

БЫСТРОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА СВЕРТКИ В ЗАДАЧАХ ОЦЕНИВАНИЯ ОПЦИОНОВ В МОДЕЛЯХ ЛЕВИ¹⁾

© 2024 г. А. С. Гречко^{1,**}, О. Е. Кудрявцев^{1,2,*}

¹344015, Ростов-на-Дону, Еременко 58/11, ООО НПФ “ИнВайз Системс”, Россия

²344002, Ростов-на-Дону, Буденновский 20, Ростовский филиал Российской таможенной академии, Россия

*e-mail: koe@sfnedu.ru

**e-mail: alex@itparadigma.ru

Поступила в редакцию 09.06.2024 г.

Переработанный вариант 01.08.2024 г.

Принята к публикации 23.08.2024 г.

Построен приближенный алгоритм вычисления интегральных операторов типа свертки, возникающих при оценивании барьерных опционов в моделях Леви методом Винера–Хопфа. Дополнительно исследован вопрос возможности применения методов машинного обучения (искусственных нейронных сетей) к аппроксимации специального вида интегралов, являющихся ключевым элементом в конструкции приближенных формул для рассматриваемых интегральных операторов Винера–Хопфа. Основная идея заключается в разложении функции цены в ряд Фурье и трансформации контура интегрирования для каждого слагаемого ряда Фурье. В результате мы получаем набор типовых интегралов, которые зависят от факторов Винера–Хопфа, но не зависят от функции цены, при этом наиболее затратная с вычислительной точки зрения часть численного метода сводится к вычислению указанных интегралов. Поскольку вычислять их нужно только один раз, а не на каждой итерации, как это было в стандартных реализациях метода Винера–Хопфа, то это существенно ускорит вычисления. Более того, для вычисления типовых интегралов можно обучить нейросеть. Предлагаемый подход особенно эффективен для спектрально односторонних процессов Леви, для которых известны явные формулы факторизации Винера–Хопфа. В этом случае мы получаем удобные для вычислений формулы путем интегрирования вдоль разреза. Главным преимуществом включения нейросетей в вычислительную схему является возможность проводить вычисления на неравномерной сетке. Такой гибридный численный метод сможет успешно конкурировать с классическими методами вычислений свертки в подобных задачах с помощью быстрого преобразования Фурье. Вычислительные эксперименты показывают, что нейросети с одним скрытым слоем из 20 нейронов способны эффективно справляться с задачами аппроксимации рассматриваемых вспомогательных интегралов. Библ. 25. Фиг. 2. Табл. 1.

Ключевые слова: факторизация Винера–Хопфа, процессы Леви, интегральные операторы свертки, интегральные преобразования, численные методы, машинное обучение, вычислительная финансовая математика.

DOI: 10.31857/S0044466924120027, EDN: KCYGDV

1. ВВЕДЕНИЕ

Последние 25 лет процессы Леви (подробнее, см., например, [1]–[25]), позволяющие моделировать скачки котировок акций, и позволяют получать более реалистичные оценки рисков по сравнению с гауссовыми моделями, вызывают интерес у исследователей в различных приложениях. Особую популярность модели Леви обрели в области вычисления цен финансовых опционов (см., например, [5], [10], [9], [15], [17], [19], [16], [24]), определяемых как математические ожидания функций, зависящих от процессов Леви и их экстремумов. Следует отметить, что разработка эффективных численных методов оценивания опционов является одной из ключевых задач вычислительной финансовой математики. Например, задача вычисления цен барьерных опционов сводится к решению начально-краевой задачи для интегродифференциального уравнения с частными производными, которое по своей сути является обратным уравнением Колмогорова. Наиболее популярными подходами к решению рассматриваемых задач являются: методы Монте-Карло, численные методы для вычисления математического ожидания, численные методы решения интегродифференциальных уравнений с частными производными. Отметим, что все эти подходы часто включают технику факторизации Винера–Хопфа для процессов Леви.

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 23-21-00474).

Подробный обзор можно найти в недавней книге [19], в которой представлен обширный список литературы по данной тематике. Несмотря на огромное количество статей по приложению процессов Леви к задачам вычислительной финансовой математики, исследования в этой области не теряют своей интенсивности. С одной стороны, это связано с тем, что разнообразие процессов Леви и их математическая сложность определяют необходимость разработки новых вычислительных методов, более доступных для практиков и учитывающих особенности конкретных моделей. С другой стороны, расширяется круг задач финансовой математики, где могут применяться модели Леви.

В настоящее время применение методов машинного обучения для решения задач финансовой математики вызывает активный интерес ученых. Вместе с тем, прямолинейное обучение искусственных нейросетей на рыночных данных сталкивается с критикой из-за отсутствия теоретического обоснования адекватности таких моделей. С другой стороны, алгоритмы машинного обучения могут заменять некоторые рутинные элементы численных методов. Таким образом, создание гибридных методов, включающих в себя элементы “классических” методов вычислительной математики и элементов машинного обучения, можно считать наиболее перспективным направлением развития вычислительной финансовой математики, которая является одним из основных драйверов развития современных численных методов. Примеры гибридных методов вычислительной финансовой математики можно найти в работах [12], [14], [3], [22].

Целью настоящей статьи является построение приближенного алгоритма вычисления интегральных операторов типа свертки, возникающих при оценивании барьерных опционов в моделях Леви методом Винера–Хопфа. Основная идея заключается в разложении функции цены в ряд Фурье и трансформации контура интегрирования для каждого слагаемого ряда Фурье. В результате мы получаем набор типовых интегралов, которые зависят от факторов Винера–Хопфа, но не зависят от функции цены. Таким образом, наиболее затратная с вычислительной точки зрения часть численного метода сводится к вычислению этих интегралов. Поскольку вычислять их нужно только один раз, а не на каждой итерации, как это было в стандартных реализациях метода Винера–Хопфа, то это существенно ускорит вычисления. Особенно эффективен данный подход становится с применением явных формул символов факторов упрощенной факторизации Винера–Хопфа для умеренно устойчивых процессов Леви, разработанной в [18], [20]. В результате получается набор типовых интегралов, для вычисления которых можно обучить нейросеть. Главным преимуществом включения нейросетей в вычислительную схему является возможность проводить вычисления на неравномерной сетке. Такой гибридный численный метод сможет успешно конкурировать с классическими методами вычислений свертки в подобных задачах с помощью быстрого преобразования Фурье.

Статья имеет следующую структуру. Раздел 2 посвящен основным фактам из теории процессов Леви и вопросам, связанным с факторизацией Винера–Хопфа в моделях Леви. В разд. 3 построен алгоритм быстрого вычисления интегральных операторов свертки с ядром типа плотности вероятности случайных величин, принимающих только положительные или только отрицательные значения, рассмотрены возможности применения искусственных нейронных сетей для вычисления типовых интегралов, к вычислению которых сводится построенный метод. В последнем разделе приводятся вычислительные эксперименты, демонстрирующие возможности построенного метода для популярной модели финансовых рынков KoVoL (см. [5]), известной также как модель CGMY (см. [8]).

2. ПРОЦЕССЫ ЛЕВИ

2.1. Основные определения

Пусть $(X_t)_{t \geq 0}$ – процесс Леви на \mathbf{R} , тогда X_t полностью определяется своей характеристической экспонентой

$$\psi(\xi) := \frac{1}{t} \ln E[e^{i\xi X(t)}] = e^{-t\psi(\xi)},$$

согласно хорошо известной формуле Леви–Хинчина (см. [25])

$$\psi(\xi) = \frac{\sigma^2}{2} \xi^2 - i\gamma\xi + \int_{\mathbf{R}} (1 - e^{i\xi x} + i\xi x \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)) \Pi(dx), \quad (2.1)$$

где $\sigma \geq 0$ и $\gamma \in \mathbf{R}$ – константы, а Π – мера на $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, удовлетворяющая свойству

$$\int_{\mathbf{R}} \min\{1, x^2\} \Pi(dx) < +\infty.$$

Параметр σ^2 называется *гауссовским коэффициентом*, мера Π – *мерой Леви* скачков, а тройка параметров (σ^2, γ, Π) – *порождающим триплетом*.

Если скачки процесса Леви имеют ограниченную вариацию (т.е. $\int_{\mathbb{R}} \min\{1, |x|\} \Pi(dx) < +\infty$) и $\sigma = 0$, то характеристическая экспонента имеет более простой вид

$$\psi(\xi) = -i\mu\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{i\xi y}) \Pi(dy). \tag{2.2}$$

Регулярные процессы Леви экспоненциального типа были введены в [5]. Свойства таких процессов позволяют эффективно решать стандартные задачи оценивания опционов, сводящиеся к интегриродифференциальным уравнениям.

Определение 2.1. Пусть $\lambda_- < 0 < \lambda_+$. Будем называть процесс Леви X *процессом Леви экспоненциального типа* $[\lambda_-, \lambda_+]$, если его мера Леви удовлетворяет следующему свойству:

$$\int_{-\infty}^{-1} e^{-\lambda_+ x} \Pi(dx) + \int_1^{+\infty} e^{-\lambda_- x} \Pi(dx) < \infty. \tag{2.3}$$

Лемма 2.1. Пусть X – процесс Леви экспоненциального типа $[\lambda_-, \lambda_+]$. Тогда

- характеристическая экспонента ψ голоморфна в полосе $\Im \xi \in (\lambda_-, \lambda_+)$ и непрерывна вплоть до ее границы;
- существуют константы C и $\nu > 0$ такие, что для всех ξ в полосе $\Im \xi \in [\lambda_-, \lambda_+]$

$$|\psi(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^\nu; \tag{2.4}$$

- для любого $q > 0$ уравнение

$$q + \psi(\xi) = 0 \tag{2.5}$$

имеет не более одного чисто мнимого корня в нижней (верхней) полуплоскости, назовем его в случае существования $-i\beta_+$ ($-i\beta_-$);

- корень $-i\beta_{\mp}$ существует тогда и только тогда, когда

$$q + \psi(i(\lambda_{\pm} \mp 0)) < 0, \tag{2.6}$$

и если он существует, то его кратность равна одному.

Доказательство леммы приведено в [5].

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, на котором определен одномерный процесс Леви X . Обозначим через $\mathcal{S}_t = \sup_{0 \leq s \leq t} X_s$ и $\mathcal{I}_t = \inf_{0 \leq s \leq t} X_s$. Процессы $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_t\}$ и $\mathcal{I} = \{\mathcal{I}_t\}$ называются процессами *супремума* и *инфимума* соответственно. Отметим, что для любого $t > 0$ имеют место следующие полезные соотношения (см. [25]):

$$\mathcal{S}_t \stackrel{d}{\sim} X_t - \mathcal{I}_t, \quad \mathcal{I}_t \text{ и } X_t - \mathcal{I}_t \text{ – независимы,} \tag{2.7}$$

$$\mathcal{I}_t \stackrel{d}{\sim} X_t - \mathcal{S}_t, \quad \mathcal{S}_t \text{ и } X_t - \mathcal{S}_t \text{ – независимы.} \tag{2.8}$$

Пусть $q > 0$, введем случайное время T_q , имеющее показательное распределение с параметром интенсивности q . Пусть существуют плотности вероятности случайных величин X_{T_q} , \mathcal{S}_{T_q} и \mathcal{I}_{T_q} , обозначим их через p_q , p_q^+ и p_q^- соответственно. Отметим, что носитель p_q^+ расположен на правой полуоси, а носитель p_q^- – на левой.

Введем следующие интегральные операторы свертки с ядрами $p_q(-y)$, $p_q^+(-y)$ и $p_q^-(-y)$ соответственно:

$$\mathcal{E}_q u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(y) p_q(y-x) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x+y) p_q(y) dy = E[u(x + X_{T_q})], \tag{2.9}$$

$$\mathcal{E}_q^+ u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(y) p_q^+(y-x) dy = \int_0^{+\infty} u(x+y) p_q^+(y) dy = E[u(x + \mathcal{S}_{T_q})], \tag{2.10}$$

$$\mathcal{E}_q^- u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(y) p_q^-(y-x) dy = \int_{-\infty}^0 u(x+y) p_q^-(y) dy = E[u(x + \mathcal{I}_{T_q})]. \tag{2.11}$$

Из определения операторов \mathcal{E}_q , \mathcal{E}_q^+ , \mathcal{E}_q^- в (2.9)–(2.11) и свойств (2.7), (2.8) следуют факторизационные тождества

$$\mathcal{E}_q = \mathcal{E}_q^+ \mathcal{E}_q^- = \mathcal{E}_q^- \mathcal{E}_q^+, \tag{2.12}$$

которые играют ключевую роль в применении метода Винера–Хопфа при решении задач вычисления цен барьерных опционов в моделях Леви.

Определим преобразование Фурье функции u

$$\mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi} u(x) dx \tag{2.13}$$

и характеристические функции распределений \mathcal{S}_{T_q} и \mathcal{I}_{T_q} :

$$\phi_q^+(\xi) = E [e^{i\xi\mathcal{S}_{T_q}}] = \overline{(\mathcal{F}p_q^+)}(\xi), \tag{2.14}$$

$$\phi_q^-(\xi) = E [e^{i\xi\mathcal{I}_{T_q}}] = \overline{(\mathcal{F}p_q^-)}(\xi). \tag{2.15}$$

Используя функции $\phi_q^+(\xi)$ и $\phi_q^-(\xi)$, можно записать операторы свертки \mathcal{E}_q^+ и \mathcal{E}_q^- как интегральные операторы Фурье:

$$\mathcal{E}_q^+ u(x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbf{R}} e^{ix\xi} \phi_q^+(\xi) \mathcal{F}u(\xi) d\xi, \tag{2.16}$$

$$\mathcal{E}_q^- u(x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbf{R}} e^{ix\xi} \phi_q^-(\xi) \mathcal{F}u(\xi) d\xi. \tag{2.17}$$

Заметим, что в случае процессов Леви экспоненциального типа $[\lambda_-, \lambda_+]$ функции $\phi_q^+(\xi)$ ($\phi_q^-(\xi)$) допускают аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость $\Im\xi > \omega_-$, $\omega_- \geq \lambda_-$ (нижнюю полуплоскость $\Im\xi < \omega_+$, $\omega_+ \leq \lambda_+$).

Подробнее свойства процессов, применяемых при моделировании финансовых рынков, изложены в монографиях [5], [10].

2.2. Применение операторов \mathcal{E}_q^+ и \mathcal{E}_q^- при решении задач вычисления цен барьерных опционов

Пусть T, K, D, U, r — момент исполнения, цена исполнения, нижний и верхний барьеры и безрисковая процентная ставка соответственно, а цена акции $S_t = De^{X_t+x}$, $x \in \mathbf{R}$, — экспоненциальный процесс Леви при выбранной нейтральной по отношению к риску мере (подробнее см., например, [20]).

Обозначим через $h = \ln U/D$, а $G(x)$ — функцию выплат по опциону. Тогда выплата при исполнении составит $\mathbf{1}_{(0,h)}(x + X_T)G(x + X_T)$, а безарбитражная цена двухбарьерного опциона в начале рассматриваемого периода ($t = 0$) при $x \in (0, h)$ (т.е. начальная цена акции находится между барьерами D и U) определяется по формуле

$$V(T, x) = E [e^{-rT} \mathbf{1}_{x+\mathcal{I}_{T_q} > 0} \mathbf{1}_{x+S_T < h} G(x + X_T)]. \tag{2.18}$$

Решение задачи (2.18) численно сводится к последовательному вычислению следующих функций для $n = 1, 2, \dots, N$:

$$v_n(q, x) = E \left[\frac{v_{n-1}(q, x + X_{T_{q+r}})}{(1 + r/q)} \mathbf{1}_{x+\mathcal{I}_{T_{q+r}} > 0} \mathbf{1}_{x+S_{T_{q+r}} < h} \right], \tag{2.19}$$

где $v_0(q, x) = G(x)\mathbf{1}_{(0,h)}(x)$ и $q = N/T$. При $N \rightarrow +\infty$ функция $v_N(q, x)$ стремится к $V(T, x)$ (см., например, [18], [20]).

Для однобарьерного случая ($h = +\infty$) можно применить метод Винера–Хопфа при $n = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} v_n(q, x) &= \frac{1}{(1 + r/q)} E[v_{n-1}(q, x + \mathcal{I}_{T_{q+r}} + (X_{T_{q+r}} - \mathcal{I}_{T_{q+r}})) \mathbf{1}_{x+\mathcal{I}_{T_{q+r}} > h}] = \\ &= \frac{1}{(1 + r/q)} \mathcal{E}_{q+r}^- \mathbf{1}_{(h, +\infty)} \mathcal{E}_{q+r}^+ v_{n-1}(q, x). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Заметим, что явные формулы для операторов \mathcal{E}_q^- и \mathcal{E}_q^+ известны только для небольшого количества частных случаев: рациональной характеристической экспоненты, негауссовских процессов Леви с односторонними скачками. В общем случае необходимо аппроксимировать функции ϕ_q^\pm в формулах (2.16) и (2.17) с помощью специальных вычислительных техник. О приближенной факторизации Винера–Хопфа в задачах вычисления цен опционов можно подробно прочитать в [17], [2].

В работе [18] был предложен упрощенный вариант факторизации Винера–Хопфа для вычисления однобарьерных опционов, который значительно проще программно реализовать. Позднее, этот подход был распространен на двубарьерный случай (см. [20], [21]). Напомним основные шаги подхода [20] к вычислению (2.19)

для процессов Леви с характеристической экспонентой вида (2.2). Сначала мы представляем X_t как разность между двумя субординаторами X_t^+ и $-X_t^-$:

$$X_t = X_t^+ - (-X_t^-).$$

Напомним, что субординатор — это процесс Леви с траекториями, которые почти наверное неубывают. Согласно [10, предложение 3.10], субординатор не имеет диффузионной компоненты, только положительные скачки конечной вариации и неотрицательный снос.

Обозначим через $\psi_+(\xi)$ и $\psi_-(\xi)$ характеристические экспоненты X_t^+ и X_t^- соответственно. Тогда $\psi_+(\xi)$ и $\psi_-(\xi)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi_+(\xi) &= -i\mu_+\xi + \int_0^{+\infty} (1 - e^{i\xi y})F(dy), \mu_+ \geq 0, \\ \psi_-(\xi) &= -i\mu_-\xi + \int_{-\infty}^0 (1 - e^{i\xi y})F(dy), \mu_- \leq 0. \end{aligned}$$

Для процесса X_t^+ мы можем явным образом определить оператор \mathcal{E}_q^+ по формуле (2.10) с

$$p_q^+(x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbf{R}} e^{ix\xi} q(q + \psi_+(\xi))^{-1} d\xi, x > 0, \tag{2.21}$$

а для процесса X_t^- — оператор \mathcal{E}_q^- по формуле (2.11) с

$$p_q^-(x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbf{R}} e^{ix\xi} q(q + \psi_-(\xi))^{-1} d\xi, x < 0. \tag{2.22}$$

Тогда (2.19) можно приближенно вычислить по формуле (см. детали в [20])

$$v_n(q, x) = \frac{\mathbf{1}_{(0,h)}(x)}{(1+r/q)} \mathcal{E}_{2(q+r)}^+ \mathbf{1}_{(0,h)} \mathcal{E}_{q+r}^- \mathbf{1}_{(0,h)} \mathcal{E}_{2(q+r)}^+ v_{n-1}(q, x). \tag{2.23}$$

Заметим, что как в случае (2.19), так и в случае (2.23), нам необходимо многократно вычислять действие интегральных операторов свертки \mathcal{E}_q^+ и \mathcal{E}_q^- . Обычно данная вычислительная процедура реализуется с помощью быстрого преобразования Фурье. В следующем разделе мы рассмотрим альтернативный подход.

3. БЫСТРОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ С ЯДРОМ ТИПА ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

3.1. Общие формулы вычисления действия операторов \mathcal{E}^+ и \mathcal{E}^- на функции с компактным носителем

Пусть X — процесс Леви экспоненциального типа $[\lambda_-, \lambda_+]$, и пусть параметр $q > 0$ такой, что не выполнены условия (2.6). В этом случае функции $\phi_q^+(\xi)$ и $\phi_q^-(\xi)$ аналитичны в полуплоскостях $\Im \xi > \lambda_-$ и $\Im \xi < \lambda_+$ соответственно.

Применение метода Винера–Хопфа при вычислении цен опционов с выплатами, зависящими от траектории процесса Леви, обычно требует многократного применения операторов \mathcal{E}^+ и \mathcal{E}^- (см., например, [17], [18], [21]). Отметим, что в случае, когда вычисляются цены двухбарьерных опционов, носители функций, на которые действуют операторы \mathcal{E}^+ и \mathcal{E}^- , ограничены барьерами сверху и снизу (см. [20], [21]).

Рассмотрим действие оператора \mathcal{E}^+ на функцию $u(x)$, носитель которой принадлежит интервалу (d, u) . Пусть $M_0 > 1$. Рассмотрим разбиение интервала (d, u) точками $\{x_n\}_0^{M_0}$:

$$d = x_0 < x_1 < \dots < x_{M_0} = u. \tag{3.1}$$

Пусть известны значения функции $u(x)$ в точках $\{x_n^*\}_1^{M_0}$, где

$$x_{n-1} < x_n^* < x_n \text{ для всех } 1 \leq n \leq M_0.$$

Тогда аппроксимируем преобразование Фурье функции $u(x)$ при $\Im \xi \neq 0$ следующим образом:

$$(\mathcal{F}u)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} u(x) dx = \int_d^u e^{-ix\xi} u(x) dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{x_0}^{x_1} e^{-ix\xi} u(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} e^{-ix\xi} u(x) dx + \dots + \int_{x_{M_0-1}}^{x_{M_0}} e^{-ix\xi} u(x) dx \approx \\
 &\approx \int_{x_0}^{x_1} e^{-ix\xi} u(x_1^*) dx + \int_{x_1}^{x_2} e^{-ix\xi} u(x_2^*) dx + \dots + \int_{x_{M_0-1}}^{x_{M_0}} e^{-ix\xi} u(x_{M_0}^*) dx = \\
 &= u(x_1^*) \int_{x_0}^{x_1} e^{-ix\xi} dx + u(x_2^*) \int_{x_1}^{x_2} e^{-ix\xi} dx + \dots + u(x_{M_0}^*) \int_{x_{M_0-1}}^{x_{M_0}} e^{-ix\xi} dx = \\
 &= u(x_1^*) \frac{e^{-ix_1\xi} - e^{-ix_0\xi}}{-i\xi} + u(x_2^*) \frac{e^{-ix_2\xi} - e^{-ix_1\xi}}{-i\xi} + \dots + u(x_{M_0}^*) \frac{e^{-ix_{M_0}\xi} - e^{-ix_{M_0-1}\xi}}{-i\xi} := \tilde{u}(\xi). \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Заметим, что $\tilde{u}(\xi)$ можно доопределить в точке $\xi = 0$ по непрерывности.

Учитывая аналитичность функции $\phi_q^+(\xi)$ в полуплоскости $\Im\xi > \lambda_-$, мы можем сдвинуть прямую интегрирования в формуле (2.16):

$$\mathcal{E}_q^+ u(x_k^*) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} e^{ix_k^*\xi} \phi_q^+(\xi) \mathcal{F}u(\xi) d\xi, \quad k = 1, \dots, M_0, \quad (3.3)$$

где $\omega_- < \rho < 0$. Выбор ρ осуществляется так, чтобы сходился интеграл (2.13) (в нашем случае он сходится при любых ρ , но для применения нашей аппроксимации (3.2) $\rho = 0$ не подходит). Подробнее, о выборе параметра ρ в зависимости от вида функции выплат можно прочитать в монографиях [10], [5].

Применяя приближенную формулу (3.2), мы получаем в (3.3) для $k = M_0$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_q^+ u(x_{M_0}^*) &\approx (2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} e^{ix_{M_0}^*\xi} \phi_q^+(\xi) \tilde{u}(\xi) d\xi = \\
 &= u(x_1^*) (2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} \frac{e^{i(x_{M_0}^*-x_1)\xi} - e^{i(x_{M_0}^*-x_0)\xi}}{-i\xi} \phi_q^+(\xi) d\xi + \dots + \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

$$+ u(x_{M_0-1}^*) (2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} \frac{e^{i(x_{M_0}^*-x_{M_0-1})\xi} - e^{i(x_{M_0}^*-x_{M_0-2})\xi}}{-i\xi} \phi_q^+(\xi) d\xi + \quad (3.5)$$

$$+ u(x_{M_0}^*) (2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} \frac{e^{i(x_{M_0}^*-x_{M_0})\xi} - e^{i(x_{M_0}^*-x_{M_0-1})\xi}}{-i\xi} \phi_q^+(\xi) d\xi. \quad (3.6)$$

В силу того что $\xi = 0$ является устранимой точкой и $(x_{M_0}^* - x_k) > 0$ при $k = 0, \dots, M_0 - 1$, все интегралы от (3.4) до (3.5) обращаются в 0 по лемме Жордана. Разбивая последний интеграл (3.6) на два слагаемых и применяя в последнем теорему о вычетах, мы получаем

$$\mathcal{E}_q^+ u(x_{M_0}^*) = u(x_{M_0}^*) - u(x_{M_0}^*) (2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} \frac{e^{i(x_{M_0}^*-x_{M_0})\xi}}{i\xi} \phi_q^+(\xi) d\xi, \quad \rho = \lambda_-. \quad (3.7)$$

Пусть теперь $k = M_0 - 1$, тогда

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_q^+ u(x_{M_0-1}^*) &\approx (2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} e^{ix_{M_0-1}^*\xi} \phi_q^+(\xi) \tilde{u}(\xi) d\xi = \\
 &= u(x_1^*) (2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} \frac{e^{i(x_{M_0-1}^*-x_1)\xi} - e^{i(x_{M_0-1}^*-x_0)\xi}}{-i\xi} \phi_q^+(\xi) d\xi + \dots + \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

$$+ u(x_{M_0-2}^*) (2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} \frac{e^{i(x_{M_0-1}^*-x_{M_0-2})\xi} - e^{i(x_{M_0-1}^*-x_{M_0-3})\xi}}{-i\xi} \phi_q^+(\xi) d\xi + \quad (3.9)$$

$$+ u(x_{M_0-1}^*) (2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} \frac{e^{i(x_{M_0-1}^*-x_{M_0-1})\xi} - e^{i(x_{M_0-1}^*-x_{M_0-2})\xi}}{-i\xi} \phi_q^+(\xi) d\xi + \quad (3.10)$$

$$+ u(x_{M_0}^*) (2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} \frac{e^{i(x_{M_0-1}^*-x_{M_0})\xi} - e^{i(x_{M_0-1}^*-x_{M_0-1})\xi}}{-i\xi} \phi_q^+(\xi) d\xi. \quad (3.11)$$

Аналогично $(x_{M_0-1}^* - x_k) > 0$ при $k = 0, \dots, M_0 - 2$, и все интегралы от (3.8) до (3.9) обращаются в 0 по лемме Жордана. Разбивая предпоследний интеграл (3.10) на два слагаемых и применяя в последнем теорему о вычетах,

после перегруппировки с последним интегралом мы получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_q^+ u(x_{M_0-1}^*) &= u(x_{M_0-1}^*) + (u(x_{M_0}^*) - u(x_{M_0-1}^*))(2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} \frac{e^{i(x_{M_0-1}^* - x_{M_0-1}^*)\xi}}{i\xi} \Phi_q^+(\xi) d\xi - \\ &- u(x_{M_0}^*)(2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} \frac{e^{i(x_{M_0-1}^* - x_{M_0}^*)\xi}}{i\xi} \Phi_q^+(\xi) d\xi, \quad \rho = \lambda_-. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Продолжая представленную процедуру для $k = M_0 - 2, M_0 - 3, \dots, 1$, мы приходим к общей формуле

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_q^+ u(x_k^*) &= u(x_k^*) + (u(x_{k+1}^*) - u(x_k^*))(2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} \frac{e^{i(x_k^* - x_k^*)\xi}}{i\xi} \Phi_q^+(\xi) d\xi + \dots \\ \dots &+ (u(x_{M_0}^*) - u(x_{M_0-1}^*))(2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} \frac{e^{i(x_k^* - x_{M_0-1}^*)\xi}}{i\xi} \Phi_q^+(\xi) d\xi - \\ &- u(x_{M_0}^*)(2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} \frac{e^{i(x_k^* - x_{M_0}^*)\xi}}{i\xi} \Phi_q^+(\xi) d\xi, \quad \rho = \lambda_-. \end{aligned} \tag{3.13}$$

По аналогии с предыдущими вычислениями мы можем аппроксимировать действие оператора \mathcal{E}_q^- на функцию u . Теперь благодаря аналитичности функции $\Phi_q^-(\xi)$ в полуплоскости $\Im \xi < \lambda_+$, мы сдвинем прямую интегрирования в формуле (2.17) вверх:

$$\mathcal{E}_q^- u(x_k^*) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} e^{ix_k^* \xi} \Phi_q^-(\xi) \mathcal{F}u(\xi) d\xi, \quad k = 1, \dots, M_0, \tag{3.14}$$

где $0 < \rho < \omega_+$.

В результате проведенных выкладок для $k = 1, \dots, M_0 - 1, M_0$, мы получаем общую формулу

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_q^- u(x_k^*) &= u(x_k^*) + (u(x_{k-1}^*) - u(x_k^*))(2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} \frac{e^{i(x_k^* - x_{k-1}^*)\xi}}{-i\xi} \Phi_q^-(\xi) d\xi + \dots \\ \dots &+ (u(x_1^*) - u(x_2^*))(2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} \frac{e^{i(x_k^* - x_1^*)\xi}}{-i\xi} \Phi_q^-(\xi) d\xi - \\ &- u(x_1^*)(2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} \frac{e^{i(x_k^* - x_0^*)\xi}}{-i\xi} \Phi_q^-(\xi) d\xi, \quad \rho = \lambda_+. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Если сетка $\{x_n\}_0^{M_0}$, определенная (3.1), является равномерной, т.е.

$$x_k = x_0 + 2hk, \quad k = 0, 1, \dots, M_0,$$

где $h = (u - d)/2M_0$, то определив

$$x_k^* = x_k + h, \quad k = 1, \dots, M_0, \tag{3.16}$$

мы можем упростить формулы (3.13) и (3.15) следующим образом. Для каждого $k = 1, \dots, M_0$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_q^+ u(x_k^*) &= u(x_k^*) + (u(x_{k+1}^*) - u(x_k^*))(2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} \frac{e^{-ih\xi}}{i\xi} \Phi_q^+(\xi) d\xi + \\ &+ (u(x_{k+2}^*) - u(x_{k+1}^*))(2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} \frac{e^{-i3h\xi}}{i\xi} \Phi_q^+(\xi) d\xi + \dots \\ \dots &+ (u(x_{M_0}^*) - u(x_{M_0-1}^*))(2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} \frac{e^{-i(2M_0+3-2k)h\xi}}{i\xi} \Phi_q^+(\xi) d\xi - \\ &- u(x_{M_0}^*)(2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} \frac{e^{-i(2M_0-1-2k)h\xi}}{i\xi} \Phi_q^+(\xi) d\xi, \quad \rho = \lambda_-, \end{aligned} \tag{3.17}$$

и

$$\mathcal{E}_q^- u(x_k^*) = u(x_k^*) + (u(x_{k-1}^*) - u(x_k^*))(2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} \frac{e^{ih\xi}}{-i\xi} \Phi_q^-(\xi) d\xi =$$

$$\begin{aligned}
 &= (u(x_{k-2}^*) - u(x_{k-1}^*)) (2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} \frac{e^{i3h\xi}}{-i\xi} \phi_q^-(\xi) d\xi + \dots \\
 \dots &+ (u(x_1^*) - u(x_2^*)) (2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} \frac{e^{i(2k-3)h\xi}}{-i\xi} \phi_q^-(\xi) d\xi - \\
 &- u(x_1^*) (2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} \frac{e^{i(2k-1)h\xi}}{-i\xi} \phi_q^-(\xi) d\xi, \quad \rho = \lambda_+.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Таким образом, для эффективной реализации формулы (3.17) и (3.18) нам для фиксированного $h > 0$ необходимо определить, соответственно, значения интегралов вида

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\lambda_-}^{+\infty+i\lambda_-} \frac{e^{-i(2k-1)h\xi}}{i\xi} \phi_q^+(\xi) d\xi, \quad k = 1, \dots, M_0, \tag{3.19}$$

и

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\lambda_+}^{+\infty+i\lambda_+} \frac{e^{i(2k-1)h\xi}}{-i\xi} \phi_q^-(\xi) d\xi, \quad k = 1, \dots, M_0. \tag{3.20}$$

С ростом k значения интегралов (3.19) и (3.20) стремятся к нулю, поэтому при выбранной точности вычислений в формулах (3.17) и (3.18) может понадобиться только часть слагаемых. Таким образом, в упрощенном виде формулы (3.19) и (3.20) с m слагаемыми можно переписать следующим образом:

$$\mathcal{E}_q^+ u(x_k^*) = u(x_k^*) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m (u(x_{k+j}^*) - u(x_{k+j-1}^*)) \int_{-\infty+i\lambda_-}^{+\infty+i\lambda_-} \frac{e^{-i(2j-1)h\xi}}{i\xi} \phi_q^+(\xi) d\xi, \tag{3.21}$$

$$\mathcal{E}_q^- u(x_k^*) = u(x_k^*) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m (u(x_{k-j}^*) - u(x_{k-j+1}^*)) \int_{-\infty+i\lambda_+}^{+\infty+i\lambda_+} \frac{e^{i(2j-1)h\xi}}{-i\xi} \phi_q^-(\xi) d\xi. \tag{3.22}$$

Назовем эту процедуру вычисления действия операторов \mathcal{E}_q^+ и \mathcal{E}_q^- методом суммирования интегралов (кратко – МСИ).

Заметим, что основным недостатками непосредственной реализации формулы (2.16) с помощью быстрого преобразования Фурье являются следующие условия применения этого алгоритма:

- сетка $\{x_k\}$ должна существенно выходить за пределы интервала (d, u) из-за периодичности дискретного преобразования Фурье;
- количество точек M в сетке $\{x_k\}$ должно совпадать с количеством точек при дискретизации интеграла Фурье (2.16) по ξ ;
- количество точек M должно быть степенью 2;
- сетки по x и ξ обязательно должны быть равномерными;
- шаг дискретизации по x (Δx) и шаг дискретизации по ξ ($\Delta \xi$) должны удовлетворять соотношению

$$\frac{2\pi}{M_0} = \Delta x \Delta \xi,$$

которое при уменьшении Δx приводит к увеличению $\Delta \xi$ при фиксированном количестве точек и наоборот.

В предлагаемом нами подходе набор интегралов (3.19) и (3.20) можно однократно вычислить с необходимой точностью и применять при дальнейшей реализации численного метода.

Если сетка неравномерна, то нам нужно будет вычислять интегралы вида

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\lambda_-}^{+\infty+i\lambda_-} \frac{e^{-ix\xi}}{i\xi} \phi_q^+(\xi) d\xi, \quad k = 1, \dots, M_0, \tag{3.23}$$

и

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\lambda_+}^{+\infty+i\lambda_+} \frac{e^{ix\xi}}{-i\xi} \phi_q^-(\xi) d\xi, \quad k = 1, \dots, M_0, \tag{3.24}$$

для определенного набора значений параметра $x > 0$, фиксируемого нашей сеткой.

Отметим, что явные формулы для факторов $\phi_q^+(\xi)$ и $\phi_q^-(\xi)$ известны только для ограниченного количества моделей Леви, но вместе с тем существуют приближенные формулы (см., например, [17]). В недавних работах [18], [20], [21], разработан подход, в рамках которого вычисление цен барьерных опционов сводилось к последовательному применению операторов вида \mathcal{E}_q^+ и \mathcal{E}_q^- , построенных для спектрально односторонних процессов Леви. В следующем разделе мы рассмотрим, как в этом случае формула (3.23) ((3.24)) может быть численно реализована особенно эффективно.

3.2. Явные формулы реализации операторов \mathcal{E}_q^+ и \mathcal{E}_q^- для спектрально односторонних умеренно устойчивых процессов Леви

Рассмотрим быстрое вычисление свертков для операторов \mathcal{E}_q^+ , порождаемых чисто негауссовыми спектрально положительными процессами Леви X_t^+ с ограниченной вариацией скачков (см. [23]). Будем предполагать, что снос у процесса X_t^+ неотрицательный. В качестве базового примера X_t^+ рассмотрим умеренно устойчивый процесс Леви (TSL), как это делалось при вычислении барьерных опционов в [18], [20]. В этом случае характеристическая экспонента процесса будет иметь вид

$$\psi_+(\xi) = -i\mu\xi + c_-\Gamma(-\nu_-)[(-\lambda_-)^{\nu_-} - (-\lambda_- - i\xi)^{\nu_-}], \tag{3.25}$$

где $\nu_- \in (0, 1)$, $c_- > 0$, $\mu \geq 0$ и $\lambda_- < -1$. При заданных ограничениях на параметр ν_- процесс Леви X_t^+ является субординатором. Пусть параметр $q > 0$. Соответственно, характеристическая функция $\phi_q^+(\xi) = q(q + \psi_+(\xi))^{-1}$ имеет аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость $\Im \xi > \lambda_-$ комплексной плоскости \mathbb{C} . Получим формулу для вычисления интегралов вида (3.23) в этом специальном случае. Обозначим через

$$I^+(q, \mu, c_-, \lambda_-, \nu_-, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + i\lambda_-}^{+\infty + i\lambda_-} \frac{qe^{ix\xi}}{\xi(q + \psi_+(\xi))} d\xi. \tag{3.26}$$

Очевидно, что при $x > 0$ интеграл (3.26) обращается в 1 по лемме Жордана.

Отметим, что согласно лемме 2.1 уравнение

$$q + \psi_+(\xi) = 0 \tag{3.27}$$

может иметь максимум один чисто мнимый корень в нижней полуплоскости комплексной плоскости \mathbb{C} , при этом корень существует, когда

$$q + \psi_+(i(\lambda_- + 0)) < 0. \tag{3.28}$$

Для характеристической экспоненты $\psi_+(\xi)$ вида (3.25) условие (3.28) приобретает вид

$$q + \mu\lambda_- + c_-\Gamma(-\nu_-)(-\lambda_-)^{\nu_-} < 0. \tag{3.29}$$

Напомним, что $\Gamma(-\nu) < 0$ при $\nu \in (0, 1)$. Поскольку обычно при реализации численных методов параметр q достаточно велик (q можно интерпретировать как $1/\Delta t$, где Δt – шаг дискретизации по времени), то будем считать, что

$$q + \mu\lambda_- + c_-\Gamma(-\nu_-)(-\lambda_-)^{\nu_-} \gg 0. \tag{3.30}$$

Учитывая, что функция $\phi_q^+(\xi)$ имеет степенное убывание на бесконечности и аналитически продолжается в нижнюю полуплоскость \mathbb{C} с разрезом $(-\infty, i\lambda_-]$, при $x < 0$ мы можем трансформировать контур интегрирования и свести вычисление (3.26) к интегрированию вдоль разреза. Подсчитаем пределы подынтегральной функции на левом и правом краях разреза $[i\lambda_-, +i\infty)$, и перепишем формулу (3.26) для $x < 0$ в виде

$$I^+(q, \mu, c_-, \lambda_-, \nu_-, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\lambda_-} \frac{qe^{ix\xi}}{i\xi(q + \psi_+(\xi - 0))} d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\lambda_-} \frac{qe^{ix\xi}}{i\xi(q + \psi_+(\xi + 0))} d\xi. \tag{3.31}$$

Сделаем замену $\xi = iz$, тогда мы получаем

$$I^+(q, \mu, c_-, \lambda_-, \nu_-, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\lambda_-} \frac{qe^{-xz}}{(-z)(q + \psi_+(iz + 0))} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\lambda_-} \frac{qe^{-xz}}{(-z)(q + \psi_+(iz - 0))} dz. \tag{3.32}$$

Имеем для $z < \lambda_-$

$$\frac{qe^{-xz}}{q + \psi_+(iz - 0)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{qe^{-xz}}{q - i\mu(iz - \epsilon) + c_-\Gamma(-\nu_-)[(-\lambda_-)^{\nu_-} - (-\lambda_- - i(iz - \epsilon))^{\nu_-}]} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{qe^{-xz}}{q + \mu z + c_- \Gamma(-\nu_-)[(-\lambda_-)^{\nu_-} - (-\lambda_- + z + i\epsilon)^{\nu_-}]} = \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{qe^{-xz}}{q + \mu z + c_- \Gamma(-\nu_-)[(-\lambda_-)^{\nu_-} - \exp(\nu_- \ln(-\lambda_- + z + i\epsilon))]} = \\
 &= \frac{qe^{-xz}}{q + \mu z + c_- \Gamma(-\nu_-)[(-\lambda_-)^{\nu_-} - \exp(i\pi\nu_- + \ln(\lambda_- - z))]} = \\
 &= \frac{qe^{-xz}}{q + \mu z + c_- \Gamma(-\nu_-)[(-\lambda_-)^{\nu_-} - e^{i\pi\nu_-}(\lambda_- - z)^{\nu_-}]} \tag{3.33}
 \end{aligned}$$

Напомним, что главное значение $\ln w$ многозначной функции $\text{Ln } w$ определяется по формуле

$$\ln w = \ln |w| + i \arg w, \quad w \in \mathbf{C},$$

$\arg w$ – главное значение аргумента комплексного числа w .

Аналогично получаем, что при $z < \lambda_-$

$$\begin{aligned}
 \frac{qe^{-xz}}{q + \Psi_+(iz + 0)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{qe^{-xz}}{q - i\mu(iz + \epsilon) + c_- \Gamma(-\nu_-)[(-\lambda_-)^{\nu_-} - (-\lambda_- - i(iz + \epsilon))^{\nu_-}]} = \\
 &= \frac{qe^{-xz}}{q + \mu z + c_- \Gamma(-\nu_-)[(-\lambda_-)^{\nu_-} - e^{-i\pi\nu_-}(\lambda_- - z)^{\nu_-}]} \tag{3.34}
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание (3.33) и (3.34), мы преобразуем (3.32) к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 I^+(q, \mu, c_-, \lambda_-, \nu_-, x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\lambda_-} \frac{qe^{-xz} (\Psi_+(iz - 0) - \Psi_+(iz + 0))}{(-z)(q + \Psi_+(iz + 0))(q + \Psi_+(iz - 0))} dz = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\lambda_-} \frac{c_- \Gamma(-\nu_-) qe^{-xz} (\lambda_- - z)^{\nu_-} (e^{-i\pi\nu_-} - e^{i\pi\nu_-})}{(-z)(\Psi^+(\lambda_- - z, \mu, c_1^-, c_2^-, \nu_-) + \Psi_0^+(\lambda_- - z, c_3^-, \nu_-))} dz = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\lambda_-} \frac{c_3^- qe^{-xz} (\lambda_- - z)^{\nu_-}}{(-z)(\Psi^+(\lambda_- - z, \mu, c_1^-, c_2^-, \nu_-) + \Psi_0^+(\lambda_- - z, c_3^-, \nu_-))} dz,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Psi^+(w, \mu, c_1^-, c_2^-, \nu_-) &= (c_1^- - \mu w + c_2^- w^{\nu_-})^2, \\
 c_1^- &:= c_1^-(q, \mu, \lambda_-, c_-, \nu_-) = q + \mu\lambda_- + c_- \Gamma(-\nu_-)(-\lambda_-)^{\nu_-}, \\
 c_2^- &:= c_2^-(c_-, \nu_-) = -c_- \Gamma(-\nu_-) \cos(\pi\nu_-), \\
 \Psi_0^+(w, c_3^-, \nu_-) &= c_3^{-2} w^{2\nu_-}, \\
 c_3^- &:= c_3^-(c_-, \nu_-) = -c_- \Gamma(-\nu_-) \sin(\pi\nu_-).
 \end{aligned}$$

Сделаем замену $w = \lambda_- - z$, тогда интеграл (3.32) запишется в удобном для расчетов виде

$$\begin{aligned}
 I^+(q, \mu, c_-, \lambda_-, \nu_-, x) &= \frac{e^{-\lambda_- x}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{c_3^- qe^{xw} w^{\nu_-}}{(w - \lambda_-)(\Psi^+(w, \mu, c_1^-, c_2^-, \nu_-) + \Psi_0^+(w, c_3^-, \nu_-))} dw = \\
 &= \frac{c_3^- qe^{-\lambda_- x}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{xw} w^{\nu_-}}{(w - \lambda_-) \left((c_1^- - \mu w + c_2^- w^{\nu_-})^2 + c_3^{-2} w^{2\nu_-} \right)} dw.
 \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай умеренно устойчивых процессов Леви X_t^- со спектрально негативными скачками ограниченной вариации и неположительным сносом:

$$\Psi_-(\xi) = -i\mu\xi + c_+ \Gamma(-\nu_+) [\lambda_+^{\nu_+} - (\lambda_+ + i\xi)^{\nu_+}], \tag{3.35}$$

где $\nu_+ \in (0, 1)$, $c_+ > 0$, $\mu \leq 0$ и $\lambda_+ > 0$. При заданных ограничениях на параметр ν_+ процесс Леви $-X_t^-$ является субординатором. Соответственно характеристическая функция $\phi_q^-(\xi) = (q + \Psi_-(\xi))^{-1}$ имеет аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость комплексной плоскости \mathbf{C} .

Интеграл (3.24) в данном случае обозначим через

$$I^-(q, \mu, c_+, \lambda_+, \nu_+, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{qe^{ix\xi}}{\xi(q + \psi_-(\xi))} d\xi. \tag{3.36}$$

Очевидно, что при $x < 0$ интеграл (3.36) обращается в 0 по лемме Жордана.

Отметим, что согласно лемме 2.1 уравнение

$$q + \psi_-(\xi) = 0 \tag{3.37}$$

может иметь максимум один чисто мнимый корень в верхней полуплоскости комплексной плоскости \mathbf{C} , при этом корень существует, когда

$$q + \psi_-(i(\lambda_+ - 0)) < 0. \tag{3.38}$$

Для характеристической экспоненты $\psi_-(\xi)$ вида (3.35) условие (3.38) приобретает вид

$$q + \mu\lambda_+ + c_+\Gamma(-\nu_+)\lambda_+^{\nu_+} < 0. \tag{3.39}$$

По аналогии со спектрально положительным случаем будем считать, что

$$q + \mu\lambda_+ + c_+\Gamma(-\nu_+)\lambda_+^{\nu_+} \gg 0. \tag{3.40}$$

Учитывая, что функция $\phi_q^-(\xi)$ имеет степенное убывание на бесконечности и аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость \mathbf{C} с разрезом $(i\lambda_+, +i\infty)$, при $x > 0$ мы трансформируем контур интегрирования и сводим вычисление (3.36) к интегрированию вдоль разреза. Как и выше, найдем пределы подынтегральной функции на левом и правом краях разреза $(i\lambda_+, +i\infty)$, и перепишем формулу (3.26) для $x > 0$ в виде

$$I^-(q, \mu, c_+, \lambda_+, \nu_+, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{i\lambda_+}^{+i\infty} \frac{qe^{ix\xi}}{(-i\xi)(q + \psi_-(\xi + 0))} d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_{i\lambda_+}^{+i\infty} \frac{qe^{ix\xi}}{(-i\xi)(q + \psi_-(\xi - 0))} d\xi. \tag{3.41}$$

Сделаем замену $\xi = iz$, тогда мы получаем

$$I^-(q, \mu, c_+, \lambda_+, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_+}^{+\infty} \frac{qe^{-xz}}{z(q + \psi_-(iz - 0))} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_+}^{+\infty} \frac{qe^{-xz}}{z(q + \psi_-(iz + 0))} dz. \tag{3.42}$$

Имеем для $z > \lambda_+$

$$\begin{aligned} \frac{qe^{-xz}}{q + \psi_-(iz - 0)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{qe^{-xz}}{q - i\mu(iz - \epsilon) + c_+\Gamma(-\nu_+)[\lambda_+^{\nu_+} - (\lambda_+ + i(iz - \epsilon))^{\nu_+}]} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{qe^{-xz}}{q + \mu z + c_+\Gamma(-\nu_+)[\lambda_+^{\nu_+} - (\lambda_+ - z - i\epsilon)^{\nu_+}]} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{qe^{-xz}}{q + \mu z + c_+\Gamma(-\nu_+)[(\lambda_+^{\nu_+} - \exp(\nu_+ \ln(\lambda_+ - z - i\epsilon))]} = \\ &= \frac{qe^{-xz}}{q + \mu z + c_+\Gamma(-\nu_+)[(\lambda_+^{\nu_+} - \exp(-i\pi\nu_+ + \ln(z - \lambda_+))]} = \\ &= \frac{qe^{-xz}}{q + \mu z + c_+\Gamma(-\nu_+)[\lambda_+^{\nu_+} - e^{-i\pi\nu_+}(z - \lambda_+)^{\nu_+}]} \end{aligned} \tag{3.43}$$

Аналогично получаем, что при $z > \lambda_+$

$$\begin{aligned} \frac{qe^{-xz}}{q + \psi_-(iz + 0)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{qe^{-xz}}{q - i\mu(iz + \epsilon) + c_+\Gamma(-\nu_+)[\lambda_+^{\nu_+} - (\lambda_+ + i(iz + \epsilon))^{\nu_+}]} = \\ &= \frac{qe^{-xz}}{q + \mu z + c_+\Gamma(-\nu_+)[\lambda_+^{\nu_+} - e^{i\pi\nu_+}(z - \lambda_+)^{\nu_+}]} \end{aligned} \tag{3.44}$$

Принимая во внимание (3.43) и (3.44), мы преобразуем (3.42) к следующему виду:

$$I^-(q, \mu, c_+, \lambda_+, \nu_+, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_+}^{+\infty} \frac{qe^{-xz}(\psi_-(iz + 0) - \psi_-(iz - 0))}{z(q + \psi_-(iz + 0))(q + \psi_-(iz - 0))} dz =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_+}^{+\infty} \frac{c_+ \Gamma(-\nu_+) q e^{-xz} (z - \lambda_+)^{\nu_+} (e^{-i\pi\nu_+} - e^{i\pi\nu_+})}{z (\Psi^-(z - \lambda_+, \mu, c_1^+, c_2^+, \nu_+) + \Psi_0^-(z - \lambda_+, c_3^+, \nu_+))} dz = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_+}^{+\infty} \frac{c_3^+ q e^{-xz} (z - \lambda_+)^{\nu_+}}{z (\Psi^-(z - \lambda_+, \mu, c_1^+, c_2^+, \nu_+) + \Psi_0^-(z - \lambda_+, c_3^+, \nu_+))} dz,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Psi^-(w, \mu, c_1^+, c_2^+, \nu_+) &= (c_1^+ + \mu w + c_2^+ w^{\nu_+})^2, \\
 c_1^+ &:= c_1^+(q, \mu, \lambda_+, c_+, \nu_+) = q + \mu \lambda_+ + c_+ \Gamma(-\nu_+) \lambda_+^{\nu_+}, \\
 c_2^+ &:= c_2^+(c_+, \nu_+) = -c_+ \Gamma(-\nu_+) \cos(\pi\nu_+), \\
 \Psi_0^-(w, c_3^+, \nu_+) &= c_3^{+2} w^{2\nu_+}, \\
 c_3^+ &:= c_3^+(c_+, \nu_+) = -c_+ \Gamma(-\nu_+) \sin(\pi\nu_+).
 \end{aligned}$$

Сделаем замену $w = z - \lambda_+$, тогда интеграл (3.42) запишется в удобном для расчетов виде

$$\begin{aligned}
 I^-(q, \mu, c_+, \lambda_+, \nu_+, x) &= \frac{e^{-\lambda_+ x}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{c_3^+ q e^{-xw} w^{\nu_+}}{(w + \lambda_+) (\Psi^-(w, \mu, c_1^+, c_2^+, \nu_+) + \Psi_0^-(w, c_3^+, \nu_+))} dw = \\
 &= \frac{c_3^+ q e^{-\lambda_+ x}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xw} w^{\nu_+}}{(w + \lambda_+) \left((c_1^+ + \mu w + c_2^+ w^{\nu_+})^2 + c_3^{+2} w^{2\nu_+} \right)} dw.
 \end{aligned}$$

Таким образом, вычисление интегралов I^+ при $x < 0, \mu \geq 0$ и I^- при $x > 0, \mu \leq 0$ можно свести к вычислению одного и того же типа интеграла:

$$I(\mu, q, c, \lambda, \nu, x) = \int_0^{+\infty} \frac{q e^{-xw} w^\nu}{(w + \lambda) \left((c_1 - \mu w + c_2 w^\nu)^2 + c_3 w^{2\nu} \right)} dw, \tag{3.45}$$

где

$$x > 0, \quad q > 0, \quad c > 0, \quad \lambda > 0, \quad \mu \geq 0, \quad 0 < \nu < 1,$$

$$\begin{aligned}
 c_1 &:= c_1(q, \mu, \lambda, c, \nu) = q + \mu \lambda + c \Gamma(-\nu) \lambda^\nu, \\
 c_2 &:= c_2(c, \nu) = -c \Gamma(-\nu) \cos(\pi\nu), \\
 c_3 &:= c_3(c, \nu) = (c \Gamma(-\nu) \sin(\pi\nu))^2.
 \end{aligned}$$

Типовые интегралы типа (3.45) можно заранее обучить вычислять методами машинного обучения. Используя, например, предобученные искусственные нейросети, вычисляющие интегралы (3.45), как вспомогательные элементы, можно строить гибридные численные методы вычисления цен опционов.

3.3. Возможности применения искусственных нейронных сетей для вычисления интегралов $I(\mu, q, c, \lambda, \nu, x)$

Напомним, что по своей сути искусственные нейронные сети (ИНС) представляют собой многопараметрические нелинейные отображения (подробнее, см., например, [7]). Примером ИНС является сеть прямого пространства – последовательность из композиции многомерных линейных преобразований и одномерных непрерывных нелинейных функций активации, которые обычно выполняют роль своего рода классификатора (см. [11]). Набор входных параметров называется входным слоем нейросети, конечный результат – выходным слоем, а промежуточные результаты вычислений нелинейных преобразований – скрытыми слоями.

Современные программные реализации искусственных нейронных сетей эффективно комбинированы с технологиями параллельных вычислений, что делает ИНС полезным инструментом для разработки гибридных численных методов. Согласно теореме Цыбенко (см. [11]), любую непрерывную функцию $f(x_1, \dots, x_{d_0})$, заданную на компакте $C \subset R^{d_0}$, где $d_0 \geq 1$, можно с любой степенью точности приблизить функцией вида

$$g(x_1, \dots, x_{d_0}) = \sum_{j=1}^{M_0} \omega_j \sigma \left(\sum_{k=1}^{d_0} \alpha_j^k x_k + \beta_j \right), \quad \omega_j, \alpha_j^k, \beta_j \in \mathbf{R}, \tag{3.46}$$

где $\sigma(x)$ – сигмоидная функция активации (неубывающая непрерывная функция, которая стремится к 0 при $x \rightarrow -\infty$ и к 1 при $x \rightarrow +\infty$). Одной из наиболее популярных сигмоидных функций активации для ИНС является логистической функция, которая определяется формулой

$$\sigma(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

Напомним, что утверждения, обосновывающие возможности нейронных сетей различной архитектуры приближать функции, известны как универсальные теоремы аппроксимации. Наиболее известные результаты представлены в работах [11], [13]. Недавняя статья [22] предлагает вероятностную формулировку для универсальных теорем аппроксимации.

Заметим, что функция $g(x_1, \dots, x_{d_0})$ в (3.46) представляет собой простейшую нейросеть с d_0 нейронами на входном слое, одним нейроном на выходном слое и M_0 нейронами на скрытом слое. На практике для достижения заданной точности мы фиксируем число M_0 в архитектуре нашей ИНС, и с помощью одного из оптимизаторов (например, Adam) специализированной библиотеки (например, PyTorch) находим наилучший набор весов $\omega_j, \alpha_j^k, \beta_j$ для приближения функции $f(x_1, \dots, x_{d_0})$. Если достигнутой точности недостаточно, то следует увеличить число нейронов на скрытом слое и повторить процесс обучения.

Проиллюстрируем возможности аппроксимации интегралов $I(\mu, q, c, \lambda, \nu, x)$ (3.45) с помощью простейших нейросетей прямого распространения с одним скрытым слоем. Отметим, что интеграл $I(\mu, q, c, \lambda, \nu, x)$ является функцией шести переменных. Как отмечалось выше, с ростом x значение интеграла стремится к 0, поэтому при стандартных значениях остальных параметров вычислять $I(\mu, q, c, \lambda, \nu, x)$ при x выше 0.5 обычно нецелесообразно. Поскольку $\Gamma(-\nu)$ принимает достаточно большие значения, когда ν близко к 0 или 1, то для упрощения вычислений будем рассматривать случай, когда $\nu \in [0.1, 0.9]$. Переформулируем теорему Цыбенко [11, theorem 2] для решения задачи аппроксимации интеграла (3.45) с учетом указанных ограничений на параметры x и ν .

Теорема 3.1. Пусть σ – логистическая функция, и пусть заданы действительные положительные числа $\mu_{\max}, q_{\min} < q_{\max}, \lambda_{\min} < \lambda_{\max}, c_{\min} < c_{\max}$. Пусть функция $I(\mu, q, c, \lambda, \nu, x)$ определена формулой (3.45) с параметрами $\mu \in [0, \mu_{\max}], q \in [q_{\min}, q_{\max}], c \in [c_{\min}, c_{\max}], \lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}], \nu \in [0.1, 0.9], x \in [0, 0.5]$.

Для сколь угодно малого $\epsilon > 0$ существует функция вида

$$G(y) = \sum_{j=1}^{M_0} \omega_j \sigma(\alpha_j \cdot y + \beta_j), \quad y \in \mathbf{R}^6, \tag{3.47}$$

где $\alpha \cdot y$ обозначает скалярное произведение векторов α и y , а веса $\alpha_j \in \mathbf{R}^6, \omega_j, \beta_j \in \mathbf{R}$ таковы, что

$$|I(y) - G(y)| < \epsilon \tag{3.48}$$

для всех $y \in [0, \mu_{\max}] \times [q_{\min}, q_{\max}] \times [c_{\min}, c_{\max}] \times [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}] \times [0.1, 0.9] \times [0, 0.5]$.

С помощью теоремы 3.1 мы можем приблизить интеграл $I(\mu, q, c, \lambda, \nu, x)$ нейросетью (3.47) на замкнутом множестве параметров $(\mu, q, c, \lambda, \nu, x)$. Статистический анализ финансовых рынков (см., например, [8]) показывает, что параметры $\lambda_+, -\lambda_-$ обычно находятся в диапазоне (5, 250), параметр c обычно не превышает 150, а параметр сноса μ по модулю обычно не превосходит 1. На основе этих эмпирических исследований можно определить граничные значения параметров μ, c, λ . Параметр q связан с дискретизацией времени и приблизительно представляет собой обратную величину к шагу по времени Δt (подробнее, см., например, [1], [17], [18]). Поэтому типовые значения q можно рассматривать в диапазоне от 10 до 10 000.

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Сравнение метода упрощенной факторизации Винера–Хопфа с другими численными методами, включающими в себя методы приближенной факторизации Винера–Хопфа, Монте-Карло и конечно-разностные схемы, проводилось в работах [18], [20], [21]. Построенная в разд. 3 численная процедура приближения действия операторов \mathcal{E}^+ и \mathcal{E}^- не меняет общую итерационную схему (2.23) вычисления цен опционов с барьерами снизу D и сверху U , но дает альтернативный более эффективный подход реализации этих формул, чем традиционно используемый алгоритм Быстрого преобразования Фурье (кратко – БПФ). Учитывая тот факт, что формулу (2.23) нужно вычислять десятки или даже сотни раз, построенный метод МСИ (см. (3.21) и (3.22)) может существенно ускорить вычисления.

Отметим, что алгоритм БПФ для вычисления (3.21) ((3.22)) необходимо применять дважды для аппроксимации прямого и обратного преобразований Фурье. Каждый раз нам потребуется $O(M \log_2 M)$ операций, где

M – число точек расчетной сетки. Заметим, что в силу особенностей алгоритма БПФ область локализации для переменной x должна существенно перекрывать интервал $(0, \ln(U/D))$, где цены опциона отличны от нуля.

Заметим, что первые n интегралов в (3.21) и (3.22) нужно посчитать всего один раз. Когда значения необходимых интегралов (3.26) и (3.36) известны, то для численной реализации формулы (3.21) ((3.22)) потребуется $O(mM_0)$ операций, где M_0 (существенно меньше M) – число точек расчетной сетки, находящихся внутри интервала $(0, \ln(U/D))$, при этом вычислять значения тригонометрических функций, как в алгоритме БПФ, при данном подходе не требуется, как и не требуется отдельно применять индикатор-функцию интервала $(0, \ln(U/D))$, поскольку все вычисления проводятся исключительно для точек данного интервала. Таким образом, метод МСИ может быть в несколько раз быстрее.

Отметим, что наибольшую вычислительную трудность реализация формулы (2.23) вызывает на первом шаге, когда оператор \mathcal{E}^+ действует на функцию $v_0(q, x) := G(x)$, имеющую разрыв на левой границе интервала $(0, \ln(U/D))$. На каждом из следующих шагов операторы \mathcal{E}_\pm сглаживают $v_n(q, x)$. Поэтому мы сравним алгоритмы БПФ и МСИ на примере вычисления $\mathcal{E}^+G(x)$, где $G(x)$ – функция выплат по опциону.

В качестве примера выберем процесс КоВоЛ (CGMY) с характеристической экспонентой

$$\psi(\xi) = -i\mu\xi + c\Gamma(-\nu)[\lambda_+^\nu - (\lambda_+ + i\xi)^\nu + (-\lambda_-)^\nu - (-\lambda_- - i\xi)^\nu],$$

где $\nu \in (0, 1)$, $c > 0$, $\mu \in \mathbf{R}$ и $\lambda_- < -1 < 0 < \lambda_+$. Данная модель рассматривалась в работах [6], [20] при вычислении дубарьерных опционов.

Как и в [6], [20], мы выберем следующие параметры модели: $\nu = 0.5$, $\lambda_+ = 9$, $\lambda_- = -8$, $c = 1$, $\mu = -0.0423$, и рассмотрим опцион put с барьером снизу $D = 2800$, барьером сверху $U = 4200$ и ценой исполнения $K = 3500$. Время до исполнения опциона рассматривалось равным $T = 0.1$, а количество шагов по времени $N = 80$. Таким образом, параметр $q = N/T = 800$. Функция выплат в этом случае имеет вид $G(x) = \max(K - De^x, 0) \cdot \mathbf{1}_{(0, h)}(x)$, где $h = \ln(U/D)$. В реализации алгоритма (2.23) вычисления барьерных опционов нам необходимо многократно применять операторы свертки \mathcal{E}_q^+ и \mathcal{E}_q^- вида (2.21) и (2.22) с соответствующими значениями параметра q . Так как снос μ отрицателен, то характеристическую экспоненту $\psi_+(\xi)$ в формуле для ядра (2.21) оператора \mathcal{E}_q^+ определим с помощью (3.25) с параметрами $\nu = 0.5$, $\lambda_- = -8$, $c = 1$, $\mu = 0$.

Вычислим действие оператора \mathcal{E}^+ на $G(x)$ для спектрально положительного умеренно устойчивого процесса Леви (2.14) с помощью приближенных формул (3.21), (3.26) и (3.45) методом МСИ и с помощью алгоритма БПФ. В качестве эталона для этих двух методов найдем сначала $\mathcal{E}^+G(x)$ в явном виде. На первом шаге определим преобразование Фурье функции выплат $G(x)$:

$$\begin{aligned} \hat{G}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} G(x) dx = \int_0^{\ln(K/D)} e^{-ix\xi} (K - De^x) dx = \\ &= K \frac{1 - e^{-i \ln(K/D)\xi}}{i\xi} + \frac{K e^{-i \ln(K/D)\xi} - D}{i\xi - 1}. \end{aligned}$$

Отметим, что в точках $\xi = 0$ и $\xi = -i$ функцию $\hat{G}(\xi)$ можно продолжить по непрерывности.

Далее при $x \geq \ln(K/D)$ получаем, что

$$\mathcal{E}_q^+ G(x) = \int_0^{+\infty} G(x+y) p_q^+(y) dy = \int_0^{+\infty} \max(K - De^{x+y}, 0) \cdot \mathbf{1}_{(0, \ln(K/D))}(x+y) p_q^+(y) dy = 0.$$

При $x < \ln(K/D)$ запишем формулу для $\mathcal{E}_q^+ G(x)$ в виде (2.16), сдвигая контур интегрирования и применяя теорему о вычетах, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_q^+ G(x) &= \int_0^{+\infty} G(x+y) p_q^+(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \frac{qe^{ix\xi}}{\xi(q + \psi_+(\xi))} \hat{G}(\xi) d\xi = \\ &= K \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{qe^{ix\xi} - qe^{i(x - \ln(K/D))\xi}}{\xi(q + \psi_+(\xi))} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Kqe^{i(x - \ln(K/D))\xi} - Dqe^{ix\xi}}{(\xi + i)(q + \psi_+(\xi))} d\xi = \\ &= K - D \frac{qe^x}{(q + \psi_+(-i))} - \frac{K}{2\pi i} \int_{-\infty + i\lambda_-}^{+\infty + i\lambda_-} \frac{qe^{i(x - \ln(K/D))\xi}}{\xi(q + \psi_+(\xi))} d\xi + \\ &+ \frac{K}{2\pi i} \int_{-\infty + i\lambda_-}^{+\infty + i\lambda_-} \frac{qe^{i(x - \ln(K/D))\xi}}{(\xi + i)(q + \psi_+(\xi))} d\xi. \end{aligned}$$

Два последних интеграла сведем к интегралам вида (3.45) с помощью техники, описанной в п. 3.2, и найдем их численно. Результаты вычисления $\mathcal{E}^+G(x)$ в явном виде с помощью методов МСИ и БПФ представлены

Таблица 1. Приближенные значения $\mathcal{E}^+G(x)$: метод МСИ против алгоритма БПФ

Метод	Явная формула	МСИ		МСИ		БПФ	
		$h = 0.002, m = 5$		$h = 0.002, m = 10$		$h = 0.002, M = 2^{10}$	
$x = \ln(S/D)$	значение	значение	ошибка	значение	ошибка	значение	ошибка
0.002	692.322	693.475	0.17%	693.167	0.12%	686.046	-0.91%
0.022	635.639	636.779	0.18%	636.465	0.13%	634.518	-0.18%
0.042	577.819	578.938	0.19%	578.618	0.14%	577.103	-0.12%
0.062	518.842	519.929	0.21%	519.602	0.15%	518.250	-0.11%
0.082	458.686	459.727	0.23%	459.394	0.15%	458.136	-0.12%
0.102	397.332	398.310	0.25%	397.970	0.16%	396.785	-0.14%
0.122	334.760	335.652	0.27%	335.305	0.16%	334.193	-0.17%
0.142	270.956	271.727	0.28%	271.373	0.15%	270.353	-0.22%
0.162	205.908	206.512	0.29%	206.151	0.12%	205.258	-0.32%
0.182	139.615	139.979	0.26%	139.611	-0.00%	138.920	-0.50%
0.202	72.115	72.102	-0.02%	71.726	-0.54%	71.413	-0.97%
0.222	3.705	3.728	0.62%	3.728	0.62%	3.461	-6.59%

Параметры характеристической экспоненты ψ_+ в (3.25): $\nu = 0.5, \lambda_- = -8, c = 1, \mu = 0$.

Параметры опциона: $D = 2800, U = 4200, K = 3500, T = 0.1, x = \ln(S/D)$.

Параметры алгоритма БПФ: h – шаг расчетной сетки по x, M – количество точек расчетной сетки по x .

Параметры алгоритма МСИ: h – шаг расчетной сетки по x, m – количество слагаемых в формуле (3.21).

в табл. 1. Ошибки в табл. 1 показывают на сколько процентов отличаются значения, полученные методами МСИ и БПФ, от эталонных значений. Как видно из таблицы, даже с пятью слагаемыми метод МСИ дает значения близкие по точности с БПФ, а при $m = 10$ демонстрирует лучшую точность. При этом метод МСИ слегка переоценивает эталонные значения, в то время как БПФ недооценивает. Наиболее проблемная область находится около правого барьера, где значение оператора подходит к нулю.

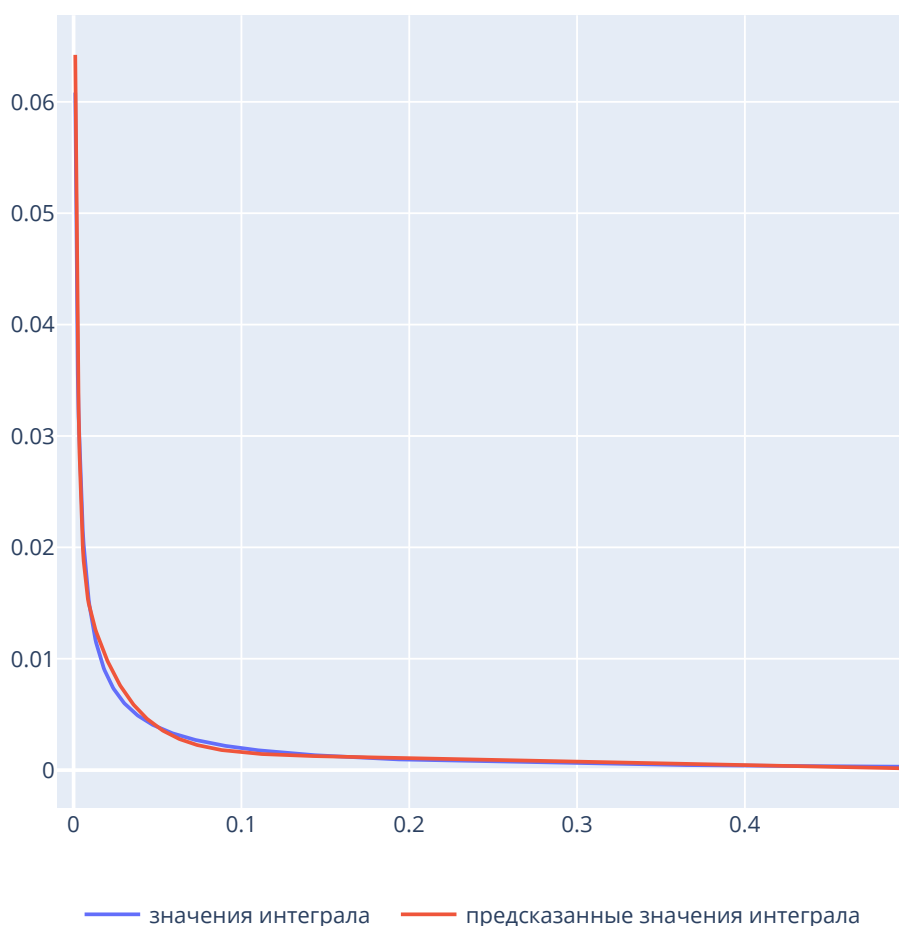
Заметим, что хранение интегралов $I(\mu, q, c, \lambda, \nu, x)$ в виде многомерной таблицы будет занимать значительные объемы памяти. Как правило, методы факторизации Винера–Хопфа требуют секунды или даже доли секунды на вычисление цены опциона. Таким образом, загрузка многомерной таблицы в память, поиск с последующей интерполяцией нужных интегралов будет представлять отдельную задачу, которая может привести к временным затратам, превышающим время работы самого численного метода.

Как отмечалось в п. 3.3 (см. теорему 3.1), теоретически можно обучить искусственную нейросеть, которая будет с необходимой точностью аппроксимировать интегралы $I(\mu, q, c, \lambda, \nu, x)$ вида (3.45). В этом случае можно будет проводить расчеты для вычисления интегральных слагаемых с помощью нейросети. Вместе с тем, архитектура такой нейросети будет включать в себя значительное число нейронов на скрытом слое, что может сделать вычислительную сложность такой аппроксимации интегралов сравнимой с непосредственным численным интегрированием. С другой стороны, нейросеть Цыбенко легко распараллеливается на графических процессорах.

Как правило, при вычислении цен опционов подбор шага h по x и количество шагов N подбирается адаптивно, путем последовательного уменьшения h при фиксированном N , а затем увеличением N и повторением подбора h . В этом случае для конкретной модели с фиксированными параметрами $\mu, c, \lambda_+, \lambda_-$ и ν и параметром алгоритма q может быть целесообразно обучить нейросеть с одним входным параметром x . Проиллюстрируем на примере, как в этом случае нейросеть будет аппроксимировать интеграл $I(\mu, q, c, \lambda, \nu, x)$.

Поскольку параметр сноса $\mu < 0$, для вычисления интегралов вида $I^+(q, \mu, c_-, \lambda_-, \nu_-, x)$ в (3.26) нам нужно выбрать следующие параметры в формуле (3.45): $\mu = 0, q = 800, c = 1, \lambda = -\lambda_- = 8, \nu = 0.5$.

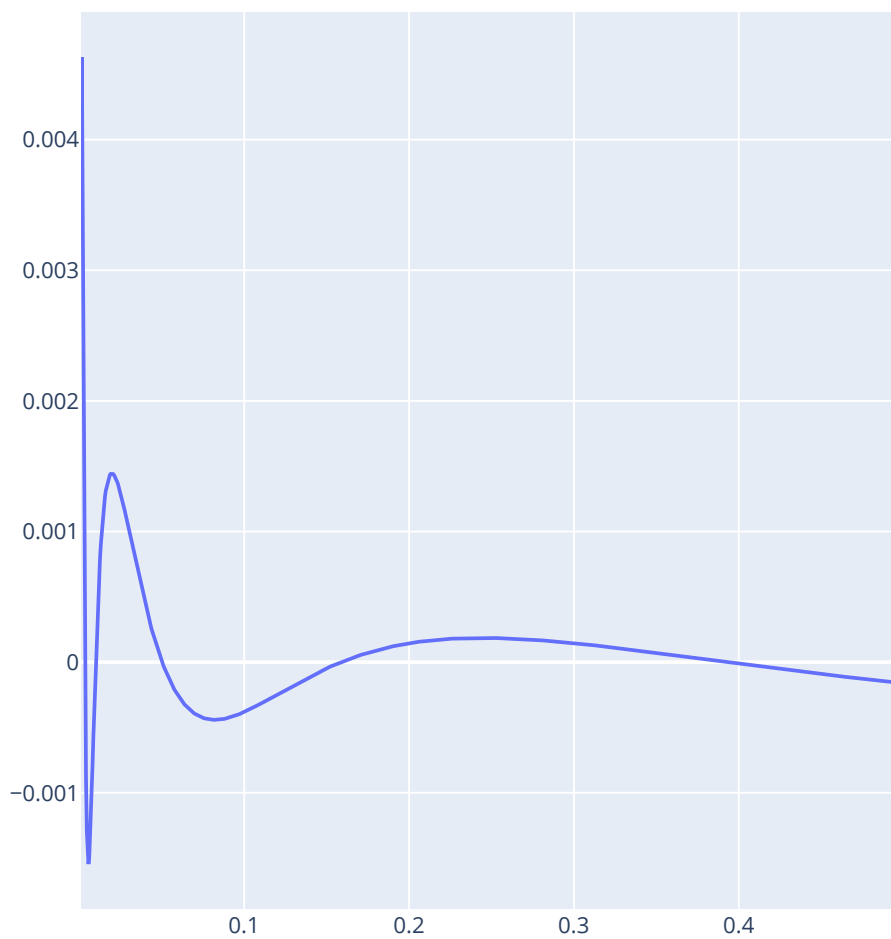
Для аппроксимации нашего интеграла мы выбрали нейросеть вида (3.46) с одним входным параметром $x_1 = x$ (т.е. $d_0 = 1$) и $N = 20$ нейронами на скрытом слое. Объем обучающей выборки составил 4096 значений интегралов, половина из которых вычислялась для выборки значений x , равномерно распределенных на от-



Фиг. 1. Аппроксимация $I(\mu, q, c, \lambda, \nu, x)$ нейросетью. Параметры характеристической экспоненты ψ_+ в (3.25): $\nu = 0.5$, $\lambda_- = -8$, $c = 1$, $\mu = 0$. Параметры оператора \mathcal{E}_q^+ : $q = 800$. Ось абсцисс: $x = \ln(S/D)$. Ось ординат: значения интеграла $I(\mu, q, c, \lambda, \nu, x)$.

резке $[0.0005, 0.5]$, а вторая половина для выборки значений x из показательного распределения с параметром интенсивности равным 200. Вторая часть выборки нужна, чтобы учесть резкое изменение значений интеграла в окрестности 0. График значений интеграла можно увидеть на фиг. 1.

Нейросеть была обучена на языке программирования Python с помощью специализированной библиотеки PyTorch для глубокого обучения, которая содержит структуры данных для многомерных тензоров и эффективно реализует математические операции над этими тензорами на графических процессорах. В качестве функции потерь была выбрана функция L1Loss, которая измеряет среднее по обучающей выборке абсолютное отклонение предсказанного нейросетью результата от реального значения. Для минимизации функции потерь использовался оптимизатор Adam (англ. Adaptive Moment Estimation – Адаптивная оценка момента) со скоростью обучения $lr = 0.01$. За 80 000 эпох обучения функция потерь составила 0.00394. Результаты аппроксимации интеграла $I(\mu, q, c, \lambda, \nu, x)$ нейросетью представлены на фиг. 1, а график ошибки аппроксимации – на фиг. 2. Как следует из рисунков, нейросеть вполне хорошо справляется со своей задачей, а возможности применения параллельных вычисления с помощью библиотеки PyTorch делает применение таких нейросетей как элемента численного метода оправданным с вычислительной точки зрения.



Фиг. 2. Ошибка аппроксимации $I(\mu, q, c, \lambda, \nu, x)$ нейросетью. Параметры характеристической экспоненты ψ_+ в (3.25): $\nu = 0.5, \lambda_- = -8, c = 1, \mu = 0$. Параметры оператора \mathcal{E}_q^+ : $q = 800$. Ось абсцисс: $x = \ln(S/D)$. Ось ординат: ошибка аппроксимации интеграла $I(\mu, q, c, \lambda, \nu, x)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленный в работе алгоритм расчета интегральных операторов свертки с ядром типа плотности вероятности случайных величин, принимающих только положительные или только отрицательные значения, может успешно конкурировать с традиционным методом вычисления свертки — быстрым преобразованием Фурье. Более того, наш подход предусматривает возможность встраивания нейросетей для аппроксимации интегралов, входящих в приближенную формулу.

Десятки лет назад для вычисления специальных функций использовались заранее заготовленные таблицы. В наше время для вычисления типовых интегралов можно использовать мощный аппарат искусственных нейросетей, что позволит создавать более эффективные гибридные численные методы, комбинирующие традиционные методы вычислительной математики (в идейной части алгоритма) и методы машинного обучения (в части выполнения повторяющихся рутинных элементов алгоритма).

С точки зрения практического применения, предлагаемый в работе подход естественным образом распараллеливается на базе nVidia CUDA API для ускоренного обучения нейросетей и подсчета приближенных значений интегралов на основе обученных нейросетей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кудрявцев О.Е.* Эффективный численный метод решения специального класса интегродифференциальных уравнений, связанных с моделями Леви // Матем. моделирование. 2011. Т. 23. № 5. С. 95–104.

2. *Кудрявцев О.Е.* Приближенная факторизация Винера–Хопфа и метод Монте-Карло для процессов Леви // Теория вероятностей и ее применения. 2019. Т. 64. № 2. С. 228–257.
3. *Кудрявцев О.Е., Гречко А.С., Мамедов И.Э.* Метод Монте-Карло для вычисления цен опционов типа lookback в моделях Леви // Теория вероятностей и ее применения. 2024. Т. 69. № 2. С. 305–334.
4. *Шуряев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Факты. Модели. М.: Фазис, 1998. Т. 1. 440 с.
5. *Boyarchenko S.I., Levendorskii S.Z.* Non-Gaussian Merton-Black-Scholes theory. New Jersey, London, Singapore, Hong Kong: World Sci., 2002, 420 p.
6. *Boyarchenko M., Levendorskii S.* Valuation of continuously monitored double barrier options and related securities // Math Financ. (2011) doi: 10.1111/j.1467-9965.2010.00469.x
7. *Dixon M.F., Halperin I., Bilokon P.* Machine Learning in Finance: From Theory to Practice. Germany: Springer Inter. Publ., 2020.
8. *Carr P., Geman H., Madan D.B., Yor M.* The fine structure of asset returns: an empirical investigation // J. Business. 2002. V. 75. № 2. P. 305–332.
9. *Cont R., Voltchkova E.* A finite difference scheme for option pricing in jump diffusion and exponential Levy models // SIAM J. Numer. Anal. 2005. V. 43. № 4. P. 1596–1626.
10. *Cont R., Tankov P.* Financial modelling with jump processes, 2nd Ed., Chapman & Hall/CRC Press, 2008. 606 p.
11. *Cybenko G.* Approximation by superpositions of a sigmoidal function, Mathematics of Control, Signals and Systems. 1989. 2. P. 303–314.
12. *Goudenège L., Molent A., Zanette A.* Machine learning for pricing American options in high-dimensional Markovian and non-Markovian models // Quantitative Finance. 2020. V. 20. № 4. P. 573–591.
13. *Hornik K.* Approximation capabilities of multilayer feedforward networks // Neural Networks. 1991. V. 4. № 2. P. 251–257.
14. *Huh J.* Pricing Options with Exponential Levy Neural Network // Expert Systems with Appl. 2019. V. 127. DOI: 10.1016/j.eswa.2019.03.008
15. *Itkin A.* Pricing Derivatives Under Levy Models: book, Birkhauser, 2017. 308 p.
16. *Kirkby J.L.* Robust barrier option pricing by frame projection under exponential Levy dynamics // Appl. Math. Finance. 2017. V. 24. № 4. P. 337–386.
17. *Kudryavtsev O., Levendorskii S.* Fast and accurate pricing of barrier options under Levy processes // Finance Stoch. 2009. V. 13. № 4. P. 531–562.
18. *Kudryavtsev O., Luzhetskaya P.* The Wiener-Hopf Factorization for Pricing Options Made Easy // Engineer. Lett. 2020. V. 28. № 4. P. 1310–1317.
19. *Kudryavtsev O., Zanette A.* Applications of Levy Processes // Math. Res. Developments, NY: Nova Science Publishers, Incorporated, 2021. ISBN: 978-1-53619-525-5
20. *Kudryavtsev O.* A simple Wiener-Hopf factorization approach for pricing double-barrier options. In: Karapetyants A.N., Pavlov I.V., Shiryayev A.N. (Ed.) Operator Theory and Harmonic Analysis. OTHA 2020. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer, Cham, 2021. V. 358, pp. 273–291.
21. *Kudryavtsev O.* A simplified Wiener–Hopf factorization method for pricing double barrier options under Levy processes // Comput. Manag. Sci. 2024. V. 21. P. 37.
22. *Kudryavtsev O., Danilova N.* Applications of artificial neural networks to simulating Levy processes // J. Math. Sci. 2023. V. 271. № 4. P. 421–433.
23. *Kyprianou A.E.* Introductory Lectures on Fluctuations of Levy Processes with Applications, 2006, Springer, Berlin.
24. *Phelan E., Marazzina D., Fusai G., and Germano G.* Fluctuation identities with continuous monitoring and their application to price barrier options // Europ. J. Operat. Res. 2018. V. 271. № 1. P. 210–223.
25. *Sato K.* Levy processes and infinitely divisible distributions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 486 p.

FAST CALCULATION OF INTEGRAL CONVOLUTION TYPE OPERATORS IN OPTION ESTIMATION PROBLEMS IN LEVY MODELS

A. S. Grechko^{a,**}, O. E. Kudryavtsev^{a,b*}

^a344015 Rostov-on-Don, Yeremenko 58/11, Research and production company “InWise Systems” LLC, Russia

^b344002 Rostov-on-Don, Budennovskiy 20, Rostov branch of the Russian Customs Academy, Russia

*e-mail: koe@donrta.ru

**e-mail: alex@itparadigma.ru

Received: 09.06.2024

Revised: 01.08.2024

Accepted: 23.08.2024

Abstract. An approximate algorithm for calculating integral operators of the convolution type that arise when evaluating barrier options in Levy models by the Wiener–Hopf method is constructed. Additionally, the question of the possibility of applying machine learning methods (artificial neural networks) to the approximation of a special type of integrals, which are a key element in the construction of approximate formulas for the Wiener–Hopf integral operators under consideration, is investigated. The main idea is to decompose the price function into a Fourier series and transform the integration contour for each term of the Fourier series. As a result, we obtain a set of typical integrals that depend on Wiener–Hopf factors, but do not depend on the price function, while the most computationally expensive part of the numerical method is reduced to calculating these integrals. Since they need to be calculated only once, and not at each iteration, as was the case in standard implementations of the Wiener–Hopf method, this will significantly speed up calculations. Moreover, a neural network can be trained to calculate typical integrals. The proposed approach is especially effective for spectrally one-sided Levy processes, for which explicit Wiener–Hopf factorization formulas are known. In this case, we obtain computationally convenient formulas by integrating along the section. The main advantage of including neural networks in a computational scheme is the ability to perform calculations on an uneven grid. Such a hybrid numerical method will be able to successfully compete with classical methods of computing convolutions in similar tasks using the fast Fourier transform. Computational experiments show that neural networks with one hidden layer of 20 neurons are able to effectively cope with the tasks of approximating the auxiliary integrals under consideration.

Keywords: Wiener–Hopf factorization, Levy processes, integral convolution operators, integral transformations, numerical methods, machine learning, computational financial mathematics.