ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2023, № 2, с. 31–35

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 519.85

СИМВОЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ НУЛЕЙ СИСТЕМЫ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В. И. Кузоватов[a,*], А. А. Кытманов[b,c,], Е. К. Мышкина[d,***]**

[a]*Сибирский федеральный университет*
660041 Красноярск, пр. Свободный, 79, Россия
[b]*МИРЭА — Российский технологический университет*
119454 Москва, пр. Вернадского, 78, Россия
[c]*Учебно-научная лаборатория искусственного интеллекта, нейротехнологий и бизнес-аналитики, Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова*
117997 Москва, Стремянный пер., 36, Россия
[d]*Институт вычислительного моделирования СО РАН*
660036 Красноярск, Академгородок, 50/44, Россия
**E-mail: kuzovatov@yandex.ru*
***E-mail: aakytm@gmail.com*
****E-mail: elfifenok@mail.ru*

Поступила в редакцию 28.08.2022 г.
После доработки 13.10.2022 г.
Принята к публикации 30.10.2022 г.

На основе интегрального представления Бохнера–Мартинелли приведен алгоритм, позволяющий определять число нулей системы голоморфных функций. Нули системы функций ищутся на множестве поликуба. Использование методов компьютерной алгебры в данной задаче обусловлено вычислительной сложностью разрабатываемых алгоритмов и получаемых результатов. Дана реализация данного алгоритма в системе компьютерной алгебры Maple, позволяющая существенно упростить необходимые вычисления.

DOI: 10.31857/S0132347423020139, **EDN:** MGDMHW

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена исследованию систем неалгебраических уравнений в $\mathbb{C}^n$. Такие системы возникают при описании нелинейных процессов в различных областях знания, таких как теоретическая физика, химическая кинетика (включая задачи, возникающие при описании процессов в нефтегазовой промышленности, а также при изучении кинетики химических превращений композитов на основе горных пород), математическая биология. На данный момент системы неалгебраических уравнений, как правило, поддаются решению лишь в случае, когда их можно свести к алгебраическим с помощью замены переменных. В противном случае поиск решения производится приближенно с помощью численных методов [1].

Вместе с тем, в различных процессах, описываемых системами дифференциальных уравнений с правыми частями, разложимыми в ряд Тейлора, актуален вопрос об определении числа стационарных состояний в множествах определенного вида (и их локализации). Эта проблема приводит к задачам построения алгоритмов для определения числа корней заданной системы уравнений в разных множествах, определения самих корней, исключения части неизвестных из системы.

Научная значимость данной работы связана с определением нового подхода к итерационным методам решения систем трансцендентных уравнений, состоящих из голоморфных функций многих комплексных переменных. Полученные результаты позволят расширить области применения методов и алгоритмов компьютерной алгебры на нелинейные уравнения неполиномиального типа. В связи с этим решение поставленных в данной работе задач важно для развития данного направления науки.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}^2$ с кусочно-гладкой границей ∂D, а $f : \overline{D} \to \mathbb{C}^2$ голоморфное отображение, $f\big|_{\partial D} \neq 0$.

Известно обобщение теоремы о логарифмическом вычете на случай многих переменных на основе интегрального представления Бохнера–Мартинелли (см., например, [2, теорема 2.4]):

$$\int_{\partial D} w(f,\overline{f}) = N, \tag{1}$$

где N – число нулей отображения f в D с учетом кратности, а

$$w(f,\overline{f}) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\frac{\overline{f}_1 d\overline{f}_2 - \overline{f}_2 d\overline{f}_1}{(|f_1|^2+|f_2|^2)^2}\wedge df_1\wedge df_2.$$

Рассмотрим случай, когда D – поликуб, то есть произведение отрезков

$$[a,b]\times[\alpha,\beta]\times[c,d]\times[\gamma,\delta]\subset\mathbb{C}^2=\mathbb{R}^4.$$

Перейдем к вещественным координатам

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + iy_1,\\ z_2 = x_2 + iy_2.\end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &a\le x_1\le b, \quad \alpha\le y_1\le\beta,\\ &c\le x_2\le d, \quad \gamma\le y_2\le\delta.\end{aligned} \tag{2}$$

Запишем форму w в вещественных координатах. Будем иметь

$$w = -\frac{2}{(2\pi i)^2}\frac{\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial z_1}\dfrac{\partial f_2}{\partial z_2}-\dfrac{\partial f_1}{\partial z_2}\dfrac{\partial f_2}{\partial z_1}\right)}{\left(|f_1|^2+|f_2|^2\right)^2}\times$$
$$\times\left[\overline{\left(f_1\frac{\partial f_2}{\partial z_1}-f_2\frac{\partial f_1}{\partial z_1}\right)}\times\right.$$
$$\times\left(dx_1\wedge dy_1\wedge dy_2 + i dx_1\wedge dx_2\wedge dy_1\right)+$$
$$+\overline{\left(f_1\frac{\partial f_2}{\partial z_2}-f_2\frac{\partial f_1}{\partial z_2}\right)}\times$$
$$\left.\times\left(dx_2\wedge dy_1\wedge dy_2 + i dx_1\wedge dx_2\wedge dy_2\right)\right].$$

Для удобства записи введем следующие обозначения. Обозначим через J якобиан отображения f, через $|f|^2$ – квадрат евклидовой нормы. Таким образом,

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_1}\frac{\partial f_2}{\partial z_2}-\frac{\partial f_1}{\partial z_2}\frac{\partial f_2}{\partial z_1} = J,$$

$$|f_1|^2+|f_2|^2 = |f|^2,$$

$$\overline{f_1\frac{\partial f_2}{\partial z_1}-f_2\frac{\partial f_1}{\partial z_1}} = A,$$

$$\overline{f_1\frac{\partial f_2}{\partial z_2}-f_2\frac{\partial f_1}{\partial z_2}} = B.$$

Таким образом, с учетом введенных обозначений форму w можно записать в виде

$$\begin{aligned} w = -&\frac{2}{(2\pi i)^2}\frac{J}{|f|^4}\times\\ &\times\left[A\left(dx_1\wedge dy_1\wedge dy_2 + i dx_1\wedge dx_2\wedge dy_1\right)+\right.\\ &\left.+B\left(dx_2\wedge dy_1\wedge dy_2 + i dx_1\wedge dx_2\wedge dy_2\right)\right].\end{aligned} \tag{3}$$

Для сведения интеграла (1) к интегралу Римана по гиперграням нужно выбрать их правильную ориентацию. Ориентация на многообразии задается (см., например, [3], глава II, п. 14) указанием дифференциальной формы максимальной степени, которая сопоставляется элементу объема dV при интегрировании. Ориентация $\mathbb{R}^4=\mathbb{C}^2$, как и гиперкуба $D\subset\mathbb{C}^2$, традиционно задается формой

$$dx_1\wedge dx_2\wedge dy_1\wedge dy_2.$$

Согласованная с ней ориентация (в соответствии с [3], глава II, п. 14) граней следующая:

$$\begin{aligned}
x_1 &= a &&: -dx_2\wedge dy_1\wedge dy_2\\
x_1 &= b &&: dx_2\wedge dy_1\wedge dy_2\\
x_2 &= c &&: dx_1\wedge dy_1\wedge dy_2\\
x_2 &= d &&: -dx_1\wedge dy_1\wedge dy_2\\
y_1 &= \alpha &&: -dx_1\wedge dx_2\wedge dy_2\\
y_1 &= \beta &&: dx_1\wedge dx_2\wedge dy_2\\
y_2 &= \gamma &&: dx_1\wedge dx_2\wedge dy_1\\
y_2 &= \delta &&: -dx_1\wedge dx_2\wedge dy_1.
\end{aligned}$$

Интеграл (1) есть сумма интегралов по правильно ориентированным гиперграням. При этом имеется 4 пары гиперграней.

Рассмотрим для примера пару гиперграней, задаваемых условиями $x_1 = a$ и $x_1 = b$. В этом случае 3 из 4 дифференциальных форм в выражении (3) обращаются в нуль и форма w примет вид

$$w = -\frac{2}{(2\pi i)^2}\frac{J}{|f|^4}B dx_2\wedge dy_1\wedge dy_2.$$

Форма $dx_2\wedge dy_1\wedge dy_2$ на $x_1 = a$ отрицательна, а на $x_1 = b$ – положительна. Поэтому

$$I_1 = \int_{x_1=a} w + \int_{x_1=b} w =$$

$$= \frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\substack{x_1=a,\\ c\le x_2\le d,\\ \alpha\le y_1\le\beta,\\ \gamma\le y_2\le\delta}}\frac{J}{|f|^4}B dV - \frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\substack{x_1=b,\\ c\le x_2\le d,\\ \alpha\le y_1\le\beta,\\ \gamma\le y_2\le\delta}}\frac{J}{|f|^4}B dV = \tag{4}$$

$$= \frac{2}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\substack{c\le x_2\le d,\\ \alpha\le y_1\le\beta,\\ \gamma\le y_2\le\delta}} \frac{J}{|f|^4} B \Bigg|_{x_1=b}^{x_1=a} dV.$$

Аналогично, получим следующие результаты для остальных пар гиперграней:

$$I_2 = \int\limits_{x_2=c} w + \int\limits_{x_2=d} w = \frac{2}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\substack{a\le x_1\le b,\\ \alpha\le y_1\le\beta,\\ \gamma\le y_2\le\delta}} \frac{J}{|f|^4} A \Bigg|_{x_2=c}^{x_2=d} dV, \quad (5)$$

$$I_3 = \int\limits_{y_1=\alpha} w + \int\limits_{y_1=\beta} w = \frac{2i}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\substack{a\le x_1\le b,\\ c\le x_2\le d,\\ \gamma\le y_2\le\delta}} \frac{J}{|f|^4} B \Bigg|_{y_1=\beta}^{y_1=\alpha} dV, \quad (6)$$

$$I_4 = \int\limits_{y_2=\gamma} w + \int\limits_{y_2=\delta} w = \frac{2i}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\substack{a\le x_1\le b,\\ c\le x_2\le d,\\ \alpha\le y_1\le\beta}} \frac{J}{|f|^4} A \Bigg|_{y_2=\gamma}^{y_2=\delta} dV. \quad (7)$$

Тем самым мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Пусть D — поликуб, то есть произведение отрезков* $[a,b]\times[\alpha,\beta]\times[c,d]\times[\gamma,\delta]\subset\mathbb{C}^2=\mathbb{R}^4$, *а* $f:\overline{D}\to\mathbb{C}^2$ *голоморфное отображение*, $f|_{\partial D}\neq 0$. *Тогда количество N нулей системы*

$$\begin{cases} f_1(z_1,z_2)=0,\\ f_2(z_1,z_2)=0 \end{cases} \quad (8)$$

на множестве D численно равно сумме значений интегралов (4)–(7). *При этом интегралы* (4)–(7) *являются интегралами Римана, в которых переменные интегрирования изменяются от меньшего значения к большему.*

Заметим, что сумма интегралов (4)–(7) должна быть целым числом. Это означает, что для приближенного вычисления этих интегралов большая точность не требуется.

При наличии корней в поликубе D (то есть если указанная сумма интегралов не равна нулю), он разбивается на несколько поликубов меньшего размера, и вычисления повторяются в каждом из них для локализации корней. Алгоритм останавливается при достижении необходимой точности.

3. ПРИМЕР

Пусть $f_1=z_1$, $f_2=z_2$, то есть рассмотрим количество N нулей системы

$$\begin{cases} z_1=0,\\ z_2=0 \end{cases}$$

в области $D=[-1;1]\times[-1;1]\times[-1;1]\times[-1;1]$. Очевидно, что единственным решением данной системы является точка $(0,0)\in\mathbb{C}^2$ и $N=1$. Покажем это с помощью теории, изложенной выше. Такой выбор функций f_1 и f_2 объясняется необходимостью упрощения выкладок.

Вычислим необходимые величины. Будем иметь:

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_1}=1,\quad \frac{\partial f_1}{\partial z_2}=0,\quad \frac{\partial f_2}{\partial z_1}=0,\quad \frac{\partial f_2}{\partial z_2}=1,$$

$$J=\frac{\partial f_1}{\partial z_1}\frac{\partial f_2}{\partial z_2}-\frac{\partial f_1}{\partial z_2}\frac{\partial f_2}{\partial z_1}=1,$$

$$|f|^2=|f_1|^2+|f_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2= \\ = x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2,$$

$$A=\overline{f_1\frac{\partial f_2}{\partial z_1}-f_2\frac{\partial f_1}{\partial z_1}}=-\overline{z}_2=-x_2+iy_2,$$

$$B=\overline{f_1\frac{\partial f_2}{\partial z_2}-f_2\frac{\partial f_1}{\partial z_2}}=\overline{z}_1=x_1-iy_1.$$

Вычислим интегралы по гиперграням $x_1=a$ и $x_1=b$, при этом $a=-1$, $b=1$. Получим

$$\frac{2}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\substack{c\le x_2\le d,\\ \alpha\le y_1\le\beta,\\ \gamma\le y_2\le\delta}} \frac{J}{|f|^4} B \Bigg|_{x_1=b}^{x_1=a} dV =$$

$$= \frac{2}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\substack{c\le x_2\le d,\\ \alpha\le y_1\le\beta,\\ \gamma\le y_2\le\delta}} \frac{(x_1-iy_1)}{(x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2)^2} \Bigg|_{x_1=b}^{x_1=a} dV =$$

$$= \frac{2}{(2\pi i)^2} \iiint\limits_{\substack{c\le x_2\le d,\\ \alpha\le y_1\le\beta,\\ \gamma\le y_2\le\delta}} \left(\frac{a-iy_1}{(a^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{b-iy_1}{(b^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2)^2} \right) dV =$$

$$= \frac{2}{(2\pi i)^2} \iiint\limits_{\substack{c\le x_2\le d,\\ \alpha\le y_1\le\beta,\\ \gamma\le y_2\le\delta}} \frac{a-b}{(1+y_1^2+x_2^2+y_2^2)^2} dV =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^{1} dx_2 \int_{-1}^{1} dy_1 \int_{-1}^{1} \frac{dy_2}{(1+y_1^2+x_2^2+y_2^2)^2}.$$

Вычислим далее интегралы по гиперграням $x_2=c$ и $x_2=d$, при этом $c=-1$, $d=1$. Получим

$$\frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\substack{a\le x_1\le b,\\ \alpha\le y_1\le\beta,\\ \gamma\le y_2\le\delta}}\frac{J}{|f|^4}A\Bigg|_{x_2=c}^{x_2=d}dV =$$

$$= \frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\substack{a\le x_1\le b,\\ \alpha\le y_1\le\beta,\\ \gamma\le y_2\le\delta}}\frac{(-x_2+iy_2)}{(x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2)^2}\Bigg|_{x_2=c}^{x_2=d}dV =$$

$$= \frac{2}{(2\pi i)^2}\iiint\limits_{\substack{a\le x_1\le b,\\ \alpha\le y_1\le\beta,\\ \gamma\le y_2\le\delta}}\left(\frac{-d+iy_2}{(x_1^2+y_1^2+d^2+y_2^2)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{(-c+iy_2)}{(x_1^2+y_1^2+c^2+y_2^2)^2}\right)dV =$$

$$= \frac{2}{(2\pi i)^2}\iiint\limits_{\substack{a\le x_1\le b,\\ \alpha\le y_1\le\beta,\\ \gamma\le y_2\le\delta}}\frac{c-d}{(x_1^2+y_1^2+1+y_2^2)^2}dV =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}dx_1\int_{-1}^{1}dy_1\int_{-1}^{1}\frac{dy_2}{(1+x_1^2+y_1^2+y_2^2)^2}.$$

Вычислим далее интегралы по гиперграням $y_1=\alpha$ и $y_1=\beta$, при этом $\alpha=-1$, $\beta=1$. Получим

$$\frac{2i}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\substack{a\le x_1\le b,\\ c\le x_2\le d,\\ \gamma\le y_2\le\delta}}\frac{J}{|f|^4}B\Bigg|_{y_1=\beta}^{y_1=\alpha}dV =$$

$$= \frac{2i}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\substack{a\le x_1\le b,\\ c\le x_2\le d,\\ \gamma\le y_2\le\delta}}\frac{(x_1-iy_1)}{(x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2)^2}\Bigg|_{y_1=\beta}^{y_1=\alpha}dV =$$

$$= \frac{2i}{(2\pi i)^2}\iiint\limits_{\substack{a\le x_1\le b,\\ c\le x_2\le d,\\ \gamma\le y_2\le\delta}}\left(\frac{x_1-i\alpha}{(x_1^2+\alpha^2+x_2^2+y_2^2)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{x_1-i\beta}{(x_1^2+\beta^2+x_2^2+y_2^2)^2}\right)dV =$$

$$= \frac{2i}{(2\pi i)^2}\iiint\limits_{\substack{a\le x_1\le b,\\ c\le x_2\le d,\\ \gamma\le y_2\le\delta}}\frac{i(\beta-\alpha)}{(1+x_1^2+x_2^2+y_2^2)^2}dV =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}dx_1\int_{-1}^{1}dx_2\int_{-1}^{1}\frac{dy_2}{(1+x_1^2+x_2^2+y_2^2)^2}.$$

Нам осталось вычислить последние интегралы по гиперграням $y_2=\gamma$ и $y_2=\delta$, при этом $\gamma=-1$, $\delta=1$. Получим

$$\frac{2i}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\substack{a\le x_1\le b,\\ c\le x_2\le d,\\ \alpha\le y_1\le\beta}}\frac{J}{|f|^4}A\Bigg|_{y_2=\gamma}^{y_2=\delta}dV =$$

$$= \frac{2i}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\substack{a\le x_1\le b,\\ c\le x_2\le d,\\ \alpha\le y_1\le\beta}}\frac{(-x_2+iy_2)}{(x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2)^2}\Bigg|_{y_2=\gamma}^{y_2=\delta}dV =$$

$$= \frac{2i}{(2\pi i)^2}\iiint\limits_{\substack{a\le x_1\le b,\\ c\le x_2\le d,\\ \alpha\le y_1\le\beta}}\left(\frac{(-x_2+i\delta)}{(x_1^2+y_1^2+x_2^2+\delta^2)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{(-x_2+i\gamma)}{(x_1^2+y_1^2+x_2^2+\gamma^2)^2}\right)dV =$$

$$= \frac{2i}{(2\pi i)^2}\iiint\limits_{\substack{a\le x_1\le b,\\ c\le x_2\le d,\\ \alpha\le y_1\le\beta}}\frac{i(\delta-\gamma)}{(x_1^2+y_1^2+x_2^2+1)^2}dV =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}dx_1\int_{-1}^{1}dy_1\int_{-1}^{1}\frac{dx_2}{(1+x_1^2+y_1^2+x_2^2)^2}.$$

Таким образом, количество N нулей искомой системы равно

$$N = \frac{4}{\pi^2}\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}dv\int_{-1}^{1}\frac{dw}{(1+u^2+v^2+w^2)^2}.$$

Очевидно, что даже в таком простом случае системы, как в рассмотренном нами примере, необходима помощь вычислительных процедур.

4. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Алгоритм был реализован в среде Maple 2016 64bit. Полный код программы доступен по адресу `https://github.com/aakytmanov/Zeros`. Вычисления первого шага алгоритма производились на машине Intel Core i7-4790 (3.6 GHz) с 32 Gb RAM под управлением Windows 10 Pro x64 21H1. Время счета для системы функций

$$f_1 = z_1, \quad f_2 = z_2$$

составило 53 секунды.

Вызов функции для данного примера приведен ниже:

```
> fZeros([(z1, z2) -> z1, (z1, z2) -> z2],
[-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1]);
```

Реализация итерационной процедуры позволит приближенно находить корни системы уравнений, содержащей голоморфные функции, в заданном поликубе, однако она требует оптимизации приближенного вычисления интегралов с учетом отсутствия необходимости большой точности вычислений, поскольку результатом интегрирования всегда является целое число. Это является актуальной текущей задачей.

Алгоритм 1: Алгоритм вычисления числа нулей системы в заданной области.

Input: Список функций $f_i(z)$ из левой части системы (8), список пределов интегрирования a, b, α, β, c, d, γ, δ из (2), определяющих поликуб.

Output: Значение интеграла (1).

begin

$$f_1(z_1, z_2) \to u_1(x_1, y_1, x_2, y_2) + iv_1(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

$$f_2(z_1, z_2) \to u_2(x_1, y_1, x_2, y_2) + iv_2(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

$$|f|^4 := (f_1\overline{f_1} + f_2\overline{f_2})^2$$

$$J := \frac{\partial f_1}{\partial z_1}\frac{\partial f_2}{\partial z_2} - \frac{\partial f_1}{\partial z_2}\frac{\partial f_2}{\partial z_1}$$

$$A := \overline{f_1\frac{\partial f_2}{\partial z_1} - f_2\frac{\partial f_1}{\partial z_1}}$$

$$B := \overline{f_1\frac{\partial f_2}{\partial z_2} - f_2\frac{\partial f_1}{\partial z_2}}$$

$$I_{x_1} := \frac{J}{|f|^4} B\Big|_{x_1=b}^{x_1=a}$$

$$I_{x_2} := \frac{J}{|f|^4} A\Big|_{x_2=c}^{x_2=d}$$

$$I_{y_1} := \frac{J}{|f|^4} B\Big|_{y_1=\beta}^{y_1=\alpha}$$

$$I_{y_2} := \frac{J}{|f|^4} A\Big|_{y_2=\gamma}^{y_2=\delta}$$

$$I_1 := \frac{2}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\substack{c\le x_2\le d,\\ \alpha\le y_2\le\beta,\\ \gamma\le y_2\le\delta}} I_{x_1}\,dV$$

$$I_2 := \frac{2}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\substack{a\le x_1\le b,\\ \alpha\le y_1\le\beta,\\ \gamma\le y_2\le\delta}} I_{x_2}\,dV$$

$$I_3 := \frac{2i}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\substack{a\le x_1\le b,\\ c\le x_2\le d,\\ \gamma\le y_2\le\delta}} I_{y_1}\,dV$$

$$I_4 := \frac{2i}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\substack{a\le x_1\le b,\\ c\le x_2\le d,\\ \alpha\le y_1\le\beta}} I_{y_2}\,dV$$

$$I := I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

Return I

5. ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования, представленные в работе, были выполнены при поддержке следующих фондов: первый автор использовал финансовую поддержку РНФ, Правительства Красноярского края и Красноярского краевого фонда науки, грант 22-21-20028 (разработка примеров, тестирование программной реализации алгоритма); второй автор использовал финансовую поддержку РНФ, грант 18-71-10007-П (разработка и программная реализация алгоритма); третий автор поддержан грантом РФФИ 19-31-60012 (постановка технического задания для разработки алгоритма, вычисление примеров).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.
2. *Айзенберг Л.А., Южаков А.П.* Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1979.
3. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Функции нескольких переменных. Ч. 2. СПб.: Лань, 2004.