \int_{v_0}^s \left(\frac{\xi - \bar{y}'(t)}{f(t, y, \xi)} \right) d\xi \right) \frac{ds}{f(t, y, s)} - \dots = 0.$$
(23)

Пусть функция $\varphi(t)$ голоморфна на $[t_0, T]$ и $\varphi(t_0) = 0$, $\varphi'(t) < 0$ для $\forall t \in [t_0, T]$. Если уравнение

$$\varphi'(t) \int_{v_0}^v \frac{ds}{f(t, \bar{y}, s)} = \frac{\varphi(t)}{\varepsilon}$$
(24)

имеет решение $v = V_0 \left(t, \frac{\varphi(t)}{\varepsilon} \right)$, равномерно ограниченное при $\varepsilon \rightarrow +0$ на отрезке $[t_0, T]$, то решение $y(t, \varepsilon)$ задачи (20) является псевдоголоморфным в точке $\varepsilon = 0$ [16].

Из (23) определяются коэффициенты разложений

$$y(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k \left(t, \frac{\varphi(t)}{\varepsilon} \right) \cdot \varepsilon^k, \quad v(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k \left(t, \frac{\varphi(t)}{\varepsilon} \right) \cdot \varepsilon^k.$$

Заметим, что $Y_0(t) = \bar{y}(t)$ и

$$Y_1 \left(t, \frac{\varphi(t)}{\varepsilon} \right) = \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0, y=\bar{y}(t), v=V_0(t, \varphi(t)/\varepsilon)} = \int_{v_0}^{V_0} \frac{(s - \bar{y}'(t)) ds}{f(t, \bar{y}, s)}.$$
(25)

2.2. Численная реализация и вычислительные эксперименты

Первым этапом является нахождение решения вырожденной задачи (21). Предварительно должен быть найден и указан изолированный корень $\bar{V}(t, \bar{y}(t))$ уравнения $f(t, y, v) = 0$. Тогда вырожденная задача (21) может быть решена любым удобным численным методом, например, Рунге-Кутты четвертого порядка точности, так как не является жесткой задачей. Шаг численного интегрирования вырожденной задачи (21) должен быть согласован (укладываться целое число раз) с шагом по времени, который будет использоваться для получения приближений по методу голоморфной регуляризации. Либо, если возможно, может быть указано непосредственно решение вырожденной задачи (21) в виде функции $\bar{y}(t)$.

Второй этап представляет численную реализацию метода голоморфной регуляризации, во многом схожую с реализацией метода для уравнения первого порядка. Из (24) определяется $\{V_0^{(i)}\}_{i=0}^n$, затем по формуле (25) определяется $\{Y_1^{(i)}\}_{i=0}^n$, для численного интегрирования используются формулы Гаусса-Кронрода [29].

Выведем оценку относительной погрешности δY_ε для сеточной функции $Y_\varepsilon = \{\bar{y}(t_i) + \varepsilon Y_1^{(i)}\}_{i=0}^n$. Решая (24), мы определяем некоторое приближение $\tilde{V}_0^i, V_0^i \in [\tilde{V}_0^{(i)}(1-r), \tilde{V}_0^{(i)}(1+r)]$, на которое, в том числе, влияет и погрешность нахождения решения вырожденной задачи $\bar{y}(t)$. Тогда, полученное приближение $\tilde{V}_0^{(i)}$ соответствует решению задачи (20) при некотором новом значении малого параметра $\tilde{\varepsilon}$:

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = \tilde{v},$$

$$\tilde{\varepsilon} \frac{d\tilde{v}}{dt} = f(t, \tilde{y}, \tilde{v}),$$

$$\tilde{y}(t_0) = y_0, \quad \tilde{v}(t_0) = v_0,$$
(26)

где

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} \left(\int_{y_0}^{\tilde{V}_0} \frac{ds}{f(t, \bar{Y}(t), s)} \right)^{-1}.$$

Пусть

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} y(t) - \tilde{y}(t) \\ v(t) - \tilde{v}(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{z}}{dt} &= A(t)\mathbf{z} + \mathbf{g}(t), \quad t \in (t_0, T], \\ \mathbf{z}(t_0) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} A(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(t) & b(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}, \quad g(t) = f(t, \tilde{y}(t), \tilde{v}(t)) \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \right), \\ a(t) &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f(t, \hat{y}(t), \hat{v}(t))}{\partial y}, \quad b(t) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f(t, y(t), \hat{v}(t))}{\partial v}, \quad \hat{y} \in (y, \tilde{y}), \quad \hat{v} \in (y, \tilde{y}), \end{aligned}$$

Выведем оценку $|y(t) - \tilde{y}(t)|$ при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} -\beta \leq \frac{\partial f(t, y, v)}{\partial v} \leq -\sigma < 0, \quad (t, y, v) \in \bar{\Omega}_{t, y, v}, \quad \beta, \sigma = \text{const}, \\ \frac{\partial f(t, y, v)}{\partial y} \leq -\frac{\beta^2}{2} < 0, \quad (t, y, v) \in \bar{\Omega}_{t, y, v}, \end{aligned}$$

когда $4a + b^2 \leq -\beta^2 < 0$ и собственные значения матрицы $A(t)$ комплексные

$$\lambda_{1,2}(t) = \frac{1}{2} \left(b(t) \pm \sqrt{4a(t) + b^2(t)} \right), \quad \text{Re} \lambda_{1,2}(t) = \frac{b(t)}{2} \leq -\frac{\sigma}{2\varepsilon} < 0, \quad t \in (t_0, T].$$

По формуле Коши с учетом начального условия, имеем решение задачи (27):

$$\mathbf{z}(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) \mathbf{g}(s) ds, \quad (28)$$

где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы дифференциальных уравнений из (27),

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1(t)} e^{\lambda_1(t)t} & \frac{1}{\lambda_2(t)} e^{\lambda_2(t)t} \\ e^{\lambda_1(t)t} & e^{\lambda_2(t)t} \end{pmatrix}, \quad \Phi^{-1}(s) \mathbf{g}(s) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1(s) e^{\lambda_1(s)s}}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} g(s) \\ \frac{\lambda_2(s) e^{\lambda_2(s)s}}{\lambda_2(s) - \lambda_1(s)} g(s) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t \frac{\lambda_1(s) e^{\lambda_1(s)s}}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} g(s) ds \right| &\leq \int_{t_0}^t \left| \frac{(b(s) - \sqrt{4a(s) + b^2(s)}) e^{b(s)s/2}}{2\sqrt{4a(s) + b^2(s)}} \right| \cdot |g(s)| ds \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \sqrt{1 + \frac{b^2(s)}{|4a(s) + b^2(s)|}} \cdot e^{-\sigma \cdot s/2\varepsilon} |g(s)| ds \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{t_0}^t e^{-\sigma \cdot s/2\varepsilon} |g(s)| ds. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\left| \int_{t_0}^t \frac{\lambda_2(s) e^{\lambda_2(s)s}}{\lambda_2(s) - \lambda_1(s)} g(s) ds \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{t_0}^t e^{-\sigma \cdot s/2\varepsilon} |g(s)| ds.$$

Таким образом, из (28) следует, что

$$\begin{aligned} |y(t) - \tilde{y}(t)| &\leq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left| \frac{1}{\lambda_1(t)} e^{\lambda_1(t)t} + \frac{1}{\lambda_2(t)} e^{\lambda_2(t)t} \right| \cdot \int_{t_0}^t e^{-\sigma \cdot s/2} |g(s)| ds \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{2} \left| 2 \frac{2}{2\sigma/\varepsilon} \right| \int_{t_0}^t e^{-\sigma \cdot (t-s)/2\varepsilon} |g(s)| ds = \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\sigma} \left| \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \right| \int_{t_0}^t e^{-\sigma \cdot (t-s)/2\varepsilon} |f(s, \tilde{y}(s), \tilde{v}(s))| ds. \end{aligned} \quad (29)$$

Оценка (29) используется для вычисления итоговой оценки

$$\delta Y_\varepsilon \leq \frac{\|y - \tilde{y}\|}{\|y\|} + \frac{\|\tilde{Y}_1\|}{\|y\|} \varepsilon^2 + \frac{\|\Delta \tilde{Y}_1\|}{\|y\|}, \tag{30}$$

где также должна использоваться оценка (13) для вычислительной погрешности интегрирования при расчете \tilde{Y}_1 по формуле (25).

Пример 4. Рассмотрим задачу Коши для сингулярно возмущенного уравнения с кубической нелинейностью

$$\begin{aligned} \varepsilon y'' + y' + y + y^3 &= \frac{\cos(t)}{4}, \quad t \in (0, T], \\ y(0) = 1, \quad y'(0) &= 0, \end{aligned} \tag{31}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, который соответствует, например, малой индуктивности при описании электрических колебаний. Перепишем задачу в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v, \\ \varepsilon \frac{dv}{dt} &= -y' - y - y^3 + \frac{\cos(t)}{4}, \\ y(0) = 1, \quad v(0) &= 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Вырожденная задача примет вид

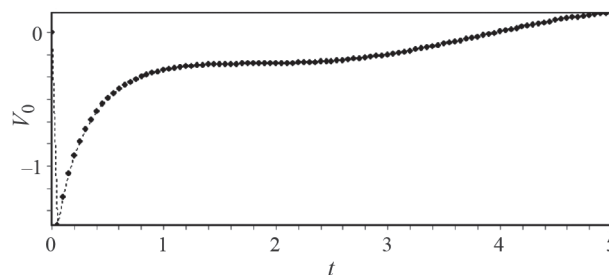
$$\begin{aligned} \frac{d\bar{y}}{dt} &= -\bar{y} - \bar{y}^3 + \frac{\cos(t)}{4}, \quad t \in (0, T], \\ \bar{y}(0) &= 1. \end{aligned}$$

Положим $T = 10$, $n = 50$, шаг сетки по времени $h_t = 0.2$. В табл. 4 приведены зависимости от малого параметра ε оценки $\delta \tilde{Y}_\varepsilon$, рассчитанной по формуле (30) и соответствующего времени вычислений time_ε (в миллисекундах).

Таблица 4

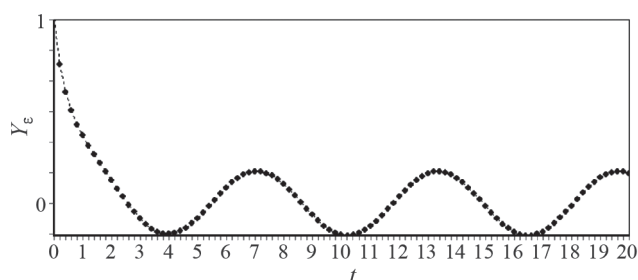
ε	0.1	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}
$\delta \tilde{Y}_\varepsilon$	0.011	$3.1 \cdot 10^{-3}$	$7.1 \cdot 10^{-5}$	$8.4 \cdot 10^{-7}$	$1.6 \cdot 10^{-9}$	$1.3 \cdot 10^{-11}$	$1.1 \cdot 10^{-13}$
time_ε	31	39	43	51	55	62	66

На фиг. 5 представлен график сеточной функции V_0 , которая является приближением для производной от функции $y(t)$. Из графика (фиг. 5) следует наличие пограничного слоя, что соответствует второму уравнению в (32) с сингулярно входящим малым параметром ε . На фиг. 6 представлен график сеточной функции Y_ε . Для лучшего визуального восприятия наличия пограничного слоя, на фиг. 5 и фиг. 6 взяты разные временные промежутки T .



Фиг. 5. График сеточной функции V_0 задачи (31) при $\varepsilon = 0.01$, $T = 5$, — набор точек, $n = 100$, соединенных штриховой линией.

Заметим, что для задачи Коши с уравнением второго порядка предложена численная реализация метода голоморфной регуляризации с определением приближения только в виде Y_ε , которое имеет второй порядок точности по малому параметру ε . При этом трудоемкость вычислений меньше, чем для построения приближения



Фиг. 6. График численного решения Y_ε задачи (31) при $\varepsilon = 0.01$, $T = 20$, — набор точек, $n = 100$, соединенных штриховой линией.

второго порядка описанной выше задачи Коши для скалярного уравнения, так как здесь рассчитывается интеграл только по одной переменной. Зависимости погрешности от малого параметра и сравнения трудоемкостей подтверждаются вычислительными экспериментами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. Пер. с англ. М.: Мир, 1999.
2. Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г. Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979.
3. Lambert J.D. Numerical methods for ordinary differential systems: the initial value problem. New York: Wiley-Sons, 1991.
4. Новиков Е.А., Шорников Ю.В. Компьютерное моделирование жестких гибридных систем. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012.
5. Белов А.А., Калиткин Н.Н. Проблема нелинейности при численном решении сверхжестких задач Коши // Матем. моделирование. 2016. Т. 28. № 4. С. 16–32.
6. Калиткин Н.Н. Численные методы решения жестких систем // Матем. моделирование. 1995. Т. 7. № 5. С. 8–11.
7. Нефедов Н.Н. Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакции–диффузии–адвекции: теория и применение // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 12. С. 2074–2094.
8. Kopteva N., Stynes M. Stabilised approximation of interior-layer solutions of a singularly perturbed semilinear reaction diffusion problem // Numerische Mathematik. 2011. V. 119. № 2. P. 787–810.
9. Quinn J. A numerical method for a nonlinear singularly perturbed interior layer problem using an approximate layer location // Comput. and Appl. Math. 2015. V. 290. № 15. P. 500–515.
10. Нефедов Н.Н., Никулин Е.И., Орлов А.О. О периодическом внутреннем слое в задаче реакция-диффузия с источником модульно-кубичного типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 9. С. 1513–1532.
11. Нефедов Н.Н., Орлов А.О. О неустойчивых контрастных структурах в одномерных задачах реакция-диффузия-адвекция с разрывными источниками // Теор. и матем. физ. 2023. Т. 215. № 2. С. 297–310.
12. Нефедов Н.Н. Периодические контрастные структуры в задаче реакция-диффузия с быстрой реакцией и малой диффузией // Матем. заметки. 2022. Т. 112. № 4. С. 601–612.
13. Волков В.Т., Нефедов Н.Н. Асимптотическое решение задачи граничного управления для уравнения типа Бюргерса с модульной адвекцией и линейным усилением // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 11. С. 1851–1860.
14. Нефедов Н.Н., Руденко О.В. О движении, усилении и разрушении фронтов в уравнениях типа Бюргерса с квадратичной и модульной нелинейностью // Докл. АН. Матем., информ., проц. упр. 2020. Т. 493. С. 26–31.

15. Качалов В.И. Голоморфная регуляризация сингулярно возмущенных задач // Вестник МЭИ. 2010. № 6. С. 54–62.
16. Качалов В.И. Голоморфная регуляризация сингулярно возмущенного уравнения второго порядка // Вестник МЭИ. 2013. № 6. С. 95–103.
17. Качалов В.И. Теорема Тихонова о предельном переходе и псевдоголоморфные решения сингулярно возмущенных задач // Докл. АН. 2014. Т. 458. № 6. С. 630–632.
18. Качалов В.И. О методе голоморфной регуляризации сингулярно возмущенных задач // Изв. вузов. матем. 2017. № 6. С. 52–59.
19. Качалов В.И. О голоморфной регуляризации сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 4. С. 654–661.
20. Качалов В.И. О голоморфной регуляризации сильно нелинейных сингулярно возмущенных задач // Уфимск. матем. ж. 2018. Т. 10. № 3. С. 35–43.
21. Качалов В.И. Голоморфная регуляризация сингулярных возмущений в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 794–802.
22. Bobodzhonov A.A., Safonov V.F., Kachalov V.I. Asymptotic and Pseudoholomorphic Solutions of Singularly Perturbed Differential and Integral Equations in the Lomov's Regularization Method // Axioms. 2019. 8(1), 27.
23. Vesova M.I., Kachalov V.I. Axiomatic Approach in the Analytic Theory of Singular Perturbations // Axioms. 2020. 9(1), 9.
24. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных задач. М.: Наука, 1973.
25. Сафонов В.Ф., Бободжанов А.А. Сингулярно возмущенные задачи и метод регуляризации. М.: Изд-во МЭИ, 2010.
26. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.
27. Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя. М.: Изд-во МГУ, 2011.
28. Качалов В.И., Ломов С.А. Псевдоаналитические решения сингулярно возмущенных задач. Докл. АН. 1994. Т. 334. № 6. С. 694–695.
29. Кронрод А.С. Узлы и веса квадратурных формул: шестнадцатизначные таблицы. М.: Наука, 1964.
30. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. Пер. с англ. М.: Мир, 1980.
31. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing. Second Edition. 2002.

ON A NUMERICAL METHOD FOR SOLVING THE CAUCHY PROBLEM FOR SINGULARLY PERTURBED DIFFERENTIAL EQUATIONS

D. A. Maslov*

*National Research University "Moscow Power Engineering Institute" (NRU MPEI), Krasnokazarmennaya st., 14,
Moscow, 111250, Russia*

**e-mail: maslovdma@mpei.ru*

Received 10 November, 2023

Revised 10 November, 2023

Accepted 14 January, 2024

Abstract. The paper proposes a new method for numerically solving nonlinear stiff problems based on the numerical implementation of the holomorphic regularization method of the Cauchy problem for singularly perturbed nonlinear differential equations.

Keywords: singularly perturbed differential equation, Cauchy problem, stiffness, nonlinearity, holomorphic regularization method, numerical solution.