

---

---

## НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

---

---

УДК 621.79.05

### МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЙ ДИАГРАММЫ ДЛЯ НАПРЯЖЕННЫХ СОЕДИНЕНИЙ ЦИЛИНДРОВ ПРИ ИХ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

© 2024 г. Д. У. Хасьянова

*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*  
*e-mail: dinara.khasyanova@mail.ru*

Проступила в редакцию 09.06.2023 г.

После доработки 10.10.2023 г.

Принята к публикации 20.10.2023 г.

В статье представлена практическая методика определения диаграммы при измерении окружных деформаций свободных поверхностей цилиндров в их напряженных соединениях, представлены деформационно-силовые характеристики сплавов на основе TiNi с памятью формы в интервале мартенситных превращений.

*Ключевые слова:* никелид титана, эффект памяти формы, сверхупругость, термомеханическое соединение, фазовые превращения, термомеханические характеристики, муфта

**DOI:** 10.31857/S0235711924010065, **EDN:** SNBUMQ

Основной деформационно-силовой характеристикой сплавов с эффектом памяти формы (ЭПФ) в интервале мартенситной неупругости является термомеханическая диаграмма [1]. Она представляет собой зависимость  $\sigma_R(\varepsilon_S)$  реактивных напряжений от величины деформации недовосстановления, причем ее однозначность подтверждена экспериментально в ряде работ [2–7].

При паспортизации специальных свойств материала термомеханическую диаграмму обычно определяют при заданной деформации растяжением  $\varepsilon_p^+$ . Для построения этой зависимости берется партия образцов одной плавки, одинакового химического состава и термообработки при изготовлении полуфабрикатов из исследуемого материала по единому технологическому процессу. Графическая иллюстрация методики ее экспериментального определения показана стрелками на рис. 1.

Для термомеханических соединений трубопроводов (ТМС) муфты изготавливают из сплава TiNi с интервалом фазовых переходов в области криогенных температур. Поэтому при исследовании такого материала предварительная деформация образцов в мартенсите по кривой растяжения  $I$  осуществляется в жидком азоте при температуре ниже точки  $M_k$  – конца прямого мартенситного превращения (МП).

После упругой разгрузки до нуля, которая имеет нелинейный характер, по линиям  $ab$ ,  $cd$ ,  $ef$  образцы нагреваются до нормальной температуры естественным путем. Отметим, что она заведомо выше точки  $A_k^\Phi$  – температуры формовосстановления. В результате обратного мартенситного превращения в заневоленном состоянии в образцах развиваются реактивные напряжения термомеханического возврата, величины которых определяется прямыми  $bm$ ,  $dn$ ,  $fs$ . Таким образом, кривая  $mns$  описывает конечное деформационно-силовое состояние образца в результате термического

формовосстановления с известным противодействием. Для упрощения испытаний методически термомеханическую диаграмму 2 обычно получают в условиях абсолютно жесткого противодействия, т. к. в этом случае заданная деформация равна деформации недовосстановления  $\varepsilon_p = \varepsilon_s$ .

Однозначность величины напряжения  $dn$  при  $\varepsilon_s = 6\%$  показана стрелками на рис. 1. Так независимо от пути реализации процесса термомеханического возврата  $\sigma_R = dn$  при абсолютно жестком противодействии, в результате генерирования реактивных напряжений по прямой  $fn$  с конечной жесткостью противодействия и при возврате с начальным свободным восстановлением размеров по линии  $fdn$ . В последних двух случаях деформация термического восстановления составляет  $\varepsilon_f = 2\%$ . Поэтому при  $\varepsilon_p = 8\%$ ,  $\varepsilon_s = \varepsilon_p - \varepsilon_f = 6\%$ .

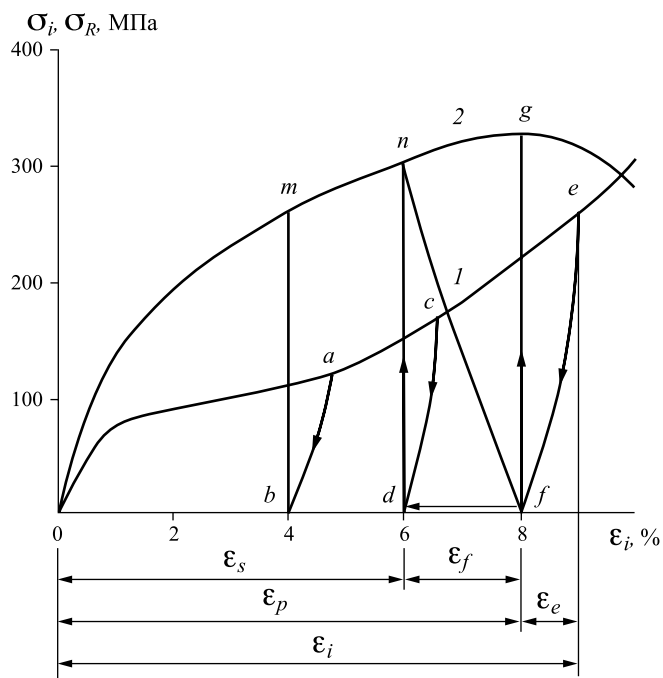


Рис. 1. Кривая растяжения сплава ТН1К в мартенсите 1 при  $T_d \leq M_k$  и методика построения термомеханической диаграммы 2 в условиях абсолютно жесткого противодействия.

Обычно в расчетах силовых конструкций с ЭПФ используется только восходящая ветвь диаграммы 2. Максимальная величина напряжений возврата соответствует деформации недовосстановления, равной объему памяти формы  $\varepsilon_p = \varepsilon_V$ . Под объемом памяти понимают критическое значение заданной деформации, которая восстанавливается полностью при нагреве в свободном состоянии.

Экспериментальные исследования показывают, что при нагреве выше точки  $A_k^\Phi$  реактивные напряжения мало меняются вплоть до температуры развития активных процессов релаксации и ползучести, связанных с увеличением диффузионной подвижности атомов. Для сплавов типа ТН1К и ТН1 она составляет  $T_{\text{раб}} + 280$  град [8–13]. В интервале температур  $A_k^\Phi - T_{\text{раб}}$  имеет место и обычная релаксация, однако она практически не влияет на величину напряжений возврата.

Нижняя граница термостабильности  $\sigma_R$  определяется температурой начала прямого МП  $M_H$ , т. е. интервал работоспособности ТМС составляет  $M_H - T_{\text{раб}}$ .

Несмотря на постоянное время выдержки при охлаждении и одинаковый диаметр стандартных образцов, их предварительная деформация может объективно осуществляться при различной температуре. Поэтому в общем случае растяжение образцов в мартенсите происходит по разным кривым деформирования  $I$ , хотя по величине напряжений  $\sigma_i$  они отличаются незначительно. Однако даже при отсутствии термостатирования значения реактивных напряжений будут практически одинаковыми.

Величины напряжений возврата для различных партий сплавов ТН1К и ТН1 имеют относительно большой разброс, поскольку они существенно зависят от содержания примесей внедрения, наличия неметаллических дисперсионных выделений, текстуры и других факторов, определяющих уровень механических свойств аустенита, а также термообработки и скорости нагрева в интервале обратного МП. Отметим, что скорость нагрева связана с историей термического нагружения материала.

**Методика определения термомеханической диаграммы для напряженных соединений цилиндров при их плоской деформации.** На основании работы [14] при решении плоской задачи теории упругости в полярных координатах симметричное распределение напряжений относительно оси цилиндра описывается следующими выражениями [15]:

$$\sigma_r(\rho) = \frac{D}{\rho^2} + C, \quad \sigma_t(\rho) = -\frac{D}{\rho^2} + C, \quad (1)$$

где  $D, C$  – произвольные постоянные, определяемые из условий на контуре;  $\sigma_r(\rho), \sigma_t(\rho)$  – радиальные и окружные напряжения соответственно.

Соотношения (1) получены из уравнений равновесия малого элемента при условии его плоской деформации, т. е. справедливы и в пластической области. Сумма  $\sigma_r + \sigma_t$  постоянна по всей толщине стенки тела. Поэтому напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  вызывают равномерное удлинение или сжатие цилиндра вдоль оси вращения и сечения, перпендикулярные к ней, остаются плоскими в результате его деформации.

Произвольные постоянные для наружного силового элемента ТМС найдем из следующих условий:

$$\begin{aligned} \text{при } \rho = R \quad \sigma_{1r}(R) &= -q, \\ \text{при } \rho = b \quad \sigma_{1r}(b) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{1r}(\rho) &= \frac{qR^2}{b^2 - R^2} \left( 1 - \frac{b^2}{\rho^2} \right) \\ \sigma_{1t}(\rho) &= \frac{qR^2}{b^2 - R^2} \left( 1 - \frac{b^2}{\rho^2} \right) \end{aligned} \right. \quad (2)$$

Граничные условия на контуре внутренней втулки имеют вид

$$\begin{aligned} \text{при } \rho = r \quad \sigma_{2r}(r) &= -q, \\ \text{при } \rho = a \quad \sigma_{2r}(a) &= 0. \end{aligned}$$

С учетом данных краевых условий распределение напряжений по радиусу описывается равенствами

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{2r}(\rho) &= -\frac{qr^2}{r^2 - a^2} \left( 1 - \frac{a^2}{\rho^2} \right) \\ \sigma_{2t}(\rho) &= -\frac{qr^2}{r^2 - a^2} \left( 1 + \frac{a^2}{\rho^2} \right) \end{aligned} \right.$$

Согласно теории малых упругопластических деформаций [16] связь между компонентами напряжений и деформаций определяется соотношениями

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_r = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}(\sigma_r - \sigma_0) \\ \varepsilon_t = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}(\sigma_t - \sigma_0) \\ \varepsilon_x = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}(\sigma_x - \sigma_0) \end{array} \right\}, \quad (3)$$

где  $\sigma_i, \varepsilon_i, \sigma_r$  – интенсивности напряжения и деформации;  $\sigma_r, \sigma_t, \sigma_x$  – радиальная, окружная и осевая компонента напряжения.

В силу принятого допущения  $\varepsilon_{1x} = 0$  из условия несжимаемости  $\varepsilon_{1r} + \varepsilon_{1t} + \varepsilon_{1x} = 0$  получаем, что для наружного цилиндра  $\varepsilon_{1t} = \varepsilon_{1r}$ . Учитывая это равенство, устанавливаем связь между окружной составляющей и интенсивностью деформации недо-восстановления

$$\varepsilon_{1t} = \varepsilon_S = \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_{1r}. \quad (4)$$

Таким образом, теоретический объем памяти формы при радиальном растяжении составляет 9.24%.

Из условия несжимаемости материала получаем, что

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{1r} + \sigma_{1t} + \sigma_{1x}).$$

При подстановке этого соотношения в уравнения (3) находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1r} &= \frac{\varepsilon_{1t}}{\sigma_{1t}} \left[ \sigma_{1r} - \frac{1}{2}(\sigma_{1t} + \sigma_{1x}) \right], \\ \varepsilon_{1t} &= \frac{\varepsilon_{1t}}{\sigma_{1t}} \left[ \sigma_{1t} - \frac{1}{2}(\sigma_{1r} + \sigma_{1x}) \right], \\ \varepsilon_{1x} &= \frac{\varepsilon_{1t}}{\sigma_{1t}} \left[ \sigma_{1x} - \frac{1}{2}(\sigma_{1r} + \sigma_{1t}) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Согласно выражениям (2) для охватывающего тела можем записать

$$\sigma_{1r} + \sigma_{1t} = \frac{2q}{K_1^2 - 1} = \text{const}, \quad K_1 = \frac{b}{R} \sim \frac{b_S}{r_K},$$

где  $r_K$  – радиус контактной поверхности после образования ТМС.

При подстановке этого равенства в последнее уравнение (5) имеем

$$\sigma_{1x} = \frac{q}{K_1^2 - 1}. \quad (6)$$

Таким образом, с учетом выражений для напряжений (2) и (6) составляющие радиальной и окружной деформации силового элемента равны

$$\begin{cases} \varepsilon_{lr} = -\frac{3\varepsilon_{li}}{2\sigma_{li}} \left( \frac{q}{K_1^2 - 1} \right) \frac{b^2}{\rho^2} \\ \varepsilon_{lt} = \frac{3\varepsilon_{li}}{2\sigma_{li}} \left( \frac{q}{K_1^2 - 1} \right) \frac{b^2}{\rho^2} \end{cases}.$$

Следовательно, величина окружной деформации на контактной поверхности отверстия наружного цилиндра при  $\rho = R$  составляет

$$\varepsilon_{lt}(R) = \frac{3\varepsilon_{li}(R)}{2\sigma_{li}(R)} \left( \frac{qK_1^2}{K_1^2 - 1} \right).$$

Воспользовавшись уравнением термомеханической диаграммы  $l$  и соотношением (4) для интенсивности деформации, в результате простых преобразований получаем

$$\varepsilon_{lt}(R) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ \frac{\sqrt{3}qK_1^2}{A_1^+(K_1^2 - 1)} \right]^{m_1^+}.$$

Связь между значениями окружной деформации на внешней  $\varepsilon_{lt}(b)$  и внутренней  $\varepsilon_{lt}(R)$  поверхностях наружного цилиндра нетрудно установить из условия постоянства его объема при образовании ТМС. Так, в соответствии с рис. 2а справедливо равенство

$$\pi l(b^2 - R^2) = \pi l \left\{ b^2 [1 + \varepsilon_{lt}(b)]^2 - R^2 [1 + \varepsilon_{lt}(R)]^2 \right\}.$$

Исключая малые величины более высокого порядка, находим

$$\varepsilon_{lt}(b) = \frac{1}{K_1^2} \varepsilon_{lt}(R).$$

Следовательно,

$$\varepsilon_{lt}(b) = \frac{\sqrt{3}}{2K_1^2} \left[ \frac{\sqrt{3}qK_1^2}{A_1^+(K_1^2 - 1)} \right]^{m_1^+}. \quad (7)$$

Для внутреннего цилиндра в силу принятого допущения  $\sigma_{2x}(\rho) = 0$  из последнего уравнения (3) осевая компонента деформации равна

$$\varepsilon_{2x} = -\frac{3\varepsilon_{2i}}{2\sigma_{2i}} \sigma_0.$$

Так как

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{1r} - \sigma_{1t}) = -\frac{2}{3}\left(\frac{qK_2^2}{K_2^2 - 1}\right),$$

тогда

$$\varepsilon_{2x} = \frac{3\varepsilon_{2i}}{2\sigma_{2i}}\left(\frac{qK_2^2}{K_2^2 - 1}\right).$$

Отсюда выражения для компонент деформаций (3) запишутся как

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{2r} = \frac{\varepsilon_{2i}}{2\sigma_{2i}}\left(\frac{qK_2^2}{K_2^2 - 1}\right)\left(3\frac{a^2}{\rho^2} - 1\right) \\ \varepsilon_{2t} = -\frac{\varepsilon_{2i}}{2\sigma_{2i}}\left(\frac{qK_2^2}{K_2^2 - 1}\right)\left(3\frac{a^2}{\rho^2} + 1\right) \\ \varepsilon_{2x} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i}\left(\frac{qK_2^2}{K_2^2 - 1}\right) \end{array} \right\}.$$

На контактной поверхности охватываемого тела составляющие деформации при  $\rho = r$  принимают значения

$$\varepsilon_{2r}(r) = \zeta(3 - K_2^2), \varepsilon_{2t}(r) = -\zeta(3 + K_2^2), \varepsilon_{2x}(r) = 2\zeta K_2^2 \quad (8)$$

при обозначении

$$\zeta = \frac{\varepsilon_{2i}q}{2\sigma_{2i}(K_2^2 - 1)}. \quad (9)$$

Подставим равенства (8) с учетом обозначения (9) в уравнение интенсивности деформации

$$\varepsilon_{2i} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_{2t} - \varepsilon_{2r})^2 + (\varepsilon_{2r} - \varepsilon_{2x})^2 + (\varepsilon_{2x} - \varepsilon_{2t})^2}.$$

Отсюда получаем

$$\varepsilon_{2i} = \frac{\varepsilon_{2i}}{\sigma_{2i}}q\left(\frac{\sqrt{3 + K_2^4}}{K_2^2 - 1}\right).$$

Таким образом, окружная составляющая связана с интенсивностью деформации контактной поверхности внутренней детали соотношением

$$\varepsilon_{2t}(r) = -\varepsilon_{2i}(r)\frac{3 + K_2^2}{2\sqrt{3 + K_2^4}}.$$

Учитывая уравнение деформационной кривой  $\sigma_{2i} = A_2 \varepsilon_{2i}^m$  [1], преобразуем выражение для окружной деформации (8) к виду

$$\varepsilon_{2i} = -\frac{\varepsilon_{2i}^{1-m_2}}{2A_2} q \left( \frac{K_2^2 + 3}{K_2^2 + 1} \right).$$

Подставим в эту величину взаимосвязь между значениями  $\varepsilon_{2i}$  и  $\varepsilon_{2f}$ :

$$\varepsilon_{2i} = \left( \frac{2\varepsilon_{2f} \sqrt{K_2^4 + 3}}{K_2^2 + 3} \right)^{1-m_2} \frac{q}{2A_2} \left( \frac{K_2^2 + 3}{K_2^2 - 1} \right).$$

В результате элементарных преобразований окончательно получаем

$$\varepsilon_{2i} = -\frac{K_2^2 + 3}{2} \left[ \frac{q \left( \sqrt{K_2^4 + 3} \right)^{1-m_2}}{A_2 (K_2^2 - 1)} \right]^{\frac{1}{m_2}}.$$

Величину окружной деформации на поверхности его отверстия  $\varepsilon_{2f}(a)$  найдем из условия постоянства объемов в исходном состоянии и после образования напряженной посадки. В соответствии с рис. 2б запишем

$$\begin{aligned} \pi l (r^2 - a^2) &= \pi l (1 + \varepsilon_{2x}) \times \\ &\times \left\{ r^2 [1 - \varepsilon_{2x}(r)]^2 - a^2 [1 + \varepsilon_{2f}(a)]^2 \right\}. \end{aligned}$$

В результате элементарных преобразований, исключая малые величины более высокого порядка, имеем

$$\varepsilon_{2x} (K_2^2 - 1) - 2K_2^2 \varepsilon_{2f}(r) + 2\varepsilon_{2f}(a) = 0.$$

Из равенств (8) находим, что

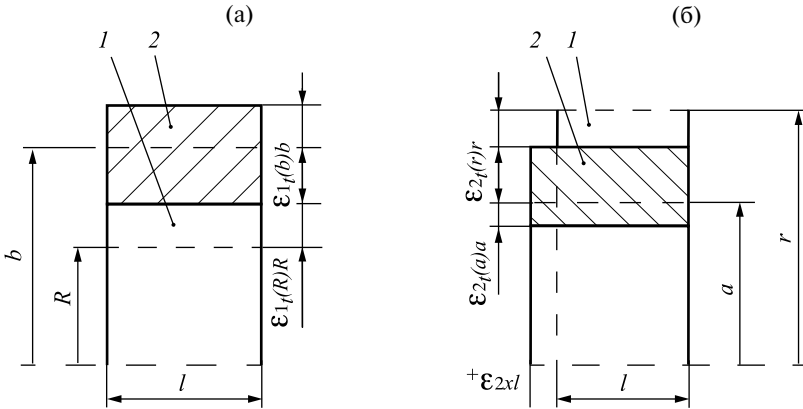
$$\varepsilon_{2x} = -\varepsilon_{2f}(r) \frac{2K_2^2}{K_2^2 + 3}.$$

Отсюда получаем

$$\varepsilon_{2f}(a) = 2\varepsilon_{2f}(r) K_2^2 \left( \frac{K_2^2 + 1}{K_2^2 + 3} \right).$$

Таким образом,

$$\varepsilon_{2r}(a) = -K_2^2 (K_2^2 + 1) \left[ \frac{q \left( \sqrt{K_2^4 + 3} \right)^{1-m_2}}{A_2 (K_2^2 - 1)} \right]^{\frac{1}{m_2}}. \quad (10)$$



**Рис. 2.** К расчету окружной деформации свободных поверхностей сопрягаемых цилиндров при формировании ТМС: (а) – наружная деталь; (б) – внутренняя деталь;  $l$  – положение и размеры поперечного сечения втулки при изготовлении; 2 – после образования напряженной посадки.

Из уравнения (10) выразим контактную нагрузку в напряженном соединении

$$q = A_2 \frac{K_2^2 - 1}{\left( \sqrt{K_2^4 + 3} \right)^{1-m_2}} \left[ -\frac{\varepsilon_{2r}(a)}{K_2^2 (K_2^2 + 1)} \right]^{m_2}. \quad (11)$$

Подставляя выражение (11) в равенство (7), можем записать

$$\begin{aligned} \frac{2K_1^2}{\sqrt{3}} \varepsilon_{1r}(b) &= \\ &= \left\{ \frac{\sqrt{3} K_1^2 (K_2^2 - 1) A_2}{\left( \sqrt{K_2^4 + 3} \right)^{1-m_2} (K_1^2 - 1) A_1^+} \left[ -\frac{\varepsilon_{2r}(a)}{K_2^2 (K_2^2 + 1)} \right]^{m_2} \right\}^{\frac{1}{m_1^+}}. \end{aligned}$$

Таким образом, при статистической обработке результатов измерений определяется корреляция между величинами, установленными расчетно-экспериментальным путем для каждого напряженного соединения цилиндров:



$$Y = \frac{2K_1^2}{\sqrt{3}} \varepsilon_{lr}(b), X = \frac{\sqrt{3}K_1^2(K_2^2 - 1)A_2}{(\sqrt{K_2^4 + 3})^{1-m_2}(K_1^2 - 1)} \left[ -\frac{\varepsilon_{2r}(a)}{K_2^2(K_2^2 + 1)} \right]^{m_2},$$

и строится эмпирическая линия регрессии согласно методике работы [3]

$$Y = BX. \tag{12}$$

После определения значений  $B$  и  $n$  вычисляют параметры диаграммы

$$m_1^+ = 1 / n_1^+ = 1 / B^{m_1^+}.$$

Для нахождения коэффициентов  $A_2^-$ ,  $m_2^-$  термомеханической кривой при заданной деформации сжатием по результатам измерений окружных деформаций свободных поверхностей цилиндров в напряженном соединении определяется корреляция между величинами

$$Y = -\frac{2\varepsilon_{2r}(a)}{\sqrt{3}K_2^2}, X = \frac{\sqrt{3}(K_1^2 - 1)A_1}{(K_2^2 - 1)(\sqrt{3K_1^4 + 1})^{1-m_1}} \left[ \frac{K_1^2 \varepsilon_{lr}(b)}{K_1^2 + 1} \right]^{m_1},$$

и строится эмпирическая линия регрессии (12).

После вычисления значений  $B$  и  $n$  получают параметры диаграммы

$$m_2^- = 1 / n_2^- = 1 / B^{m_2^-}.$$

**Выводы.** В статье предложена новая практическая методика определения диаграммы при измерении окружных деформаций свободных поверхностей цилиндров в их напряженных соединениях.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Khasyanova D. U.* Analyzing the Dimension of Thermo-Mechanical Coupling // J. Mach. Manuf. Reliab. 2022. V. 51. P. 650. <https://doi.org/10.3103/S105261882207007X>
2. *Шишкин С. В., Махутов Н. А.* Расчет и проектирование силовых конструкций на сплавах с эффектом памяти формы. М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. 412 с.
3. *Niinomi M.* Recent research and development in titanium alloys for biomedical applications and healthcare goods // Science and Technology of Advanced Materials. 2003. V. 4 (5). P. 445.
4. *Fu Y., Du H., Huang W. et al.* TiNi-based thin films in MEMS applications // Sensors and Actuators, A: Physical. 2004. V. 112 (2–3). P. 395.
5. *Hartl D. J., Lagoudas D. C.* Aerospace applications of shape memory alloys // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering. 2007. V. 221 (4). P. 535.
6. *Eggeler G., Hornbogen E., Yawny A. et al.* Structural and functional fatigue of NiTi shape memory alloy // Materials Science and Engineering A. 2004. V. 378 (1–2). P. 24.
7. *Auricchio F., Taylor R. L., Lubliner J.* Shape-memory alloys: Macromodelling and numerical simulations of the superelastic behavior // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1997. V. 146 (3–4). P. 281.

8. *Чернов Д. Б.* Термомеханическая память и методы ее определения. М.: НИИСУ, 1982. 146 с.
9. *Shaw J. A., Kyriakides S.* Thermomechanical aspects of NiTi // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 1995. V. 43 (8). P. 1243.
10. *Otsuka K., Ren X.* Physical metallurgy of Ti-Ni-based shape memory alloys // *Progress in Materials Science.* 2005. V. 50 (5). P. 511.
11. *Mohd Jani J., Leary M. et al.* A review of shape memory alloy research, applications and opportunities // *Materials and Design.* 2014. V. 56. P. 1078.
12. *Desroches R., McCormick J., Delemont M.* Cyclic properties of superelastic shape memory alloy wires and bars // *Journal of Structural Engineering.* 2004. V. 130 (1). P. 38.
13. *Хасьянова Д. У.* Обоснование гипотезы плоской деформации цилиндров при образовании термомеханического соединения // *Проблемы машиностроения и автоматизации.* 2023. № 2. С. 59. [https://doi.org/10.52261/02346206\\_2023\\_2\\_59](https://doi.org/10.52261/02346206_2023_2_59)
14. *Тимошенко С. П.* Теория упругости / Пер. с англ. Н.А. Шошина. М.; Л.: Гос. техн.-теоретич. изд-во, 1935. 451 с.
15. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1968. 400 с.