

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПЛАЗМЕННОЙ АСТРОФИЗИКЕ

© 2023 г. М. А. Федотова^a, Д. А. Климачков^a, А. С. Петросян^{a, b, *}

^a Институт космических исследований Российской академии наук, Москва, Россия

^b Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Московская обл., Россия

*e-mail: apetrosy@iki.rssi.ru

Поступила в редакцию 30.09.2022 г.

После доработки 20.10.2022 г.

Принята к публикации 25.11.2022 г.

Обсуждаются теоретические исследования волновых процессов во вращающейся астрофизической плазме. Особое внимание уделено новым теоретическим моделям астрофизической плазмы, таким как магнитогиродинамическое приближение мелкой воды и неупругое приближение наряду с часто применяемым приближением Буссинеска. Помимо традиционного приближения для силы Кориолиса обсуждаются эффекты, вызванные ее нетрадиционным представлением, учитывающим горизонтальную составляющую вращения. Подробно описаны линейные волны в такой плазме и обсуждаются их дисперсионные характеристики. Приведен обзор неустойчивостей в астрофизической плазме вследствие нелинейных эффектов.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, мелкая вода, приближение Буссинеска, неупругое приближение, волны, нелинейные волны, параметрические неустойчивости

DOI: 10.31857/S0367292122601229, **EDN:** NAAFPE

1. ВВЕДЕНИЕ

Большинство наблюдаемых объектов во Вселенной находится в состоянии плазмы и подвержены вращению. В последнее время активно развиваются теоретические и численные исследования, направленные на решение фундаментальной проблемы описания и изучения многомасштабных течений плазмы путем исследования общих свойств, характеризующих различные астрофизические объекты.

Поведение различных звезд и планет описывается магнитной гидродинамикой тонких слоев плазмы со свободной границей в поле силы тяжести. Например, течения солнечного тахоклина (тонкого слоя внутри Солнца, находящегося над конвективной зоной) [1–3], динамика атмосфер нейтронных звезд [4, 5], течения аккреционных дисков нейтронных звезд [6, 7], экзопланеты с магнитоактивными атмосферами, захваченные приливами звезд [8–10]. Полная трехмерная система магнитогиродинамических уравнений вращающейся плазмы достаточно сложна как для аналитического исследования, так и для численного моделирования. Поэтому для описания таких течений астрофизической плазмы используется магнитогиродинамическое приближение мелкой воды [2] и квазигеострофическое приближение в магнитной гидродинамике [11, 12]. На самых больших масштабах плазменная среда ис-

пытывает воздействие гравитации и вращения. Полная система уравнений магнитной гидродинамики вращающейся плазмы в поле силы тяжести представляет собой практически неразрешимую проблему, как для аналитического исследования, так и для численного моделирования. Поэтому актуальна разработка приближенных моделей, описывающих течения астрофизической плазмы на глобальных масштабах. Уравнения магнитной гидродинамики вращающейся плазмы в приближении мелкой воды являются альтернативой магнитогиродинамическим уравнениям тяжелой жидкости со свободной границей в случае, когда исследуется слой малой толщины по отношению к характерному горизонтальному линейному размеру задачи, и вертикальными ускорениями в слое можно пренебречь. Практически, речь идет о развитии идей геофизической гидродинамики с учетом существенных отличий в поведении плазменных течений вследствие присутствия силы Лоренца и влияния магнитных полей. Магнитогиродинамические уравнения мелкой воды получаются в предположении гидростатичности распределения давлений и малости толщины слоя по отношению к характерному горизонтальному линейному размеру задачи из полной системы уравнений магнитной гидродинамики несжимаемой плазмы усреднением по высоте слоя [2, 13–18]. В работе [2] получены магнитогиродинамические

уравнения в приближении мелкой воды без учета внешнего вертикального магнитного поля. В работе [4] полученные в [2] уравнения записаны путем введения эффектов внешнего поля в уравнения для горизонтальных скоростей и для горизонтальных магнитных полей. Тем не менее в работе [4] оставался открытым вопрос о корректной формулировке условия бездивергентности магнитного поля в приближении мелкой воды во внешнем магнитном поле. Заметим, что предложенное в работе [2] условие бездивергентности не удовлетворяется в модернизированной системе магнитогидродинамических уравнений мелкой воды во внешнем поле. Поэтому актуальной является задача развития последовательной теории как для понимания структуры магнитного поля, так и для постановки корректных начальных условий при численном моделировании. Полученная система играет такую же важную роль в космической и астрофизической плазме, как и классические уравнения мелкой воды в гидродинамике нейтральной жидкости. Заметим, что существенным отличием магнитогидродинамических уравнений вращающейся плазмы по сравнению с нейтральной жидкостью является присутствие условия бездивергентности магнитного поля, выполняющегося тождественно при задании корректных начальных условий.

Важным принципиальным свойством течений в астрофизической плазме является свойство сжимаемости, характеризующее большинство наблюдаемых во Вселенной плазменных течений. Для описания сжимаемых течений, как правило, необходимо использовать полную трехмерную систему магнитогидродинамических уравнений, которая также представляет собой сложную задачу для теоретического рассмотрения и численного моделирования. В работах [19, 20] выведена система уравнений мелкой воды для нейтральной жидкости с учетом крупномасштабной сжимаемости. Полученные в этих работах уравнения не учитывают важнейшие для плазменных течений свойства, такие как вращение и наличие магнитного поля. Поэтому представляется важным обобщить полученные в [19, 20] уравнения для магнитогидродинамических течений, характерных для астрофизической плазмы.

Гиперболичность магнитогидродинамических уравнений мелкой воды определяет, наряду с гладкими, наличие разрывных автомодельных решений. Даже в случае, когда начальные условия являются гладкими, нелинейный характер уравнений, наряду с их гиперболичностью, за конечное время может привести к разрывному решению. В простейшем случае невращающейся плазмы система магнитогидродинамических уравнений допускает полное аналитическое решение в виде простых волн на ровной границе [13] и на наклонной плоскости [14]. Точное явное

решение начальной задачи с кусочно-постоянными начальными условиями, известной как задача Римана [21, 22], для уравнений магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды на ровной границе найдено в [13] и на наклонной плоскости в [14]. Аналогично, для случая нейтральной жидкости в работах [19] (на ровной границе), [20] (на наклонной плоскости) найдены решения системы уравнений мелкой воды с учетом крупномасштабной сжимаемости в отсутствии вращения в виде простых волн, а также решена задача распада произвольного разрыва. Учет крупномасштабной сжимаемости позволяет описывать динамику столба плазмы в зависимости не только от высоты слоя и скорости, но и средней плотности столба жидкости. Вследствие этого учет горизонтального импульса в уравнениях происходит более точно, по сравнению со случаем несжимаемой жидкости, что является преимуществом при применении этих уравнений для описания космических и астрофизических течений. Полученные в этих работах решения являются точными, сильно нелинейными, ключевыми для разработки конечно-объемных численных методов Годуновского типа [23, 24]. Учитывая важность таких решений, представляется полезным и интересным обобщить теорию, развитую в [13, 14, 19, 20] для сжимаемых магнитогидродинамических течений в приближении мелкой воды.

Течения в плазменной астрофизике, так же как течения в геофизике, как правило, являются стратифицированными. Учет стратификации в магнитогидродинамических моделях вращающейся плазмы важен для анализа множества астрофизических объектов и явлений, например, процессов в солнечном тахоклине [1–3, 25–27], устойчиво-стратифицированных областей в недрах звезд (излучающей зоны) [28] и планет (внешний жидкий слой ядра) [29], астрофизических дисков [30], экзопланет [31], осцилляций вращающихся звезд и Солнца [32–34], в частности осцилляций R -моды [35–37]. Кроме того, учет стратификации позволяет существенно расширить возможности для интерпретации имеющихся данных наблюдений крупномасштабных волн Россби на Солнце [32, 33, 38–41]. Эффективной моделью для описания непрерывно стратифицированной плазмы является модель n слоев плазмы различной плотности, наложенных друг на друга [17, 42]. Приближение мелкой воды является одним из основным магнитогидродинамических приближений, используемых для изучения крупномасштабных процессов во вращающейся астрофизической плазме.

Большое число работ посвящено изучению волновых процессов в приближении мелкой воды [3, 4, 12–14, 27, 33, 38, 43–56]. Когда рассматривают крупномасштабные течения при наличии вращения в магнитогидродинамическом приближе-

нии мелкой воды, выделяют волны магнито-Пуанкаре [4, 46, 49] и волны магнито-Россби [48]. Волны магнито-Пуанкаре возникают во вращающихся течениях под действием силы тяжести и магнитного поля. Поскольку динамика волн определяется вращением, магнитным полем и гравитацией, также распространено название магнитные инерционно-гравитационные волны. Вследствие того, что название “волны магнито-Пуанкаре” используется в основном в работах по мелкой воде, а “магнитные инерционно-гравитационные волны” встречается чаще в различных приближениях и является более общим, мы будем использовать здесь именно его. Наряду с магнитными инерционно-гравитационными волнами (волнами магнито-Пуанкаре) в магнитной гидродинамике вращающейся плазмы возникают магнитострофические волны [4, 46, 49], восстанавливаемыми силами которых являются сила Кориолиса, сила Лоренца и сила гравитации. Магнитные инерционно-гравитационные волны являются аналогом магнитогравитационных волн в плазме при наличии вращения. В работе [46] показано, что условия синхронизма для магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн обеспечивают их трехволновые взаимодействия, и развита слабонелинейная теория. Показано наличие нелинейных взаимодействий двух магнитных инерционно-гравитационных волн и одной магнитострофической волны и двух магнитострофических волн и одной магнитной инерционно-гравитационной волны.

Волны магнито-Россби — крупномасштабные волны, возникающие вследствие неоднородности силы Кориолиса в зависимости от широты на сфере, распространяющиеся вследствие сохранения полной завихренности во вращающейся плазме, по аналогии с нейтральной жидкостью [53–55, 57, 58]. Волны магнито-Россби определяют крупномасштабную динамику Солнца и звезд [3, 25, 27, 59–63], динамику магнитоактивных атмосфер экзопланет, захваченных приливами от несущей звезды [8–10] и атмосфер нейтронных звезд [5, 6, 64–66], течения в аккреционных дисках нейтронных звезд [7]. Несмотря на сложность наблюдения волн Россби в астрофизической плазме, они недавно были обнаружены на Солнце [38, 39, 67]. Отметим также ряд исследований о влиянии волн магнито-Россби на солнечные сезоны [33, 41, 68, 69] и космическую погоду [70, 71]. Кроме того, отметим работы с исследованиями, косвенно указывающими на существование волн Россби на Солнце [72–76]. В работах [43, 48, 77] волны магнито-Россби исследованы в приближении β -плоскости для силы Кориолиса. Приближение β -плоскости описывает вращающиеся сферические течения плазмы в локальной декартовой системе координат. В этом случае параметр Кориолиса слабо меняется при малых из-

менениях широты и раскладывается в ряд до первого порядка по широте. Слабонелинейная теория волн магнито-Россби в магнитогидродинамической модели однослойной мелкой воды развита в [48], при наличии крупномасштабной сжимаемости в [77]. В работе [43] развита линейная и слабонелинейная теория волн магнито-Россби во вращающейся стратифицированной плазме в магнитогидродинамической двуслойной модели мелкой воды. В работах [43, 48, 77] исследованы условия синхронизма и найдены нелинейные взаимодействия трех волн магнито-Россби. Нелинейные взаимодействия волн магнито-Россби связывают с длительностью солнечного цикла. Нерегулярные переходы по амплитудам волн напоминают наблюдаемые временные ряды солнечной активности [63]. Приближение β -плоскости развито для упрощения теории сферических волн Россби. Тем не менее заметим, что представление силы Кориолиса в таком приближении содержит слагаемое, не зависящее от широты, которое обеспечивает существование магнитных инерционно-гравитационных волн на β -плоскости. Такие волны не исследовались в работах [3, 4, 43, 48, 77], хотя их нелинейные взаимодействия могут быть важны для интерпретации различных явлений в плазменной астрофизике.

Магнитогидродинамическая теория мелкой воды является двумерной, что исключает не только вертикальные компоненты скоростей и магнитного поля, но и учет вертикального изменения их горизонтальных составляющих. Таким образом, не являясь трехмерной, магнитогидродинамическая система уравнений в приближении мелкой воды не может полностью описывать важный для астрофизики случай устойчиво и непрерывно стратифицированного слоя плазмы. В работе [78] сделан существенный шаг вперед в изучении трехмерных волновых процессов в магнитогидродинамических течениях вращающейся стратифицированной плазмы, являющийся принципиальным для реальных течений с непрерывной стратификацией. Как хорошо известно, в геофизической гидродинамике стратифицированных вращающихся течений возникают инерционно-гравитационные волны вследствие двух восстанавливающих механизмов — вращения и стратификации. В случае магнитных течений волновая картина гораздо богаче вследствие наличия дополнительной восстанавливающей силы, а именно силы Лоренца, наряду с силой Кориолиса и силой плавучести [78]. Кроме того, учет трехмерности позволяет детально исследовать волновые процессы в магнитогидродинамике стратифицированной плазмы с учетом горизонтальной составляющей силы Кориолиса, что является особенно принципиальным при изучении экваториальных течений. Отметим, что волны Россби [32] обнаружены именно в эквато-

риальной зоне Солнца. Для учета горизонтальной составляющей вектора Кориолиса используются приближения нестандартных f - и β -плоскостей [55, 79]. Для изучения устойчиво-стратифицированных течений как нейтральной жидкости [79–81], так и астрофизической плазмы [82–84] широко используется приближение Буссинеска. Отметим, что приближение Буссинеска работает, когда градиент плотности пропорционален только градиенту температуры, и описывает несжимаемые стратифицированные течения [54]. Вариации плотности и температуры в приближении Буссинеска должны быть малыми. Таким образом, приближение Буссинеска правильно описывает несжимаемую жидкость, но также учитывает изменения плотности [85]. В [86] показано, что уравнения магнитной гидродинамики в приближении Буссинеска представляют собой систему уравнений несжимаемой плазмы с градиентом температуры, близким к адиабатическому, и отфильтровывают быстрые (акустические) волновые процессы. В [87] приближение Буссинеска расширено за счет включения переменных магнитных полей. В приближении Буссинеска для нейтральной жидкости флуктуации давления не учитываются в уравнении состояния. В магнитных уравнениях Буссинеска флуктуации полного давления (магнитного и теплового) по-прежнему считаются небольшими.

Важным принципиальным отличием течений астрофизической плазмы является свойство сжимаемости, характеризующее большинство наблюдаемых объектов в плазменной астрофизике. Отметим, что первые экспериментальные наблюдения крупномасштабных течений астрофизической плазмы выполнены на основе изучения магнитных полей или методами астросейсмологии, что естественным образом мотивирует развитие магнитогидродинамической теории с учетом как эффектов сжимаемости, так и эффектов магнитных полей. Учет сжимаемости в магнитогидродинамических моделях вращающейся плазмы существенно повышает возможность интерпретации астросейсмологических данных, например, данных о широтной зависимости собственных мод солнечных осцилляций [32]. В работах [19, 20] выведена система уравнений мелкой воды для нейтральной жидкости с учетом крупномасштабной сжимаемости, и затем в [77] обобщена для магнитогидродинамических течений. В работах [88, 89] волновые процессы в сжимаемых течениях исследуются в неупругом приближении (anelastic approximation). В таком приближении акустические волны отфильтрованы, а градиент плотности зависит как от градиента давления, так и от градиента температуры [90]. Магнитогидродинамическая система уравнений в неупругом приближении не содержит акустических волн и получается из полной системы сжимаемых урав-

нений магнитной гидродинамики в предположении малых возмущений плотности и описывает течения с малыми числами Маха.

Подробный качественный анализ эффектов малых чисел Маха в астрофизике приведен в работе [91], которая посвящена разработке нового численного алгоритма для описания объектов плазменной астрофизики. В [91] приведено краткое, но информативное сравнение различных типов приближений, используемых при численном моделировании течений с малым числом Маха. Наиболее простым является приближение несжимаемой жидкости, предполагающее постоянство фоновой плотности и давления по координате. В таком приближении при движении плотность жидкости можно считать постоянной вдоль всего объема жидкости в течение всего времени движения. Следующим важным приближением при условии несжимаемого потока жидкости является приближение Буссинеска. В нем по-прежнему считается постоянным фоновое состояние, однако в уравнении импульса при массовых силах включены эффекты плавучести. Как в несжимаемом, так и в приближении Буссинеска уравнение непрерывности переходит в условие бездивергентности поля скоростей в силу отсутствия эффектов сжимаемости. Следующие два приближения, неупругое и псевдонесжимаемое, основаны на стратифицированном фоновом состоянии (исходном состоянии равновесия). В обоих этих приближениях элемент жидкости может расширяться или сжиматься при движении по вертикали относительно фонового состояния в ответ на изменение давления окружающей среды. Уравнение непрерывности в неупругом приближении является условием бездивергентности произведения фоновой плотности и скорости течения. Уравнение непрерывности в псевдосжимаемом приближении имеет более сложный вид, а именно ненулевую дивергенцию произведения скорости и фонового давления, возведенного в степень $1/\gamma$ ($\gamma = c_p/c_v$ — показатель адиабаты). При этом уравнения в псевдосжимаемом приближении сводятся к уравнениям в неупругом приближении в случае малых возмущений плотности и температуры, но сами по себе не предполагают малости таких изменений. Кроме того, псевдосжимаемые уравнения учитывают локальные эффекты нагрева.

Впервые неупругое приближение предложено в [92] для решения задач геофизической гидродинамики. В [92] с использованием масштабного анализа приведен вывод уравнений на основе предположения о том, что распределение давления, плотности и потенциальной температуры газа всегда близки к модели адиабатически стратифицированной атмосферы, а временной масштаб определяется частотой Брента–Вайсяля. Такие

предположения и приближения при выводе уравнений привели к отсутствию в них акустических волн, хотя это не было непосредственной целью исследования. Задача о фильтрации акустических волн в крупномасштабных моделях геофизической гидродинамики была впервые сформулирована в работе [93] с целью упростить численное моделирование тепловой конвекции в геофизике, поскольку присутствие акустических волн в полной сжимаемой системе уравнений требует очень малого временного шага в численной схеме конечно-разностного интегрирования. Отметим работу [94], в которой показана возможность использования неупругого приближения для исследования внутренних гравитационных волн при малых числах Маха, а также работы [95–99], в которых исследуются математические свойства неупругого приближения для течений нейтральной жидкости. Упомянем работы по развитию теории неупругого приближения в рамках задач земной конвекции и геодинамики [100–103], которые инициировали применение неупругого приближения для изучения астрофизических течений. Говоря о развитии неупругого приближения в астрофизике и физике планет отметим работы [104, 105], в которых используется неупругое приближение в нейтральной жидкости, и работы [106–112], в которых используются магнитогидродинамические уравнения в неупругом приближении для исследования конвекции и динамо на Солнце и в звездах.

2. ЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ДВУМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Поведение различных звезд и планет описывается магнитной гидродинамикой тонких слоев плазмы со свободной границей в поле силы тяжести. Например, течения солнечного тахоклина (тонкого слоя внутри Солнца, находящегося над конвективной зоной) [1–3], динамика атмосфер нейтронных звезд [4, 5], течения аккреционных дисков нейтронных звезд [6, 7], захваченные приливами экзопланеты с магнитоактивными атмосферами [8–10]. Полная трехмерная система магнитогидродинамических уравнений вращающейся плазмы достаточно сложна как для аналитического исследования, так и для численного моделирования. Поэтому для описания таких течений в тонких слоях астрофизической плазмы используется магнитогидродинамическое приближение мелкой воды [2]. Уравнения магнитной гидродинамики вращающейся плазмы в приближении мелкой воды являются альтернативой магнитогидродинамическим уравнениям тяжелой жидкости со свободной границей в случае, когда исследуется слой малой толщины по отношению к характерному горизонтальному линейному раз-

меру задачи, и вертикальными ускорениями в слое можно пренебречь. Практически, речь идет о развитии идей геофизической гидродинамики с учетом существенных отличий в поведении плазменных течений вследствие присутствия силы Лоренца и важности магнитных полей. Магнитогидродинамические уравнения мелкой воды получаются в предположении гидростатичности распределения давлений и малости толщины слоя по отношению к характерному горизонтальному линейному размеру задачи из полной системы уравнений магнитной гидродинамики несжимаемой плазмы усреднением по высоте слоя [2, 13–18]. В работе [2] получены магнитогидродинамические уравнения в приближении мелкой воды без учета внешнего вертикального магнитного поля. В работе [4] полученные в [2] уравнения записаны путем введения эффектов внешнего поля в уравнения для горизонтальных скоростей и для горизонтальных магнитных полей. Такая конфигурация магнитного поля характерна для атмосфер нейтронных звезд [4], и для магнитоактивных атмосфер экзопланет [8]. Тем не менее в работе [4] остается открытым вопрос о корректной формулировке условия бездивергентности магнитного поля в приближении мелкой воды во внешнем магнитном поле. Заметим, что предложенное в работе [2] условие бездивергентности не удовлетворяется в модернизированной системе магнитогидродинамических уравнений мелкой воды во внешнем поле. Поэтому актуальной стала задача развития последовательной теории как для понимания структуры магнитного поля, так и для постановки корректных начальных условий при численном моделировании. Данная теория была разработана в [49], где была выведена система магнитогидродинамических уравнений мелкой воды во внешнем магнитном поле, которая показала принципиальную трехмерность магнитного поля. Полученная система играет такую же важную роль в космической и астрофизической плазме, как и классические уравнения мелкой воды в гидродинамике нейтральной жидкости. Заметим, что существенным отличием магнитогидродинамических уравнений вращающейся плазмы по сравнению с нейтральной жидкостью является присутствие условия бездивергентности магнитного поля, выполняющегося тождественно при задании корректных начальных условий. В уравнениях, полученных в работе [49] это условие выполнено. Кроме того, дальнейшие исследования магнитогидродинамических уравнений мелкой воды во внешнем поле показали возможность корректного учета не только эффектов стратификации, но и эффектов крупномасштабной сжимаемости в двумерных течениях вращающейся астрофизической плазмы. Так, в работе [43] были выведены магнитогидродинамические уравнения двуслойной мелкой воды для стратифицирован-

ного слоя плазмы во внешнем магнитном поле, а в работе [77] были выведены магнитогидродинамические уравнения с учетом крупномасштабной сжимаемости во внешнем магнитном поле. В следствие значимости нелинейных взаимодействий волн в исследовании космической погоды и солнечных циклов, в работе [113] в рамках магнитогидродинамических уравнений мелкой воды (одного слоя и двух слоев различной, но постоянной плотности) впервые были исследованы магнитные инерционно-гравитационные волны и волны магнито-Россби на β -плоскости и выявлены их нелинейные взаимодействия.

2.1. Приближение мелкой воды для течений вращающейся плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле

В данном разделе приведем обзор линейных волн в двумерных течениях вращающейся плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле в приближении мелкой воды [48]. В этом случае в магнитогидродинамическом приближении мелкой воды появляются дополнительные слагаемые, приводящие, при постоянном параметре Кориолиса $f = 2\Omega$ (стандартная f -плоскость, Ω — скорость вращения слоя плазмы), к возникновению в линейном приближении двух типов быстрых волн: магнитных инерционно-гравитационных и магнитоострофических волн [4]. При учете сферичности (стандартная β -плоскость) в линейном приближении исследуются высокочастотные магнитные инерционно-гравитационные волны и низкочастотные волны магнито-Россби. Вывод уравнений мелкой воды магнитной гидродинамики осуществлялся методом усреднения по высоте слоя исходной системы уравнений (МГД-уравнений для вращающейся несжимаемой невязкой плазмы), широко используемых и хорошо себя зарекомендовавших в геофизической гидродинамике [54, 114] и в физике планетных атмосфер [10, 57, 115, 116]. При выводе уравнений во внешнем магнитном поле возникают дополнительные условия на границах для магнитного поля, учитывающие наличие постоянно-го внешнего вертикального магнитного поля, пронизывающего слой плазмы. Уравнения записаны в неинерционной системе отсчета, вращающейся со скоростью Ω вместе со слоем плазмы. Система магнитогидродинамических уравнений мелкой воды во внешнем магнитном поле имеет вид

$$\partial_t h + \partial_x(hu_x) + \partial_y(hu_y) = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(hu_x) + \partial_x \left[h \left(u_x^2 - B_x^2 + \frac{gh^2}{2} \right) \right] + \\ + \partial_y [h(u_x u_y - B_x B_y)] + B_0 B_x - fhu_y = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(hu_y) + \partial_y [h(u_x u_y - B_x B_y)] + \\ + \partial_x \left[h \left(u_y^2 - B_y^2 + \frac{gh^2}{2} \right) \right] + B_0 B_y + fhu_x = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\partial_t(hB_x) + \partial_y [h(B_x u_y - B_y u_x)] - B_0 u_x = 0, \quad (4)$$

$$\partial_t(hB_y) + \partial_x [h(B_y u_x - B_x u_y)] - B_0 u_y = 0, \quad (5)$$

$$\partial_t B_z + B_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (6)$$

$$\partial_x(hB_x) + \partial_y(hB_y) = 0, \quad (7)$$

где h — высота слоя поверхности, u_x, u_y — горизонтальные скорости в приближении мелкой воды, усредненные по высоте слоя, B_x, B_y — горизонтальные компоненты магнитного поля в приближении мелкой воды, усредненные по высоте слоя, B_z — вертикальная компонента магнитного поля, B_0 — постоянное внешнее вертикальное магнитное поле, $f = 2\Omega$ — параметр Кориолиса, Ω — угловая скорость вращения. Заметим, что первое уравнение системы (1) — уравнение изменения высоты слоя, уравнения (2), (3) — закон изменения импульса, (4)–(6) — уравнения изменения магнитного поля, уравнение (7) — следствие уравнения бездивергентности магнитного поля в полной системе исходных уравнений магнитной гидродинамики. Уравнение (7) при задании корректных начальных условий, определяемых уравнением (6) выполняется тождественно как следствие уравнений (4)–(6). Таким образом показано сохранение трехкомпонентности магнитного поля в магнитогидродинамическом приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле, в то время как поле скоростей двумерно. Полученная система (1)–(5) магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле в частном случае переходит в классические уравнения нейтральной жидкости и широко известные в астрофизике магнитогидродинамические уравнения без внешнего магнитного поля [2].

Система (1)–(5) имеет два взаимоисключающих стационарных решения: решение со внешним вертикальным магнитным полем

$$\begin{aligned} h_0 = \text{const}, \quad u_{x_0} = u_{y_0} = B_{x_0} = B_{y_0} = 0, \\ B_0 = \text{const}, \end{aligned} \quad (8)$$

и решение с горизонтальным магнитным полем

$$\begin{aligned} h_0 = \text{const}, \quad u_{x_0} = u_{y_0} = B_0 = 0, \\ \mathbf{B}_0 = (B_{x_0}, B_{y_0}) = \text{const}. \end{aligned} \quad (9)$$

2.1.1. Волны в астрофизической плазме при наличии внешнего вертикального поля. В приближении стандартной f -плоскости, когда вектор Кориолиса $\mathbf{f} = (0, 0, f_v)$ постоянен и направлен

строго по вертикали, линейными решениями системы (1)–(5) во внешнем вертикальном магнитном поле на фоне стационара (8) являются магнитные инерционно-гравитационные волны с дисперсионным соотношением

$$\omega_{MIG_{V_1}} = \pm \sqrt{\frac{gh_0 k^2}{2} + \frac{f_V^2}{2} + \frac{B_0^2}{h_0^2} + \frac{1}{2} \sqrt{(f_V^2 + gh_0 k^2)^2 + 4f_V^2 \frac{B_0^2}{h_0^2}}} \quad (10)$$

и магнитострофические волны с дисперсионным соотношением

$$\omega_{MS_{V_1}} = \pm \sqrt{\frac{gh_0 k^2}{2} + \frac{f_V^2}{2} + \frac{B_0^2}{h_0^2} - \frac{1}{2} \sqrt{(f_V^2 + gh_0 k^2)^2 + 4f_V^2 \frac{B_0^2}{h_0^2}}} \quad (11)$$

В дисперсионных соотношениях (10), (11) знак “+” соответствует волнам, распространяющимся вдоль волнового вектора $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$, а знак “–” – волнам, распространяющимся противоположно направлению волнового вектора $\mathbf{k}$.

Магнитные инерционно-гравитационные волны (10) – поверхностные гравитационные волны во вращающейся мелкой воде при наличии магнитного поля. В отсутствие магнитного поля уравнение (10) принимает вид

$$\omega_p = \pm \sqrt{gh_0 k^2 + f_V^2} \quad (12)$$

и описывает инерционно-гравитационные волны в мелкой воде, являющиеся объектом многочисленных исследований в динамике нейтральной жидкости [54].

Магнитострофические волны, как и магнитные инерционно-гравитационные волны, также возникают во вращающейся мелкой воде при наличии магнитного поля вследствие гравитации и силы Кориолиса. Однако данный тип волн не имеет аналога в динамике нейтральной жидкости. В отсутствие магнитного поля уравнение (11) обращается в ноль.

Для исследования сферических течений в рамках системы магнитогидродинамических уравнений мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле (1)–(5) используется приближение стандартной β -плоскости для вектора Кориолиса $\mathbf{f}$. Данное приближение широко применяется для исследования крупномасштабных волн Россби, как в динамике нейтральной жидкости [54], так и в магнитной гидродинамике [117]. Однако в работах [48], [113] показано, что в уравнениях мелкой воды на β -плоскости, как при наличии так и в отсутствие магнитного поля, помимо низкочастотных волн Россби существует решение, описывающее высокочастотные магнитные инерционно-гравитационные волны.

В приближении стандартной β -плоскости предполагается, что вектор Кориолиса $\mathbf{f} = 2\boldsymbol{\Omega} = 2\sin\theta$ слабо меняется при малых изменениях широты θ . Такое предположение позволяет перейти в локальную декартову систему координат на сфере радиуса R и разложить выражение для вектора $\mathbf{f}$ в ряд по широте, сохраняя первый порядок малости:

$$f = 2\Omega \sin\theta \approx 2\Omega \sin\theta_0 + 2\Omega(\theta - \theta_0) \cos\theta_0 \approx f_0 + \beta y, \quad (13)$$

где $f_0 = 2\Omega \sin\theta_0$, $\beta = \partial f / \partial y$, $\beta y \ll f_0$, $y = R(\theta - \theta_0)$. Таким образом в случае приближения стандартной β -плоскости для описания сферических течений в системе магнитогидродинамических уравнений мелкой воды (1)–(5) слагаемые с вектором Кориолиса $f u_{x,y}$ в уравнениях (2), (3) принимают вид $(f_V + \beta y)u_y$ и $f_V u_x$ соответственно, где $f_V \equiv f_0$.

Линейным решением системы (1)–(5) в приближении стандартной β -плоскости на фоне стационарного решения с внешним вертикальным магнитным полем (8) является дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$\omega^4 - \omega^2 \left(f_V^2 + gh_0 k^2 + 2 \frac{B_0^2}{h_0^2} \right) - \omega gh_0 \beta k_x + \frac{B_0^2}{h_0^2} \left(\frac{B_0^2}{h_0^2} + gh_0 k^2 \right) = 0. \quad (14)$$

Решением уравнения (14) в высокочастотном пределе является дисперсионное соотношение в виде

$$\omega'_{MIG_{V_1}} = \pm \sqrt{f_V^2 + gh_0 k^2 + 2 \frac{B_0^2}{h_0^2}}, \quad (15)$$

которое описывает высокочастотные магнитные инерционно-гравитационные на β -плоскости. Отметим здесь существенное различие с магнитными инерционно-гравитационными волнами (10) на f -плоскости. Дисперсионное соотношение (15) имеет более простой вид, в нем отсутствует дополнительный внутренний радикал, что меняет динамику волны. Однако восстанавливающими силами для обоих типов волн являются сила Лоренца, гравитации и Кориолиса. В отсутствие магнитного поля выражение (15) переходит в выражение (12) и описывает стандартные гидродинамические инерционно-гравитационные волны в мелкой воде. Кроме того, в приближении β -плоскости отсутствуют магнитострофические волны.

Решением уравнения (14) в низкочастотном пределе является дисперсионное соотношение в виде

$$\omega_{MR_{V_1}} = \frac{B_0^2}{h_0^2} \left(\frac{B_0^2}{h_0^2} + gh_0 k^2 \right) (gh_0 \beta k_x)^{-1}, \quad (16)$$

которое описывает крупномасштабные волны магнито-Россби в мелкой воде на β -плоскости, распространяющиеся вдоль направления волнового вектора $\mathbf{k}$. Основной механизм их образования заключается в сдвиге вращающегося потока вследствие того, что сила Кориолиса изменяется в зависимости от широты.

Заметим, что в интервале между высокочастотными решениями дисперсионного уравнения в виде магнитных инерционно-гравитационных волн и низкочастотными решениями для медленных волн магнито-Россби, дисперсионное соотношение допускает моды быстрых магнито-Россби волн [3].

2.1.2. Волны в астрофизической плазме в горизонтальном магнитном поле. В отсутствие внешнего вертикального магнитного поля линейными решениями системы (1)–(5) на фоне стационара (9) являются магнитные инерционно-гравитационные волны с дисперсионным соотношением

$$\omega_{MIG_{h_1}} = \pm \sqrt{\frac{gh_0 k^2}{2} + \frac{f_V^2}{2} + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2} + \frac{1}{2} \sqrt{(f_V^2 + gh_0 k^2)^2 + 4f_V^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2} \quad (17)$$

и магнитофизические волны с дисперсионным соотношением

$$\omega_{MS_{h_1}} = \pm \sqrt{\frac{gh_0 k^2}{2} + \frac{f_V^2}{2} + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2} - \frac{1}{2} \sqrt{(f_V^2 + gh_0 k^2)^2 + 4f_V^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2}. \quad (18)$$

В дисперсионных соотношениях (17), (18) знак “+” соответствует волнам, распространяющимся вдоль волнового вектора $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$, а знак “–” соответствует волнам, распространяющимся противоположно направлению волнового вектора $\mathbf{k}$.

Магнитные инерционно-гравитационные волны в горизонтальном магнитном поле (17) при нулевом магнитном поле переходят в свой гидродинамический аналог – инерционно-гравитационные волны в мелкой воде с дисперсионным соотношением (12). Магнитофизические волны в горизонтальном магнитном поле (18) не имеют аналога в динамике нейтральной жидкости. В отсутствие магнитного поля дисперсионное соотношение (18) обращается в ноль.

Линейным решением системы (1)–(5) в приближении стандартной β -плоскости на фоне стационарного решения с горизонтальным магнитным полем (9) является дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$\omega^4 - \omega^2 (f_V^2 + gh_0 k^2 + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2) - \omega gh_0 \beta k_x + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 ((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + gh_0 k^2) = 0. \quad (19)$$

Решением уравнения (19) в высокочастотном пределе является дисперсионное соотношение в виде

$$\omega_{MIG_{h_1}} = \pm \sqrt{f_V^2 + gh_0 k^2 + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2}, \quad (20)$$

которое описывает высокочастотные магнитные инерционно-гравитационные волны на β -плоскости, существенно отличающиеся от магнитных

инерционно-гравитационных волн (17) на f -плоскости. В отсутствие магнитного поля выражение (20) переходит в выражение (12) и описывает стандартные гидродинамические инерционно-гравитационные волны в мелкой воде. Кроме того, в приближении β -плоскости отсутствуют магнитофизические волны.

Решением уравнения (19) в низкочастотном пределе является дисперсионное соотношение в виде

$$\omega_{MR_{h_1}} = \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 ((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + gh_0 k^2)}{gh_0 \beta k_x}, \quad (21)$$

которое описывает крупномасштабные волны магнито-Россби в мелкой воде в горизонтальном магнитном поле на β -плоскости, распространяющиеся вдоль направления волнового вектора $\mathbf{k}$.

В отсутствие магнитного поля уравнение (19) принимает вид

$$\omega^3 - \omega (f_V^2 + gh_0 k^2) - gh_0 \beta k_x = 0 \quad (22)$$

и имеет решение в высокочастотном пределе в виде инерционно-гравитационных волн в мелкой воде с дисперсионным соотношением (12), а в низкочастотном пределе в виде стандартных гидродинамических волн Россби в мелкой воде с дисперсионным соотношением

$$\omega_R = -\frac{gh_0 \beta k_x}{f_V^2 + gh_0 k^2}. \quad (23)$$

Общий вид дисперсионных кривых для волн во вращающихся течениях плазмы в приближении мелкой воды представлен на рис. 1а, б для

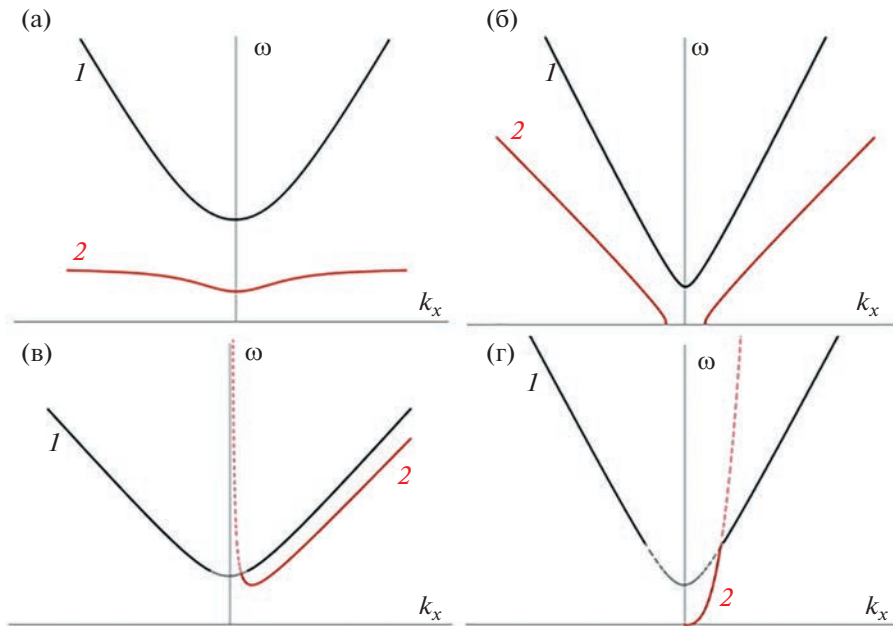


Рис. 1. Дисперсионные кривые для волн в однослойной мелкой воде на стандартной f -плоскости во внешнем вертикальном магнитном поле: магнитная инерционно-гравитационная волна $1 - \omega_{MIG_{V_1}}$ и магнитострофическая волна $2 - \omega_{MS_{V_1}}$ (а); на стандартной f -плоскости в горизонтальном магнитном поле: магнитная инерционно-гравитационная волна $1 - \omega_{MIG_{h_1}}$ и магнитострофическая волна $2 - \omega_{MS_{h_1}}$ (б); на стандартной β -плоскости во внешнем вертикальном магнитном поле: магнитная инерционно-гравитационная волна $1 - \omega_{MIG_{V_1}}$ и волна магнито-Россби $2 - \omega_{MR_{V_1}}$ (в); на стандартной β -плоскости в горизонтальном магнитном поле: магнитная инерционно-гравитационная волна $1 - \omega_{MIG_{h_1}}$ и волна магнито-Россби $2 - \omega_{MR_{h_1}}$ (г).

магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном магнитном поле; на рис. 1в, г для магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби во внешнем вертикальном и в горизонтальном магнитных полях.

2.1.3. Выводы. В разделе обсуждается существенное отличие структуры магнитного поля в магнитогидродинамических течениях мелкой воды при наличии внешней вертикальной компоненты от аналогичных течений в ее отсутствии. Необходимость учета условия бездивергентности магнитного поля в этом случае навязывает системе вертикальную компоненту магнитного поля, делая структуру магнитного поля существенно трехмерной. При отсутствии внешнего вертикального магнитного поля, как хорошо известно, в приближении мелкой воды магнитное поле двумерно. Замечено, что предложенная система уравнений в частном случае отсутствия вертикального магнитного поля переходит в традиционную. Развита теория магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн на f -плоскости, а также магнитных инерционно-

гравитационных волн и волн магнито-Россби на β -плоскости в магнитогидродинамических течениях вращающейся плазмы в приближении мелкой воды. Изучены дисперсионные уравнения для двух стационарных течений: внешнее вертикальное магнитное поле и горизонтальное магнитное поле.

2.2. Приближение двуслойной мелкой воды для течений вращающейся стратифицированной плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле

Течения астрофизической плазмы, как и геофизические течения, в основном стратифицированные. Здесь и далее под стратификацией понимается зависимость профиля плотности от вертикальной координаты z . В случае устойчивой стратификации, рассматриваемом в данном обзоре, профиль плотности (энтропии — в случае сжимаемых течений) предполагается линейным по вертикальной координате и удовлетворяющим условию отсутствия конвекции — вертикальный градиент плотности (энтропии) отрицателен. Обсудим линейные волны в двумерных течениях вращающейся стратифицированной плазмы во

внешнем вертикальном магнитном поле в приближении двуслойной мелкой воды. Магнитогидродинамические уравнения двуслойной мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле являются обобщением уравнений, полученных в [46, 47, 49], на случай тонкого вращающегося слоя плазмы разделенного на два слоя с постоянными, но различными плотностями. Вывод магнитогидродинамических уравнений двуслойной мелкой воды, как и вывод однослойных уравнений, основан на методе усреднения по высоте слоя и учитывает наличие постоянного внешнего вертикального магнитного поля, пронизывающего оба слоя [43]. Уравнения как и для однослойного случая записаны в неинерционной системе отсчета, вращающейся со скоростью Ω вместе со слоем плазмы. Система магнитогидродинамических уравнений двуслойной мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле имеет вид

$$\partial_t(h_i - a_i) + \partial_x[(h_i - a_i)u_{xi}] + \partial_y[(h_i - a_i)u_{yi}] = 0, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t[(h_i - a_i)u_{xi}] + \\ & + \partial_x \left[(h_i - a_i) \left(u_{xi}^2 - B_{xi}^2 + \frac{g(h_i - a_i)}{2} \right) \right] + \\ & + \frac{\rho_2}{\rho_i} g(h_i - a_i) \partial_x H_i + \\ & + \partial_y[(h_i - a_i)(u_{xi}u_{yi} - B_{xi}B_{yi})] + \\ & + B_0 B_{xi} - f[(h_i - a_i)u_{yi}] = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t[(h_i - a_i)u_{yi}] + \partial_x[(h_i - a_i)(u_{xi}u_{yi} - B_{xi}B_{yi})] + \\ & + \partial_y \left[(h_i - a_i) \left(u_{yi}^2 - B_{yi}^2 + \frac{g(h_i - a_i)}{2} \right) \right] + \\ & + \frac{\rho_2}{\rho_i} g(h_i - a_i) \partial_y H_i + B_0 B_{yi} + (h_i - a_i) f u_{xi} = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t[(h_i - a_i)B_{xi}] + \\ & + \partial_y[(h_i - a_i)(B_{xi}u_{yi} - B_{yi}u_{xi})] - B_0 u_{xi} = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t[(h_i - a_i)B_{yi}] + \\ & + \partial_x[(h_i - a_i)(B_{yi}u_{xi} - B_{xi}u_{yi})] - B_0 u_{yi} = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где h_i — высота слоя, ρ_i — плотность плазмы в слое, Ω — угловая скорость вращения, равная для обоих слоев, $u_{xi,yi}$ — усредненные по высоте слоев горизонтальные скорости, $B_{xi,yi}$ — усредненные по высоте слоев горизонтальные магнитные поля, индекс $i = 1$ соответствует нижнему слою плазмы, в котором $a_i = 0$, $h_i = h_1$, $H_i = \Delta h$, а индекс $i = 2$ соответствует верхнему слою плазмы, в котором $a_i = h_1$, $h_i = h_2$, $H_i = h_1$. Данные уравнения двуслойной мелкой воды представляют собой единственную возможность самосогласованного учета внешнего магнитного поля и стратификации. Двуслойные магнитогидродинамические

уравнения мелкой воды играют такую же важную роль в космической и астрофизической стратифицированной плазме, как и классические уравнения мелкой воды в гидродинамике нейтральной стратифицированной жидкости [54, 114, 118]. В частном случае равенства высот и плотностей слоев плазмы уравнения (24)–(28) переходят в магнитогидродинамические уравнения мелкой воды во внешнем магнитном поле для одного слоя плазмы (1)–(5). Таким образом уравнения (24)–(28) сохраняют все свойства однослойной системы (1)–(5), включая принципиальную трехмерность магнитного поля и дополнительные уравнения на вертикальное магнитное поле (6) в обоих слоях. В частном случае отсутствия внешнего вертикального магнитного поля уравнения сводятся к магнитогидродинамическим уравнениям мелкой воды для двух слоев [42] в горизонтальном магнитном поле.

Система уравнений (24)–(28) имеет два взаимоисключающих стационарных решения: решение со внешним вертикальным магнитным полем

$$\begin{aligned} h_{0i} &= \text{const}, \quad u_{x0i} = u_{y0i} = B_{x0i} = B_{y0i} = 0, \\ B_0 &= \text{const}, \end{aligned} \quad (29)$$

и решение с горизонтальным магнитным полем

$$\begin{aligned} h_{0i} &= \text{const}, \quad u_{x0i} = u_{y0i} = B_0 = 0, \\ \mathbf{B}_{0i} &= (B_{x0i}, B_{y0i}) = \text{const}. \end{aligned} \quad (30)$$

2.2.1. Волны в астрофизической плазме во внешнем вертикальном магнитном поле. Линейным решением системы (24)–(28) в приближении стандартной β -плоскости на фоне стационарного решения с внешним вертикальным магнитным полем (29) является дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$\begin{aligned} & (\omega^4 - b_1 \omega^2 - c_1 \omega + d_1)(\omega^4 - b_2 \omega^2 - c_2 \omega + d_2) = \\ & = \frac{\rho_2}{\rho_1} g^2 k^4 h_{01} \Delta h_0 (\omega^2 + a \omega + q_1)(\omega^2 + a \omega + q_2), \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$b_1 = \frac{2B_0^2}{h_{01}^2} + f_V^2 + gk^2 h_{01}, \quad c_1 = \beta g k_x h_{01},$$

$$d_1 = \frac{B_0^4}{h_{01}^4} + \frac{B_0^2 g k^2}{h_{01}},$$

$$b_2 = \frac{2B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_V^2 + gk^2 \Delta h_0, \quad c_2 = \beta g k_x \Delta h_0,$$

$$d_2 = \frac{B_0^4}{\Delta h_0^4} + \frac{B_0^2 g k^2}{\Delta h_0},$$

$$a = \frac{\beta k_x}{k^2}, \quad q_1 = \frac{B_0^2}{h_{01}^2}, \quad q_2 = \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2}.$$

Правая часть дисперсионного соотношения (31) описывает эффекты стратификации в двуслойной модели, левая часть является произведением двух выражений, первое из которых соответствует нижнему слою, а второе — верхнему.

Строгий теоретический анализ полученного дисперсионного уравнения (31) не представляется возможным, поэтому ограничимся качественным рассмотрением. В первом приближении выделим магнитные инерционно-гравитационные волны и волны магнито-Россби в отсутствие стратификации. В случае малого различия в плотностях слоев плазмы представим решение дисперсионного уравнения (31) в высокочастотном пределе в виде суммы магнитной инерционно-гравитационной волны в отсутствие стратификации и малой поправки, связанной со стратификацией плазмы. В низкочастотном пределе решение дисперсионного уравнения (31) представим в виде суммы волны магнито-Россби в отсутствие стратификации и малой поправки, связанной со стратификацией плазмы.

В отсутствие стратификации ($\rho_2 = \rho_1$) уравнение (31) принимает вид

$$\begin{aligned} & \left[\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_V^2 \right) + \frac{B_0^4}{h_{01}^2 \Delta h_0^2} \right] \times \\ &= \left[\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_V^2 + gk^2 h_{02} \right) - \right. \\ & \quad \left. - \omega g h_{02} \beta k_x + \frac{B_0^2}{h_{01} \Delta h_0} \times \right. \\ & \quad \left. \times \left(\frac{B_0^2}{h_{01} \Delta h_0} + gk^2 \frac{h_{01}^3 + \Delta h_0^3}{h_{01} \Delta h_0} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

где ω — частота возмущения, $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ — волновой вектор возмущения. Би-квадратное уравнение в первой скобке дает следующие значения для частоты:

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 = & \frac{1}{2} \left(f_V^2 + \frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} \pm \right. \\ & \left. \pm \sqrt{\left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} - \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} \right)^2 + f_V^2 \left(f_V^2 + \frac{2B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{2B_0^2}{\Delta h_0^2} \right)} \right). \end{aligned}$$

Если предположить, что $\omega \neq \omega_{1,2}$, то уравнение (33) сводится к

$$\begin{aligned} & \omega^4 - \omega^2 \left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_V^2 + gk^2 H \right) - \omega g H \beta k_x + \\ & + \frac{B_0^2}{h_{01} \Delta h_0} \left(\frac{B_0^2}{h_{01} \Delta h_0} + gk^2 \frac{h_{01}^3 + \Delta h_0^3}{h_{01} \Delta h_0} \right) = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

В высокочастотном пределе решением уравнения (33) является следующее дисперсионное соотношение:

$$\omega_{MIG_{V_2}} = \pm \sqrt{\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_V^2 + gk^2 h_{02}}, \quad (34)$$

которое описывает магнитные инерционно-гравитационные волны на β -плоскости во внешнем вертикальном магнитном поле. Дисперсионное соотношение (34) в частном случае равенства высот слоев сводится к дисперсионному соотношению для магнитных инерционно-гравитационных волн на β -плоскости в однослойной мелкой воде во внешнем вертикальном магнитном поле (15).

В низкочастотном пределе решением уравнения (33) является следующее дисперсионное соотношение:

$$\begin{aligned} & \omega_{MR_{V_2}} = \\ &= \frac{B_0^2}{h_{01} \Delta h_0} \left(\frac{B_0^2}{h_{01} \Delta h_0} + \frac{gk^2 (h_{01}^3 + \Delta h_0^3)}{h_{01} \Delta h_0} \right) (\beta k_x g h_{02})^{-1}, \end{aligned} \quad (35)$$

которое описывает волны магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле. Дисперсионное соотношение (35) в частном случае равенства высот слоев сводится к дисперсионному соотношению для волн магнито-Россби в однослойной мелкой воде во внешнем вертикальном магнитном поле (16).

Выпишем поправки к частотам (34), (35), описывающие влияние стратификации ($\rho_1 \neq \rho_2$). Перепишем уравнение (31) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \left[\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_V^2 \right) + \frac{B_0^4}{h_{01}^2 \Delta h_0^2} \right] \times \\ & \times \left[\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_V^2 + gk^2 h_{02} \right) - \right. \\ & \quad \left. - \omega g h_{02} \beta k_x + \frac{B_0^2}{h_{01} \Delta h_0} \left(\frac{B_0^2}{h_{01} \Delta h_0} + gk^2 \frac{h_{01}^3 + \Delta h_0^3}{h_{01} \Delta h_0} \right) \right] = \\ &= \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) g^2 k^4 h_{01} \Delta h_0 \times \\ & \times \left(\omega^2 + \frac{\beta k_x}{k^2} \omega + \frac{B_0^2}{h_{01}^2} \right) \left(\omega^2 + \frac{\beta k_x}{k^2} \omega + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Пусть искомые поправки к частотам $\delta_{MIG_{V_2}} = \omega - \omega_{MIG_{V_2}}$, $\delta_{MR_{V_2}} = \omega - \omega_{MR_{V_2}}$ малы по сравнению с самими частотами

$$\omega_{MIG_{V_2}}^\alpha \delta_{MIG_{V_2}} \gg 1 \quad \forall \alpha > 0,$$

$$\omega_{MR_{V_2}}^\alpha \delta_{MR_{V_2}} \gg 1 \quad \forall \alpha > 0.$$

Тогда влияние стратификации на высокочастотную магнитную инерционно-гравитационную волну (34) описывается поправкой к частоте в следующем виде:

$$\delta_{MIG_{v_2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_V^2 + gk^2 h_{02} \right) \pm \frac{1}{2} \left(\left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_V^2 + gk^2 h_{02} \right)^2 - \frac{\Phi_1 \left(\rho_2 / \rho_1, \omega_{MIG_{v_2}} \right)}{(\omega_{MIG_{v_2}}^2 - \omega_1^2)(\omega_{MIG_{v_2}}^2 - \omega_2^2)} \right)^{(1/2)}. \quad (37)$$

Здесь Φ_1 — правая часть дисперсионного уравнения (36) при $\omega = \omega_{MIG_{v_2}}$.

Влияние стратификации на высокочастотную волну магнито-Россби (35) описывается поправкой к частоте в следующем виде:

$$\delta_{MR_{v_2}} = - \frac{\Phi_2 \left(\rho_2 / \rho_1, \omega_{MR_{v_2}} \right)}{(\omega_{MR_{v_2}}^2 - \omega_1^2)(\omega_{MR_{v_2}}^2 - \omega_2^2) g h_{02} \beta k_x}. \quad (38)$$

Здесь Φ_2 — правая часть дисперсионного уравнения (36) при $\omega = \omega_{MR_{v_2}}$.

2.2.2. Волны в астрофизической плазме в горизонтальном магнитном поле. Линейным решением системы (24)–(28) в приближении стандартной β -плоскости на фоне стационарного решения с горизонтальным магнитным полем (30) является дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$(\omega^4 - b_1 \omega^2 - c_1 \omega + d_1)(\omega^4 - b_2 \omega^2 - c_2 \omega + d_2) = \frac{\rho_2}{\rho_1} g^2 k^4 h_{01} \Delta h_0 (\omega^2 + a \omega + q_1)(\omega^2 + a \omega + q_2), \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_1^2 + f_V^2 + gk^2 h_{01}, & c_1 &= \beta g k_x h_{01}, \\ d_1 &= (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_1^2 ((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_1^2 + gk^2 h_{01}), \\ b_2 &= (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_2^2 + f_V^2 + gk^2 \Delta h_0, & c_2 &= \beta g k_x \Delta h_0, \\ d_2 &= (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_2^2 ((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_2^2 + gk^2 \Delta h_0), \\ a &= \frac{\beta k_x}{k^2}, & q_1 &= (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_1^2, & q_2 &= (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_2^2. \end{aligned}$$

Правая часть дисперсионного соотношения (39) описывает эффекты стратификации в двухслойной модели, левая часть является произведением двух выражений, первое из которых соответствует нижнему слою, а второе — верхнему.

Строгий теоретический анализ полученного дисперсионного уравнения (39) не представляется возможным, поэтому ограничимся качественным рассмотрением при равных магнитных полях в обоих слоях $(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_1 = (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_2 \equiv (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})$. В первом приближении выделим магнитные инерционно-гравитационные волны и волны магнито-Россби в отсутствие стратификации. В случае малого различия в плотностях слоев плазмы представим решение дисперсионного уравнения (39) в высокочастотном пределе в виде суммы магнитной инерционно-гравитационной волны в отсутствие стратификации и малой поправки, связанной со стратификацией плазмы. В низкочастотном пределе решение дисперсионного уравнения (39) представим в виде суммы волны магнито-Россби в отсутствие стратификации и малой поправки, связанной со стратификацией плазмы.

В отсутствие стратификации ($\rho_2 = \rho_1$) уравнение (39) принимает вид

$$\begin{aligned} &(\omega^4 - \omega^2(f_V^2 + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2) + \\ &+ (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^4)(\omega^4 - \omega^2(f_V^2 + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + g h_{02} k^2) - \\ &- \omega g h_{02} \beta k_x + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + g h_{02} k^2)) = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Би-квадратное уравнение в первой скобке дает следующие значения для частоты:

$$\omega_{3,4}^2 = \frac{f_V^2}{2} + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \pm f_V \sqrt{\frac{f_V^2}{4} + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2}.$$

Предполагая, что $\omega \neq \omega_{3,4}$, уравнение (41) сводится к

$$\begin{aligned} &\omega^4 - \omega^2(f_V^2 + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + g h_{02} k^2) - \\ &- \omega g h_{02} \beta k_x + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + g h_{02} k^2) = 0, \end{aligned} \quad (41)$$

которое имеет вид дисперсионного уравнения для одного слоя плазмы высоты h_{02} в приближении мелкой воды на бета-плоскости (19), что существенно отличает течение плазмы в горизонтальном магнитном поле от течения плазмы при наличии внешнего вертикального поля. В высокочастотном пределе решением уравнения являются магнитные инерционно-гравитационные волны на β -плоскости в горизонтальном магнитном поле, аналогичные волнам в однослойной модели (20). В высокочастотном пределе решением уравнения (33) являются волны магнито-Россби на β -плоскости в горизонтальном магнитном поле, аналогичные волнам в однослойной модели (21).

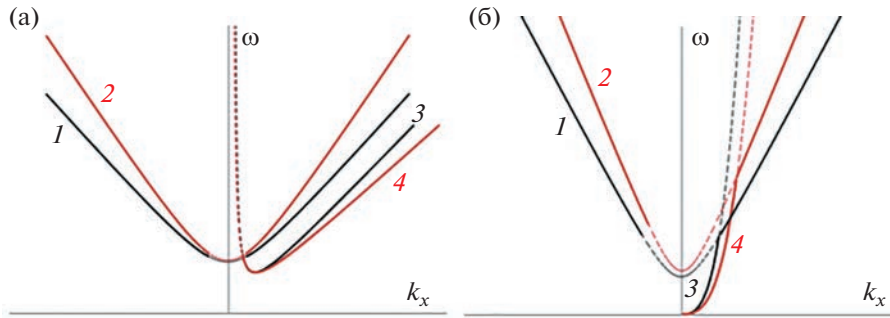


Рис. 2. Дисперсионные кривые для волн в двуслойной мелкой воде на стандартной β -плоскости во внешнем вертикальном магнитном поле (а): магнитная инерционно-гравитационная волна без учета стратификации $1 - \omega_{MIG_{V_2}}$ и с учетом малой поправки $2 - \omega_{MIG_{V_2}} + \delta_{\omega_{MIG_{V_2}}}$, волна магнито-Россби без учета стратификации $3 - \omega_{MR_{V_2}}$ и с учетом малой поправки $4 - \omega_{MR_{V_2}} + \delta_{\omega_{MR_{V_2}}}$; в горизонтальном магнитном поле (б): магнитная инерционно-гравитационная волна без учета стратификации $1 - \omega_{MIG_{h_2}}$ и с учетом малой поправки $2 - \omega_{MIG_{h_2}} + \delta_{\omega_{MIG_{h_2}}}$, волна магнито-Россби без учета стратификации $3 - \omega_{MR_{h_2}}$ и с учетом малой поправки $4 - \omega_{MR_{h_2}} + \delta_{\omega_{MR_{h_2}}}$.

Представим уравнение (39) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & (\omega^4 - \omega^2(f_0^2 + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2) + \\
 & + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^4)(\omega^4 - \omega^2(f_0^2 + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + gh_0k^2) - \\
 & - \omega gh_0\beta k_x + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + gh_0k^2)) = \quad (42) \\
 & = \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) g^2 k^2 h_0 \Delta h_0 \left[k^2 \omega^4 - 2\beta k_x \omega^3 + \right. \\
 & \left. + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 k^2 \omega^2 + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \beta k_x \omega - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^4 \right].
 \end{aligned}$$

Пусть искомые поправки к частотам $\delta_{MIG_{h_2}} = \omega - \omega_{MIG_{h_2}}$, $\delta_{MR_{h_2}} = \omega - \omega_{MR_{h_2}}$ малы по сравнению с самими частотами:

$$\omega_{MIG_{h_2}}^\alpha \delta_{MIG_{h_2}} \gg 1 \quad \forall \alpha > 0,$$

$$\omega_{MR_{h_2}}^\alpha \delta_{MR_{h_2}} \gg 1 \quad \forall \alpha > 0.$$

Тогда влияние стратификации на высокочастотную волну магнито-Пуанкаре (20) описывается поправкой к частоте в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \delta_{MIG_{h_2}} = & \frac{1}{2} (2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + f_0^2 + gh_0k^2) \pm \\
 & \pm \frac{1}{2} \left((2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + f_0^2 + gh_0k^2)^2 - \right. \quad (43) \\
 & \left. - \frac{\Phi_3(\rho_2/\rho_1, \omega_{MIG_{h_2}})}{(\omega_{MIG_{h_2}}^2 - \omega_3^2)(\omega_{MIG_{h_2}}^2 - \omega_4^2)} \right)^{(1/2)}.
 \end{aligned}$$

Здесь Φ_3 — правая часть дисперсионного уравнения (42) при $\omega = \omega_{MIG_{h_2}}$.

Влияние стратификации на высокочастотную волну магнито-Россби (21) описывается поправкой к частоте в следующем виде:

$$\delta_{MR_{h_2}} = - \frac{\Phi_4(\rho_2/\rho_1, \omega_{MR_{h_2}})}{(\omega_{MR_{h_2}}^2 - \omega_3^2)(\omega_{MR_{h_2}}^2 - \omega_4^2) gh_0\beta k_x}. \quad (44)$$

Здесь Φ_4 — правая часть дисперсионного уравнения (42) при $\omega = \omega_{MR_{h_2}}$.

Общий вид дисперсионных кривых для волн во вращающихся течениях плазмы в приближении двуслойной мелкой воды представлен на рис. 2а, б для магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби соответственно во внешнем вертикальном магнитном поле; на рис. 2в, г для магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби соответственно в горизонтальном магнитном поле.

2.2.3. Выводы. Приведен обзор модели мелкой двуслойной воды, применяемой для изучения крупномасштабных волн в астрофизической плазме. Показано существенное отличие уравнений мелкой воды для вращающейся плазмы при наличии двух слоев с различными постоянными плотностями в присутствии внешнего магнитного поля от системы в отсутствие внешнего магнитного поля, заключенное в дополнительном уравнении, требующемся для выполнения условия бездивергентности. Появление этого уравнения включает в систему вертикальную компоненту поля и делает поле трехмерным, в отличие от случая с отсутствием внешнего поля, при котором магнитное поле в уравнениях мелкой воды двумерно. Система уравнений двуслойной мелкой воды во внешнем магнитном поле переходит

в традиционную при отсутствии внешнего поля и равенства плотностей и высот слоев. Развита линейная теория магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби на β -плоскости в магнитогидродинамических течениях вращающейся плазмы в приближении мелкой воды. Изучены дисперсионные уравнения для двух стационарных течений: внешнее вертикальное магнитное поле и горизонтальное магнитное поле. Найдены поправки к дисперсионным соотношениям магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби, связанные с наличием стратификации в системе.

Кроме того изучено влияние стратификации на групповые и фазовые скорости магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби как во внешнем вертикальном, так и в горизонтальном магнитных полях. Анализ выражений для скоростей показал, что наличие стратификации ($\rho_2 \neq \rho_1$) в системе:

- увеличивает фазовую и групповую скорости магнитной инерционно-гравитационной волны вдоль направления k_x в вертикальном магнитном поле при малых k_x ($k_x < 1$) и уменьшает при больших k_x ;
- увеличивает фазовую скорость волны магнито-Россби вдоль направления k_x в вертикальном магнитном поле;
- увеличивает групповую скорость волны магнито-Россби вдоль направления k_x в вертикальном магнитном поле при малых k_x и уменьшает при больших k_x ;
- увеличивает фазовую и групповую скорости магнитной инерционно-гравитационной волны вдоль направления k_x в горизонтальном магнитном поле;
- увеличивает фазовую скорость волны магнито-Россби вдоль направления k_x в горизонтальном магнитном поле;
- увеличивает групповую скорость волны магнито-Россби вдоль направления k_x в горизонтальном магнитном поле при малых k_x и уменьшает при больших k_x .

2.3. Приближение мелкой воды для течений вращающейся плазмы с учетом крупномасштабной сжимаемости

Важным принципиальным свойством течений в плазменной астрофизике является свойство сжимаемости, характеризующее большинство наблюдаемых объектов во Вселенной. В данном разделе опишем линейные волны в двумерных течениях сжимаемой вращающейся плазмы в рамках системы магнитогидродинамических уравне-

ний при наличии вращения в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле с учетом крупномасштабной сжимаемости [77]. Вывод магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды с учетом крупномасштабной сжимаемости основан на методе усреднения по высоте слоя. Вследствие наличия сжимаемости в исходной системе, для задания корректных начальных и граничных условий используется уравнение Клапейрона и свойство адиабатичности рассматриваемых процессов. В результате в этом приближении фильтруются звуковые волны и учитывается зависимость плотности от давления на крупных масштабах, описывающая эффекты статической сжимаемости по сравнению со случаем несжимаемой плазмы [19, 20, 47]. Система магнитогидродинамических уравнений мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле, записанная в системе отсчета, вращающейся вместе со слоем плазмы со скоростью Ω , имеет вид

$$\partial_t l + \partial_x(lu_x) + \partial_y(lu_y) = 0, \quad (45)$$

$$\partial_t(lu_x) + \partial_x[l(u_x^2 - B_x^2)] + a^2 g \partial_x l + \partial_y[l(u_x u_y - B_x B_y)] + B_0 B_x - f l u_y = 0, \quad (46)$$

$$\partial_t(lu_y) + \partial_x[l(u_x u_y - B_x B_y)] + \partial_y[l(u_y^2 - B_y^2)] + a^2 g \partial_y l + B_0 B_y + f l u_x = 0, \quad (47)$$

$$\partial_t(lB_x) + \partial_y[l(u_y B_x - u_x B_y)] - B_0 u_x = 0, \quad (48)$$

$$\partial_t(lB_y) + \partial_x[l(u_x B_y - u_y B_x)] - B_0 u_y = 0. \quad (49)$$

В системе уравнений (45)–(49) аналогом высоты слоя h выступает следующая переменная:

$$l = h \bar{\rho} = \frac{p_h}{g} \left[\left(1 + \frac{h}{H_p} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} - 1 \right], \quad (50)$$

где h – высота слоя, $\bar{\rho}$ – среднее значение плотности, p_h – постоянное давление на верхней границе слоя, γ – показатель адиабаты, H_p – характерная плотностная высота, соответствующая масштабу высоты, на котором вариация плотности по высоте становится существенной, и выражаемая в следующем виде:

$$H_p = \frac{c_p T_h}{g}, \quad (51)$$

где $c_p = R\gamma/(\gamma-1) = \text{const}$ – теплоемкость при постоянном давлении, T_h – постоянная температура на границе, R – универсальная газовая постоянная. В уравнениях (45)–(49) $u_{xi,yi}$ – усредненные по высоте слоев горизонтальные скорости, $B_{xi,yi}$ – усредненные по высоте слоев горизонтальные магнитные поля, $B_0 = \rho_0 B'_0$ – внешнее

вертикальное магнитное поле, умноженное на плотность на нижней границе, а переменная a^2 выражается формулой

$$a^2 = \frac{l}{\rho_h} \left(l \frac{g}{p_h} + 1 \right)^{-1/\gamma},$$

$$\frac{\partial l B_x}{\partial x} + \frac{\partial l B_y}{\partial y} + B_z = 0. \quad (52)$$

Система (45)–(49) нетривиальным образом зависит от отношения характерного вертикального масштаба течения и масштаба высот, на котором вариация плотности становится существенной. В отличие от магнитогидродинамических уравнений мелкой воды для несжимаемой плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле (1)–(5), высота свободной поверхности не является определяющей характеристикой для описания течений, так как закон сохранения массы записывается через новую переменную, которая зависит от плотности плазмы и высоты столба.

Система уравнений (45)–(49) записана для слоя плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле, что приводит к существенным изменениям в структуре уравнений. Магнитное поле становится принципиально трехкомпонентным, причем вертикальная компонента магнитного поля зависит только от горизонтальных координат и времени, и ее изменение описывается уравнением

$$\partial_t B_z + B_0 \nabla \cdot u = 0. \quad (53)$$

Уравнение для вертикальной составляющей магнитного поля отделяется от полной системы и необходимо для задания корректных начальных условий, обеспечивающих выполнение условия бездивергентности магнитного поля, по аналогии с несжимаемой плазмой во внешнем вертикальном магнитном поле в приближении мелкой воды (6).

В отсутствие внешнего вертикального магнитного поля система (45)–(49) переходит в уравнения сжимаемой магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды, полученные в [47]. Величина H_p (51) характеризует масштаб высоты, на котором становятся существенными изменения плотности. Если характерная высота h слоя много меньше характерной высоты H_p , то $\varepsilon =$

$= h/H_p \rightarrow 0$, и данное течение можно считать несжимаемым. При этом система уравнений мелкой воды для сжимаемой плазмы (45)–(49) переходит в классические магнитогидродинамические уравнения вращающейся мелкой воды для несжимаемой плазмы.

Система уравнений (45)–(49) существенно отличается от классических магнитогидродинамических уравнений для несжимаемых течений. В классических магнитогидродинамических уравнениях мелкой воды высота, скорость и магнитное поле столба жидкости полностью определяют его взаимодействие с остальным объемом жидкости. В уравнениях (45)–(49) это взаимодействие определяется не только высотой, скоростью и магнитным полем, но и средней плотностью столба жидкости, поэтому учет горизонтального импульса в уравнениях происходит более точно. Как следствие появляется новая переменная, определяющая закон сохранения массы и однозначно связанная с высотой свободной поверхности. Таким образом, при наличии эффектов крупномасштабной сжимаемости, закон сохранения массы формулируется для переменной, нетривиально зависящей от характерного вертикального масштаба течения и масштаба высот, на котором вариация плотности становится существенной. Кроме того, учет крупномасштабной сжимаемости существенно модернизирует уравнения изменения импульса.

Система (45)–(49) имеет два взаимоисключающих стационарных решения: решение с внешним вертикальным магнитным полем

$$l_0 = \text{const}, \quad u_{x_0} = u_{y_0} = B_{x_0} = B_{y_0} = 0, \quad (54)$$

$$B_0 = \text{const},$$

и решение с горизонтальным магнитным полем

$$l_0 = \text{const}, \quad u_{x_0} = u_{y_0} = B_0 = 0, \quad (55)$$

$$\mathbf{B}_0 = (B_{x_0}, B_{y_0}) = \text{const}.$$

2.3.1. Волны в астрофизической плазме во внешнем вертикальном магнитном поле. Линейным решением системы (45)–(49) в приближении стандартной f -плоскости на фоне стационарного решения с внешним вертикальным магнитным полем (54) являются магнитные инерционно-гравитационные волны с дисперсионным соотношением

$$\tilde{\omega}_{MIG_V} = \pm \sqrt{\frac{a_0^2 g k^2}{2} + \frac{f_V^2}{2} + \frac{B_0^2}{l_0^2} + \frac{1}{2} \sqrt{(f_V^2 + a_0^2 g k^2)^2 + 4 f_V^2 \frac{B_0^2}{l_0^2}}} \quad (56)$$

и магнитофизические волны с дисперсионным соотношением

$$\tilde{\omega}_{MS_V} = \pm \sqrt{\frac{a_0^2 g k^2}{2} + \frac{f_V^2}{2} + \frac{B_0^2}{l_0^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{(f_V^2 + a_0^2 g k^2)^2 + 4 f_V^2 \frac{B_0^2}{l_0^2}}. \quad (57)$$

В случае отсутствия магнитного поля в системе уравнение (56) сводится к уравнению

$$\tilde{\omega}_P = \pm \sqrt{a_0^2 g k^2 + f_V^2}, \quad (58)$$

которое описывает инерционно-гравитационные волны в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости. Магнитофизические волны не имеют аналога в динамике нейтральной жидкости.

Линейным решением системы (45)–(49) в приближении стандартной β -плоскости на фоне стационарного решения с внешним вертикальным магнитным полем (54) является дисперсионное соотношение в следующем виде:

$$\omega^4 - \omega^2 \left(2 \frac{B_0^2}{l_0^2} + f_0^2 + k^2 a_0^2 g \right) - \omega k_x a_0^2 g \beta + \frac{B_0^2}{l_0^2} \left(k^2 a_0^2 g + \frac{B_0^2}{l_0^2} \right) = 0. \quad (59)$$

В высокочастотном пределе решением уравнения являются магнитные инерционно-гравитационные волны с дисперсионным соотношением:

$$\tilde{\omega}_{MIG_V} = \pm \sqrt{2 \frac{B_0^2}{l_0^2} + f_0^2 + k^2 a_0^2 g}, \quad (60)$$

а в низкочастотном пределе — волны магнито-Россби с дисперсионным соотношением

$$\tilde{\omega}_{MR_V} = \frac{B_0^2}{l_0^2} \left(k^2 a_0^2 g + \frac{B_0^2}{l_0^2} \right) (a_0^2 g k_x \beta)^{-1}. \quad (61)$$

Рассмотрим подробнее выражения (56), (57), (60), (61). Заметим, что при условии малости высоты слоя по сравнению с характерной высотой H_p , на которой проявляется сжимаемость, переменная l_0 переходит в высоту слоя h_0 и дисперсионные соотношения переходят в аналогичные соотношения для несжимаемой плазмы (10), (11), (15), (16). Сравнивая дисперсионные соотношения для магнитных инерционно-гравитационных (56), магнитофизических волн (57) и волн магнито-Россби (61) в сжимаемой среде с несжимаемым случаем (10), (11), заметим, что дисперсионные соотношения совпадают за тем исключением, что слагаемое с внешним магнитным полем $(B_0/h_0)^2$ переходит в $(B_0/l_0)^2$, а также выражение для квадрата скорости слабых возмущений gh изменяется на $a_0^2 g$. Данные отличия в общем случае приводят к изменению групповой скорости магнитных инерционно-гравитационных и магнитофизических волн. Сжимаемость приводит к изменению кривизны дисперсионных поверхностей, при этом их общая форма остается аналогичной случаю несжимаемой плазмы [48].

2.3.2. Волны в астрофизической плазме в горизонтальном магнитном поле. В отсутствие внешнего вертикального магнитного поля линейными решениями системы (45)–(49) в приближении стандартной f -плоскости на фоне стационара (55) являются магнитные инерционно-гравитационные волны

$$\tilde{\omega}_{MIG_h} = \pm \sqrt{\frac{a_0^2 g k^2}{2} + \frac{f_V^2}{2} + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2} + \frac{1}{2} \sqrt{(f_V^2 + a_0^2 g k^2)^2 + 4 f_V^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2} \quad (62)$$

и магнитофизические волны

$$\tilde{\omega}_{MS_h} = \pm \sqrt{\frac{a_0^2 g k^2}{2} + \frac{f_V^2}{2} + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2} - \frac{1}{2} \sqrt{(f_V^2 + a_0^2 g k^2)^2 + 4 f_V^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2}. \quad (63)$$

В случае отсутствия магнитного поля в системе уравнение (62) сводится к уравнению (58), которое описывает инерционно-гравитационные волны в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимае-

мости. Магнитофизические волны не имеют аналога в динамике нейтральной жидкости.

Линейным решением системы (45)–(49) в приближении стандартной β -плоскости на фоне

стационарного решения с горизонтальным магнитным полем (54) является дисперсионное соотношение в следующем виде:

$$\omega^4 - \omega^2 (2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + f_0^2 + k^2 a_0^2 g) - \omega k_x a_0^2 g \beta + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 (k^2 a_0^2 g + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2) = 0. \quad (64)$$

В высокочастотном пределе решением уравнения являются магнитные инерционно-гравитационные волны с дисперсионным соотношением

$$\tilde{\omega}_{MIG_v} = \pm \sqrt{2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + f_0^2 + k^2 a_0^2 g}, \quad (65)$$

а в низкочастотном пределе — волны магнито-Россби с дисперсионным соотношением

$$\tilde{\omega}_{MR_v} = \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 (k^2 a_0^2 g + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2)}{a_0^2 g k_x \beta}. \quad (66)$$

Рассмотрим подробнее выражения (62), (63), (65), (66). Заметим, что при условии малости высоты слоя по сравнению с характерной высотой H_p , на которой проявляется сжимаемость, переменная l_0 переходит в высоту слоя h_0 и дисперсионные соотношения переходят в аналогичные соотношения для несжимаемой плазмы (17), (18), (20), (21). Сравнивая дисперсионные соотношения для магнитных инерционно-гравитационных (62), магнитострофических волн (63) и волн магнито-Россби (66) в сжимаемой среде с несжимаемым случаем (17), (18), заметим, что дисперсионные соотношения совпадают за тем исключением, что слагаемое с внешним магнитным полем $(B_0/h_0)^2$ переходит в $(B_0/l_0)^2$, а также выражение для квадрата скорости слабых возмущений gh изменяется на $a_0^2 g$. Данные отличия в общем случае приводят к изменению групповой скорости магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн. Сжимаемость приводит к изменению кривизны дисперсионных поверхностей, при этом их общая форма остается аналогичной случаю несжимаемой плазмы [48].

Общий вид дисперсионных кривых для волн во вращающихся течениях плазмы в приближении мелкой воды с учетом крупномасштабной сжимаемости представлен на рис. 3а, б для магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном магнитном поле; на рис. 3в, г для магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби во внешнем вертикальном и в горизонтальном магнитных полях.

2.3.3. Выводы. В разделе исследованы эффекты сжимаемости в магнитной гидродинамике вращающейся астрофизической плазмы в приближении мелкой воды. В отличие от известных магнитогидродинамических уравнений в при-

ближении мелкой воды с учетом сжимаемости мы предлагаем обобщение такой системы на случай тонкого слоя астрофизической плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле. Отметим, что учет вертикального магнитного поля существенно расширяет возможности применения приближения мелкой воды в задачах плазменной астрофизики. Упрощенная система магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды, используемая в настоящей работе, получается из исходных уравнений магнитной гидродинамики сжимаемой плазмы, получена усреднением по глубине в предположении гидростатичности распределения давлений и малости толщины слоя по отношению к характерному горизонтальному линейному размеру задачи. В результате в этом приближении фильтруются звуковые волны и учитывается зависимость плотности от давления на крупных масштабах, описывающая эффекты статической сжимаемости. На основе предложенной системы уравнений получены новые магнитогидродинамические уравнения мелкой воды для сферических течений в приближении β -плоскости с учетом крупномасштабной сжимаемости. Развита теория линейных волн на основе предложенных уравнений. В случае уравнений на f -плоскости полученные дисперсионные соотношения для магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн существенным образом зависят как от высоты свободной поверхности, так и от величины, характеризующей степень изменения плотности вследствие статической сжимаемости, а также от термодинамических характеристик плазмы. Аналогично в случае уравнений на β -плоскости дисперсионные соотношения для магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном магнитном поле зависят как от высоты свободной поверхности, так и от величины, характеризующей степень изменения плотности вследствие статической сжимаемости, а также от термодинамических характеристик плазмы. Кроме того, показано, что скорость распространения слабых возмущений в обеих системах также зависит от степени изменения плотности. Таким образом, исследование линейных волн в магнитной гидродинамике вращающейся плазмы с учетом крупномасштабной сжимаемости показывает зависимость групповых скоростей магнитных инерционно-гравитационных волн, магнитострофических волн и волн магнито-Россби от степени сжимаемости плазмы.

3. ЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ

В разделе 2.2 приведен учет стратификации при исследовании волновых процессов во вращающейся плазме в рамках магнитогидродинами-

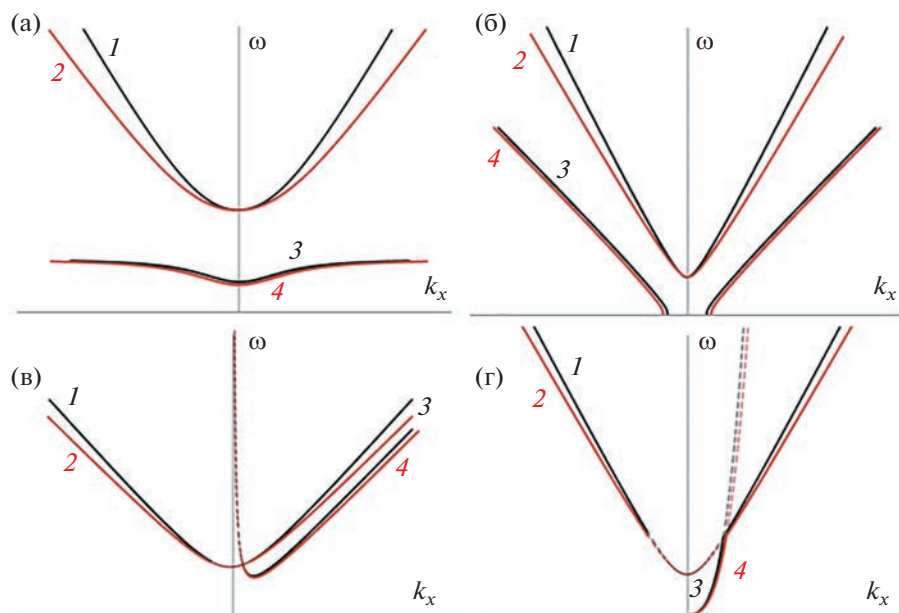


Рис. 3. Дисперсионные кривые для волн в однослойной мелкой воде на стандартной f -плоскости во внешнем вертикальном магнитном поле (а): магнитная инерционно-гравитационная волна без учета сжимаемости $1 - \omega_{MIG_{V_1}}$ и с учетом крупномасштабной сжимаемости $2 - \tilde{\omega}_{MIG_V}$, магнитоострофическая волна без учета сжимаемости $3 - \omega_{MS_{V_1}}$ и с учетом крупномасштабной сжимаемости $4 - \tilde{\omega}_{MS_V}$; на стандартной f -плоскости в горизонтальном магнитном поле (б): магнитная инерционно-гравитационная волна без учета сжимаемости $1 - \omega_{MIG_{h_1}}$ и с учетом крупномасштабной сжимаемости $2 - \tilde{\omega}_{MIG_h}$, магнитоострофическая волна без учета сжимаемости $3 - \omega_{MS_{h_1}}$ и с учетом крупномасштабной сжимаемости $4 - \tilde{\omega}_{MS_h}$; на стандартной β -плоскости во внешнем вертикальном магнитном поле (в): магнитная инерционно-гравитационная волна без учета сжимаемости $1 - \omega_{MIG'_{V_1}}$ и с учетом крупномасштабной сжимаемости $2 - \tilde{\omega}_{MIG'_V}$, волна магнито-Росси без учета сжимаемости $3 - \omega_{MR_{V_1}}$ и с учетом крупномасштабной сжимаемости $4 - \tilde{\omega}_{MR_V}$; на стандартной β -плоскости в горизонтальном магнитном поле (г): магнитная инерционно-гравитационная волна без учета сжимаемости $1 - \omega_{MIG'_{h_1}}$ и с учетом крупномасштабной сжимаемости $2 - \tilde{\omega}_{MIG'_h}$, волна магнито-Росси без учета сжимаемости $3 - \omega_{MR_{h_1}}$ и с учетом крупномасштабной сжимаемости $4 - \tilde{\omega}_{MR_h}$.

ческих уравнений мелкой воды во внешнем магнитном поле. В разделе 2.3 приведен учет крупномасштабной сжимаемости при исследовании волновых процессов во вращающейся плазме в рамках магнитогидродинамических уравнений мелкой воды во внешнем магнитном поле. Однако магнитогидродинамическая теория мелкой воды является двумерной, что исключает вертикальные ускорения и учет вертикального изменения горизонтальных составляющих магнитного поля и поля скорости. Кроме того, в двумерных уравнениях невозможно исследование таких важных для астрофизической плазмы течений, как течения с непрерывной стратификацией. Таким образом, для расширения области исследования волновых процессов вращающейся плазмы мы переходим к приближениям для трехмерных течений. В разделе 3.1 рассматриваются трехмер-

ные течения в рамках магнитогидродинамических уравнений несжимаемой стратифицированной вращающейся плазмы в приближении Буссинеска. В разделе 3.2 рассматриваются трехмерные течения в рамках магнитогидродинамических уравнений сжимаемой стратифицированной плазмы в неупругом приближении. Отметим, что трехмерность рассматриваемых систем уравнений позволяет произвести учет горизонтальной составляющей вектора Кориолиса, что особенно важно при исследовании экваториальных течений. Таким образом сила Кориолиса рассматривается не только в приближении стандартных f - и β -плоскостей, но и в приближении нестандартных f - и β -плоскостей, в которых вектор Кориолиса содержит как вертикальную компоненту вдоль z , так и горизонтальную компоненту вдоль y .

3.1. Приближение Буссинеска для течений вращающейся стратифицированной плазмы

Приведен обзор трехмерных магнитогидродинамических течений вращающейся устойчиво-стратифицированной плазмы. Трехмерность течений позволяет рассматривать волновые процессы в устойчиво-стратифицированном слое плазмы с непрерывным линейным профилем плотности. Как хорошо известно в геофизической гидродинамике стратифицированных вращающихся течений возникают инерционно-гравитационные волны вследствие двух восстанавливающих механизмов — вращения и стратификации. В рассматриваемом здесь случае магнитных течений волновая картина гораздо богаче вследствие наличия дополнительной восстанавливающей силы, а именно силы Лоренца, наряду с силой Кориолиса и силой плавучести. Кроме того учет трехмерности позволяет детально исследовать волновые процессы в магнитогидродинамике стратифицированной плазмы с учетом горизонтальной составляющей силы Кориолиса, что является особенно принципиальным при изучении экваториальных течений. Отметим, что волны Россби обнаружены именно в экваториальной зоне Солнца [32, 38]. Для исследования волн в трехмерных магнитогидродинамических течениях вращающейся стратифицированной плазмы используется трехмерная магнитогидродинамическая система в приближении Буссинеска. Уравнения записаны в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вместе со слоем плазмы со скоростью Ω :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{f} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\tilde{\rho}_0} \nabla p + \frac{\rho \mathbf{g}}{\tilde{\rho}_0} - \frac{1}{4\pi\tilde{\rho}_0} \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{b}), \quad (67)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (68)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)_h \rho = -\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} u_z, \quad (69)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0, \quad (70)$$

где $\mathbf{u}$ — вектор скорости плазмы, $\mathbf{b}$ — вектор напряженности магнитного поля в плазме, $\mathbf{f}$ — вектор Кориолиса, ρ — плотность плазмы, $\tilde{\rho}_0$ — плотность при равновесной температуре, $\bar{\rho}(z)$ — начальный профиль плотности, обеспечивающий устойчивую стратификацию, p — давление, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$. Первое уравнение системы — уравнение изменения импульса, второе — уравнение переноса магнитного поля, третье — уравнение изменения плотности, четвертое — условие бездивергентности поля скоростей. Введем следующие

переобозначения: $\rho' = \rho g / \tilde{\rho}_0$, $P = p / \tilde{\rho}_0$, $\mathbf{B} = \mathbf{b} / \sqrt{4\pi\tilde{\rho}_0}$.

Система (67)–(70) изучается в четырех различных приближениях для силы Кориолиса:

- *приближение стандартной f -плоскости*, в котором вектор Кориолиса $\mathbf{f}$ предполагается постоянным и направленным строго по вертикали $\mathbf{f} = (0, 0, f_V)$;

- *приближение нестандартной f -плоскости* [55, 79], в котором вектор Кориолиса $\mathbf{f}$ предполагается постоянным и отклоненным от вертикали в плоскость (y, z) , $\mathbf{f} = (0, f_H, f_V)$;

- *приближение стандартной β -плоскости*, в котором предполагается, что вектор Кориолиса $\mathbf{f} = (0, 0, f_z)$ направлен по вертикали и слабо меняется при малых изменениях широты θ . В таком случае вертикальная компонента вектора раскладывается в ряд $f_z \approx f_V + \beta y$, где $f_V = 2\Omega \sin \theta_0$, $\beta = \partial f_z / \partial y$, $\beta y \ll f_V$;

- *приближение нестандартной β -плоскости* [55, 79], в котором предполагается, что вектор Кориолиса $\mathbf{f} = (0, f_y, f_z)$ расположен в плоскости (y, z) и слабо меняется при малых изменениях широты θ . В таком случае вертикальная и горизонтальная компоненты вектора раскладываются в ряд $f_z \approx f_V + \beta y$, $f_y \approx f_H + \gamma y$, где $f_V = 2\Omega \sin \theta_0$, $\beta = \partial f_z / \partial y$, $\beta y \ll f_V$, $f_H = 2\Omega \cos \theta_0$, $\gamma = \partial f_y / \partial y$, $\gamma y \ll f_H$.

Система (67)–(70) имеет стационарное решение в виде покоящегося слоя плазмы с постоянным магнитным полем и линейным профилем плотности

$$u_{x0} = u_{y0} = u_{z0} = 0, \quad \mathbf{B}_0 = (B_{x0}, B_{y0}, B_{z0}) = \text{const}, \quad (71)$$

$$P_0 : \partial_z P_0 = -\bar{\rho}(z), \quad \bar{\rho}(z) = N^2 z \frac{\tilde{\rho}_0}{g},$$

где N^2 — квадрат частоты Брента–Вайсяля для несжимаемых течений.

3.1.1. Волны в астрофизической плазме без учета сферичности. В приближении стандартной f -плоскости решением системы (67)–(70), линеаризованной на фоне стационара (71), является дисперсионное соотношение в следующем виде:

$$\omega^4 - \omega^2 \left(f_V^2 \frac{k_z^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right) + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} \right) = 0, \quad (72)$$

которое описывает волны во вращающейся стратифицированной плазме в приближении Буссинеска. Его решением являются трехмерные магнитные инерционно-гравитационные волны с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mig_{3D}} = \pm \left[\frac{1}{2} \left(f_V^2 \frac{k_z^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right) + \frac{1}{2k^2} \sqrt{f_V^4 k_z^4 + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 f_V^2 k_z^2 k^2 - 2f_V^2 k_z^2 N^2 k_h^2 + N^4 k_h^4} \right]^{1/2} \quad (73)$$

и трехмерные магнитострофические волны с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mstr_{3D}} = \pm \left[\frac{1}{2} \left(f_V^2 \frac{k_z^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right) - \frac{1}{2k^2} \sqrt{f_V^4 k_z^4 + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 f_V^2 k_z^2 k^2 - 2f_V^2 k_z^2 N^2 k_h^2 + N^4 k_h^4} \right]^{1/2}. \quad (74)$$

В выражениях (73), (74) знак “+” соответствует волне, распространяющейся по направлению волнового вектора $\mathbf{k}$, а знак “−” — волне, распространяющейся в направлении, противоположном $\mathbf{k}$. Восстанавливающими силами найденных волн являются сила Кориолиса, сила Лоренца и сила плавучести. Эффекты стратификации в дисперсионных соотношениях (73), (74) представлены слагаемыми с частотой Брэнта–Вайсяля N^2 . Отметим, что трехмерные магнитострофические волны (74) не имеют аналога в динамике нейтральной жидкости, тогда как дисперсионное соотношение (73) в отсутствие магнитного поля описывает гидродинамические инерционно-гравитационные волны. Для инерционно-гравитационных волн в отсутствие магнитного поля выполняется условие перпендикулярности групповой скорости волновому вектору [119]. Исследование дисперсионного соотношения выявило, что присутствие магнитного поля (73) это условие нарушает, $\mathbf{v}_{gr_{mig_{3D}}} \cdot \mathbf{k} \neq 0$.

В частном случае горизонтальных возмущений ($\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0)$) дисперсионное уравнение (72) принимает вид

$$\omega^4 - \omega^2 (2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N^2) + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 ((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N^2) = 0 \quad (75)$$

и имеет решение в виде волн Альфвена, динамика которых определяется силой Лоренца

$$\omega_A = \pm (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h, \quad (76)$$

и магнитогравитационных волн, динамика которых определяется силой плавучести и силой Лоренца

$$\omega_{mgr} = \pm \sqrt{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N^2}. \quad (77)$$

Знак “+” соответствует волнам, распространяющимся в направлении $\mathbf{k}_h$, а знак “−” — волнам, распространяющимся в направлении, противоположном $\mathbf{k}_h$. Волны Альфвена (76) представляют частный тип магнитных инерционно-гравитаци-

онных волн, распространяющихся в горизонтальной плоскости. Магнитогравитационные волны (77) представляют частный тип магнитострофических волн, распространяющихся по горизонтальной плоскости. В отсутствие магнитного поля ($\mathbf{B}_0 = 0$) их дисперсионное соотношение описывает гравитационные волны с частотой Брэнта–Вайсяля $\omega_{gr} = \pm \sqrt{-N^2}$.

В частном случае вертикальных возмущений в системе ($\mathbf{k} = (0, 0, k_z)$) дисперсионное уравнение (72) принимает вид

$$\omega^4 - \omega^2 (f_V^2 - 2B_{0z}^2 k_z^2) + B_{0z}^4 k_z^4 = 0 \quad (78)$$

и имеет решение в виде двух магнитных инерционных волн, динамика которых определяется силой Лоренца и силой Кориолиса:

$$\omega_{z1} = \pm \sqrt{\frac{f_V^2}{2} + B_{0z}^2 k_z^2} + f_V \sqrt{\frac{f_V^2}{4} + B_{0z}^2 k_z^2}, \quad (79)$$

$$\omega_{z2} = \pm \sqrt{\frac{f_V^2}{2} + B_{0z}^2 k_z^2} - f_V \sqrt{\frac{f_V^2}{4} + B_{0z}^2 k_z^2}. \quad (80)$$

Знак “+” соответствует волнам, распространяющимся в направлении k_z , а знак “−” — волнам, распространяющимся в направлении, противоположном k_z . Данный тип волн является резонансными волнами в модели мелкой воды в горизонтальном магнитном поле (17), (18). Волны с частотой ω_{z1} (79) представляют частный тип магнитных инерционно-гравитационных волн, распространяющихся только вдоль вертикальной компоненты волнового вектора. В отсутствие магнитного поля ($\mathbf{B}_0 = 0$) их дисперсионное соотношение (79) принимает вид $\omega = \pm f_0$. Волны с частотой ω_{z2} (80) представляют частный тип магнитострофических волн, распространяющихся только вдоль вертикальной компоненты волнового вектора. В отсутствие магнитного поля ($\mathbf{B}_0 = 0$) их дисперсионное соотношение обращается в нуль.

В приближении нестандартной f -плоскости решением системы (67)–(70), линеаризованной на фоне стационара (71), является дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{(f_H k_y + f_V k_z)^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right) + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} \right) = 0. \quad (81)$$

Решениями уравнения (81) являются дисперсионные соотношения, аналогичные полученным в приближении f -плоскости (73), (74), описывающие два типа волн: трехмерные инерционно-гравитационные волны и трехмерные магнитострофические волны. Дисперсионное соотношение для трехмерных магнитных инерционно-гравитационных волн в приближении Буссинеска на нестандартной f -плоскости имеет следующий вид:

$$\omega_{mig_{3D}} = \pm \left[\frac{1}{2} \left(\frac{(f_H k_y + f_V k_z)^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right) + \frac{1}{2k^2} \sqrt{(f_H k_y + f_V k_z)^4 + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 (f_H k_y + f_V k_z)^2 k^2 - 2(f_H k_y + f_V k_z)^2 N^2 k_h^2 + N^4 k_h^4} \right]^{1/2}. \quad (82)$$

Дисперсионное соотношение для трехмерных магнитострофических волн на нестандартной f -плоскости имеет следующий вид:

$$\omega_{mstr_{3D}} = \pm \left[\frac{1}{2} \left(\frac{(f_H k_y + f_V k_z)^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right) - \frac{1}{2k^2} \sqrt{(f_H k_y + f_V k_z)^4 + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 (f_H k_y + f_V k_z)^2 k^2 - 2(f_H k_y + f_V k_z)^2 N^2 k_h^2 + N^4 k_h^4} \right]^{1/2}. \quad (83)$$

В частном случае вертикальных возмущений в системе $(\mathbf{k} = (0, 0, k_z))$ дисперсионное уравнение (81) принимает вид аналогичный дисперсионному уравнению на f -плоскости (78) и имеет решение в виде двух магнитных инерционных волн, динамика которых определяется силой Лоренца и силой Кориолиса (79), (80).

В частном случае горизонтальных возмущений в системе $(\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0))$ дисперсионное уравне-

ние (81) принимает вид

$$\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{f_H^2 k_y^2}{k_h^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N^2 \right) + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 \left((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N^2 \right) = 0 \quad (84)$$

и имеет решение в виде двумерных магнитных инерционно-гравитационных волн с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mig_{2D}} = \pm \sqrt{\frac{f_H^2 k_y^2}{2k_h^2} - \frac{N^2}{2} + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 + \sqrt{\frac{f_H^2 k_y^2}{4k_h^2} \left(\frac{f_H^2 k_y^2}{k_h^2} - 2N^2 + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 \right) + \frac{N^4}{4}}}, \quad (85)$$

и двумерных магнитострофических волн с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mstr_{2D}} = \pm \sqrt{\frac{f_H^2 k_y^2}{2k_h^2} - \frac{N^2}{2} + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - \sqrt{\frac{f_H^2 k_y^2}{4k_h^2} \left(\frac{f_H^2 k_y^2}{k_h^2} - 2N^2 + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 \right) + \frac{N^4}{4}}}. \quad (86)$$

Знак “+” соответствует волнам, распространяющимся в направлении $\mathbf{k}_h$, а знак “–” — волнам, распространяющимся в направлении, противоположном $\mathbf{k}_h$. Динамика волн определяется силами Лоренца, Кориолиса и плавучести. В отличие от стандартной f -плоскости, в силу наличия горизонтальной составляющей вектора Кориолиса

f_H в частном случае горизонтальных течений динамика волн остается прежней. Трехмерные магнитные инерционно-гравитационные волны (73) и трехмерные магнитострофические волны (74) переходят в свои двумерные аналоги. В отсутствие магнитного поля дисперсионное соотношение (85) переходит в $\omega = \pm \sqrt{f_H^2 k_y^2 / k_h^2 - N^2}$,

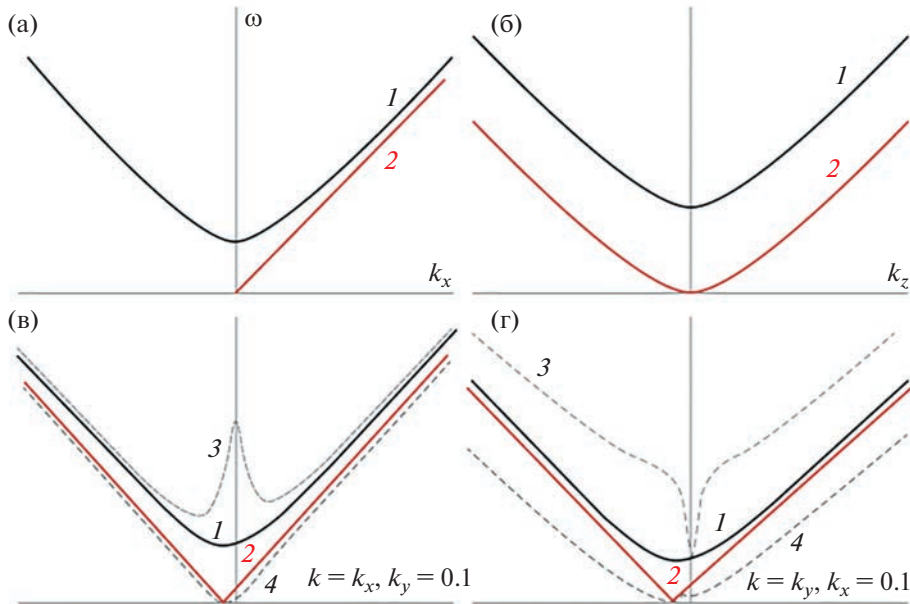


Рис. 4. Дисперсионные кривые волн на стандартной f -плоскости в приближении Буссинеска: 1 – магнитогравитационная волна $\omega_{mgr}(k_x)$, 2 – волна Альфвена $\omega_A(k_x)$ (а); 1 – магнитная инерционно-гравитационная волна $\omega_{g_1}(k_z)$, 2 – магнитная инерционно-гравитационная волна $\omega_{g_2}(k_z)$ (б). Дисперсионные кривые двумерных магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн на нестандартной стандартной f -плоскости в приближении Буссинеска: 1 – магнитная инерционно-гравитационная волна $\omega_{mig_{2D}}(k_x, 0.1)$, 2 – магнитострофическая волна $\omega_{mstr_{2D}}(k_x, 0.1)$, 3 – магнитная инерционно-гравитационная волна $\omega_{mig_{2D}}(k_x, 0.1)$ при $f_H \gg 1$, 4 – магнитострофическая волна $\omega_{mstr_{2D}}(k_x, 0.1)$ при $f_H \gg 1$ (в); 1 – магнитная инерционно-гравитационная волна $\omega_{mig_{2D}}(0.1, k_y)$, 2 – магнитострофическая волна $\omega_{mstr_{2D}}(0.1, k_y)$, 3 – магнитная инерционно-гравитационная волна $\omega_{mig_{2D}}(0.1, k_y)$ при $f_H \gg 1$, 4 – магнитострофическая волна $\omega_{mstr_{2D}}(0.1, k_y)$ при $f_H \gg 1$ (г).

описывающее двумерные инерционно-гравитационные волны [119]. Двумерные магнитострофические волны не имеют аналога в динамике нейтральной жидкости. Отметим, что порядок величины горизонтальной составляющей силы Кориолиса f_H влияет на динамику волн. Найденные отличия в дисперсионных кривых, связанные с горизонтальной компонентой f_H в нестандартном приближении f -плоскости, существенно влияют на трехволновые взаимодействия.

Общий вид дисперсионных кривых для волн на стандартной f -плоскости при $\omega > 0$, $k = k_x$ представлен на рис. 4а, при $\omega > 0$, $k = k_z$ – на рис. 4б. Общий вид дисперсионных кривых для волн на нестандартной f -плоскости при $\omega(k_x) > 0$, $k_y = \text{const}$ представлен на рис. 4в, при $\omega(k_y) > 0$, $k_x = \text{const}$ – на рис. 4г.

3.1.2 Волны в астрофизической плазме с учетом сферичности. В приближении стандартной β -плоскости решением системы (67)–(70), линеаризо-

ванной на фоне стационара (71), является дисперсионное соотношение в следующем виде:

$$k^2 \omega^4 + \beta k_x \omega^3 - \omega^2 [f_0^2 k_z^2 - N^2 k_h^2 + 2k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2] - \beta k_x \omega [(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2] + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 [k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 k_h^2] = 0. \quad (87)$$

Рассмотрим распространение волн в плоскости (k_x, k_y) при условии $k_z \ll k$. Дисперсионное соотношение в данном приближении имеет вид

$$(\omega^2 - N^2 + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2) \left(\omega^2 + \omega \frac{\beta k_x}{k_h^2} - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 \right) = 0 \quad (88)$$

и описывает три типа волн. Первый тип волн – магнитогравитационные волны, аналогичные волнам на f -плоскости (77).

Второй тип волн – волны магнито-Россби с дисперсионным соотношением [117]

$$\omega_{MR_1} = -\frac{\beta k_x}{2k_h^2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta^2 k_x^2}{k_h^4} + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2}, \quad (89)$$

которое, в случае отсутствия магнитного поля, переходит в дисперсионное соотношение для стандартной гидродинамической волны Россби [54]

$$\omega_R = -\frac{\beta k_x}{k_h^2}. \quad (90)$$

Третий тип волн — волны магнито-Россби с дисперсионным соотношением

$$\omega_{MR_2} = -\frac{\beta k_x}{2k_h^2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta^2 k_x^2}{k_h^4} + 4(b_0 \cdot k)^2}, \quad (91)$$

которое обращается в ноль в отсутствии магнитного поля в системе.

Динамика волн магнито-Россби определяется силой Кориолиса и силой Лоренца. Оба типа волн магнито-Россби (89), (91) при распространении строго по k_y вырождаются в альфвеновские волны с дисперсионным соотношением

$$\omega_{A_y} = \pm B_{0y} k_y, \quad (92)$$

аналогичные волнам Альфвена на f -плоскости при $k = k_y$ (76).

Отметим, что в низкочастотном пределе уравнение (87) имеет решение в виде волны магнито-Россби, динамику которой определяют не только сила Кориолиса и Лоренца, но и сила плавучести:

$$\omega_{MR_{3D}} = \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 (k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 k_h^2)}{\beta k_x ((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2)}. \quad (93)$$

Дисперсионное соотношение (93) переходит в дисперсионное соотношение для волны магнито-Россби в двумерных магнитогидродинамических течениях вращающейся плазмы на β -плоскости [54] при $k_z \ll k$:

$$\omega = \frac{k_h^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2}{\beta k_x}. \quad (94)$$

Рассмотрим переход в дисперсионном соотношении (87) к случаю гидродинамики нейтральной вращающейся жидкости. В отсутствие магнитного поля ($\mathbf{B}_0 = 0$) уравнение (87) принимает вид

$$\omega^3 + \beta \frac{k_x}{k^2} \omega^2 - \omega \left(f_0^2 \frac{k_z^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} \right) + N^2 \beta \frac{k_x}{k^2} = 0. \quad (95)$$

Заметим, что для решения в низкочастотном пределе можно получить выражение для частоты трехмерной гидродинамической волны Россби в приближении Буссинеска

$$\omega_{R_{3D}} = \frac{N^2 \beta k_x}{f_0^2 k_z^2 - N^2 k_h^2}, \quad (96)$$

которое переходит, при условии $k_z \ll k$, в стандартную гидродинамическую волну Россби (90). Динамика трехмерной волны Россби (96) опреде-

ляется не только силой Кориолиса, но и силой плавучести.

В приближении нестандартной β -плоскости решением системы (67)–(70), линеаризованной на фоне стационара (71), является дисперсионное соотношение в следующем виде:

$$\begin{aligned} & k^2 \omega^4 + k_x \omega^3 \left[\beta - \gamma \frac{k_z}{k_y} \right] - \\ & - \omega^2 \left[(f_V k_z + f_H k_y)^2 - N^2 k_h^2 + 2k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right] - \\ & - k_x \omega \left[(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left(\beta - \gamma \frac{k_z}{k_y} \right) - \beta N^2 \right] + \\ & + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left[k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 k_h^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (97)$$

Рассмотрим распространение волн в плоскости (k_x, k_y) при условии $k_z \ll k$. Дисперсионное соотношение в данном приближении имеет вид

$$\begin{aligned} & \omega^4 + \omega^3 \frac{\beta k_x}{k_h^2} - \omega^2 \left[\frac{f_H^2 k_y^2}{k_h^2} - N^2 + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 \right] - \\ & - \omega \frac{\beta k_x}{k_h^2} \left[(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N^2 \right] + \\ & + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 \left[(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (98)$$

При $k = k_y$ уравнение (98) описывает два типа волн, аналогичных волнам на нестандартной f -плоскости: одномерные магнитные инерционно-гравитационные волны

$$\begin{aligned} & \omega_{mig_y} = \\ & = \pm \sqrt{\frac{f_H^2}{2} - \frac{N^2}{2} + B_{0y}^2 k_y^2 + \sqrt{\left(\frac{f_H^2}{2} - \frac{N^2}{2} \right)^2 + f_H^2 B_{0y}^2 k_y^2}} \end{aligned} \quad (99)$$

и одномерные магнитострофические волны

$$\begin{aligned} & \omega_{mstr_y} = \\ & = \pm \sqrt{\frac{f_H^2}{2} - \frac{N^2}{2} + B_{0y}^2 k_y^2 - \sqrt{\left(\frac{f_H^2}{2} - \frac{N^2}{2} \right)^2 + f_H^2 B_{0y}^2 k_y^2}}. \end{aligned} \quad (100)$$

Важное отличие, связанное с нестандартным приближением β -плоскости, которые мы можем получить аналитически — низкочастотный предел в уравнении (97), который дает новое выражение для волны магнито-Россби:

$$\omega_{MR'_{3D}} = \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left[k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 k_h^2 \right]}{k_x \left[(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left(\beta - \gamma \frac{k_z}{k_y} \right) - \beta N^2 \right]}. \quad (101)$$

Выражение (101), так же как и выражение (93) описывает волны магнито-Россби, динамика которых определяется не только силами Кориолиса

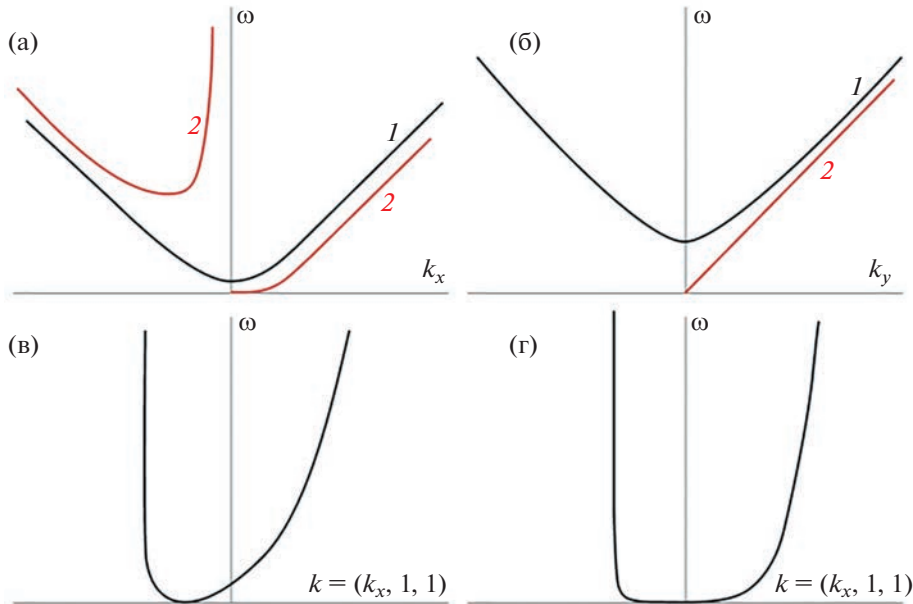


Рис. 5. Дисперсионные кривые волн на стандартной β -плоскости в приближении Буссинеска: 1 – магнитогравитационная волна $\omega_{mgr}(k_x)$, 2 – волна магнито-Россби $\omega_{MR_1}(k_x)$ (а); 1 – магнитогравитационная волна $\omega_{mgr}(k_y)$, 2 – волна Альфвена $\omega_A(k_y)$ (б). Дисперсионные кривые низкочастотных волн магнито-Россби на стандартной β -плоскости $\omega_{MR_{3D}}(k_x, 1, 1)$ (в) и на нестандартной β -плоскости $\omega_{MR_{3D}}(k_x, 1, 1)$ (г).

и Лоренца, но и силой плавучести, а при $k_z \ll k$ сводится к выражению аналогичному полученному в работах по исследованию магнитогидродинамических течений вращающейся плазмы на β -плоскости в двумерной магнитогидродинамике [54].

Рассмотрим переход в дисперсионном соотношении (97) к случаю вращающейся нейтральной жидкости. В отсутствие магнитного поля ($\mathbf{B}_0 = 0$) уравнение (97) принимает вид

$$k^2 \omega^3 + k_x \omega^2 \left(\beta - \gamma \frac{k_z}{k_y} \right) - \omega \left[(f_V k_y + f_H k_z)^2 - N^2 k_h^2 \right] + N^2 \beta k_x = 0. \quad (102)$$

В низкочастотном пределе получаем выражение для частоты трехмерной гидродинамической волны Россби в приближении Буссинеска на нестандартной β -плоскости

$$\omega = \frac{N^2 \beta k_x}{(f_V k_y + f_H k_z)^2 - N^2 k_h^2}, \quad (103)$$

которое переходит, при условии $k_z \ll k$, в стандартную гидродинамическую волну Россби (90).

Общий вид дисперсионных кривых волн на стандартной β -плоскости при $\omega > 0$, $k = k_x$ представлен на рис. 5а, для $k = k_y$ – на рис. 5б. Дисперсионные кривые низкочастотных волн магни-

то-Россби при $\mathbf{k} = (k_x, 1, 1)$ представлены на рис. 5в для стандартной бета-плоскости и на рис. 5г для нестандартной.

3.1.3. Выводы. В разделе обсуждаются магнитогидродинамические волны в стратифицированной вращающейся плазме в поле силы тяжести в приближении Буссинеска (в устойчиво стратифицированном слое с линейным профилем плотности). Для плоских течений на f -плоскости и на нестандартной f -плоскости получены дисперсионные уравнения и найдены решения, описывающие трехмерные магнитные инерционно-гравитационные волны (73), которые в отсутствие магнитного поля переходят в трехмерные инерционно-гравитационные волны в приближении Буссинеска в нейтральной жидкости [119], и трехмерные магнитострофические волны (74), не имеющие аналога в гидродинамике нейтральной жидкости. Найдено, что наличие магнитного поля нарушает условие перпендикулярности групповой скорости инерционно-гравитационных волн волновому вектору. В частном случае распространения трехмерных волн в горизонтальной плоскости ($\mathbf{k} = (k_x, k_y)$) магнитные инерционно-гравитационные волны на f -плоскости превращаются в волны Альфвена (76), магнитострофические волны на f -плоскости превращаются в магнитогравитационные волны (77), магнитные инерционно-гравитационные волны на нестандартной f -плоскости превращаются в дву-

мерные магнитные инерционно-гравитационные волны (85), а магнитострофические волны на нестандартной f -плоскости превращаются в двумерные магнитострофические волны (86). При распространении волн на f -плоскости и на нестандартной f -плоскости только вдоль вертикальной составляющей волнового вектора ($k = k_z$) магнитные инерционно-гравитационные волны превращаются в магнитные волны с частотой ω_{z1} (79), а магнитострофические волны превращаются в волны с частотой ω_{z2} (80), динамика которых определяется только силой Лоренца и силой Кориолиса. Для сферических течений на β -плоскости и на нестандартной β -плоскости также получены дисперсионные уравнения и найдены решения в виде магнито-гравитационных волн (77), одномерных магнитных инерционно-гравитационных волн (99) и одномерных магнитострофических волн (100), аналогичных волнам в плоских течениях, волн магнито-Россби (89), которые в отсутствие магнитного поля превращаются в гидродинамические волны Россби (90), и волн магнито-Россби (91), исчезающих в отсутствие магнитного поля. Отметим, что в низкочастотном пределе найдены дисперсионные соотношения для трехмерных волн магнито-Россби на β -плоскости (93) и трехмерных волн магнито-Россби на нестандартной β -плоскости (101), которые в приближении двумерных потоков ($k_z \ll k$) описывают волны магнито-Россби (94), аналогичные полученным в работах по исследованию магнито-гидродинамических течений вращающейся плазмы в приближении мелкой воды. Кроме того, в приближении вертикальных течений ($k = k_z$) дисперсионные соотношения как на β -плоскости, так и на нестандартной β -плоскости описывают магнитные волны, распространяющиеся вдоль вертикальной составляющей волнового вектора, аналогичные магнитным волнам на f -плоскости и на нестандартной f -плоскости (79), (80).

3.2. Неупругое приближение для течений сжимаемой вращающейся стратифицированной плазмы

Как было отмечено в разделе 2.3, сжимаемость является принципиально важным свойством течений в плазменной астрофизике и характеризует большинство наблюдаемых объектов во Вселенной. Наряду со сжимаемостью, большой интерес представляет исследование влияния стратификации на волновые процессы в течениях астрофизической плазмы. Далее описываются течения вращающейся сжимаемой плазмы с устойчивым непрерывно стратифицированным профилем энтропии в неупругом приближении. Неупругое приближение является одним из приближений,

используемых при исследовании течений с малым числом Маха, в котором характерный временной масштаб изучаемых течений астрофизической плазмы значительно превышает время распространения акустических волн. В неупругом приближении для стратифицированной плазмы элемент жидкости при движении по вертикали меняет свой объем вследствие изменения давления окружающей среды. Изучаются линейные волны в трехмерных течениях сжимаемой стратифицированной вращающейся плазмы в рамках системы магнито-гидродинамических уравнений в неупругом приближении. Вывод системы магнито-гидродинамических уравнений в неупругом приближении основан на методике, предложенной в [120]. В качестве исходной используется полная система магнито-гидродинамических уравнений сжимаемой плазмы при наличии вращения, состоящая из уравнения Навье–Стокса, уравнения для энтропии, уравнения индукции для идеально проводящей плазмы, уравнения непрерывности, уравнения бездивергентности магнитного поля и уравнения состояния. Для удобства анализа производят переход от энтропии S к потенциальной температуре θ , используя их простую зависимость, заданную выражением $dS = c_p d \ln \theta$. В качестве исходного рассматривается состояние равновесия плазмы ($\mathbf{u}_0 = 0$) в постоянном магнитном поле ($\mathbf{b}_0 = \text{const}$) при наличии стратификации $\rho_0(z)$. Возмущение исходного состояния равновесия $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}'$, $p = p_0 + p'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$, $\theta = \theta_0 + \theta'$ такое, что возмущение плотности полагается малым ($\rho' \ll \rho_0$). Кроме того, в уравнение Навье–Стокса вводится новая переменная $\bar{\omega} = p' / \rho_0$ (“reduced pressure”) [120]. Пренебрегая всеми слагаемыми, пропорциональными $\bar{\omega}$, за исключением слагаемых, содержащих градиент $\bar{\omega}$, обеспечивается выполнение условия сохранения энергии в системе, а полученная система уравнений становится удобна для дальнейшего исследования, поскольку не включает в явном виде слагаемых, содержащих возмущение плотности. Система магнито-гидродинамических уравнений в неупругом приближении для сжимаемой стратифицированной вращающейся плазмы имеет вид [88]

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' + [\mathbf{f} \times \mathbf{u}'] = -\nabla \bar{\omega} - \frac{\theta'}{\theta_0} \mathbf{g} - \frac{[\mathbf{b}_0 \times [\nabla \times \mathbf{b}']]}{4\pi\rho_0} - \frac{[\mathbf{b}' \times [\nabla \times \mathbf{b}']]}{4\pi\rho_0}, \quad (104)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \theta_0 + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \theta' = 0, \quad (105)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial t} = [\nabla \times [\mathbf{u}' \times \mathbf{b}_0]] + [\nabla \times [\mathbf{u}' \times \mathbf{b}']], \quad (106)$$

$$\nabla(\rho_0 \cdot \mathbf{u}') = 0, \quad (107)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{b}') = 0, \quad (108)$$

$$\frac{\theta'}{\theta_0} = \frac{p'}{\gamma p_0} - \frac{\rho'}{\rho_0}. \quad (109)$$

Ключевые отличия системы уравнений в неупругом приближении от уравнений в приближении Буссинеска (67)–(70) заключаются в уравнении энергии, записанном для потенциальной температуры, в уравнении непрерывности, включающем в себя исходный стратифицированный профиль плотности и в уравнении состояния, определяющем функцию плотности, как функцию не только давления, но и потенциальной температуры (энтропии). Таким образом, в неупругом приближении изменение давления и плотности жидкости связаны не только с силой плавучести, как в приближении Буссинеска, но и с изменением потенциальной температуры (энтропии).

Система уравнений (104)–(107) допускает аналитическое исследование для стратифицированного слоя плазмы с исходным устойчивым линейным профилем энтропии:

$$\frac{\partial S_0}{\partial z} = \frac{1}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = \text{const}. \quad (110)$$

В этом случае уравнение состояния для невозмущенных величин определяет связь между плотностью и потенциальной температурой следующим образом:

$$\frac{1}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = -\frac{\rho_0 g}{\gamma p_0} - \frac{1}{g \rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \quad (111)$$

Введем понятие частоты Брента–Вайсяля в сжимаемых течениях стратифицированной астрофизической плазмы в следующем виде:

$$N_\theta^2 = -g \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{g \rho_0}{\gamma p_0} \right) = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z}. \quad (112)$$

Учет сжимаемости в выражении (112) приводит к зависимости частоты Брента–Вайсяля не только от плотности, но и от давления. Первое слагаемое в частоте Брента–Вайсяля N_θ^2 для сжимаемых течений в неупругом приближении с линейным профилем энтропии (112) имеет вид, аналогичный частоте Брента–Вайсяля в приближении Буссинеска $N^2 = -(g/\bar{\rho}_0)(\partial \bar{\rho}/\partial z)$, где $\bar{\rho}_0$ – постоянная фоновая плотность, а $\bar{\rho}$ – линейный профиль плотности, обеспечивающий устойчивую стратификацию. В случае сжимаемых течений в неупругом приближении предполагается стратификация исходного профиля плотности $\rho_0(z)$, обеспечивающая линейность и устойчивость профиля энтропии ($\partial_z \ln \rho_0 = \text{const}$). Таким образом для удобства дальнейшего анализа мы

обозначим первое слагаемое в (112) в следующем виде:

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z}. \quad (113)$$

Кроме того введем следующие переобозначения для потенциальной температуры и магнитного поля

$$T' = \frac{\theta'}{\theta_0}, \quad \mathbf{b}_0 = \sqrt{4\pi\rho_0} \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{b}' = \sqrt{4\pi\rho_0} \mathbf{B}'.$$

Магнитогидродинамические уравнения в неупругом приближении (104)–(107) записаны для полной силы Кориолиса. Для дальнейшего исследования используем четыре различных приближения силы Кориолиса, описанные в разделе 3.1: приближение стандартной f -плоскости, приближение нестандартной f -плоскости, приближение стандартной β -плоскости, приближение нестандартной β -плоскости.

3.2.1. Волны в астрофизической плазме без учета сферичности. В приближении стандартной f -плоскости решением системы (104)–(107), линейаризованной на фоне стационарного состояния покоящегося слоя плазмы с постоянным магнитным полем и линейным профилем энтропии (110), является дисперсионное соотношение

$$\begin{aligned} \omega^4 - \left[2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + \frac{f_V^2 k_z^2}{k^2} - \frac{k_h^2 N_\theta^2}{k^2} \right] \omega^2 - \\ - \frac{N^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})}{g k^2} [f_V k_z (B_{y_0} k_x - B_{x_0} k_y)] \omega + \\ + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left[(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - \frac{k_h^2}{k^2} N_\theta^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (114)$$

При условии когда в состоянии покоя магнитное поле направлено вдоль вертикальной координаты z ($\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_{z_0})$), дисперсионное уравнение (114) принимает вид

$$\begin{aligned} \omega^4 - \left[2B_{z_0}^2 k_z^2 + \frac{f_V^2 k_z^2}{k^2} - \frac{k_h^2}{k^2} N_\theta^2 \right] \omega^2 + \\ + B_{z_0}^2 k_z^2 \left[B_{z_0}^2 k_z^2 - \frac{k_h^2}{k^2} N_\theta^2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (115)$$

и его решение включает два типа волн: трехмерные сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны и трехмерные сжимаемые магнитострофические волны. Дисперсионное уравнение для трехмерных сжимаемых магнитных

инерционно-гравитационных волн в неупругом приближении имеет вид

$$\omega_{mig_{B_z}} = \pm \left(B_{z_0}^2 k_z^2 + \frac{f_V^2 k_z^2}{2k^2} - \frac{k_h^2}{2k^2} N_\theta^2 + \right. \\ \left. + \frac{2}{k} \sqrt{\left(\frac{f_V^2 k_z^2}{2} - \frac{k_h^2}{2} N_\theta^2 \right)^2 + B_{z_0}^2 k_z^4 f_V^2} \right)^{1/2}. \quad (116)$$

Выражение (116) имеет вид аналогичный дисперсионному соотношению для трехмерных магнитных инерционно-гравитационных волн в приближении Буссинеска (73). Однако принципиальным отличием является присутствие в (116) частоты Брента–Вайсяля для сжимаемых течений N_θ^2 , которая зависит как от исходного профиля плотности, так и от исходного профиля давления. Таким образом для волн, описываемых дисперсионным соотношением (116) восстанавливаемыми механизмами являются не только вращение, магнитное поле и гравитация, но и сжимаемость. В частном случае отсутствия вертикального магнитного поля ($B_{z_0} = 0$) выражение (116) переходит в дисперсионное соотношение для трехмерных инерционно-гравитационных волн в нейтральной жидкости

$$\omega_{ig3D} = \pm \left(\frac{f_V^2 k_z^2}{k^2} - \frac{k_h^2}{k^2} N_\theta^2 \right)^{1/2}. \quad (117)$$

Дисперсионное соотношение для трехмерных магнитострофических волн в неупругом приближении имеет вид

$$\omega_{mstr_{B_z}} = \pm \left(B_{z_0}^2 k_z^2 + \frac{f_V^2 k_z^2}{2k^2} - \frac{k_h^2}{2k^2} N_\theta^2 - \right. \\ \left. - \frac{2}{k} \sqrt{\left(\frac{f_V^2 k_z^2}{2} - \frac{k_h^2}{2} N_\theta^2 \right)^2 + B_{z_0}^2 k_z^4 f_V^2} \right)^{1/2}. \quad (118)$$

Также как и в случае трехмерных магнитных инерционно-гравитационных волн, трехмерные магнитострофические волны в неупругом приближении описываются дисперсионным уравнением, аналогичным дисперсионному уравнению в приближении Буссинеска (74), с учетом эффектов сжимаемости в частоте Брента–Вайсяля N_θ^2 .

В случае двумерных возмущений, направленных только в горизонтальном направлении ($k_z = 0$), дисперсионное уравнение (114) принимает вид

$$\omega^4 - [2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N_\theta^2] \omega^2 + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 [(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N_\theta^2] = 0 \quad (119)$$

и допускает решение в виде двух типов волн. Первый тип — волны Альфвена с дисперсионным соотношением

$$\omega_A = \pm (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h. \quad (120)$$

Второй тип — двумерные магнито-гравитационные волны в неупругом приближении с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mgr} = \pm \sqrt{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N_\theta^2}. \quad (121)$$

Выражение (121) в отсутствие магнитного поля описывает сжимаемые гравитационные волны в нейтральной жидкости в неупругом приближении с частотой $\omega_{gr} = \pm \sqrt{-N_\theta^2}$.

В противоположном случае одномерных вертикальных возмущений ($k = k_z$) дисперсионное уравнение (114) записывается в виде

$$\omega^4 - [2B_{z_0}^2 k_z^2 + f_V^2] \omega^2 + B_{z_0}^4 k_z^4 = 0 \quad (122)$$

и описывает два типа магнитных инерционной гравитационных волн, аналогичных волнам в приближении Буссинеска (79), (80).

Общий вид дисперсионных кривых сжимаемых волн на стандартной f -плоскости при $\omega > 0$, $k = k_x$ представлен на рис. 6а для магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн и на рис. 6б для волн Альфвена и магнито-гравитационных волн.

В приближении нестандартной f -плоскости решением системы (104)–(107), линеаризованной на фоне стационарного состояния покоящегося слоя плазмы с постоянным магнитным полем и линейным профилем энтропии (110), является дисперсионное соотношение

$$\omega^4 - \frac{N^2 k_x f_H}{g k^2} \omega^3 - \left[2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + \right. \\ \left. + \frac{(f_H k_y + f_V k_z)^2}{k^2} - \frac{k_h^2 N_\theta^2}{k^2} \right] \omega^2 + \frac{N^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})}{g k^2} \times \\ \times [f_H (B_{x_0} k_h^2 + B_{z_0} k_z k_x) - f_V k_z (B_{y_0} k_x - B_{x_0} k_y)] \omega + \\ + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left[(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - \frac{k_h^2}{k^2} N_\theta^2 \right] = 0. \quad (123)$$

Проанализируем решение полученного дисперсионного уравнения в частных случаях. Рассмотрим возмущение, направленное вдоль тороидальной компоненты магнитного поля B_{x_0} . Тогда дисперсионное уравнение (123) принимает вид

$$(\omega^2 - B_{x_0}^2 k_x^2) \left(\omega^2 - \frac{N^2 f_H}{g k_x} \omega - B_{x_0}^2 k_x^2 + N_\theta^2 \right) = 0. \quad (124)$$

В неупругом приближении слагаемое с массовой силой в уравнении на z -компоненту скорости со-

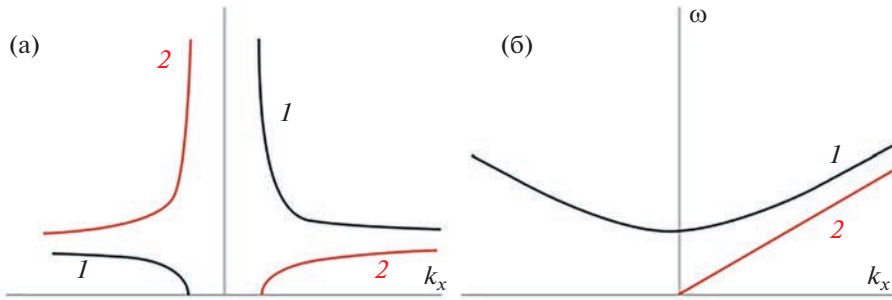


Рис. 6. Дисперсионные кривые волн на стандартной f -плоскости в неупругом приближении: 1 – сжимаемая магнитная инерционно-гравитационная волна $\omega_{mig_{B_z}}$ и 2 – сжимаемая магнитострофическая волна $\omega_{mstr_{B_z}}$ (а); 1 – сжимаемая магнитогравитационная волна ω_{mgr} и 2 – волна Альфвена ω_A (б).

держит потенциальную температуру, зависящую как от плотности, так и от давления. Уравнение непрерывности в неупругом приближении включает в себя исходный профиль плотности, в то время как в приближении Буссинеска является условием бездивергентности поля скоростей. Таким образом в неупругом приближении дисперсионное уравнение волн (123) на нестандартной f -плоскости имеет значительное отличие в выражениях при первой и третьей степени частоты, что в частном случае распространения волн вдоль тороидального магнитного поля приводит к появлению новых типов сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн.

Соотношение (123) описывает три типа волн. Первый тип волн – одномерные волны Альфвена с дисперсионным соотношением

$$\omega_{A_x} = \pm B_{x_0} k_x. \quad (125)$$

Второй тип линейных волн – сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с дисперсионным соотношением в следующем виде:

$$\omega_{mig_{x_1}} = \frac{N^2 f_H}{2gk_x} + \sqrt{\frac{N^4 f_H^2}{4g^2 k_x^2} + B_{x_0}^2 k_x^2 - N_\theta^2}. \quad (126)$$

Выражение (126) значительно отличается от дисперсионного соотношения (116) для сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн, полученных в предыдущем разделе, а также и от дисперсионного соотношения для магнитных инерционно-гравитационных волн в приближении Буссинеска (82). Однако восстанавливающие механизмы для волн, описываемых выражениями (126) и (116), одинаковы. Тем не менее выражение (126) описывает физические эффекты, сопровождающие сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны в неупругом приближении с новым законом дисперсии, восстанавливаемыми механизмами которых являются вращение, гравитация, магнитное поле и сжимаемость. Отметим, что исходный профиль плотности связан непосредственно с горизонтальной со-

ставляющей силы Кориолиса. Такая связь обусловлена учетом эффектов сжимаемости и горизонтальной компоненты вектора Кориолиса, а также распространением волн вдоль тороидального магнитного поля. В предположении отсутствия стратификации плотности ($N^2 = 0$) вклад силы инерции в дисперсионное соотношение (126) исчезает и оно описывает одномерные сжимаемые магнитогравитационные волны в неупругом приближении с частотой:

$$\omega_{mg_{x_1}} = \sqrt{B_{x_0}^2 k_x^2 - N_\theta'^2}, \quad (127)$$

где $N_\theta'^2 = -g^2 \rho_0 / (\gamma p_0)$.

В частном случае отсутствия магнитного поля ($B_{x_0} = 0$) дисперсионное соотношение (126) представимо в виде

$$\omega_{ig_{x_1}} = \frac{N^2 f_H}{2gk_x} + \sqrt{\frac{N^4 f_H^2}{4g^2 k_x^2} - N_\theta^2} \quad (128)$$

и описывает одномерные сжимаемые инерционно-гравитационные волны в нейтральной жидкости. Дисперсионное соотношение (128) в предположении отсутствия стратификации плотности ($N^2 = 0$) описывает сжимаемые гравитационные волны в неупругом приближении с частотой $\omega = \sqrt{-N_\theta'^2}$.

Третий тип волн – сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mig_{x_2}} = \frac{N^2 f_H}{2gk_x} - \sqrt{\frac{N^4 f_H^2}{4g^2 k_x^2} + B_{x_0}^2 k_x^2 - N_\theta^2}, \quad (129)$$

аналогичным полученному выше (126) с точностью до знака перед корнем. В предположении отсутствия стратификации плотности ($N^2 = 0$) данный тип волн переходит в сжимаемые магни-

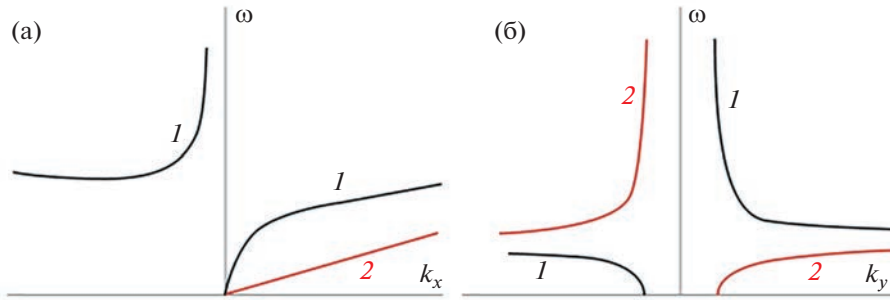


Рис. 7. Дисперсионные кривые волн на нестандартной f -плоскости в неупругом приближении: 1 – сжимаемая магнитная инерционно-гравитационная волна $\omega_{mig_{x_1}}$ и 2 – волна Альфвена ω_{A_x} (а); 1 – сжимаемая магнитная инерционно-гравитационная волна ω_{mig_y} и 2 – сжимаемая магнитострофическая волна ω_{mstr_y} (б).

тогравитационные волны в неупругом приближении с частотой

$$\omega_{mgr_{x_2}} = -\sqrt{B_{x_0}^2 k_x^2 - N_\theta^2}. \quad (130)$$

В частном случае отсутствия магнитного поля ($B_{x_0} = 0$) выражение (129) описывает сжимаемые инерционно-гравитационные волны в нейтральной жидкости с частотой

$$\omega_{ig_{x_2}} = \frac{N^2 f_H}{2gk_x} - \sqrt{\frac{N^4 f_H^2}{4g^2 k_x^2} - N_\theta^2}. \quad (131)$$

В случае полного отсутствия стратификации ($N_\theta^2 = 0$, $N^2 = 0$) оба типа волн (126), (129) переходят в одномерные волны Альфвена с частотой $\omega_{A_x} = \pm B_{x_0} k_x$.

В случае полоидального магнитного поля в состоянии покоя и одномерного возмущения, направленного вдоль магнитного поля, дисперсионное уравнение (123) принимает вид

$$\omega^4 - [2B_{y_0}^2 k_y^2 + f_H^2 - N_\theta^2] \omega^2 + B_{y_0}^2 k_y^2 [B_{y_0}^2 k_y^2 - N_\theta^2] = 0 \quad (132)$$

и описывает два типа волн: одномерные магнитные инерционно-гравитационные волны и одномерные магнитострофические волны. Дисперсионное соотношение для одномерных магнитных инерционно-гравитационных волн в неупругом приближении имеет следующий вид:

$$\omega_{mig_y} = \pm \left(B_{y_0}^2 k_y^2 + \frac{f_H^2}{2} - \frac{N_\theta^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{f_H^2}{2} - N_\theta^2 \right)^2 + B_{y_0}^2 k_y^2 f_H^2} \right)^{1/2}. \quad (133)$$

Такой тип волн, также как и в случае трехмерных магнитных инерционно-гравитационных волн на стандартной f -плоскости (116), является

сжимаемым одномерным аналогом одномерных магнитных инерционно-гравитационных волн в приближении Буссинеска (82). В частном случае отсутствия магнитного поля ($B_{y_0} = 0$) выражение (133) переходит в дисперсионное соотношение для одномерных инерционно-гравитационных волн в нейтральной жидкости

$$\omega_{ig_y} = \pm \sqrt{f_H^2 - N_\theta^2}. \quad (134)$$

Дисперсионное соотношение для одномерных магнитострофических волн имеет вид

$$\omega_{mstr_y} = \pm \left(B_{y_0}^2 k_y^2 + \frac{f_H^2}{2} - \frac{N_\theta^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{f_H^2}{2} - N_\theta^2 \right)^2 + B_{y_0}^2 k_y^2 f_H^2} \right)^{1/2}, \quad (135)$$

аналогичный дисперсионному соотношению для одномерных магнитострофических волн в приближении Буссинеска (83), с учетом эффектов сжимаемости, представленных частотой Брента–Вайсяля N_θ^2 .

Общий вид дисперсионных кривых сжимаемых волн на нестандартной f -плоскости представлен на рис. 7а при $\omega > 0$, $k = k_x$ и на рис. 7б при $\omega > 0$, $k = k_y$.

3.2.2. Волны в астрофизической плазме с учетом сферичности. В приближении стандартной β -плоскости решением системы (104)–(107), линеаризованной на фоне стационарного состояния покоящегося слоя плазмы с постоянным магнитным полем и линейным профилем энтропии (110), является дисперсионное соотношение

$$k^2 \omega^4 + \beta k_x \omega^3 - \omega^2 \left[f_V^2 k_z^2 + \frac{\beta N^2 f_V k_z}{gk_y} + \right]$$

$$\begin{aligned}
& + 2k^2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - k_h^2 N_\theta^2 \Big] - \omega \Big[k_x \beta \big((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N_\theta^2 \big) + \\
& + \frac{N^2 f_V k_z}{g} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) (B_{y_0} k_x - B_{x_0} k_y) \Big] + \\
& + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \Big[k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - k_h^2 N_\theta^2 \Big] = 0
\end{aligned} \quad (136)$$

В случае двумерных возмущений, направленных только в горизонтальном направлении ($k_z = 0$), дисперсионное уравнение (136) принимает вид

$$\begin{aligned}
& \left(\omega^2 - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 + N_\theta^2 \right) \times \\
& \times \left(\omega^2 + \omega \frac{\beta k_x}{k_h^2} - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 \right) = 0.
\end{aligned} \quad (137)$$

Выражение (137) описывает три типа волн. Первый тип — сжимаемые магнитогравитационные волны в неупругом приближении, аналогичные волнам на f -плоскости (121). Второй тип — волны магнито-Россби, которые в отсутствие магнитного поля переходят в стандартные гидродинамические волны Россби. Эти волны аналогичны волнам магнито-Россби (89) в приближении Буссинеска. Третий тип — волны магнито-

Россби, не имеющие аналога в динамике нейтральной жидкости. Эти волны аналогичны волнам магнито-Россби (91) в приближении Буссинеска.

В случае одномерных возмущений, направленных только вдоль полоидальной составляющей магнитного поля, дисперсионное уравнение (136) принимает вид

$$\omega^4 - \omega^2 (2B_{y_0}^2 k_y^2 - N_\theta^2) + B_{y_0}^2 k_y^2 (B_{y_0}^2 k_y^2 - N_\theta^2) = 0. \quad (138)$$

Выражение (138) описывает два типа волн: одномерные волны Альфвена с дисперсионным соотношением

$$\omega_{A_y} = \pm B_{y_0} k_y \quad (139)$$

и одномерные сжимаемые магнитогравитационные волны в неупругом приближении с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mgr_y} = \pm \sqrt{B_{y_0}^2 k_y^2 - N_\theta^2}. \quad (140)$$

В низкочастотном пределе уравнение (136) описывает сжимаемую трехмерную волну магнито-Россби в неупругом приближении с дисперсионным соотношением в следующем виде:

$$\omega_{MR_{3D}} = \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left[k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - k_h^2 N_\theta^2 \right]}{\left[k_x \beta \left((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N_\theta^2 \right) + (N^2 f_V k_z / g) (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) (B_{y_0} k_x - B_{x_0} k_y) \right]}. \quad (141)$$

Выражение (141) учитывает эффекты сжимаемости в низкочастотных трехмерных волнах Россби, вследствие зависимости частоты Брента–Вайсяля для сжимаемых течений N_θ^2 не только от исходного профиля плотности, но и от исходного профиля давления. Дисперсионное соотношение (141) имеет вид, аналогичный дисперсионному соотношению для трехмерных низкочастотных волн магнито-Россби в приближении Буссинеска (93). Однако в результате учета эффектов сжимаемости в неупругом приближении выражение (141) имеет дополнительное слагаемое в знаменателе, связанное со стратификацией плотности, которое исчезает, если в состоянии покоя магнитное поле направлено вдоль вертикали.

Общий вид дисперсионных кривых сжимаемых волн на стандартной β -плоскости представлен на рис. 8а при $\omega > 0$, $k = k_y$ для сжимаемой магнитогравитационной волны и волны Альфвена, на рис. 8б–г для сжимаемой низкочастотной волны магнито-Россби при $\mathbf{k} = (k_x, 1, 1)$ (б), $\mathbf{k} = (1, k_y, 1)$ (в), $\mathbf{k} = (1, 1, k_z)$ (г).

В приближении нестандартной β -плоскости решением системы (104)–(107), линеаризован-

ной на фоне стационарного состояния покоящегося слоя плазмы с постоянным магнитным полем и линейным профилем энтропии (110), является дисперсионное соотношение

$$\begin{aligned}
& k^2 \omega^4 - k_x \omega^3 \left[\frac{N^2 f_H}{g} + \gamma \frac{k_z}{k_y} - \beta \right] - \\
& - \omega^2 \left[(f_H k_y + f_V k_z)^2 + \frac{\beta N^2}{g} \left(f_H + f_V \frac{k_z}{k_y} \right) + \right. \\
& \left. + 2k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - k_h^2 N_\theta^2 \right] + \\
& + \omega \left\{ k_x (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left(\gamma \frac{k_z}{k_y} - \beta \right) + \beta k_x N_\theta^2 + \right. \\
& + \frac{N^2}{g} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) \left[f_H (B_{x_0} k_h^2 + B_{x_0} k_x k_z) + \right. \\
& \left. + f_V k_z (B_{x_0} k_y - B_{y_0} k_x) \right] \Big\} + \\
& + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left[k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - k_h^2 N_\theta^2 \right]
\end{aligned} \quad (142)$$

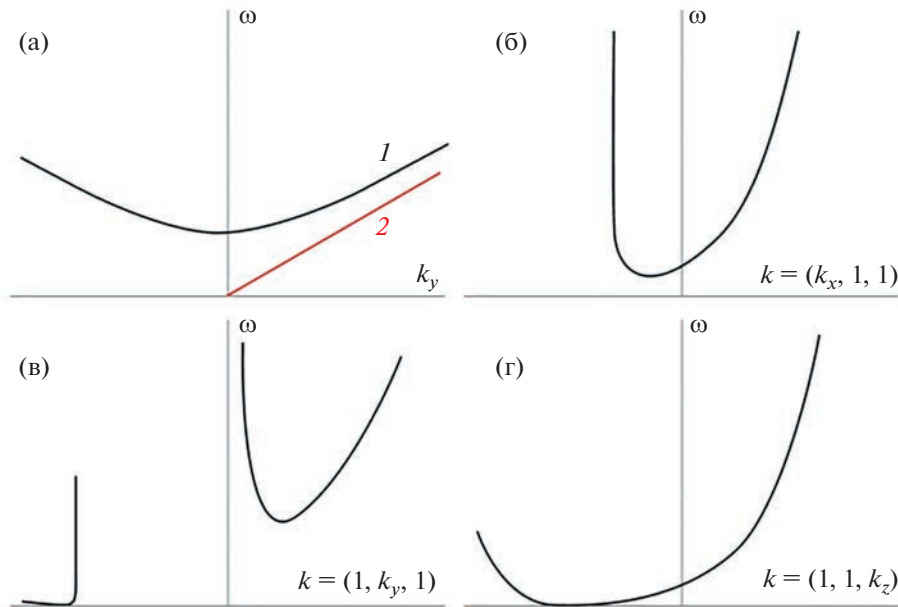


Рис. 8. Дисперсионные кривые волн на стандартной β -плоскости в неупругом приближении: 1 — сжимаемая магнито-гравитационная волна ω_{mgr_y} и 2 — волна Альфвена ω_{A_y} (а); сжимаемая низкочастотная волна магнито-Россби $\omega_{MR_{3D}}$ (б–г).

Проанализируем решение полученного дисперсионного уравнения в частных случаях. Рассмотрим исходное состояние равновесия с тороидальным магнитным полем. Для двумерных возмущений, направленных только в горизонтальном направлении ($k_z = 0$), таких что $k_y \ll k_x$ и слагаемые $k_y^2/k_h^2 \ll 1$, $k_x^2/k_h^2 \sim 1$, дисперсионное уравнение (142) принимает вид

$$\left(\omega^2 + \frac{\beta k_x}{k_h^2} \omega - B_{x_0}^2 k_x^2 \right) \times \left(\omega^2 - \frac{N^2 f_H k_x}{k_h^2 g} \omega - B_{x_0}^2 k_x^2 + N_\theta^2 \right) = 0 \quad (143)$$

и допускает решение в виде четырех типов волн. Первый и второй тип — волны магнито-Россби, аналогичные волнам магнито-Россби на стандартной β -плоскости (и соответственно волнам магнито-Россби в приближении Буссинеска (89), (91)), с учетом однокомпонентности магнитного поля ($\mathbf{B} = (B_{x_0}, 0, 0)$). Третий тип — сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с дисперсионным соотношением в следующем виде:

$$\omega_{mig_1} = \frac{N^2 f_H k_x}{2k_h^2 g} + \sqrt{\frac{N^4 f_H^2 k_x^2}{4k_h^4 g^2} + B_{x_0}^2 k_x^2 - N_\theta^2}. \quad (144)$$

Дисперсионное соотношение (144) аналогично полученному при изучении волн на нестандартной f -плоскости (126).

Четвертый тип — сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с дисперсионным соотношением в следующем виде:

$$\omega_{mig_2} = \frac{N^2 f_H k_x}{2k_h^2 g} - \sqrt{\frac{N^4 f_H^2 k_x^2}{4k_h^4 g^2} + B_{x_0}^2 k_x^2 - N_\theta^2}. \quad (145)$$

Дисперсионное соотношение (145) аналогично полученному при изучении волн на нестандартной f -плоскости (129).

В случае, когда в состоянии покоя магнитное поле полоидально и одномерные возмущения направлены вдоль магнитного поля, дисперсионное уравнение (142) записывается в виде

$$\omega^4 - \omega^2 \left[f_H^2 + \frac{\beta N^2 f_H}{g k_y^2} + 2B_{y_0}^2 k_y^2 - N_\theta^2 \right] + B_{y_0}^2 k_y^2 [B_{y_0}^2 k_y^2 - N_\theta^2] = 0. \quad (146)$$

В неупругом приближении слагаемое с массовой силой в уравнении на z -компоненту скорости содержит потенциальную температуру, зависящую как от плотности, так и от давления. Уравнение непрерывности в неупругом приближении включает в себя исходный профиль плотности, в то время как в приближении Буссинеска является условием бездивергентности поля скоростей. Таким образом в неупругом приближении дисперсионное уравнение волн на нестандартной β -плоскости (142) имеет значительное отличие в выражениях при первой, второй и третьей степени частоты, что в частном случае распространения волн вдоль полоидального магнитного поля

(146) приводит к появлению новых типов сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных и сжимаемых магнитострофических волн.

Дисперсионное соотношение для сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн имеет следующий вид:

$$\omega_{mig\beta} = \left[\frac{f_H^2}{2} + \frac{\beta N^2 f_H}{2gk_y^2} - \frac{N_\theta^2}{2} + B_{y_0}^2 k_y^2 + \left(\frac{f_H^2}{2} + \frac{\beta N^2 f_H}{2gk_y^2} - \frac{N_\theta^2}{2} \right)^2 + f_H^2 B_{y_0}^2 k_y^2 + \frac{f_H \beta N^2 B_{y_0}^2}{g} \right]^{1/2} \quad (147)$$

Выражение (147) имеет вид, аналогичный дисперсионному соотношению для сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн, полученных в предыдущих разделах. Однако дисперсионное соотношение (147) имеет дополнительные слагаемые, включающие в себя параметр β , характерный для волн магнито-Россби, которые непосредственно связаны с градиентом профиля плотности и горизонтальной составляющей силы Кориолиса. Такая связь обусловлена учетом эффектов сжимаемости и горизонтальной компонентой вектора Кориолиса, а также распространением волн вдоль пологоидального магнитного поля. В предположении отсутствия стратификации плотности ($N^2 = 0$) дисперсионное соотношение (147) описывает одномерные магнитные инерционно-гравитационные волны, аналогичные волнам на нестандартной f -плоскости (133). В частном случае отсутствия магнитного поля ($B_{y_0} = 0$) дисперсионное соотношение (147) описывает новый тип сжимаемых инерционно-гравитационных волн в нейтральной жидкости с частотой

$$\omega = \sqrt{f_H^2 + \frac{\beta N^2 f_H}{gk_y^2} - N_\theta^2}. \quad (148)$$

Выражение (148) в предположении отсутствия стратификации плотности ($N^2 = 0$) переходит в выражение (134), которое также описывает инерционно-гравитационные волны в нейтральной жидкости.

Дисперсионное соотношение для сжимаемых магнитострофических волн, являющееся решением дисперсионного уравнения (146) имеет следующий вид:

$$\omega_{mstr\beta} = \left[\frac{f_H^2}{2} + \frac{\beta N^2 f_H}{2gk_y^2} - \frac{N_\theta^2}{2} + B_{y_0}^2 k_y^2 - \left(\frac{f_H^2}{2} + \frac{\beta N^2 f_H}{2gk_y^2} - \frac{N_\theta^2}{2} \right)^2 + f_H^2 B_{y_0}^2 k_y^2 + \frac{f_H \beta N^2 B_{y_0}^2}{g} \right]^{1/2} \quad (149)$$

Волны, описываемые дисперсионным соотношением (149), не имеют аналога в динамике нейтральной жидкости. Выражение (149) имеет вид аналогичный дисперсионному соотношению для сжимаемых магнитострофических волн, полученных в предыдущих разделах. Однако дисперсионное соотношение (149) включает в себя параметр β , характерный для волн магнито-Россби, который как и в случае со сжимаемыми магнитными инерционно-гравитационными волнами с частотой (147), неразрывно связан с градиентом профиля плотности и горизонтальной составляющей силы Кориолиса. В предположении отсутствия стратификации плотности ($N^2 = 0$) дисперсионное соотношение (149) описывает одномерные сжимаемые магнитострофические волны, аналогичные волнам на нестандартной f -плоскости (135). В случае полного отсутствия стратификации ($N_\theta^2 = 0$, $N^2 = 0$) оба типа волн (147), (149) переходят в одномерные волны Альфвена с частотой $\omega_{A_y} = \pm B_{y_0} k_y$.

В низкочастотном пределе дисперсионное уравнение (142) допускает решение в виде сжимаемой трехмерной волны магнито-Россби в неупругом приближении с частотой

$$\omega_{MR_{3D}} = \{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 [k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - k_h^2 N_\theta^2]\} \times \left\{ k_x (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left(\beta - \gamma \frac{k_z}{k_y} \right) - \beta k_x N_\theta^2 - \frac{N^2}{g} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) \times \left[f_H (B_{x_0} k_h^2 + B_{z_0} k_x k_z) + f_V k_z (B_{x_0} k_y - B_{y_0} k_x) \right] \right\}^{-1} \quad (150)$$

Выражение (150) учитывает эффекты сжимаемости в низкочастотных трехмерных волнах Россби, вследствие зависимости частоты Брента–Вайся для сжимаемых течений N_θ^2 не только от исходного профиля плотности, но и от исходного профиля давления. Дисперсионное соотношение (150) имеет вид, аналогичный дисперсионному соотношению для трехмерных низкочастотных волн магнито-Россби в приближении Буссинеска на нестандартной β -плоскости (101). Кроме того в результате учета эффектов сжимаемости в неупругом приближении выражение (150) имеет дополнительное слагаемое в знаменателе, связан-

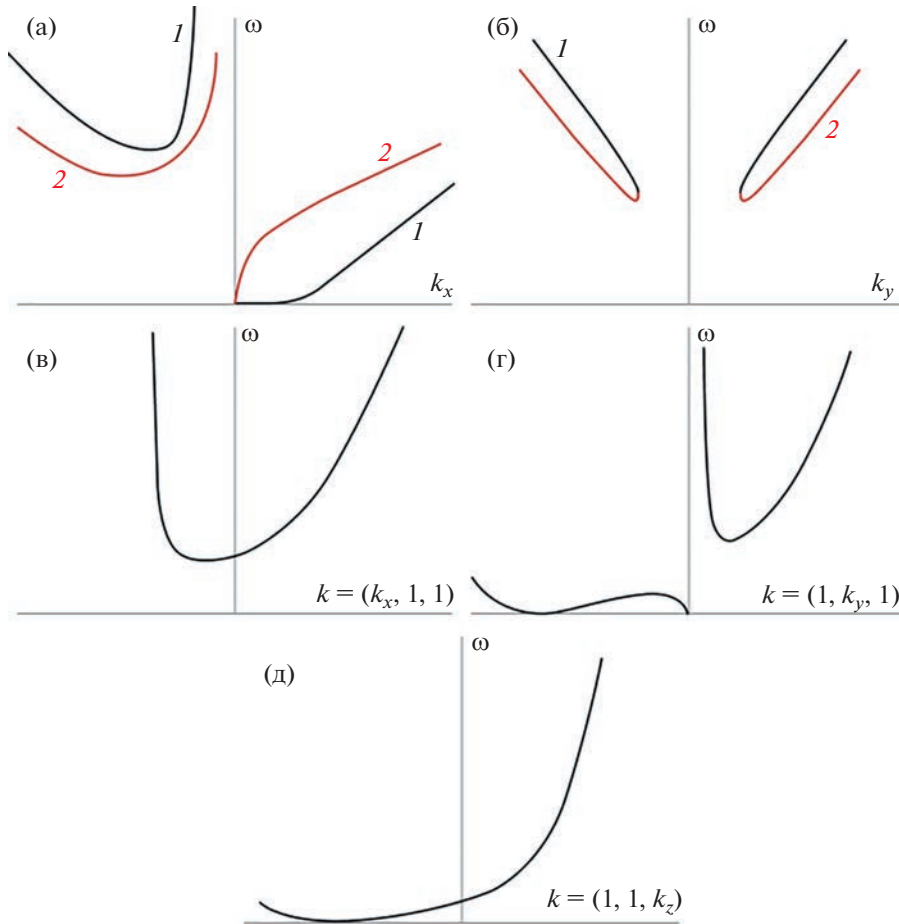


Рис. 9. Дисперсионные кривые волн на нестандартной β -плоскости в неупругом приближении: 1 – волна магнито-Россби ω_{MR_1} , 2 – волна Альфвена ω_{A_y} (а); 1 – сжимаемая магнитная инерционно-гравитационная волна $\omega_{mig\beta}$, 2 – сжимаемая магнитострофическая волна $\omega_{mstr\beta}$ (б); сжимаемая низкочастотная волна магнито-Россби $\omega_{MR_{5D}}$ при $\mathbf{k} = (k_x, 1, 1)$ (в); сжимаемая низкочастотная волна магнито-Россби $\omega_{MR'_{5D}}$ при $\mathbf{k} = (1, k_y, 1)$ (г); сжимаемая низкочастотная волна магнито-Россби $\omega_{MR''_{5D}}$ при $\mathbf{k} = (1, 1, k_z)$ (д).

ное со стратификацией плотности, которое, однако, не исчезает при отсутствии горизонтальных компонент магнитного поля, как в случае стандартного приближения β -плоскости.

Общий вид дисперсионных кривых сжимаемых волн на нестандартной β -плоскости представлен на рис. 9а при $\omega > 0$, $k = k_x$, на рис. 9б при $\omega > 0$, $k = k_y$, на рис. 9в при $\omega > 0$ $\mathbf{k} = (k_x, 1, 1)$, на рис. 9г при $\omega > 0$ $\mathbf{k} = (1, k_y, 1)$, на рис. 9д при $\omega > 0$ $\mathbf{k} = (1, 1, k_z)$.

3.2.3. Выводы. Приведен обзор системы магнитогидродинамических уравнений сжимаемой вращающейся плазмы с устойчивой стратификацией в поле силы тяжести в неупругом приближении. Рассмотрены магнитогидродинамические течения в слое сжимаемой устойчиво стратифицированной вращающейся плазмы с линейным профилем энтропии в неупругом приближении.

Приведена теория линейных волн в сжимаемых течениях на стандартной и нестандартной f -плоскостях, получены дисперсионные уравнения и найдены решения, описывающие различные типы волн. В приближении f -плоскости найдены дисперсионные соотношения, описывающие следующие типы волн: сжимаемые трехмерные магнитные инерционно-гравитационные волны (116), которые в отсутствие магнитного поля переходят в сжимаемые трехмерные инерционно-гравитационные волны в нейтральной жидкости в неупругом приближении (117); трехмерные магнитострофические волны (118), не имеющие аналога в гидродинамике нейтральной жидкости; двумерные волны Альфвена (120); двумерные сжимаемые магнитогравитационные волны (121); вертикальные магнитные волны, аналогичные найденным в приближении Буссинеска (79), (80). На нестандартной f -плоскости найдены диспер-

сионные соотношения, описывающие следующие типы волн: одномерные волны Альфвена (125); одномерные сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с новыми законами дисперсии (126), (129), которые при равенстве нулю горизонтальной компоненты вектора Кориолиса переходят в одномерные сжимаемые магнитогравитационные волны в (127), (130), а в отсутствие магнитного поля переходят в сжимаемые инерционно-гравитационные волны с новыми законами дисперсии (128), (131); одномерные сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные (133) и магнитострофические волны (135), аналогичные найденным волнам в приближении Буссинеска (99), (100), с точностью до слагаемых с частотой Брента–Вайсяля для сжимаемых течений. Эффекты сжимаемости в найденных типах волн представлены слагаемыми с частотой Брента–Вайсяля N_0^2 для сжимаемых стратифицированных течений, зависящей как от исходного профиля плотности, так и от исходного профиля давления. Для сферических течений в приближении стандартной и нестандартной β -плоскостях также развита теория линейных волн и получены дисперсионные уравнения. В приближении стандартной β -плоскости получены дисперсионные соотношения, описывающие следующие типы волн: двумерные сжимаемые магнитогравитационные волны (121); волны магнито-Россби (89), (91), аналогичные волнам в приближении Буссинеска; одномерные волны Альфвена (139); низкочастотные сжимаемые трехмерные волны магнито-Россби (141). В приближении нестандартной β -плоскости получены дисперсионные соотношения, описывающие следующие типы волн: волны магнито-Россби, аналогичные волнам на β -плоскости; двумерные сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с новыми законами дисперсии (144), (145), аналогичные волнам на нестандартной f -плоскости; одномерные сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные (147) и магнитострофические (149) волны с новыми законами дисперсии, включающими слагаемые с параметром β ; низкочастотные сжимаемые трехмерные волны магнито-Россби (150). Эффекты сжимаемости в найденных типах волн представлены слагаемыми с частотой Брента–Вайсяля N_0^2 для сжимаемых стратифицированных течений, зависящей как от исходного профиля плотности, так и от исходного профиля давления.

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН В ПЛАЗМЕННОЙ АСТРОФИЗИКЕ

Исследование нелинейных взаимодействий волн вносит вклад в развитие теории различных процессов в плазменной астрофизике, в частно-

сти солнечных сезонов и космической погоды. Нелинейные взаимодействия волн магнито-Россби связывают с длительностью солнечного цикла. Нерегулярные переходы по амплитудам волн напоминают наблюдаемые временные ряды солнечной активности [63]. Развитие слабонелинейной теории найденных типов волн в двумерных и трехмерных вращающихся течениях астрофизической плазмы состоит из выявления трехволновых взаимодействий, вывода амплитудных уравнений и инкрементов неустойчивости для случая распада и усиления волн [43, 77]. Для существования нелинейного взаимодействия между тремя волнами с волновыми векторами $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}_3$ и частотами $\omega(\mathbf{k}_1)$, $\omega(\mathbf{k}_2)$ и $\omega(\mathbf{k}_3)$, необходимо, чтобы их дисперсионные соотношения удовлетворяли условию синхронизма [121]

$$\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \quad \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3. \quad (151)$$

Чтобы определить, существуют ли такие три волны, удовлетворяющие условию синхронизма (151), используется качественный анализ дисперсионных кривых волн. На графике $\omega(\mathbf{k})$ необходимо изобразить две дисперсионные кривые, смещенные друг относительно друга. Первое слагаемое $\omega(\mathbf{k}_1)$ в условии синхронизма (151) задает точку $(k_1, \omega(k_1))$ на дисперсионной кривой. На смещенной дисперсионной кривой слагаемое $\omega(\mathbf{k}_2)$ задает точку $(k_2, \omega(k_2))$. Если при смещении относительно начала координат одной из дисперсионных кривых она пересечет другую в некоторой точке $(k_3, \omega(k_3))$, то это будет означать выполнение условия синхронизма [121]. Таким образом для всех найденных типов волн необходимо проанализировать их дисперсионные кривые на выполнение условия синхронизма.

Для каждой возможной конфигурации трехволнового взаимодействия существует система амплитудных уравнений, предполагающая наличие неустойчивостей типа распад и усиление. Вывод системы уравнений для амплитуд трех взаимодействующих волн, удовлетворяющих условию синхронизма (151), производится асимптотическим методом многих масштабов. Детальное описание метода многих масштабов в магнитогидродинамических течениях вращающейся плазмы можно найти в [122]. Решение исследуемой системы представляется в виде ряда по малому параметру ϵ

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \epsilon \mathbf{u}_1 + \epsilon^2 \mathbf{u}_2 + \dots, \quad (152)$$

где $\mathbf{u}_0$ — стационарное решение исследуемой системы, $\mathbf{u}_1$ — решение линеаризованной исследуемой системы, $\mathbf{u}_2$ — поправка, описывающая влияние квадратичной нелинейности. Выписав слагаемые, пропорциональные ϵ^2 , получим систему

линейных неоднородных дифференциальных уравнений относительно u_2 , содержащую в правой своей части резонансные слагаемые, приводящие к линейному росту решения (по времени и по координате). Таким образом, нарушается условие сходимости ряда (152) $\varepsilon^2 u_2 \ll \varepsilon u_1$ на больших масштабах. Поэтому, чтобы исключить влияние резонансных слагаемых, введем зависимость амплитуды волны от больших временных и больших пространственных масштабов в виде $u_1(T_1, X_1, Y_1) \exp(i(k_x X_0 + k_y Y_0 - \omega T_0))$. Эволюционное уравнение для медленно меняющейся амплитуды обеспечивает равномерную сходимость асимптотического ряда. Перейдем, таким образом, от аргументов t, x, y к “быстрым” (T_0, X_0, Y_0) и “медленным” аргументам (T_1, X_1, Y_1) в соответствии с соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}, & \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial Y_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial Y_1}. \end{aligned} \quad (153)$$

Подставим в исходную систему выражения (152) и (153) и выпишем слагаемые, пропорциональные ε^2 . В правой части полученной системы уравнений будут стоять нелинейные слагаемые, которые могут вызвать резонанс с оператором левой части. Представим решение линейной системы уравнений в виде суммы трех волн, удовлетворяющих условию синхронизма (151). Для исключения резонансных слагаемых в правой части необходимо воспользоваться условием ортогональности правой части системы ядру оператора левой части, известным как условие совместности. Выписав условие совместности для каждого независимого решения, получим систему уравнений на амплитуды взаимодействующих волн.

Система уравнений на амплитуды ϕ, ψ, χ взаимодействующих волн является универсальной для описания неустойчивостей трехволновых взаимодействий [123] и имеет вид

$$s_1 \phi = f_1 \psi^* \chi, \quad (154)$$

$$s_2 \psi = f_2 \phi^* \chi, \quad (155)$$

$$s_3 \chi = f_3 \phi \psi, \quad (156)$$

где s_i – дифференциальные операторы по “медленным” аргументам T_1, X_1, Y_1, Z_1 ,

$$s_i = t_i \frac{\partial}{\partial T_1} + p_i \frac{\partial}{\partial X_1} + q_i \frac{\partial}{\partial Y_1} + w_i \frac{\partial}{\partial Z_1}. \quad (157)$$

Коэффициенты f_i, t_i, p_i, q_i, w_i зависят только от начальных условий и характеристик взаимодействующих волн.

Система амплитудных уравнений для взаимодействующих волн имеет общий вид (154)–(156) и в предельных случаях описывает два следующих варианта изменения системы [123]:

- *распад волны* с частотой $\omega_1(k_1)$ на две волны с частотами $\omega_2(k_2)$ и $\omega_3(k_3)$: данная неустойчивость реализуется, когда амплитуда одной из волн много больше амплитуд двух других волн ($\phi \gg \psi, \chi$, $\phi = \phi_0$); инкремент такой неустойчивости имеет вид: $\Gamma = \sqrt{f_2 f_3 / t_2 t_3} |\phi_0| > 0$;

- *линейный рост волны* с частотой $\omega_1(k_1)$ в результате усиления двумя волнами с частотами $\omega_2(k_2)$ и $\omega_3(k_3)$: такой линейный рост одной из взаимодействующих волн реализуется, когда ее амплитуда много меньше амплитуд двух других волн ($\phi \ll \psi, \chi$, $\psi = \psi_0, \chi = \chi_0$); в таком случае амплитуда волны возрастает линейно по медленному времени T_1 со скоростью $\kappa = (f_1 / |t_1|) |\psi_0 \chi_0|$.

Несмотря на общий вид амплитудных уравнений (154)–(156) и инкрементов неустойчивости, они различны для каждого типа трехволновых взаимодействий. Различие в неявном виде представлено в коэффициентах f_i, t_i, p_i, q_i, w_i , которые не только могут иметь различные выражения, но и содержат в неявном виде собственные вектора и частоты, характерные для определенного типа волны. Таким образом, полученные в [43, 48, 49, 77, 78, 88] амплитудные уравнения для приведенных ниже нелинейных взаимодействий различны для каждой конфигурации из трех взаимодействующих волн. Инкременты неустойчивостей, полученные в [43, 48, 49, 77, 78, 88], и скорости линейного роста также отличаются для каждого случая трехволнового взаимодействия. Далее в разделах 4.1 и 4.2 показаны все возможные варианты трехволновых взаимодействий для найденных типов волн и описаны распадные неустойчивости и линейный рост амплитуд в специальных начальных условиях. Детальное описание слабонелинейной теории волн во вращающихся течениях астрофизической плазмы, содержащий выражения для коэффициентов f_i, t_i, p_i, q_i, w_i , представлено в работах [43, 48, 49, 77] для двумерных течений и в работах [78, 88] для трехмерных течений.

4.1. Нелинейные взаимодействия волн в двумерных вращающихся течениях

4.1.1. Приближение однослойной мелкой воды для несжимаемой нестратифицированной вращающейся плазмы. Проанализируем дисперсионные соотношения магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн в мелкой воде на стандартной f -плоскости. Для волн во внешнем вертикальном магнитном поле, как и

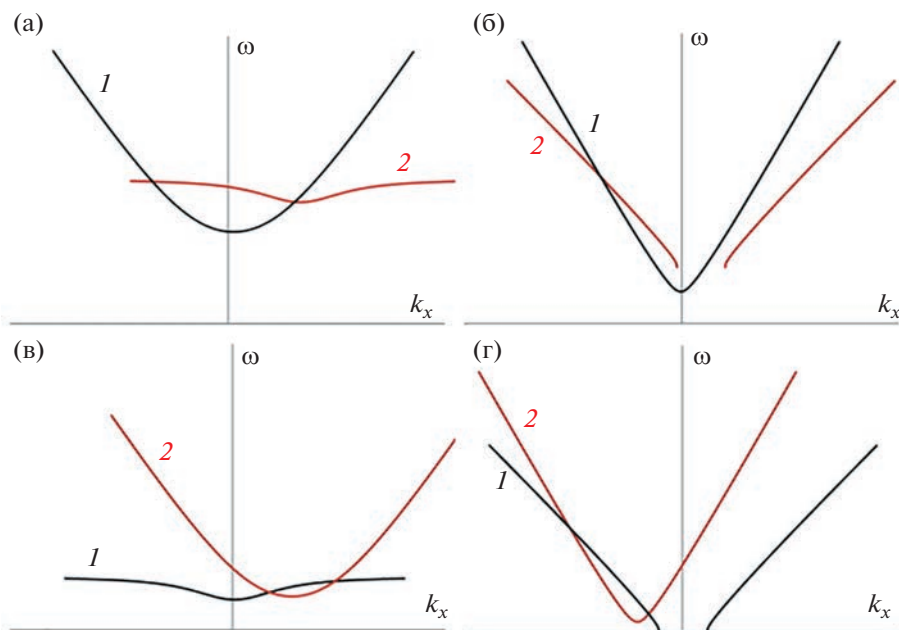


Рис. 10. Условие синхронизма для трех волн в однослойной мелкой воде: две магнитные инерционно-гравитационные волны и магнитострофическая волна во внешнем вертикальном магнитном поле (а): $1 - \omega_{MIG_{V_1}}(k_x)$, $2 - \omega_{MS_{V_1}}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MIG_{V_1}}(k_{x_c})$; в горизонтальном магнитном поле (б): $1 - \omega_{MIG_{H_1}}(k_x)$, $2 - \omega_{MS_{H_1}}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MIG_{H_1}}(k_{x_c})$; две магнитострофические волны и магнитная инерционно-гравитационная волна во внешнем вертикальном магнитном поле (в): $1 - \omega_{MS_{V_1}}(k_x)$, $2 - \omega_{MIG_{V_1}}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MS_{V_1}}(k_{x_c})$; в горизонтальном магнитном поле (г): $1 - \omega_{MS_{H_1}}(k_x)$, $2 - \omega_{MIG_{H_1}}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MS_{H_1}}(k_{x_c})$.

для волн в горизонтальном магнитном поле условие синхронизма выполняется для следующих конфигураций трех волн:

- две магнитные инерционно-гравитационные волны и магнитострофическая волна в мелкой воде во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 10а) и в горизонтальном магнитном поле (рис. 10б);
- две магнитострофические волны и магнитная инерционно-гравитационная волна в мелкой воде во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 10в) и в горизонтальном магнитном поле (рис. 10г).

Таким образом, при взаимодействии магнитных инерционно-гравитационных волн и магнитострофических волн в мелкой воде во внешнем вертикальном магнитном поле возможно возникновение следующих неустойчивостей:

- распад магнитной инерционно-гравитационной волны на магнитострофическую и магнитную инерционно-гравитационную волну;
- распад магнитострофической волны на магнитную инерционно-гравитационную и магнитострофическую волны.

При взаимодействии магнитных инерционно-гравитационных волн и магнитострофических

волн в мелкой воде в горизонтальном магнитном поле возможно возникновение следующих неустойчивостей:

- распад магнитной инерционно-гравитационной волны на магнитострофическую и магнитную инерционно-гравитационную волну;
- распад магнитострофической волны на магнитную инерционно-гравитационную и магнитострофическую волны.

Проанализируем дисперсионные соотношения магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби в мелкой воде на стандартной β -плоскости. Для волн во внешнем вертикальном магнитном поле, как и для волн в горизонтальном магнитном поле условие синхронизма выполняется для следующих конфигураций трех волн:

- три волны магнито-Россби в мелкой воде во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 11а) и в горизонтальном магнитном поле (рис. 11б);
- две волны магнито-Россби и магнитная инерционно-гравитационная волна в мелкой воде во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 11в) и в горизонтальном магнитном поле (рис. 11г);

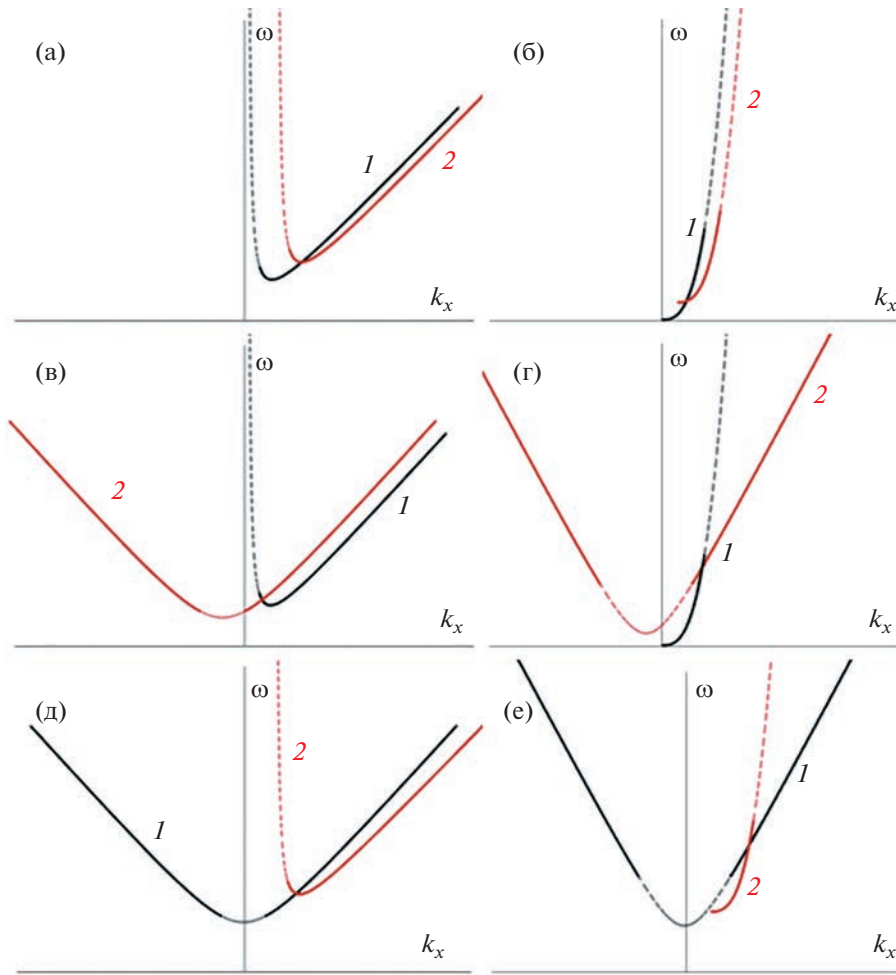


Рис. 11. Условие синхронизма для трех волн в однослойной мелкой воде: три волны магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле (а): $1 - \omega_{MR_{V_1}}(k_x)$, $2 - \omega_{MR_{V_1}}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MR_{V_1}}(k_{x_c})$; три волны магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле (б): $1 - \omega_{MR_{H_1}}(k_x)$, $2 - \omega_{MR_{H_1}}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MR_{H_1}}(k_{x_c})$; две волны магнито-Россби и магнитная инерционно-гравитационная волна во внешнем вертикальном магнитном поле (в): $1 - \omega_{MR_{V_1}}(k_x)$, $2 - \omega_{MIG_{V_1}}(k_x + k_{x_c}) - \omega_{MR_{V_1}}(k_{x_c})$; две волны магнито-Россби и магнитная инерционно-гравитационная волна в горизонтальном магнитном поле (г): $1 - \omega_{MR_{H_1}}(k_x)$, $2 - \omega_{MIG_{H_1}}(k_x + k_{x_c}) - \omega_{MR_{H_1}}(k_{x_c})$; две магнитные инерционно-гравитационные волны и волна магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле (д): $1 - \omega_{MIG_{V_1}}(k_x)$, $2 - \omega_{MR_{V_1}}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MIG_{V_1}}(k_{x_c})$; две магнитные инерционно-гравитационные волны и волна магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле (е): $1 - \omega_{MIG_{H_1}}(k_x)$, $2 - \omega_{MR_{H_1}}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MIG_{H_1}}(k_{x_c})$.

- две магнитные инерционно-гравитационные волны и волна магнито-Россби в мелкой воде во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 11д) и в горизонтальном магнитном поле (рис. 11е).

Важно отметить, что в силу различия в динамике магнитных инерционно-гравитационных волн в мелкой воде на β -плоскости и магнитных инерционно-гравитационных волн в мелкой воде на f -плоскости, в случае β -плоскости условие

синхронизма не выполняется для трех магнитных инерционно-гравитационных волн [113].

Таким образом, при взаимодействии магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби в мелкой воде во внешнем вертикальном магнитном поле возможно развитие возникновений следующих неустойчивостей:

- распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби или магнитной инерционно-гравитационную волну и волну магнито-Россби;

- распад магнитной инерционно-гравитационной волны на волну магнито-Россби и магнитную инерционно-гравитационную волну.

При взаимодействии магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби в мелкой воде в горизонтальном магнитном поле возможно возникновение следующих неустойчивостей:

- распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби или магнитную инерционно-гравитационную волну и волну магнито-Россби;
- распад магнитной инерционно-гравитационной волны на волну магнито-Россби и магнитную инерционно-гравитационную волну.

4.1.2. Приближение двуслойной мелкой воды для несжимаемой стратифицированной вращающейся плазмы. Проанализируем дисперсионные соотношения магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби с учетом эффектов стратификации в двуслойной мелкой воде на стандартной β -плоскости. Для волн во внешнем вертикальном магнитном поле, как и для волн в горизонтальном магнитном поле условие синхронизма выполняется для следующих конфигураций трех волн:

- три волны магнито-Россби в двуслойной мелкой воде во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 12а) и в горизонтальном магнитном поле (рис. 12б);
- две волны магнито-Россби и магнитная инерционно-гравитационная волна в двуслойной мелкой воде во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 12в) и в горизонтальном магнитном поле (рис. 12г);
- две магнитные инерционно-гравитационные волны и волна магнито-Россби в двуслойной мелкой воде во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 12д) и в горизонтальном магнитном поле (рис. 12е).

Таким образом, при взаимодействии магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби в двуслойной мелкой воде во внешнем вертикальном магнитном поле возможно возникновение следующих неустойчивостей:

- распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби или на магнитную инерционно-гравитационную волну и волну магнито-Россби;
- распад магнитной инерционно-гравитационной волны на волну магнито-Россби и магнитную инерционно-гравитационную волну.

При взаимодействии магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби в мелкой воде в горизонтальном магнитном поле возможно возникновение следующих неустойчивостей:

- распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби или на магнитную инерционно-гравитационную волну и волну магнито-Россби;

- распад магнитной инерционно-гравитационной волны на волну магнито-Россби и магнитную инерционно-гравитационную волну.

4.1.3. Приближение однослойной мелкой воды для нестратифицированной вращающейся плазмы с учетом крупномасштабной сжимаемости. Проанализируем дисперсионные соотношения магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости на стандартной f -плоскости. Для волн во внешнем вертикальном магнитном поле, как и для волн в горизонтальном магнитном поле условие синхронизма выполняется для следующих конфигураций трех волн:

- три магнитные инерционно-гравитационные волны в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном магнитном поле;
- две магнитные инерционно-гравитационные волны и магнитострофическая волна в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 13а) и в горизонтальном магнитном поле (рис. 13б);
- две магнитострофические волны и магнитная инерционно-гравитационная волна в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 13в) и в горизонтальном магнитном поле (рис. 13г).

Таким образом, при взаимодействии магнитных инерционно-гравитационных волн и магнитострофических волн в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости во внешнем вертикальном магнитном поле возможно возникновение следующих неустойчивостей:

- распад магнитной инерционно-гравитационной волны на магнитострофическую и магнитную инерционно-гравитационную волны;
- распад магнитострофической волны на магнитную инерционно-гравитационную и магнитострофическую волны.

При взаимодействии магнитных инерционно-гравитационных волн и магнитострофических волн в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости в горизонтальном магнитном поле возможно возникновение следующих неустойчивостей:

- распад магнитной инерционно-гравитационной волны на магнитострофическую и магнитную инерционно-гравитационную волны;

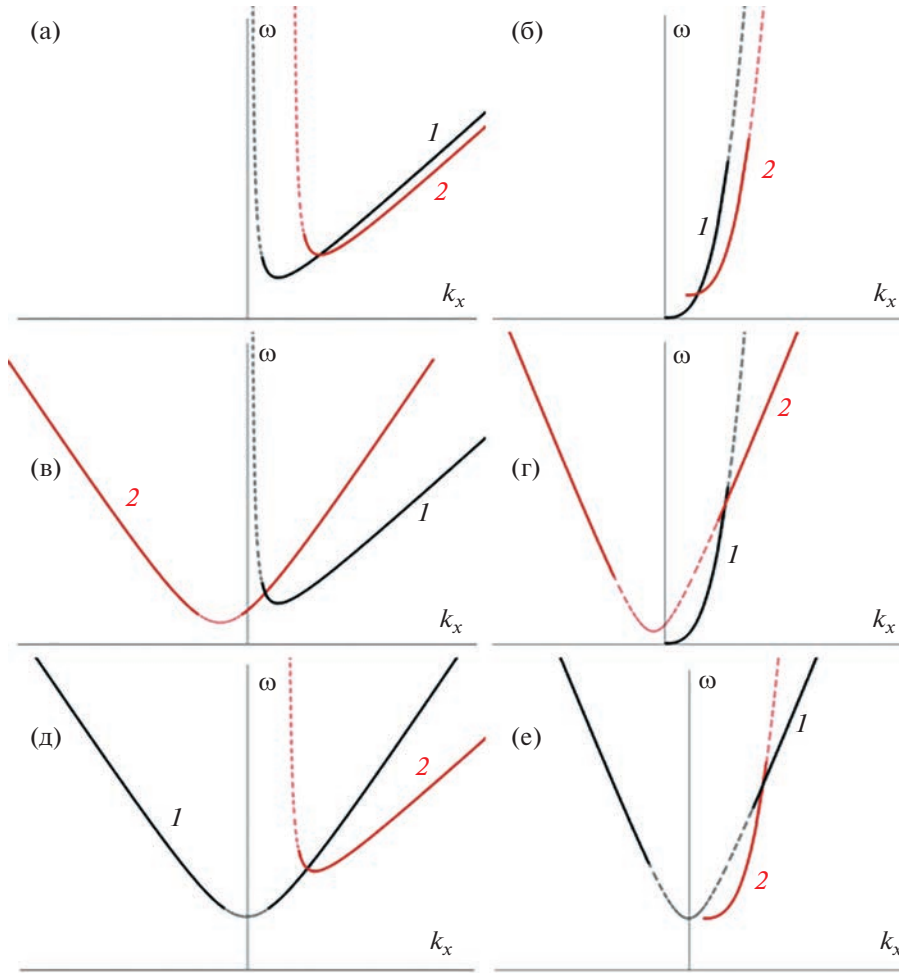


Рис. 12. Условие синхронизма для трех волн в двуслойной мелкой воде: три волны магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле (а): $1 - \omega_{MR_{V_2}}(k_x) + \delta_{MR_{V_2}}(k_x)$, $2 - \omega_{MR_{V_2}}(k_x - k_{xc}) + \delta_{MR_{V_2}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{MR_{V_2}}(k_{xc}) + \delta_{MR_{V_2}}(k_{xc})$; три волны магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле (б): $1 - \omega_{MR_{H_2}}(k_x) + \delta_{MR_{H_2}}(k_x)$, $2 - \omega_{MR_{H_2}}(k_x - k_{xc}) + \delta_{MR_{H_2}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{MR_{H_2}}(k_{xc}) + \delta_{MR_{H_2}}(k_{xc})$; две волны магнито-Россби и магнитная инерционно-гравитационная волна во внешнем вертикальном магнитном поле (в): $1 - \omega_{MR_{V_2}}(k_x) + \delta_{MR_{V_2}}(k_x)$, $2 - \omega_{MIG_{V_2}}(k_x + k_{xc}) + \delta_{MIG_{V_2}}(k_x + k_{xc}) - \omega_{MR_{V_2}}(k_{xc}) - \delta_{MR_{V_2}}(k_{xc})$; две волны магнито-Россби и магнитная инерционно-гравитационная волна в горизонтальном магнитном поле (г): $1 - \omega_{MR_{H_2}}(k_x) + \delta_{MR_{H_2}}(k_x)$, $2 - \omega_{MIG_{H_2}}(k_x + k_{xc}) + \delta_{MIG_{H_2}}(k_x + k_{xc}) - \omega_{MR_{H_2}}(k_{xc}) - \delta_{MR_{H_2}}(k_{xc})$; две магнитные инерционно-гравитационные волны и волна магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле (д): $1 - \omega_{MIG_{V_2}}(k_x) + \delta_{MIG_{V_2}}(k_x)$, $2 - \omega_{MR_{V_2}}(k_x - k_{xc}) + \delta_{MR_{V_2}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{MIG_{V_2}}(k_{xc}) + \delta_{MIG_{V_2}}(k_{xc})$; две магнитные инерционно-гравитационные волны и волна магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле (е): $1 - \omega_{MIG_{H_2}}(k_x) + \delta_{MIG_{H_2}}(k_x)$, $2 - \omega_{MR_{H_2}}(k_x - k_{xc}) + \delta_{MR_{H_2}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{MIG_{H_2}}(k_{xc}) + \delta_{MIG_{H_2}}(k_{xc})$.

- распад магнитоострофической волны на магнитную инерционно-гравитационную и магнитоострофическую волны.

Проанализируем дисперсионные соотношения магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости на стандартной β -плоскости. Для волн во внешнем вер-

тикальном магнитном поле, как и для волн в горизонтальном магнитном поле условие синхронизма выполняется для следующих конфигураций трех волн:

- три волны магнито-Россби в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 14а) и в горизонтальном магнитном поле (рис. 14б);

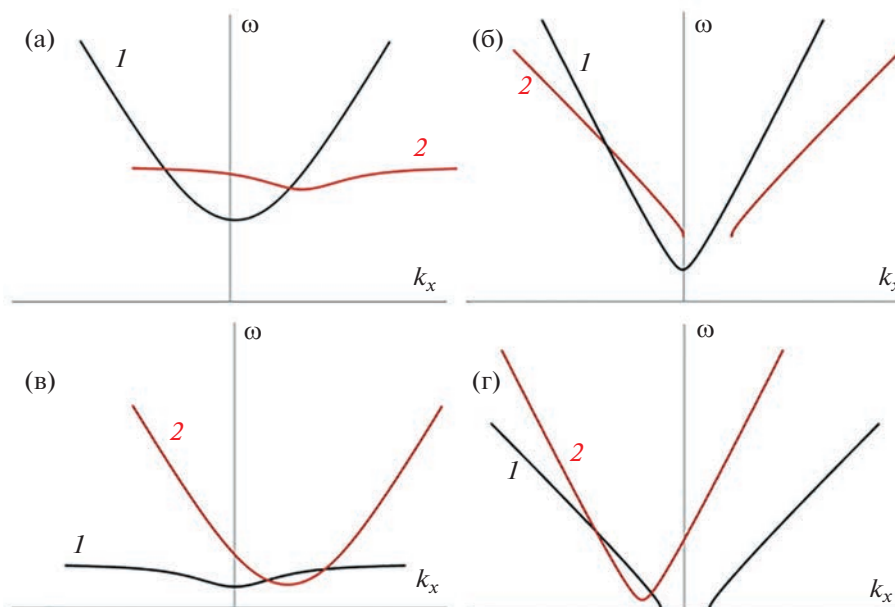


Рис. 13. Условие синхронизма для трех волн в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости: две магнитные инерционно-гравитационные волны и магнитострофическая волна во внешнем вертикальном магнитном поле (а): $1 - \tilde{\omega}_{MIG_V}(k_x)$, $2 - \tilde{\omega}_{MS_V}(k_x - k_{xc}) + \tilde{\omega}_{MIG_V}(k_{xc})$; в горизонтальном магнитном поле (б): $1 - \tilde{\omega}_{MIG_h}(k_x)$, $2 - \tilde{\omega}_{MS_h}(k_x - k_{xc}) + \tilde{\omega}_{MIG_h}(k_{xc})$; две магнитострофические волны и магнитная инерционно-гравитационная волна во внешнем вертикальном магнитном поле (в): $1 - \tilde{\omega}_{MS_V}(k_x)$, $2 - \tilde{\omega}_{MIG_V}(k_x - k_{xc}) + \tilde{\omega}_{MS_V}(k_{xc})$; в горизонтальном магнитном поле (г): $1 - \tilde{\omega}_{MS_h}(k_x)$, $2 - \tilde{\omega}_{MIG_h}(k_x - k_{xc}) + \tilde{\omega}_{MS_h}(k_{xc})$.

- две волны магнито-Россби и магнитная инерционно-гравитационная волна в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 14в) и в горизонтальном магнитном поле (рис. 14г);

- две магнитные инерционно-гравитационные волны и волна магнито-Россби в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 14д) и в горизонтальном магнитном поле (рис. 14е).

Важно отметить, что в силу различия в динамике магнитных инерционно-гравитационных волн в мелкой воде на β -плоскости и магнитных инерционно-гравитационных волн в мелкой воде на f -плоскости, в случае β -плоскости условие синхронизма не выполняется для трех магнитных инерционно-гравитационных волн [113].

Таким образом, при взаимодействии магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости во внешнем вертикальном магнитном поле возможно возникновение следующих неустойчивостей:

- распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби или на магнитную инерционно-гравитационную волну и волну магнито-Россби;

- распад магнитной инерционно-гравитационной волны на волну магнито-Россби и магнитную инерционно-гравитационную волну.

При взаимодействии магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости в горизонтальном магнитном поле возможно возникновение следующих неустойчивостей:

- распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби или на магнитную инерционно-гравитационную волну и волну магнито-Россби;

- распад магнитной инерционно-гравитационной волны на волну магнито-Россби и магнитную инерционно-гравитационную волну.

4.2. Нелинейные взаимодействия волн в трехмерных вращающихся течениях

4.2.1. Приближение Буссинеска для несжимаемой стратифицированной вращающейся плазмы.

Проанализируем дисперсионные соотношения волн в приближении Буссинеска на стандартной f -плоскости. Для найденных в разделе 3.1 волн во вращающейся стратифицированной плазме условие синхронизма выполняется для следующих конфигураций трех волн:

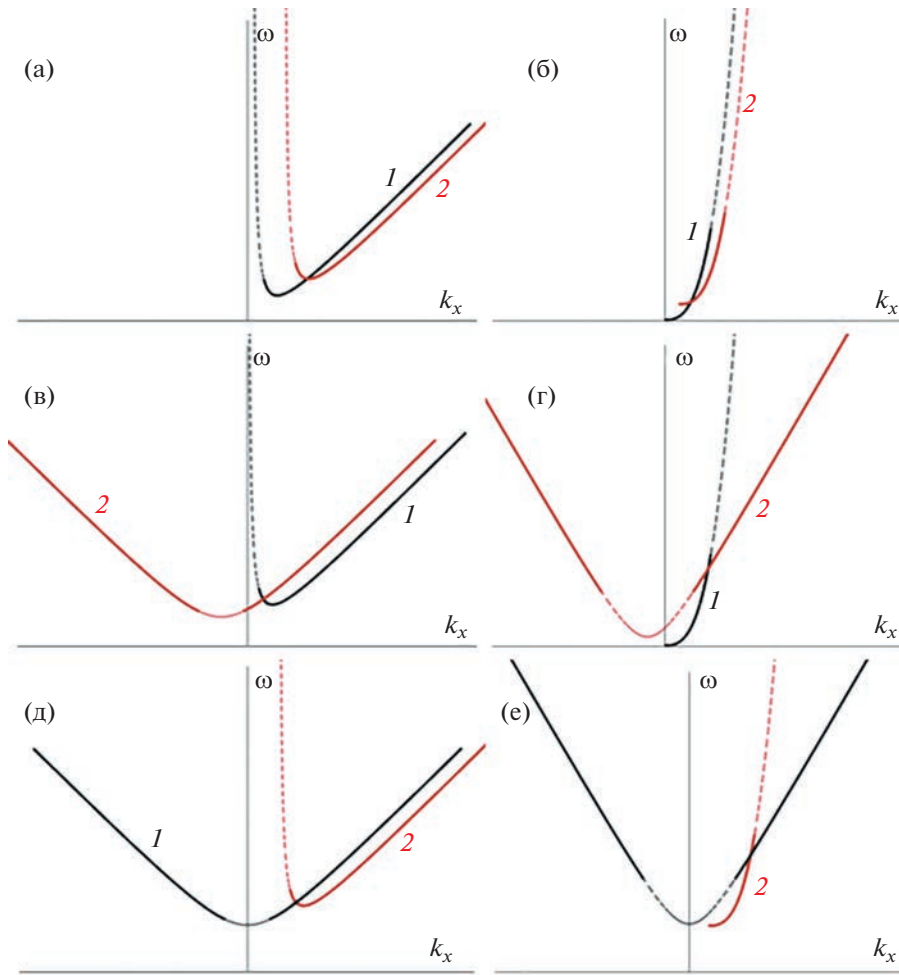


Рис. 14. Условие синхронизма для трех волн в однослойной мелкой воде на стандартной β -плоскости с учетом крупномасштабной сжимаемости: три волны магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле (а): $1 - \tilde{\omega}_{MR_{V_1}}(k_x)$, $2 - \tilde{\omega}_{MR_{V_1}}(k_x - k_{xc}) + \tilde{\omega}_{MR_{V_1}}(k_{xc})$; три волны магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле (б): $1 - \tilde{\omega}_{MR_{H_1}}(k_x)$, $2 - \tilde{\omega}_{MR_{H_1}}(k_x - k_{xc}) + \tilde{\omega}_{MR_{H_1}}(k_{xc})$; две волны магнито-Россби и магнитная инерционно-гравитационная волна во внешнем вертикальном магнитном поле (в): $1 - \tilde{\omega}_{MR_{V_1}}(k_x)$, $2 - \tilde{\omega}_{MIG_{V_1}}(k_x + k_{xc}) - \tilde{\omega}_{MR_{V_1}}(k_{xc})$; две волны магнито-Россби и магнитная инерционно-гравитационная волна в горизонтальном магнитном поле (г): $1 - \tilde{\omega}_{MR_{H_1}}(k_x)$, $2 - \tilde{\omega}_{MIG_{H_1}}(k_x + k_{xc}) - \tilde{\omega}_{MR_{H_1}}(k_{xc})$; две магнитные инерционно-гравитационные волны и волна магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле (д): $1 - \tilde{\omega}_{MIG_{V_1}}(k_x)$, $2 - \tilde{\omega}_{MR_{V_1}}(k_x - k_{xc}) + \tilde{\omega}_{MIG_{V_1}}(k_{xc})$; две магнитные инерционно-гравитационные волны и волна магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле (е): $1 - \tilde{\omega}_{MIG_{H_1}}(k_x)$, $2 - \tilde{\omega}_{MR_{H_1}}(k_x - k_{xc}) + \tilde{\omega}_{MIG_{H_1}}(k_{xc})$.

- две магнитогравитационные волны в приближении Буссинеска и волна Альфвена (рис. 15а);

- две вертикальные магнитные инерционные волны с частотами ω_{z1} и вертикальная магнитная инерционная волна с частотой ω_{z2} (рис. 15б);

- три вертикальные магнитные инерционные волны с частотами ω_{z2} (рис. 15в).

Таким образом, при взаимодействии магнито-гравитационных волн и волн Альфвена в стратифицированных течениях вращающейся плазмы в приближении Буссинеска на стандартной f -плоскости возможно возникновение следующей неустойчивости: распад магнитогравитационной волны на волну Альфвена и магнитогравитационную волну.

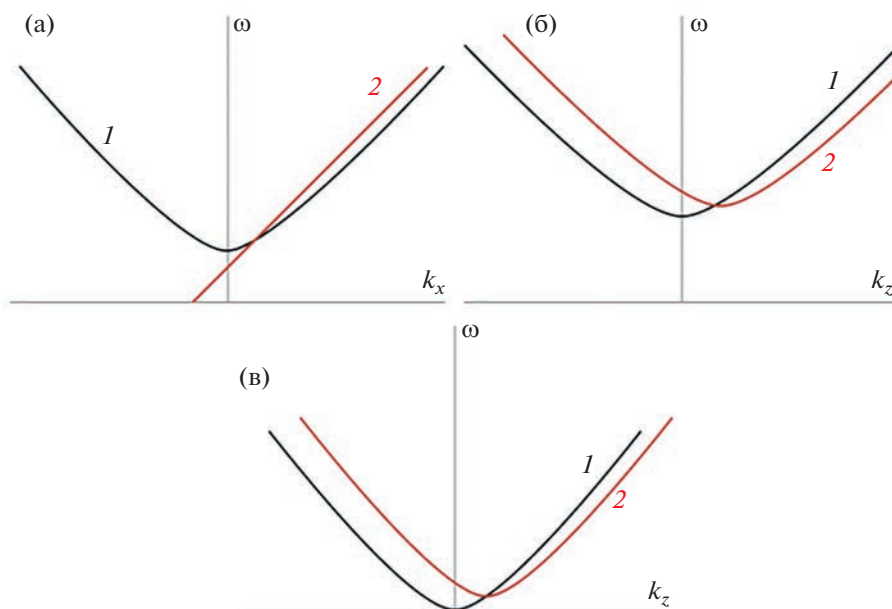


Рис. 15. Условие синхронизма для трех волн на стандартной f -плоскости: две магнитогравитационные волны и волна Альфвена (а): $1 - \omega_{mgr}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_A(k_x - k_{xc}) + \omega_{mgr}(k_{xc})$; три магнитные инерционные волны (б): $1 - \omega_{z1}(k_z)$, $2 - \omega = \omega_{z2}(k_z - k_{zc}) + \omega_{z1}(k_{zc})$; три магнитные инерционные волны (в): $1 - \omega = \omega_{z2}(k_z)$, $2 - \omega = \omega_{z2}(k_z - k_{zc}) + \omega_{z2}(k_{zc})$.

При взаимодействии вертикальных магнитных инерционных волн в стратифицированных течениях вращающейся плазмы в приближении Буссинеска на стандартной f -плоскости возможно возникновение следующих неустойчивостей:

- распад магнитной инерционной волны на магнитную инерционную волну и магнитную инерционную волну;
- распад магнитной инерционной волны на две магнитные инерционные волны.

Проанализируем дисперсионные соотношения волн в приближении Буссинеска на нестандартной f -плоскости. Для найденных в разделе 3.1 волн во вращающейся стратифицированной плазме условие синхронизма выполняется для следующих конфигураций трех волн:

- две магнитострофические волны и магнитная инерционно-гравитационная волна при малом f_H (рис. 16а);
- две магнитострофические волны и магнитная инерционно-гравитационная волна при большом f_H (рис. 16б);
- две магнитные инерционно-гравитационные волны и магнитострофическая волна при большом f_H (рис. 16в).

Таким образом, при взаимодействии магнито-гравитационных и магнитострофических волн в стратифицированных течениях вращающейся плазмы в приближении Буссинеска на нестандартной f -плоскости при малом f_H возможно

возникновение следующей неустойчивости: распад магнитной инерционно-гравитационной волны на две магнитострофические волны.

При взаимодействии магнито-гравитационных и магнитострофических волн в стратифицированных течениях вращающейся плазмы в приближении Буссинеска на нестандартной f -плоскости при большом f_H возможно возникновение следующей неустойчивости: распад магнитной инерционно-гравитационной волны на две магнитострофические волны или на магнитострофическую и магнитную инерционно-гравитационную волны.

Проанализируем дисперсионные соотношения волн в приближении Буссинеска на стандартной и нестандартной β -плоскости. Для найденных в разделе 3.1 новых типов волн во вращающейся стратифицированной плазме условие синхронизма выполняется для следующих конфигураций трех волн:

- три волны магнито-Россби на стандартной β -плоскости (рис. 17а);
- две магнито-гравитационные волны и волна магнито-Россби на стандартной β -плоскости (рис. 17б);
- две волны магнито-Россби и магнито-гравитационная волна на стандартной β -плоскости (рис. 17в);
- три низкочастотные волны магнито-Россби на стандартной β -плоскости (рис. 17г) и на нестандартной β -плоскости (рис. 17д).

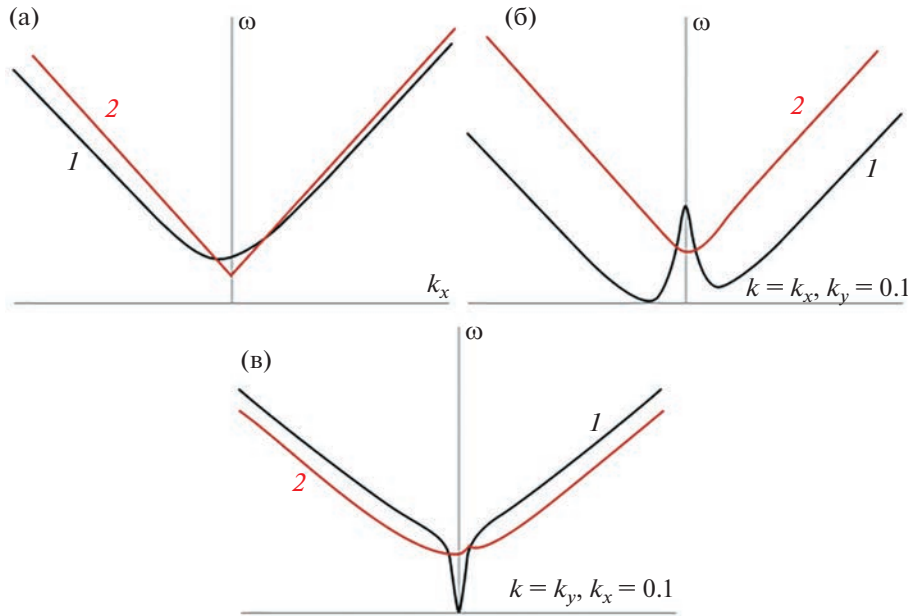


Рис. 16. Условие синхронизма для трех волн на нестандартной f -плоскости: две магнитострофические волны и магнитная инерционно-гравитационная волна (а): $1 - \omega = \omega_{mig_{2D}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mstr_{2D}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mstr_{2D}}(k_{xc})$; две магнитные инерционно-гравитационные волны и магнитострофическая волна при $f_H \gg 1$ (б): $1 - \omega = \omega_{mig_{2D}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mstr_{2D}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mig_{2D}}(k_{xc})$; две магнитные инерционно-гравитационные волны и магнитострофическая волна при $f_H \gg 1$ (в): $1 - \omega = \omega_{mig_{2D}}(k_y)$, $2 - \omega = \omega_{mstr_{2D}}(k_y - k_{yc}) + \omega_{mig_{2D}}(k_{yc})$.

Таким образом, при взаимодействии магнито-гравитационных волн и волн магнито-Россби в стратифицированных течениях вращающейся плазмы в приближении Буссинеска на стандартной β -плоскости возможно возникновение следующих неустойчивостей:

- распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби или магнито-гравитационную волну и волну магнито-Россби;
- распад магнито-гравитационной волны на волну магнито-Россби и магнито-гравитационную волну;
- распад низкочастотной волны магнито-Россби на две низкочастотные волны магнито-Россби.

При взаимодействии низкочастотных волн магнито-Россби в стратифицированных течениях вращающейся плазмы в приближении Буссинеска на нестандартной β -плоскости возможно возникновение следующей неустойчивости: распад низкочастотной волны магнито-Россби на две низкочастотные волны магнито-Россби.

4.2.2. Неупругое приближение для сжимаемой стратифицированной вращающейся плазмы. Проанализируем дисперсионные соотношения волн в неупругом приближении на стандартной f -плоскости. Для найденных в разделе 3.2 волн в сжимаемой вращающейся стратифицированной плазме

условие синхронизма выполняется для следующих конфигураций трех волн:

- две магнито-гравитационные волны в неупругом приближении и волна Альфвена (рис. 18а);
- две магнитострофические и магнитная инерционно-гравитационная волны в вертикальном магнитном поле (рис. 18б, г, д);
- две магнитные инерционно-гравитационные и магнитострофическая волны в вертикальном магнитном поле (рис. 18в);
- три магнитострофические волны в вертикальном магнитном поле (рис. 18е).

Таким образом при взаимодействии магнито-гравитационных волн и волн Альфвена в стратифицированных течениях сжимаемой вращающейся плазмы в неупругом приближении на стандартной f -плоскости возможно возникновение следующей неустойчивости: распад или усиление магнито-гравитационной волны при участии волны Альфвена и магнито-гравитационной волны.

При взаимодействии магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн в вертикальном магнитном поле в стратифицированных течениях сжимаемой вращающейся плазмы в неупругом приближении на стандартной f -плоскости возможно возникновение следующих неустойчивостей:

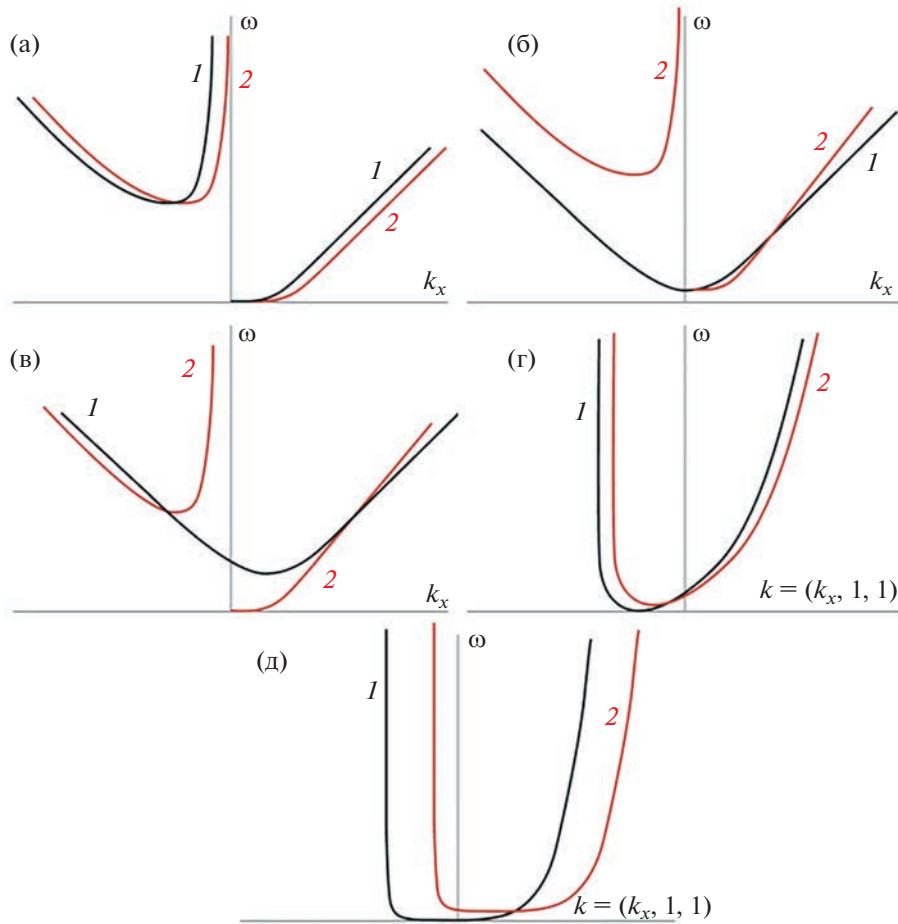


Рис. 17. Условие синхронизма для трех волн: три волны магнито-Россби на стандартной β -плоскости (а): $1 - \omega = \omega_{MR_1}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{MR_1}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MR_1}(k_{x_c})$; две магнитогравитационные волны и волна магнито-Россби на стандартной β -плоскости (б): $1 - \omega = \omega_{mgr}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{MR_1}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{mgr}(k_{x_c})$; две волны магнито-Россби и магнитогравитационная волна на стандартной β -плоскости (в): $1 - \omega = \omega_{MR_1}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mgr}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MR_1}(k_{x_c})$; три низкочастотные волны магнито-Россби на стандартной β -плоскости (г): $1 - \omega = \omega_{MR_{3D}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{MR_{3D}}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MR_{3D}}(k_{x_c})$; три низкочастотные волны магнито-Россби на нестандартной β -плоскости (д): $1 - \omega = \omega_{MR_{3D}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{MR_{3D}}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MR_{3D}}(k_{x_c})$.

- распад магнитострофической волны на магнитную инерционно-гравитационную и магнитострофическую волны, или две магнитные инерционно-гравитационные волны, или магнитострофическую и магнитную инерционно-гравитационную волны, или две магнитострофические волны;

- распад магнитной инерционно-гравитационной волны на две магнитострофические волны.

Проанализируем дисперсионные соотношения волн в неупругом приближении на нестандартной f -плоскости. Для магнитных инерционно-гравитационных волн с принципиально новым дисперсионным соотношением и волн Альфвена в сжимаемой вращающейся стратифи-

цированной плазме условие синхронизма выполняется для следующих конфигураций трех волн:

- две магнитные инерционно-гравитационные волны и волна Альфвена (рис. 19а);
- три магнитные инерционно-гравитационные волны (рис. 19б).

Таким образом, при взаимодействии магнитных инерционно-гравитационных волн с принципиально новым дисперсионным соотношением и волн Альфвена в стратифицированных течениях сжимаемой вращающейся плазмы в неупругом приближении на нестандартной f -плоскости возможно возникновение следующей неустойчивости: распад магнитной инерционно-гравитацион-

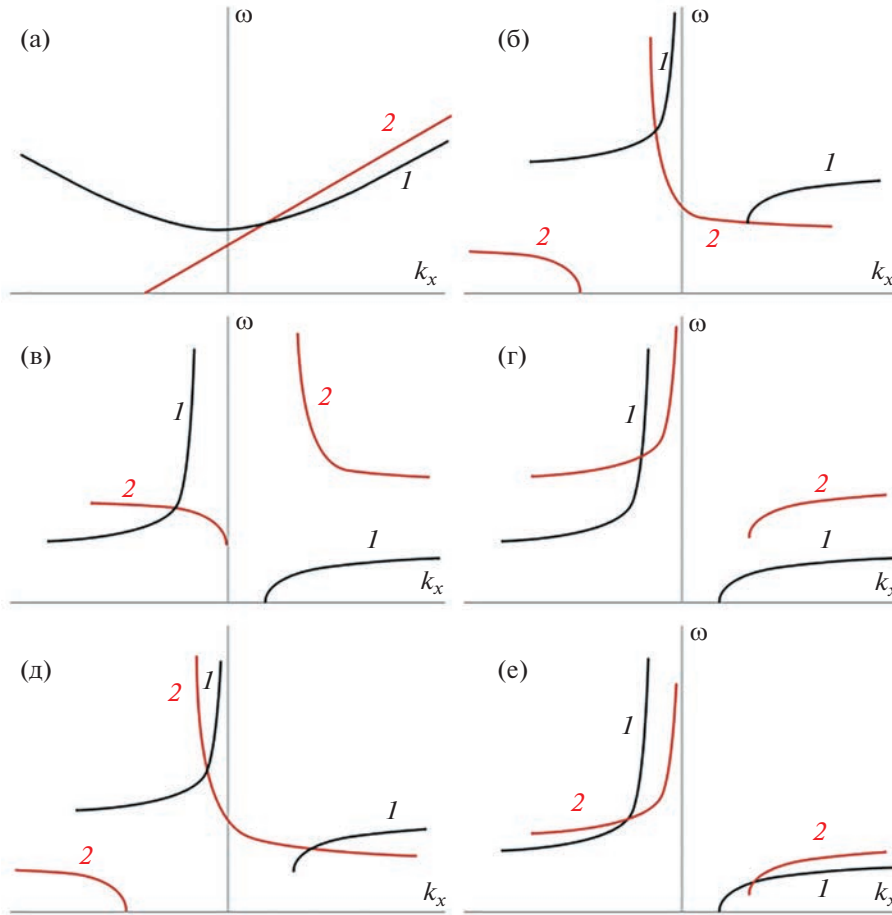


Рис. 18. Условие синхронизма для трех волн на стандартной f -плоскости: две магнитогравитационные волны и волна Альфвена (а): $1 - \omega = \omega_{mgr}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_A(k_x - k_{xc}) + \omega_{mgr}(k_{xc})$; две магнитострофические волны и магнитная инерционно-гравитационная волна (б): $1 - \omega = \omega_{mstr_{B_z}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mig_{B_z}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mstr_{B_z}}(k_{xc})$; магнитострофическая волна и две магнитные инерционно-гравитационные волны (в): $1 - \omega = \omega_{mstr_{B_z}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mig_{B_z}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mig_{B_z}}(k_{xc})$; две магнитострофические волны и магнитная инерционно-гравитационная волна (г): $1 - \omega = \omega_{mstr_{B_z}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mstr_{B_z}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mig_{B_z}}(k_{xc})$; магнитная инерционно-гравитационная волна и две магнитострофические волны (д): $1 - \omega = \omega_{mig_{B_z}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mstr_{B_z}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mstr_{B_z}}(k_{xc})$; три магнитострофические волны (е): $1 - \omega = \omega_{mstr_{B_z}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mstr_{B_z}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mstr_{B_z}}(k_{xc})$.

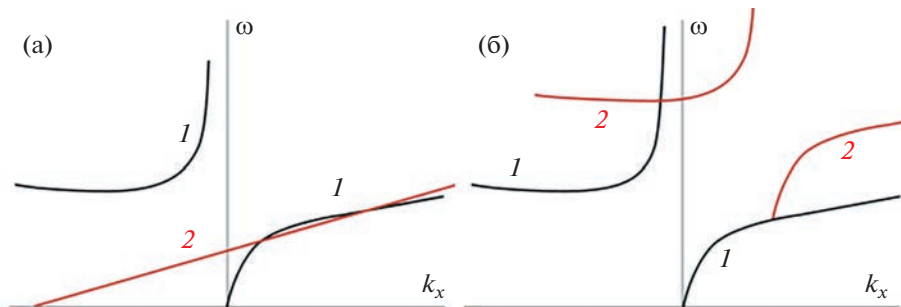


Рис. 19. Условие синхронизма для трех волн на нестандартной f -плоскости: две магнитные инерционно-гравитационные волны и волна Альфвена (а): $1 - \omega = \omega_{mig_{x_1}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_A(k_x - k_{xc}) + \omega_{mig_{x_1}}(k_{xc})$; три магнитные инерционно-гравитационные волны (б): $1 - \omega = \omega_{mig_{x_1}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mig_{x_1}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mig_{x_1}}(k_{xc})$.

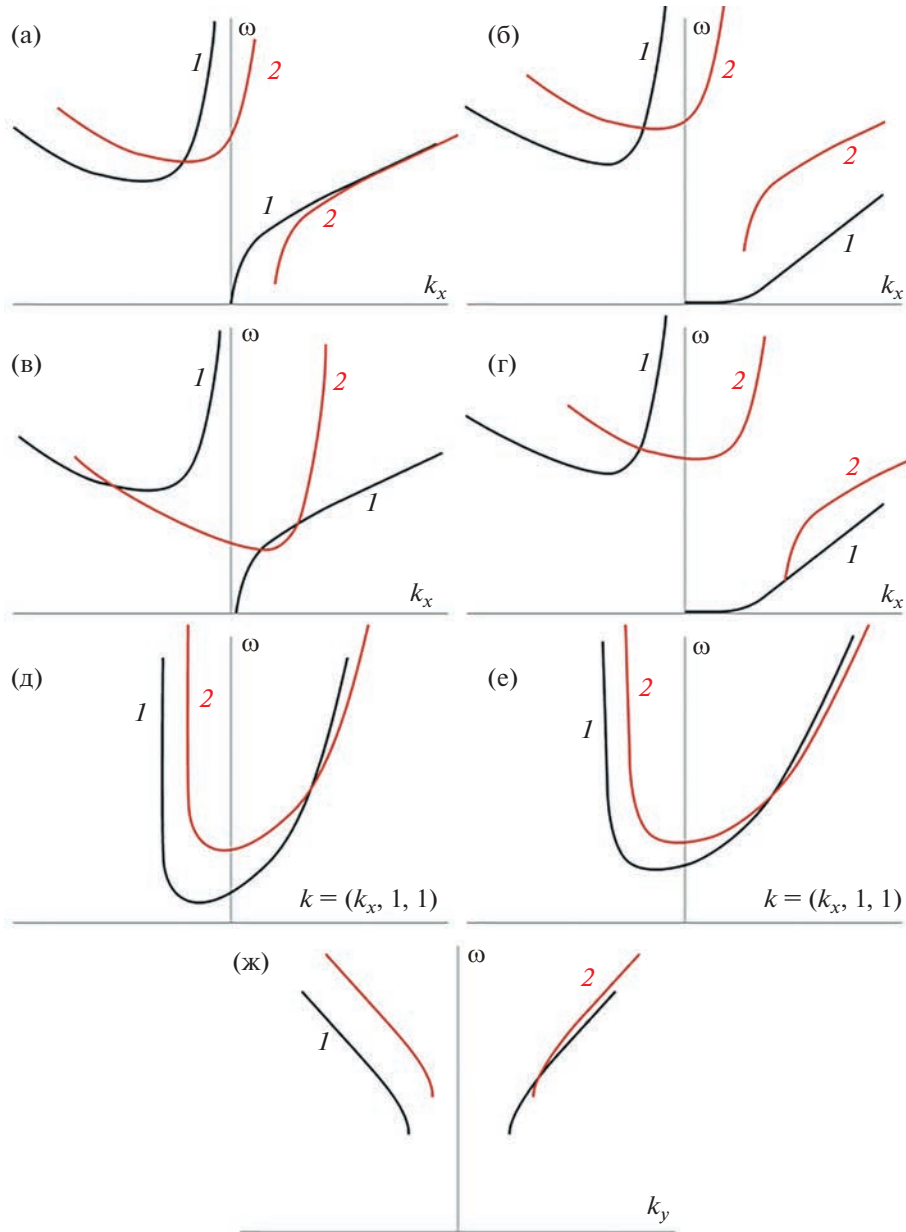


Рис. 20. Условие синхронизма для трех волн: две сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны и волна магнито-Россби на нестандартной β -плоскости: $1 - \omega = \omega_{mig_1}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mig_1}(k_x - k_{xc}) + \omega_{MR_1}(k_{xc})$ (а); $1 - \omega = \omega_{MR_1}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mig_1}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mig_1}(k_{xc})$ (б); две волны магнито-Россби и сжимаемая магнитная инерционно-гравитационная волна на нестандартной β -плоскости: $1 - \omega = \omega_{mig_1}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{MR_1}(k_x - k_{xc}) + \omega_{MR_1}(k_{xc})$ (в); $1 - \omega = \omega_{MR_1}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mig_1}(k_x - k_{xc}) + \omega_{MR_1}(k_{xc})$ (г); три сжимаемые низкочастотные волны магнито-Россби на стандартной β -плоскости (д): $1 - \omega = \omega_{MR_{3D}}(\mathbf{k})$, $2 - \omega = \omega_{MR_{3D}}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_c) + \omega = \omega_{MR_{3D}}(\mathbf{k}_c)$; на нестандартной β -плоскости (е): $1 - \omega = \omega_{MR_{3D}}(\mathbf{k})$, $2 - \omega = \omega_{MR_{3D}}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_c) + \omega = \omega_{MR_{3D}}(\mathbf{k}_c)$; две сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны и сжимаемая магнитострофическая волна с параметром β на нестандартной β -плоскости (ж): $1 - \omega = \omega_{mig_\beta}(k_y)$, $2 - \omega = \omega_{mig_\beta}(k_y - k_{yc}) + \omega_{mstr_\beta}(k_{yc})$.

ной волны на волну Альфвена и магнитную инерционно-гравитационную волну или на две магнитные инерционно-гравитационные волны.

Проанализируем дисперсионные соотношения волн в приближении Буссинеска на стандартной и нестандартной β -плоскости. Для най-

денных в разделе 3.2 новых типов волн в сжимаемой вращающейся стратифицированной плазме условие синхронизма выполняется для следующих конфигураций трех волн:

- две магнитные инерционно-гравитационные волны и волна магнито-Россби на нестандартной β -плоскости (рис. 20а, б);
- две волны магнито-Россби и магнитная инерционно-гравитационная волна на нестандартной β -плоскости (рис. 20в, г);
- три низкочастотные волны магнито-Россби на стандартной β -плоскости (рис. 20д) и на нестандартной β -плоскости (рис. 20е);
- две магнитные инерционно-гравитационные и магнитострофическая волны с параметром β на нестандартной β -плоскости (рис. 20ж).

Таким образом, при взаимодействии трех низкочастотных волн магнито-Россби в стратифицированных течениях сжимаемой вращающейся плазмы в неупругом приближении на стандартной β -плоскости возможно возникновение следующей неустойчивости: распад низкочастотной волны магнито-Россби на две низкочастотные волны магнито-Россби.

При взаимодействии магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби в стратифицированных течениях сжимаемой вращающейся плазмы в неупругом приближении на нестандартной β -плоскости возможно возникновение следующих неустойчивостей:

- распад магнитной инерционно-гравитационной волны на магнитную инерционно-гравитационную волну и волну магнито-Россби или две волны магнито-Россби;
- распад волны магнито-Россби на магнитную инерционно-гравитационную волну и волну магнито-Россби или две магнитные инерционно-гравитационные волны;
- распад низкочастотной волны магнито-Россби на две низкочастотные волны магнито-Россби.

При взаимодействии магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн с параметром β в стратифицированных течениях сжимаемой вращающейся плазмы в неупругом приближении на нестандартной β -плоскости возможно возникновение следующей неустойчивости: распад магнитной инерционно-гравитационной волны на магнитную инерционно-гравитационную и магнитострофическую волны.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приведен обзор современных исследований волновых процессов в астрофизической плазме. Отметим наиболее важные результаты в этом направлении.

Магнитогидродинамические уравнения мелкой воды используются для описания космической и астрофизической плазмы и являются аналогом уравнений мелкой воды в геофизической

гидродинамике. При выводе магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды из полной системы уравнений магнитной гидродинамики несжимаемой плазмы усреднением по высоте слоя предполагается, что распределение давлений удовлетворяет условию гидростатики, а толщина рассматриваемого слоя плазмы мала по отношению к характерному горизонтальному линейному размеру задачи. Важным достижением является развитие теории мелкой воды для астрофизической плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле с корректным учетом условия бездивергентности магнитного поля. В развитой теории поле скоростей содержит только горизонтальные компоненты, в то время как магнитное поле остается трехкомпонентным. Магнитогидродинамическая теория мелкой воды обобщена на случай сжимаемых течений, а также на случай стратифицированных магнитогидродинамических течений плазмы, с учетом внешнего магнитного поля.

Магнитогидродинамические уравнения в приближении мелкой воды во внешнем магнитном поле могут быть использованы для описания течений плазмы на Солнце, течений атмосфер нейтронных звезд, для изучения растекания материи в аккреционных дисках нейтронных звезд, магнитоактивных атмосфер экзопланет, захваченных приливами несущей звезды. Выявленная трехкомпонентность магнитного поля в таких течениях, а также учет крупномасштабной сжимаемости представляются важными для анализа недавних экспериментальных наблюдений волн Россби, а также для понимания наблюдательных данных о солнечной активности и в развитии моделей и идей долговременной изменчивости Солнца. Теория волн Россби может быть использована для анализа данных об R -модах солнечных и звездных осцилляций. Магнитогидродинамические уравнения двуслойной мелкой воды представляют собой единственную возможность самосогласованного учета внешнего магнитного поля и стратификации. Учет стратификации в магнитогидродинамических моделях мелкой воды для вращающейся плазмы важен для анализа осцилляций R -моды во вращающихся звездах и на Солнце и позволяет существенно расширить возможности для интерпретации имеющихся данных наблюдений крупномасштабных волн Россби на Солнце. Также резонансные взаимодействия магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби на β -плоскости могут оказаться принципиально важными для интерпретации различных явлений в плазменной астрофизике, в особенности солнечных сезонов.

Развиты линейная и нелинейная теории магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн во внешнем вертикальном и в горизонтальном магнитных полях. Показано, что магнитные инерционно-гравитационные и магнитострофические волны во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном поле ис-

пытаются трехволновые взаимодействия. Показано существование распадных неустойчивостей: распад магнитной инерционно-гравитационной волны на магнитострофическую и магнитную инерционно-гравитационную волну; распад магнитострофической волны на магнитную инерционно-гравитационную и магнитострофическую волны, распад магнитной инерционно-гравитационной волны на магнитострофическую и магнитную инерционно-гравитационную волну, распад магнитострофической волны на магнитную инерционно-гравитационную и магнитострофическую волны. Обнаружен эффект линейного нарастания амплитуды одной из взаимодействующих волн в поле двух других волн: усиление магнитной инерционно-гравитационной волны в поле либо двух магнитных инерционно-гравитационных волн, либо магнитострофической и магнитной инерционно-гравитационной волн, усиление магнитострофической волны в поле магнитной инерционно-гравитационной и магнитострофической волн, усиление магнитной инерционно-гравитационной волны в поле либо двух магнитных инерционно-гравитационных волн, либо магнитострофической и магнитной инерционно-гравитационной волн, усиление магнитострофической волны в поле магнитной инерционно-гравитационной и магнитострофической волн. Учет крупномасштабной сжимаемости приводит к изменениям в групповой и фазовой скоростях магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн, а также к изменениям в выражениях для коэффициентов трехволновых взаимодействий и инкрементов параметрических неустойчивостей.

Развиты линейная и нелинейная теории волн магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле, показано, что волны магнито-Россби в магнитогидродинамическом приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном магнитном поле испытывают трехволновые взаимодействия в слабонелинейном приближении. Показано существование распадных неустойчивостей: распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби или магнитную инерционно-гравитационную волну и волну магнито-Россби, распад магнитной инерционно-гравитационной волны на волну магнито-Россби и магнитную инерционно-гравитационную волну, распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби или магнитную инерционно-гравитационную волну и волну магнито-Россби, распад магнитной инерционно-гравитационной волны на волну магнито-Россби и магнитную инерционно-гравитационную волну. Обнаружен эффект линейного нарастания амплитуды одной из взаимодействующих волн в поле двух других волн: усиление волны магнито-Россби в поле либо двух волн магнито-Россби, либо магнитной инерционно-гравитационной волны и волны магнито-Россби, усиление магнитной инерционно-гравитационной волны в поле волны магнито-Россби и магнитной инерционно-гравитационной волны, усиление волны магнито-Россби в поле либо двух волн магнито-Россби, либо магнитной инерционно-гравитационной волны и волны магнито-Россби, усиление магнитной инерционно-гравитационной волны в поле волны магнито-Россби и магнитной инерционно-гравитационной волны. Найдены инкременты распадных неустойчивостей.

инерционно-гравитационной волны в поле волны магнито-Россби и магнитной инерционно-гравитационной волны, усиление волны магнито-Россби в поле либо двух волн магнито-Россби, либо магнитной инерционно-гравитационной волны и волны магнито-Россби, усиление магнитной инерционно-гравитационной волны в поле волны магнито-Россби и магнитной инерционно-гравитационной волны. Найдены коэффициенты взаимодействия, инкременты неустойчивостей. Учет сжимаемости приводит к изменениям в групповой и фазовой скоростях волн магнито-Россби, а также к изменениям в выражениях для коэффициентов трехволновых взаимодействий и инкрементов неустойчивостей.

Развиты линейная и нелинейная теории волновых процессов во вращающейся стратифицированной плазме в приближении двуслойной мелкой воды. Найдены дисперсионные соотношения для магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби на β -плоскости и поправки к ним, описывающие влияние стратификации во внешнем вертикальном и в горизонтальном магнитных полях. Показано, что учет стратификации влияет на групповые и фазовые скорости волн. Выявлены трехволновые взаимодействия магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби. Показано существование распадных неустойчивостей для волн во вращающихся стратифицированных течениях в приближении мелкой воды: распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби или на магнитную инерционно-гравитационную волну и волну магнито-Россби, распад магнитной инерционно-гравитационной волны на волну магнито-Россби и магнитную инерционно-гравитационную волну, распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби или на магнитную инерционно-гравитационную волну и волну магнито-Россби, распад магнитной инерционно-гравитационной волны на волну магнито-Россби и магнитную инерционно-гравитационную волну. Обнаружен эффект линейного нарастания амплитуды одной из взаимодействующих волн в поле двух других волн: усиление волны магнито-Россби в поле либо двух волн магнито-Россби, либо магнитной инерционно-гравитационной волны и волны магнито-Россби, усиление магнитной инерционно-гравитационной волны в поле волны магнито-Россби и магнитной инерционно-гравитационной волны, усиление волны магнито-Россби в поле либо двух волн магнито-Россби, либо магнитной инерционно-гравитационной волны и волны магнито-Россби, усиление магнитной инерционно-гравитационной волны в поле волны магнито-Россби и магнитной инерционно-гравитационной волны. Найдены инкременты распадных неустойчивостей.

Магнитогидродинамические уравнения в приближении Буссинеска учитывают трехмерные эффекты и позволяют детально исследовать волновые процессы в магнитной гидродинамике

стратифицированной плазмы. Учет горизонтальной составляющей силы Кориолиса является особенно принципиальным при изучении экваториальных течений. Отметим, что волны Россби обнаружены именно в экваториальной зоне Солнца. Развита линейная и нелинейная теории волновых процессов во вращающейся стратифицированной плазме в приближении Буссинеска. Найдены дисперсионные соотношения для магнитных инерционно-гравитационных волн, магнитострофических волн и волн магнито-Россби. Показано влияние стратификации и учета горизонтальной составляющей силы Кориолиса на динамику найденных волн. Выявлены все возможные типы трехволновых взаимодействий в четырех различных приближениях силы Кориолиса. Найдены следующие распадные неустойчивости для волн в приближении Буссинеска для различных приближений силы Кориолиса: распад магнитной инерционной волны на магнитную инерционную волну и магнитную инерционную волну, распад магнитной инерционной волны на две магнитные инерционные волны на стандартной f -плоскости; распад магнитной инерционно-гравитационной волны на две магнитострофические волны на нестандартной f -плоскости при малом f_H , распад магнитной инерционно-гравитационной волны на две магнитострофические волны или на магнитострофическую и магнитную инерционно-гравитационную волны на нестандартной f -плоскости при большом f_H ; распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби или магнитогравитационную волну и волну магнито-Россби, распад магнитогравитационной волны на волну магнито-Россби и магнитогравитационную волну, распад низкочастотной волны магнито-Россби на две низкочастотные волны магнито-Россби на стандартной β -плоскости; распад низкочастотной волны магнито-Россби на две низкочастотные волны магнито-Россби на нестандартной β -плоскости. Обнаружен эффект линейного нарастания амплитуды одной из взаимодействующих волн в поле двух других волн в аналогичных конфигурациях. Найдены инкременты распадных неустойчивостей.

Магнитогидродинамические уравнения сжимаемой вращающейся плазмы в неупругом приближении важны для анализа процессов в солнечном тахоклине, устойчиво стратифицированных областях в недрах звезд (излучающей зоны) и планет (внешний жидкий слой ядра), астрофизических дисках, экзоплантах, а также для анализа осцилляций вращающихся звезд и Солнца. Отметим, что первые экспериментальные наблюдения крупномасштабных течений астрофизической плазмы выполнены на основе изучения магнитных полей или методами астросейсмологии, что естественным образом мотивирует развитие магнитогидродинамической теории с учетом как эффектов сжимаемости, так и эффектов магнитных полей.

Развита теория магнитогидродинамических течений сжимаемой вращающейся плазмы с устойчивой стратификацией в неупругом приближении. Получены магнитогидродинамические уравнения в неупругом приближении для сжимаемых вращающихся течений с устойчивой стратификацией в приближении стандартных и нестандартных f - и β -плоскостей для силы Кориолиса. Развита линейная и нелинейная теории магнитных инерционно-гравитационных волн, магнитострофических волн и волн магнито-Россби, найдены их дисперсионные соотношения. Показано отличие в динамике найденных волн в неупругом приближении от волн в приближении Буссинеска. Показано влияние сжимаемости, стратификации и учета горизонтальной составляющей силы Кориолиса на динамику найденных волн. Выявлены все возможные типы трехволновых взаимодействий в четырех различных приближениях силы Кориолиса. Найдены следующие распадные неустойчивости для волн в приближении Буссинеска для различных приближений силы Кориолиса: распад магнитострофической волны на магнитную инерционно-гравитационную и магнитострофическую волны, или две магнитные инерционно-гравитационные волны, или магнитострофическую и магнитную инерционно-гравитационную волны, или две магнитострофические волны, распад магнитной инерционно-гравитационной волны на две магнитострофические волны на стандартной f -плоскости; распад магнитной инерционно-гравитационной волны на волну Альфвена и магнитную инерционно-гравитационную волну или на две магнитные инерционно-гравитационные волны на нестандартной f -плоскости; распад низкочастотной волны магнито-Россби на две низкочастотные волны магнито-Россби на стандартной β -плоскости; распад магнитной инерционно-гравитационной волны на магнитную инерционно-гравитационную волну и волну магнито-Россби или две волны магнито-Россби, распад волны магнито-Россби на магнитную инерционно-гравитационную волну и волну магнито-Россби или две магнитные инерционно-гравитационные волны, распад низкочастотной волны магнито-Россби на две низкочастотные волны магнито-Россби, распад магнитной инерционно-гравитационной волны на магнитную инерционно-гравитационную и магнитострофическую волны на нестандартной β -плоскости. Обнаружен эффект линейного нарастания амплитуды одной из взаимодействующих волн в поле двух других волн в аналогичных трехволновых конфигурациях. Найдены инкременты распадных неустойчивостей.

Работа поддержана Фондом развития теоретической физики и математики “Базис”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Miesch M.S., Gilman P.A.* // Solar Phys. 2004. V. 220. P. 287.

2. Gilman P.A. // *Astrophys. J. Lett.* 2000. V. 544. P. L79.
3. Zaqarashvili T.V., Oliver R., Ballester J.L., Shergelashvili B.M. // *Astron. Astrophys.* 2007. V. 470. P. 815.
4. Heng K., Spitkovsky A. // *Astrophys. J.* 2009. V. 703. P. 1819.
5. Spitkovsky A., Levin Y., Ushomirsky G. // *Astrophys. J.* 2002. V. 566. P. 1018.
6. Inogamov N.A., Sunyaev R.A. // *Astron. Lett.* 1999. V. 25. P. 269.
7. Inogamov N.A., Sunyaev R.A. // *Astron. Lett.* 2010. V. 36. P. 848.
8. Cho J.Y.K. // *Philosophical Transac. Royal Soc. A: Mathematical, Phys. Engineering Sci.* 2008. V. 366. P. 4477.
9. Heng K., Workman J. // *Astrophys. J. Supplement Ser.* 2014. V. 213. P. 27.
10. Heng K., Showman A.P. // *Ann. Rev. Earth Planetary Sci.* 2015. V. 43. P. 509.
11. Tobias S.M., Diamond P.H., Hughes D.W. // *Astrophys. J. Lett.* 2007. V. 667. P. L113.
12. Balk A.M. // *Astrophys. J.* 2014. V. 796. P. 143.
13. Карельский К.В., Петросян А.С., Тарасевич С.В. // *ЖЭТФ.* 2011. Т. 140. С. 606.
14. Karelsky K.V., Petrosyan A.S., Tarasevich S.V. // *Physica Scripta.* 2013. V. T155. P. 014024.
15. De Sterck H. // *Phys. Plasmas.* 2001. V. 8. P. 3293.
16. Dellar P.J. // *Phys. Plasmas.* 2003. V. 10. P. 581.
17. Zeitlin V. // *Nonlinear Processes Geophys.* 2013. V. 20. P. 893.
18. Aristov S.N., Frik P.G. // *J. Appl. Mechanics Technical Phys.* 1991. V. 32. P. 189.
19. Карельский К.В., Петросян А.С., Черняк А.В. // *ЖЭТФ.* 2012. Т. 141. С. 1206.
20. Карельский К.В., Петросян А.С., Черняк А.В. // *ЖЭТФ.* 2013. Т. 143. С. 779.
21. Зельдович Б., Райзер Ю. *Физика ударных волн и высокотемпературных явлений.* М.: Наука, 1966.
22. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.* М.: Наука, 1968.
23. Годунов С.К. // *Математич. сборник.* 1959. Т. 47. С. 271.
24. Karelsky K.V., Petrosyan A.S., Slavin A.G. // *Russian J. Numerical Analysis Mathematical Modelling.* 2009. V. 24. № 3. P. 229.
25. The solar tachocline // Eds. Hughes D.W., Rosner R., Weiss N.O. Cambridge University Press, 2007.
26. Dikpati M., Gilman P.A. // *Astrophys. J.* 2001. V. 551. P. 536.
27. Zaqarashvili T.V., Oliver R., Ballester J.L., Carbonell M., Khodachenko M.L., Lammer H., Leitzinger M., Odert P. // *Astron. Astrophys.* 2011. V. 532. P. A139.
28. Braithwaite J., Spruit H.C. // *Royal Soc. Open Sci.* 2017. V. 4. P. 160271.
29. Philidet J., Gissinger C., Lignières F., Petitdemange L. // *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics.* 2020. V. 114. P. 336.
30. Stone J.M., Hawley J.F., Gammie C.F., Balbus S.A. // *Astrophys. J.* 1996. V. 463. P. 656.
31. Batygin K., Stanley S., Stevenson D.J. // *Astrophys. J.* 2013. V. 776. P. 53.
32. Löptien B., Gizon L., Birch A.C., Schou J., Proxauf B., Duvall Jr. T.L., Bogart R.S., Christensen U.R. // *Nature Astron.* 2018. V. 2. P. 568.
33. Dikpati M., Belucz B., Gilman P.A., McIntosh S.W. // *Astrophys. J.* 2018. V. 862. P. 159.
34. Böning V.G.A., Hu H., Gizon L. // *Astron. Astrophys.* 2019. V. 629. P. A26.
35. Saio H. // *Astrophys. J.* 1982. V. 256. P. 717.
36. Sturrock P.A., Bush R., Gough D.O., Scargle J.D. // *Astrophys. J.* 2015. V. 804. P. 47.
37. Wolff C.L. // *Astrophys. J.* 1998. V. 502. P. 961.
38. McIntosh S.W., Cramer W.J., Marcano M.P., Leamon R.J. // *Nature Astron.* 2017. V. 1. P. 0086.
39. Zaqarashvili T.V., Gurgenshvili E. // *Frontiers Astron. Space Sci.* 2018. V. 5. P. 7.
40. Gizon L., Fournier D., Albekioni M. // *Astron. Astrophys.* 2020. V. 642. P. A178.
41. Dikpati M., Cally P.S., McIntosh S.W., Heifetz E. // *Sci. Reps.* 2017. V. 7. P. 14750.
42. Hunter S. *Waves in shallow water magnetohydrodynamics:* дис. University of Leeds, 2015.
43. Федотова М.А., Климачков Д.А., Петросян А.С. // *Физика плазмы.* 2020. Т. 46. С. 57.
44. Petrosyan A.S., Klimachkov D.A., Fedotova M.A., Zinyakov T.A. // *Atmosphere.* 2020. V. 11. P. 314.
45. Karelsky K.V., Petrosyan A.S., Tarasevich S.V. // *J. Experimental Theoretical Phys.* 2014. V. 119. P. 311.
46. Климачков Д.А., Петросян А.С. // *ЖЭТФ.* 2016. Т. 149. С. 965.
47. Климачков Д.А., Петросян А.С. // *ЖЭТФ.* 2016. Т. 150. С. 602.
48. Климачков Д.А., Петросян А.С. // *ЖЭТФ.* 2017. Т. 152. С. 705.
49. Klimachkov D.A., Petrosyan A.S. // *Phys. Lett. A.* 2017. V. 381. P. 106.
50. Zaqarashvili T.V., Oliver R., Ballester J.L. // *Astrophys. J. Lett.* 2009. V. 691. P. L41.
51. Márquez-Artavia X., Jones C.A., Tobias S.M. // *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics.* 2017. V. 111. P. 282.
52. Zaqarashvili T. // *Astrophys. J.* 2018. V. 856. P. 32.
53. Петвиашвили В.И., Похотелов О.А. *Уединенные волны в плазме и атмосфере.* М.: Энергоатомиздат, 1989.
54. Vallis G.K. *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation.* Cambridge Univ. Press, 2006.
55. Zeitlin V. *Geophysical fluid dynamics: understanding (almost) everything with rotating shallow water models.* Oxford Univ. Press, 2018.
56. Kaladze T.D., Horton W., Kahlon L.Z., Pokhotelov O., Onishchenko O. // *J. Geophys. Res.: Space Phys.* 2013. V. 118. P. 7822.
57. Онищенко О.Г., Похотелов О.А., Астафьева Н.М. // *УФН.* 2008. Т. 178. С. 605.
58. Onishchenko O.G., Pokhotelov O.A., Sagdeev R.Z., Shukla P.K., Stenflo L. // *Nonlinear Processes Geophys.* 2004. V. 11. P. 241.
59. Dikpati M., Charbonneau P. // *Astrophys. J.* 1999. V. 518. P. 508.
60. Dikpati M., Gilman P.A., Chatterjee S., McIntosh S.W., Zaqarashvili T.V. // *Astrophys. J.* 2020. V. 896. P. 141.
61. Mandal K., Hanasoge S. // *Astrophys. J.* 2020. V. 891. P. 125.
62. Raphaldini B., Raupp C.F.M. // *Astrophys. J.* 2015. V. 799. P. 78.
63. Raphaldini B., Medeiros E., Raupp C.F.M., Teruya A.S. // *Astrophys. J. Lett.* 2020. V. 890. P. L13.
64. Andersson N., Kokkotas K., Schutz B.F. // *Astrophys. J.* 1999. V. 510. P. 846.
65. Lou Y.Q. // *Astrophys. J. Lett.* 2001. V. 563. P. L147.

66. Lou Y.Q., Lian B. // Monthly Notices Royal Astron. Soc. 2012. V. 420. P. 2147.
67. Liang Z.C., Gizon L., Birch A.C., Duvall Jr. T.L. // Astron. Astrophys. 2019. V. 626. P. A3.
68. Dikpati M., McIntosh S.W., Bothun G., Cally P.S., Ghosh S.S., Gilman P.A., Umurhan O.M. // Astrophys. J. 2018. V. 853. P. 144.
69. Lou Y.Q. // Astrophys. J. 2000. V. 540. P. 1102.
70. Dikpati M., McIntosh S.W. // Space Weather. 2020. V. 18. P. e2018SW002109.
71. Dikpati M., McIntosh S.W., Wing S. // Frontiers Astron. Space Sci. 2021. V. 8. P. 71.
72. Kuhn J.R., Armstrong J.D., Bush R.I., Scherrer P. // Nature. 2000. V. 405. P. 544.
73. Gibson S.E., Vourlidas A., Hassler D.M., Rachmeler L.A., Thompson M.J., Newmark J., Velli M., Title A., McIntosh S.W. // Frontiers Astron. Space Sci. 2018. V. 5. P. 32.
74. Zaqarashvili T.V., Carbonell M., Oliver R., Ballester J.L. // Astrophys. J. 2010. V. 709. P. 749.
75. Zaqarashvili T.V., Oliver R., Hanslmeier A., Carbonell M., Ballester J.L., Gachechiladze T., Usoskin I.G. // Astrophys. J. Lett. 2015. V. 805. P. L14.
76. McIntosh S.W., Leamon R.J., Krista L.D., Title A.M., Hudson H.S., Riley P., Harder J.W., Kopp G., Snow M., Woods T.N., Kasper J.C., Stevens M.L., Ulrich R.K. // Nature Commun. 2015. V. 6. P. 6491.
77. Климачков Д.А., Петросян А.С. // ЖЭТФ. 2018. Т. 154. С. 1239.
78. Федотова М.А., Петросян А.С. // ЖЭТФ. 2020. Т. 158. С. 374.
79. Yano J.I. // J. Fluid Mechanics. 2017. V. 810. P. 475.
80. Billant P., Chomaz J.M. // Phys. Fluid. 2001. V. 13. P. 1645.
81. Lee S., Takada R. // Indiana University Mathematics J. 2017. P. 2037.
82. Takehiro S. // Phys. the Earth and Planetary Interiors. 2015. V. 241. P. 37.
83. Takehiro S., Sasaki Y. // Phys. the Earth and Planetary Interiors. 2018. V. 276. P. 258.
84. Nakagawa T. // Phys. the Earth and Planetary Interiors. 2011. V. 187. P. 342–352.
85. Berkoff N.A. The Anelastic Approximation: Magnetic Buoyancy and Magnetoconvection: дис. University of Leeds, 2011.
86. Spiegel E.A., Veronis G. // Astrophys. J. 1960. V. 131. P. 442.
87. Spiegel E.A., Weiss N.O. // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. 1982. V. 22. P. 219.
88. Федотова М.А., Петросян А.С. // ЖЭТФ. 2020. Т. 158. С. 1188.
89. Fedotova M., Klimachkov D., Petrosyan A. // Universe. 2021. V. 7. P. 87.
90. Brown B.P., Vasil G.M., Zweibel E.G. // Astrophys. J. 2012. V. 756. P. 109.
91. Almgren A.S., Bell J.B., Nonaka A., Zingale M. // Computing Sci. Engineering. 2009. V. 11. P. 24.
92. Batchelor G.K. // Quarterly J. Royal Meteorological Soc. 1953. V. 79. P. 224.
93. Charney J.G., Ogura Y. // J. Meteorological Soc. Japan. Ser. II. 1960. V. 38. P. 19a.
94. Gough D.O. // J. Atmospheric Sci. 1969. V. 26. P. 448.
95. Bannon P.R. // J. Atmospheric Sci. 1996. V. 53. P. 3618.
96. Calkins M.A., Julien K., Marti P. // Proceed. Royal Soc. A: Mathematical, Phys. Engineering Sci. 2015. V. 471. P. 20140689.
97. Paolucci S. // NASA STI/Recon Technical Report N. 1982. V. 83. P. 26036.
98. Botta N., Klein R., Almgren A. Dry atmosphere asymptotics. Potsdam Inst. for Climate Impact Research, 1999.
99. Klein R. et al. // J. Engineering Mathemat. 2001. V. 39. P. 261.
100. Braginsky S.I., Roberts P.H. // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 1995. V. 79. P. 1.
101. Glatzmaier G.A., Roberts P.H. // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1996. V. 97. P. 81.
102. Olson P., Christensen U.R. // Earth Planetary Sci. Lett. 2006. V. 250. P. 561.
103. Jones C.A., Kuzanyan K.M., Mitchell R.H. // J. Fluid Mechanics. 2009. V. 634. P. 291.
104. Gilman P.A., Glatzmaier G.A. // Astrophys. J. Supplement Ser. 1981. V. 45. P. 335.
105. Yadav R.K., Bloxham J. // Proceed. National Academy Sci. 2020. V. 117. P. 13991.
106. Glatzmaier G.A. // J. Computational Phys. 1984. V. 55. P. 461.
107. Lantz S.R., Fan Y. // Astrophys. J. Supplement Ser. 1999. V. 121. P. 247.
108. Miesch M.S., Elliott J.R., Toomre J., Clune T.L., Glatzmaier G.A., Gilman P.A. // Astrophys. J. 2000. V. 532. P. 593.
109. Brun A.S., Miesch M.S., Toomre J. // Astrophys. J. 2004. V. 614. P. 1073.
110. Brown B.P., Browning M.K., Brun A.S., Miesch M.S., Toomre J. // Astrophys. J. 2008. V. 689. P. 1354.
111. Brown B.P., Miesch M.S., Browning M.K., Brun A.S., Toomre J. // Astrophys. J. 2011. V. 731. P. 69.
112. Smolarkiewicz P.K., Charbonneau P. // J. Computational Phys. 2013. V. 236. P. 608.
113. Fedotova M., Klimachkov D., Petrosyan A. // Monthly Notices Royal Astronom. Soc. 2022. V. 509. P. 314326.
114. Должанский Ф. Основы геофизической гидродинамики. Litres, 2018.
115. Showman A.P., Tan X., Parmentier V. // Space Sci. Rev. 2020. V. 216. P. 1.
116. Онищенко О.Г., Похотелов О.А., Астафьева Н.М., Хортон В., Федун В.Н. // УФН. 2020. Т. 190. С. 732.
117. Zaqarashvili T.V., Albekioni M., Ballester J.L., Bekki Y., Biancofiore L., Birch A.C., Dikpati M., Gizon L., Gurgenchvili E., Heifetz E., Lanza A.F., McIntosh S.W., Ofman L., Oliver R., Proxauf B., Umurhan O.M., Yellin-Bergovoy R. // Space Sci. Rev. 2021. Т. 217. С. 1.
118. Незлин М.В. Вихри Россби и спиральные структуры: Астрофизика и физика плазмы в опытах на мелкой воде. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.
119. Raymond D.J. Physics 589 – Geophysical Fluid Dynamics. Wave modes of a resting atmosphere. Chapter 3: Sound, Inertia-Gravity Waves, and Lamb Waves // Physics Internal Website. <http://kestrel.nmt.edu/raymond/classes/ph589/notes/ss-modes/ssmodes.pdf>.
120. Goldstein J., Townsend R.H.D., Zweibel E.G. // Astrophys. J. 2019. V. 881. P. 66.
121. Newell A.C. // J. Fluid Mechanics. 1969. V. 35. P. 255.
122. Ostrovsky L. Asymptotic perturbation theory of waves. World Scientific, 2014.
123. D. Craik Wave interactions and fluid flows. Cambridge: Univ. Press, 1988.