

О СТАЦИОНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ПЛОТНОЙ ПЛАЗМЫ В УСЛОВИЯХ ЛОКАЛИЗОВАННОГО ЭНЕРГОВКЛАДА

© 2023 г. И. С. Абрамов^{a, b, *}, Е. Д. Господчиков^a, А. Г. Шалашов^a

^a Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия

^b Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

*e-mail: abramov@ipfran.ru

Поступила в редакцию 01.09.2022 г.

После доработки 07.10.2022 г.

Принята к публикации 15.10.2022 г.

Представлена одномерная газодинамическая модель, позволяющая установить необходимые условия возникновения и характеристики стационарного течения сжимаемой сплошной среды с нелинейной теплопроводностью, примером которой является полностью или частично ионизированная плазма, при наличии локализованного источника тепла заданной мощности.

Ключевые слова: гидродинамика плазмы, стационарный разряд, нелинейная теплопроводность

DOI: 10.31857/S0367292122601084, **EDN:** NPIRMS

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время активно развиваются приложения, связанные с применением разряда, поддерживаемого излучением гиротрона в потоке газа [1–5]. Современные приборы способны работать в субтерагерцевом диапазоне частот и обладают средней мощностью на уровне сотен киловатт [6], что позволяет поддерживать плазму с плотностями до 10^{16} см⁻³ и достигать средних энергий электронов порядка 100 эВ [7]. Данные условия являются благоприятными с точки зрения протекания в плазме элементарных процессов, связанных с электронным ударом, например, генерации многозарядных ионов, используемых в ускорителях заряженных частиц и являющихся источником экстремального ультрафиолетового излучения для литографии [8, 9].

Одним из определяющих преимуществ применения гиротронов для поддержания обсуждаемого разряда традиционно называют возможность обеспечить работу в режиме длительных импульсов вплоть до стационарной генерации. С этим связываются надежды на реализацию стационарного разряда и, соответственно, разработку стационарных источников частиц и излучения. Важной задачей теоретического описания обсуждаемых разрядов, таким образом, является установление возможности реализации в них стационарного течения плазмы в зависимости от набора внешних управляющих параметров, определяемых системой напуска газа, механизмом погло-

щения излучения, наличием и конфигурацией внешнего магнитного поля и пр.

С точки зрения классификации обсуждаемый субтерагерцевый разряд можно назвать предельным случаем непрерывного оптического разряда в потоке газа [10], главным приложением которого является разработанный на его основе лазерный плазмотрон [11, 12]. Несмотря на различия в параметрах плазмы и поддерживающего излучения субтерагерцевого и оптического разрядов в потоке газа, их ключевые свойства во многом являются схожими:

1) характерные пространственные масштабы области энерговклада малы по сравнению с масштабами разряда в целом;

2) существенную роль в балансе энергии играют потери за счет неупругих соударений (в частности, потери на излучение атомов и ионов);

3) плазма разряда достаточно плотная и допускает гидродинамическое описание ее компонент;

4) теплопроводность плазмы нелинейна.

В случае непрерывного оптического разряда плазма, как правило, равновесна, и описание производится при помощи уравнений гидродинамики, записываемых для скорости потока газа, его концентрации и температуры, а обусловленные наличием ионизации процессы отражаются в соответствующей температурной зависимости коэффициентов уравнения баланса энергии. Такой подход с успехом развивали в своих работах Ю.П. Райзер и С.Т. Суржиков [13–15]. Субтерагерцевый разряд характеризуется, как правило,

полностью ионизированной и, зачастую, неравновесной плазмой с горячими электронами. В этом случае уравнения гидродинамики записываются для газодинамических характеристик потока ионов, при необходимости — многозарядных, с явным учетом последовательной ионизации электронным ударом. При этом давление плазмы определяется давлением горячих электронов, концентрация которых связана с концентрацией ионов в силу соотношения квазинейтральности. Такое описание в приближении бесконечно большой электронной теплопроводности реализовано в работах [16–23]. Важно отметить, что, когда динамика в ионном составе связана с последовательной ионизацией электронным ударом, в силу достаточно резкого уменьшения характерных сечений ионизации с ростом заряда иона, в одной и той же точке стационарного потока плазмы многозарядных ионов присутствуют, как правило, лишь фракции с минимальным отличием зарядовых чисел. В этой ситуации можно отказаться от описания направленной скорости каждой из ионных фракций в отдельности и перейти к описанию потока плазмы в одножидкостном приближении, считая, что в каждой точке потока направленные скорости представленных в ней ионных компонент мало отличаются друг от друга и, следовательно, от локальной средней скорости потока. Таким образом, как в случае субтерагерцевого, так и в случае оптического разряда в потоке газа описание течения плазмы может быть выполнено в приближении одножидкостной гидродинамики, причем интерес представляет в первую очередь распределение характеристик плазмы вдоль потока, для приближенного описания которых целесообразно построение квазиодномерных моделей. Нелинейность теплопроводности, указанная в качестве свойства 1), имеет в непрерывном оптическом и субтерагерцевом разряде разную природу. Теплопроводность плазмы оптического разряда определяется теплопроводностью газа, нагретого до высоких температур [24]. В полностью ионизированной плазме с горячими электронами, характерной для субтерагерцевого разряда, теплопроводность плазмы определяется нелинейной теплопроводностью электронов [25].

В целом, можно сказать, что классическая теория Ю.П. Райзера допускает прямое обобщение на интересующий нас случай субтерагерцевого разряда с многозарядными ионами введением нового эффективного уравнения состояния, которое аналогично работам [16–23] учитывало бы изменение среднего заряда ионов за счет последовательной многократной ионизации, и адекватного описанию поглощения энергии излучения гиротрона. Однако в вопросе о возможности реализации стационарного течения, отвечающего тому или иному набору внешних

параметров, классическое рассмотрение даже в рамках самых простых одномерных моделей предполагает решение задачи методом установления [14, 15]. В условиях, когда интерес представляют лишь характеристики установившегося течения и значения необходимых для его реализации внешних параметров, такое описание представляется избыточным.

В настоящей работе рассматривается одномерное течение простой модельной сплошной среды, обладающее свойствами 1)–4). Предложен подход, позволяющий решить задачу о структуре стационарного течения и установить необходимые для его реализации значения внешних параметров, оставаясь в рамках анализа системы стационарных уравнений гидродинамики. В частности, рассмотренная в работе модель предоставляет возможность описания в рамках одножидкостной гидродинамики стационарного течения полностью ионизированной плазмы, содержащей одну ионную компоненту и нагреваемой локализованным источником тепла [25]. Для аналогичного течения плазмы многозарядных ионов, распределение которых по зарядовым состояниям изменяется вдоль потока за счет последовательной ионизации, связь давления с концентрацией и температурой (уравнение состояния) и функция потерь энергии являются более сложными по сравнению с рассмотренными в настоящей работе, и при необходимости корректного учета связанных с последовательной ионизацией эффектов предложенная модель должна быть обобщена включением явного описания изменения концентрации каждой ионной компоненты в отдельности и зависимости потерь от ионного состава [16–19].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим стационарное одномерное течение идеального газа, задаваемое плотностью потока G и динамическим давлением p . Поток распространяется вдоль оси z , характеризуется направленной скоростью $u(z)$, концентрацией газа $n(z)$ и его температурой $T(z)$. Для описания течения будем использовать систему стационарных уравнений гидродинамики [26]

$$\frac{d}{dz}(nu) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dz}(mnu^2 + nT) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dz}\left(nu\left[\frac{mu^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}T\right] - \kappa(T)\frac{dT}{dz}\right) = I\delta(z) - Q(T, n), \quad (3)$$

где $\kappa(T)$ — коэффициент (нелинейной) теплопроводности, m — масса частиц газа, γ — показа-

тель адиабаты Пуассона. В потоке присутствует источник тепла, характеризующийся плотностью мощности I и пренебрежимо малой протяженностью по оси z , которая описывается дельта-функцией Дирака $\delta(z)$ в (3). Получаемая от источника энергия тратится на нагрев газа и теряется в результате происходящих в газе неупругих элементарных процессов, характеризующихся объемной плотностью мощности потерь $Q(T, n)$ в (3). Температурная зависимость плотности мощности потерь определяется сечениями и характерными энергиями неупругих процессов, которые носят, как правило, пороговый характер. Поэтому будем предполагать, что при уменьшении температуры ниже некоторого значения $T_{\min}$, определяемого энергиями возбуждения внутренних степеней свободы, объемная плотность мощности потерь становится нулевой, т.е. $Q(T, n) \propto \Theta(T - T_{\min})$, $\Theta(x)$ – тета-функция Хевисайда.

Уравнения (1) и (2) представляют собой законы сохранения плотности потока и динамического давления соответственно

$$nu = G, \quad (4)$$

$$mnu^2 + nT = p, \quad (5)$$

что позволяет выразить скорость потока и концентрацию газа как функции температуры. Тем самым задача сводится к нахождению зависимости $T(z)$ из уравнения баланса энергии (3).

Выражения для u и n неоднозначны и имеют две ветви

$$u^{\pm} = \frac{p}{2mG} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2mG}\right)^2 - \frac{T}{m}}, \quad (6)$$

$$n^{\pm} = G \left(\frac{p}{2mG} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2mG}\right)^2 - \frac{T}{m}} \right)^{-1}. \quad (7)$$

Знаку “–” соответствует дозвуковой режим течения, а знаку “+” – сверхзвуковой. Из выражений видно, что непрерывный переход скорости потока через скорость изотермического звука $c_s = \sqrt{T/m}$ и, соответственно, смена ветви возможны только при достижении температурой значения

$$T_{\max} = \frac{p^2}{4mG^2}, \quad (8)$$

являющегося максимально возможным для течения, определяемого данными p и G . Поскольку температура газа спадает при удалении от локализованного источника тепла, значение $T_{\max}$ может достигаться лишь на самом источнике. Таким образом, непрерывный переход между режимами возможен только в области источника тепла.

Пользуясь выражениями (6), (7) и рассматривая течение вне области источника, перепишем уравнение баланса энергии (3) в виде

$$\frac{d}{dz} \left(GT_{\max} \left[\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \frac{T}{T_{\max}} \pm \sqrt{1 - \frac{T}{T_{\max}}} \right] - \kappa(T) \frac{dT}{dz} \right) = -Q^{\pm}(T), \quad (9)$$

где $Q^{\pm}(T) = Q(T, n^{\pm}(T))$ – известная функция температуры, причем $Q^{\pm} = 0$ при $T < T_{\min}$. Искомое решение $T(z)$ получается в результате непрерывной “сшивки” решений (9), полученных для областей $z < 0$ и $z > 0$, в точке $z = 0$. Для корректной математической постановки задачи остается задать необходимые граничные условия.

Чтобы однозначно определить решение уравнения (9), требуется задать в некоторой точке значение температуры и ее первой производной. В рассматриваемой постановке единственным выделенным значением температуры является температура отключения объемных потерь $T_{\min}$. Поскольку плотность мощности источника тепла I конечна, температура газа снижаясь от области источника, локализованного в $z = 0$, стремится к $T_{\min}$, обеспечивая тем самым конечные объемные потери, а ее производная, соответственно, стремится к нулю

$$\lim_{T \rightarrow T_{\min}} (dT/dz) = 0. \quad (10)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае нам известна лишь связь между температурой и ее производной, выражаемая соотношением (10), но не значение этих величин в некоторой точке. Для замыкания задачи этого недостаточно.

Еще одно условие связано с тем, что плотность теплового потока на источнике тепла терпит разрыв, однозначно определяемый плотностью мощности I . Проинтегрировав уравнение баланса энергии (3) в малой окрестности точки $z = 0$, явно разрешаем данное условие относительно производной температуры

$$\frac{dT}{dz} \Big|_{-0} - \frac{dT}{dz} \Big|_{+0} = \frac{I}{\kappa(T_0)} > 0, \quad (11)$$

где $T_0 = T(0)$ – температура газа в области источника. Здесь важно отметить, что зависимость T_0 от плотности мощности источника тепла I монотонно возрастающая. Чтобы это показать, достаточно перейти в уравнении (9) к дифференцированию по температуре T , а затем вычесть значения полученных выражений в точках $z = +0$ и

$z = -0$. Выделяя под знаком производной плотность мощности источника тепла согласно выражению (11), получаем

$$\frac{dI}{dT_0} = Q^\pm(T_0) \left(\left. \frac{dT}{dz} \right|_{+0} - \left. \frac{dT}{dz} \right|_{-0} \right) \times \left(\left. \frac{dT}{dz} \right|_{-0} \left. \frac{dT}{dz} \right|_{+0} \right)^{-1} > 0 \Rightarrow \frac{dT_0}{dI} > 0. \quad (12)$$

Таким образом, соответствие между плотностью мощности и температурой газа в области источника является взаимно однозначным на области определения dI/dT_0 .

3. ТЕЧЕНИЯ БЕЗ ПЕРЕХОДА ЧЕРЕЗ ЗВУКОВОЙ БАРЬЕР

Поскольку коэффициенты уравнения (9) не содержат координаты z в явном виде, дальнейший анализ удобно произвести с помощью фазовой плоскости $\{T, W = dT/dz\}$. Для ее построения перейдем от уравнения второго порядка (9) к системе двух уравнений первого порядка и разрешим их относительно производных

$$\frac{dT}{dz} = W, \quad \frac{dW}{dz} = F(T, W), \quad (13)$$

где функция $F(T, W)$ дается выражением

$$F(T, W) = \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \mp \frac{1}{\sqrt{1 - T/T_{\max}}} \right) \frac{GW}{2\kappa(T)} - \frac{W^2}{\kappa(T)} \frac{d\kappa(T)}{dT} + \frac{Q^\pm(T)}{\kappa(T)}. \quad (14)$$

Дозвуковому течению отвечает выражение с $Q^-(T)$, сверхзвуковому – выражение с $Q^+(T)$. Характерные фазовые портреты дозвукового и сверхзвукового течений представлены на рис. 1а и б.

Разделив друг на друга выражения для dW/dz и dT/dz из (13) можно записать уравнение, которому удовлетворяют фазовые траектории $W(T)$

$$\frac{dW}{dT} = W^{-1} F(T, W). \quad (15)$$

Данная возможность также – следствие того, что коэффициенты уравнения (9) не являются явными функциями z . В соответствии с условием (10) для тех фазовых траекторий, которые удовлетворяют рассматриваемой постановке, справедливо $W \rightarrow 0$ при $T \rightarrow T_{\min}$. Однако для практического отыскания этих траекторий данное условие не применимо. Точка $\{T_{\min}, 0\}$ является особенной, и условие (10) выделяет сразу две различных фазовых траектории, одна из которых целиком лежит в верхней фазовой полуплоскости $W > 0$, а другая в нижней $W < 0$. Физически первая из них отве-

чает решению (9) в области $z < 0$, где производная температуры положительна, а вторая – решению в области $z > 0$, где производная температуры отрицательна. Задать в явном виде два граничных условия, которые однозначно определяют каждую из искомым фазовых траекторий в отдельности, можно, например, найдя асимптотики решений (15) при $T \rightarrow T_{\min}$. В этом случае граничные условия задаются при температуре T^* , близкой к $T_{\min}$, но слегка ее превосходящей, а значит, в обход особенности. Соответствующая техника представлена в Приложении А и используется нами для практического отыскания при помощи уравнения (15) фазовых траекторий, удовлетворяющих (10).

Таким образом, находим четыре фазовых траектории, отвечающих рассматриваемой постановке: по две для дозвукового и сверхзвукового режимов течения. Траектория $W_-^-(T)$ в верхней полуплоскости $dT/dz > 0$ соответствует зависимости производной температуры газа от самой этой температуры при $z < 0$, т.е. в дозвуковом режиме выше по течению относительно источника, расположенного в $z = 0$. Траектория $W_-^+(T)$ в нижней полуплоскости $dT/dz < 0$ соответствует зависимости при $z > 0$, отвечающей дозвуковому течению ниже источника. Аналогично, траектории $W_+^-(T)$ и $W_+^+(T)$ отвечают зависимостям производной температуры газа от самой этой температуры в сверхзвуковом режиме выше и ниже источника, соответственно.

Подставляя найденные фазовые траектории в условие (11), определяем на отрезке $T_{\min} \leq T_0 \leq T_{\max}(G, p)$ функцию

$$I^\pm(T_0) = \kappa(T_0) [W_-^\pm(T_0) - W_+^\pm(T_0)]. \quad (16)$$

Данная функция монотонно возрастает с увеличением температуры на источнике T_0 и имеет область значений

$$0 \leq I^\pm \leq I_{\max}^\pm(G, p) = I^\pm(T_{\max}). \quad (17)$$

Если I превосходит $I_{\max}^\pm(G, p)$, то для данного сочетания плотности мощности источника тепла I , плотности потока G и динамического давления p реализация стационарного течения без звукового перехода невозможна. Если плотность мощности I меньше $I_{\max}^\pm$, то, обращая зависимость (16), получаем соответствующее значение температуры газа в области источника тепла для дозвукового (T_0^-) или сверхзвукового (T_0^+) течения. По известным фазовым траекториям $W_-^\pm(T)$ и $W_+^\pm(T)$ можно восстановить значение производной температуры dT/dz при $T = T_0^\pm$, т.е. в $z = +0$ и $z = -0$. В ре-

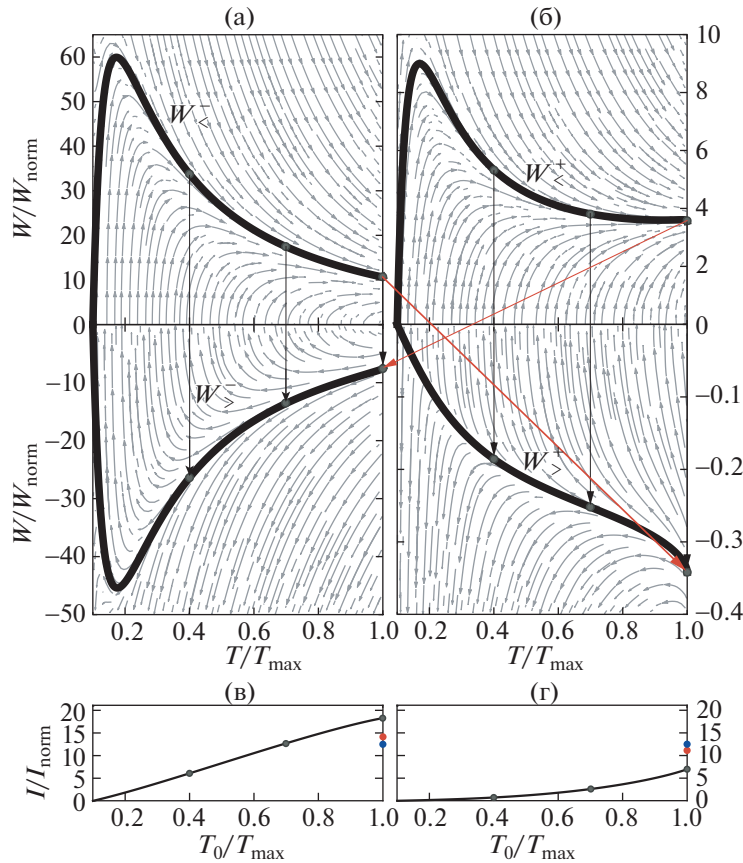


Рис. 1. Фазовая плоскость уравнения (9) для дозвукового (а) и сверхзвукового (б) режимов течения и отвечающие им законы соответствия между допустимыми значениями плотности мощности I и температурой газа в области источника T_0 (в, г). Для фазовых портретов при $W < 0$ и $W > 0$ выбран различный масштаб вертикальной оси в целях удобства анализа рисунка. Фазовые траектории $W_{<}^{\pm}$ и $W_{>}^{\pm}$, выделяемые условием (10), показаны на (а) и (б) жирными черными линиями, остальные траектории показаны серыми линиями со стрелками, указывающими направление увеличения координаты z . Черными стрелками показаны переходы между траекториями $W_{<}^- \rightarrow W_{>}^-$ (а) и $W_{<}^+ \rightarrow W_{>}^+$ (б), отвечающие течениям без перехода через звуковой барьер и соответствующие плотностям мощности источника I и температурам газа в области источника T_0 , отмеченным черными точками на (в) и (г). Красными стрелками показаны переходы $W_{<}^- \rightarrow W_{>}^- \rightarrow W_{>}^+$ и $W_{<}^+ \rightarrow W_{>}^+ \rightarrow W_{>}^-$, отвечающие течениям с переходом через звуковой барьер. Необходимые для этих переходов $I^{- \rightarrow +}$ и $I^{+ \rightarrow -}$ показаны красными точками на (в) и (г), значение (31) – синей точкой. Нормировки: $W_{\text{norm}} = G \kappa_0^{-1} T_{\max}^{-3/2}$, $I_{\text{norm}} = G T_{\max}$.

зультате, задание плотности потока G , динамического давления p и совместного с ними значения плотности мощности источника тепла $I < I_{\max}^{\pm}$ приводит в силу условий (10), (11) к постановке задач Коши для уравнения (9) в областях $z > 0$ и $z < 0$

$$\left. \frac{dT}{dz} \right|_{+0} = W_{>}^{\pm}(T_0^{\pm}), \quad T(+0) = T_0^{\pm}, \quad (18)$$

$$\left. \frac{dT}{dz} \right|_{-0} = W_{<}^{\pm}(T_0^{\pm}), \quad T(-0) = T_0^{\pm}. \quad (19)$$

Их решения сшиваются между собой в $z = 0$, образуя тем самым решение $T^{\pm}(z)$ исходного уравнения баланса энергии (3). Подстановка найденного $T^{\pm}(z)$ в соотношения (6) и (7) определяет концентрации газа $n^{\pm}(z)$ и скорости потока $u^{\pm}(z)$, что завершает формальное решение задачи.

В качестве иллюстрации на рис. 2 и 3 приведены примеры расчетов пространственных профилей газодинамических характеристик дозвуковых и сверхзвуковых течений, соответствующих выделенным на рис. 1 значениям плотности мощности источника тепла. При построении всех ри-

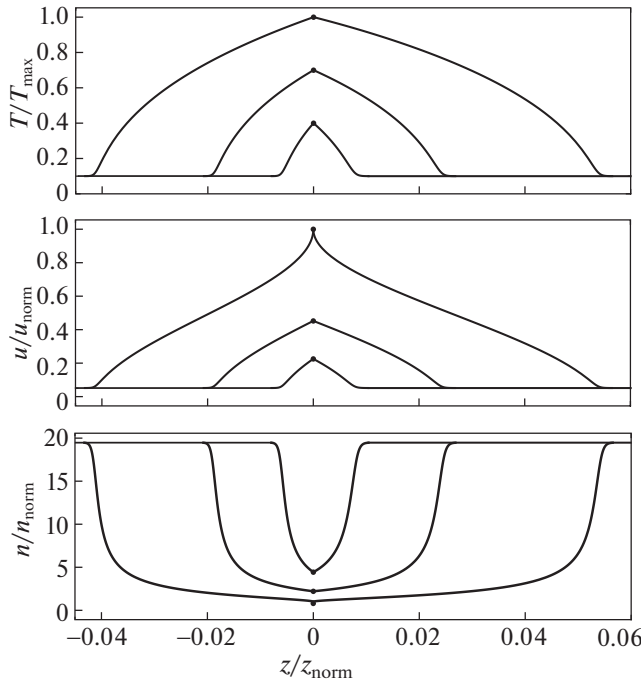


Рис. 2. Зависимость температуры, скорости потока и концентрации частиц от координаты z для дозвуковых течений, соответствующих выделенным черными точками на рис. 1в значениям плотности мощности источника тепла. Нормировки: $u_{\text{norm}} = \sqrt{T_{\text{max}}/m}$, $n_{\text{norm}} = G\sqrt{m/T_{\text{max}}}$, $z_{\text{norm}} = \kappa_0 T_{\text{max}}^{5/2}/G$.

сунков используется зависимость $\kappa(T) = \kappa_0 T^{5/2}$, $\kappa_0 = \text{const}$, что соответствует электронной теплопроводности полностью ионизированной плазмы [25]. Функция потерь $Q(T, n)$ берется пропорциональной квадрату концентрации частиц, что соответствует потерям за счет парных соударений, и задается выражением

$$Q(T, n) = \alpha(T) \frac{n^2 T_{\text{max}}}{m G^2} Q_{\text{ref}}, \quad (20)$$

где температурная зависимость $\alpha(T)$ нормирована на единицу и на исследуемом отрезке $T_{\text{min}} \leq T \leq T_{\text{max}}$ берется линейной $\alpha(T) = [(T - T_{\text{min}})/(T_{\text{max}} - T_{\text{min}})]\Theta(T - T_{\text{min}})$, отношение $T_{\text{min}}/T_{\text{max}} = 0.1$, величина Q_{ref} имеет смысл объемной плотности мощности потерь в $T = T_{\text{max}}$, при построении рисунков берется $Q_{\text{ref}} = 50 G^2 / \kappa_0 T_{\text{max}}^{3/2}$. Графики демонстрируют типичные для дозвукового и сверхзвукового течений зависимости скорости и концентрации газа вдоль потока [26–28]. Нагрев газа в дозвуковом режиме сопровождается увеличением скорости и уменьшением концентрации, в сверхзвуковом — уменьшением скорости и увеличением концентрации. При охлаждении газа

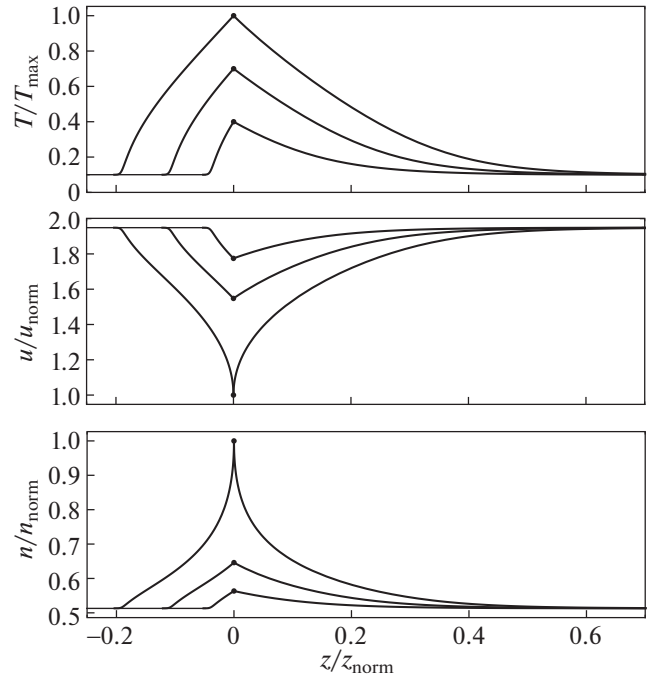


Рис. 3. То же, что и рис. 2, для сверхзвуковых течений, соответствующих значениям плотности мощности источника тепла, выделенным черными точками на рис. 1г.

зависимости инвертированы: дозвуковой режим характеризуется уменьшением скорости и увеличением концентрации, сверхзвуковой — увеличением скорости и уменьшением концентрации. Скорость, таким образом, растет к области источника тепла в дозвуковом режиме и убывает в сверхзвуковом. Концентрация, напротив, в дозвуковом имеет минимум на источнике, а в сверхзвуковом — максимум.

4. ТЕЧЕНИЯ С ПЕРЕХОДОМ ЧЕРЕЗ ЗВУКОВОЙ БАРЬЕР

Непрерывный переход скорости потока через скорость звука возможен в силу (6) только в окрестности источника тепла. Фазовый портрет такого течения представляет собой сшивку верхней фазовой полуплоскости, отвечающей одному режиму, с нижней фазовой полуплоскостью другого (крест-накрест). Переход между соответствующими фазовыми траекториями происходит при строго определенной температуре источника $T_0 = T_{\text{max}}$. Для перехода из дозвукового режима в сверхзвуковой это переход между фазовыми траекториями $W_{<}^-$ и $W_{>}^+$. Для перехода от сверхзвукового течения к дозвуковому — между $W_{<}^+$ и $W_{>}^-$. Требуемые для данных переходов мощности так-

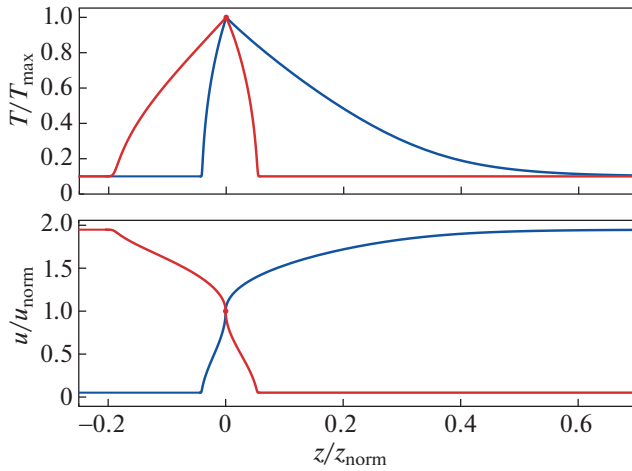


Рис. 4. Зависимость температуры газа и скорости потока от пространственной координаты z для течений с переходом через звуковой барьер, соответствующих значениям плотности мощности источника тепла, показанных красными точками на рис. 1в (синяя кривая) и рис. 1г (красная кривая). Нормировки: $u_{\text{norm}} = \sqrt{T_{\text{max}}/m}$, $z_{\text{norm}} = \kappa_0 T_{\text{max}}^{5/2}/G$.

же должны принимать строго определенные (для данных p и G) значения

$$I^{\rightarrow+} = \kappa(T_{\text{max}}) [W_{<}^-(T_{\text{max}}) - W_{>}^+(T_{\text{max}})], \quad (21)$$

$$I^{+\rightarrow} = \kappa(T_{\text{max}}) [W_{<}^+(T_{\text{max}}) - W_{>}^-(T_{\text{max}})]. \quad (22)$$

На рис. 4 приведены пространственные профили температуры и скорости для течений с переходом через звуковой барьер. Отвечающие им переходы между фазовыми траекториями и необходимые для них мощности показаны на рис. 1 красными стрелками и красными точками соответственно.

5. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

При конкретной зависимости теплопроводности от температуры $\kappa(T)$ решение уравнений (1)–(3) в рассмотренной постановке зависит от двух безразмерных параметров: нормированной плотности мощности источника тепла I/GT_{max} и параметра

$$R_q = \frac{Q\kappa(T_{\text{max}})}{G^2 T_{\text{max}}}, \quad (23)$$

являющегося характерным отношением плотности потока энергии за счет теплопроводности к плотности потока энергии за счет конвекции. Убедиться в этом можно, нормировав газодинамические характеристики и координату z в уравнениях (1)–(3). Нормировки: $T_{\text{norm}} = T_{\text{max}}$, $u_{\text{norm}} = \sqrt{T_{\text{max}}/m}$, $n_{\text{norm}} = G\sqrt{m/T_{\text{max}}}$, $z_{\text{norm}} = \kappa(T_{\text{max}})/G$.

Для субтерагерцевых разрядов отношение (23), как правило, является числом, много большим единицы. Так, при давлениях $p \sim 0.1$ атм, линейных размерах разряда $l \sim 100$ мкм, потоках частиц $GI^2 \sim 10^{18} \text{ с}^{-1}$ и полной мощности излучения $QI^3 \sim 100$ Вт, характерных для разряда в потоке ксенона из экспериментов [5] оценка параметра R_q по (23) с коэффициентом теплопроводности $\kappa(T) = \kappa_0 T^{5/2}$, соответствующим полностью ионизированной плазме, параметром $\kappa_0 \approx 3.5 \times 10^{31} \text{ см}^{-3} \cdot \text{эВ}^{-3/2} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}$, вычисленным согласно [25], массой иона ксенона $m = 2.2 \times 10^{-22} \text{ г}$ и T_{max} из (8) дает

$$R_q = \frac{Q\kappa_0 p^3}{8G^5 m^{3/2}} \approx 50. \quad (24)$$

В случае увеличения давления, например, при увеличении частоты греющего субтерагерцевого излучения, данное число быстро растет, как куб давления. Используемый при построении иллюстраций параметр $Q_{\text{ref}} = 50G^2/\kappa_0 T_{\text{max}}^{3/2}$ призван отразить это обстоятельство; параметры в приводимых примерах обеспечивают достаточно высокие характерные значения R_q .

В приближении $R_q \gg 1$ возможен ряд упрощений. В частности, для зависимостей (16) мощности источника тепла $I^{\pm}$ от температуры T_0 в $z = 0$ можно получить приближенное выражение в квадратурах. Для этого пренебрежем в (14) конвективным потоком энергии. Уравнение (15) перепишется в виде

$$W \frac{d}{dT} (\kappa(T)W) \approx Q^{\pm}(T). \quad (25)$$

Решением данного уравнения будут четыре функции

$$\widetilde{W}_{<}^-(T) = \sqrt{2}\kappa(T)^{-1} \left(\int_{T_{\text{min}}}^T \kappa(T') Q^-(T') dT' \right)^{1/2}, \quad (26)$$

$$\widetilde{W}_{<}^+(T) = \sqrt{2}\kappa(T)^{-1} \left(\int_{T_{\text{min}}}^T \kappa(T') Q^+(T') dT' \right)^{1/2}, \quad (27)$$

$$\widetilde{W}_{>}^+(T) = -\sqrt{2}\kappa(T)^{-1} \left(\int_{T_{\text{min}}}^T \kappa(T') Q^-(T') dT' \right)^{1/2}, \quad (28)$$

$$\widetilde{W}_{>}^-(T) = -\sqrt{2}\kappa(T)^{-1} \left(\int_{T_{\text{min}}}^T \kappa(T') Q^+(T') dT' \right)^{1/2}, \quad (29)$$

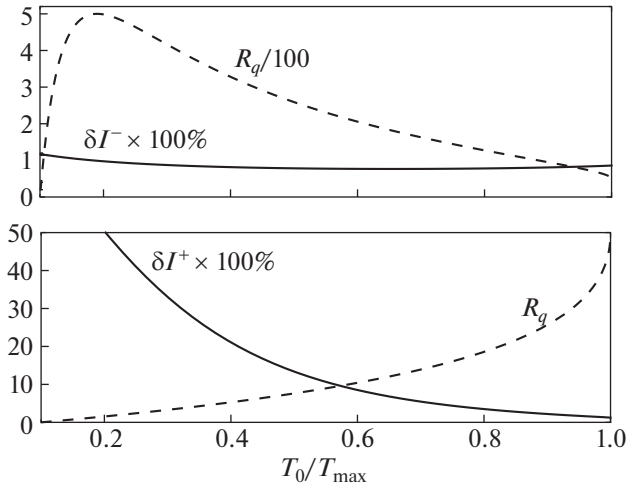


Рис. 5. Относительные погрешности $\delta I^\pm = 1 - I_{(30)}^\pm / I_{(16)}^\pm$ приближенного выражения (30), построенные для параметров рис. 1(в, г), и соответствующие значения R_q в области источника. Здесь $I_{(30)}^\pm$ — приближенное значение $I^\pm(T_0)$ по (30), $I_{(16)}^\pm$ — точное значение $I^\pm(T_0)$ по (16).

подставив которые вместо $W_{\lessgtr}^\pm$ в выражение (16), получим

$$I^\pm(T_0) \approx 2\sqrt{2} \left(\int_{T_{\min}}^{T_0} \kappa(T') Q^\pm(T') dT' \right)^{1/2}. \quad (30)$$

Данные приближенные выражения практически во всей области определения довольно точно воспроизводят примеры зависимостей, изображенные на рис. 1в, г. Для удобства сравнения, на рис. 5 построены соответствующие графики относительной погрешности, а также зависимость R_q в области источника от T_0 . Видно, что ошибка существенна лишь для сверхзвуковых течений при $T_0 \ll T_{\max}$, где характерные R_q малы за счет низкой концентрации частиц.

Воспользовавшись выражением (30), значения $I^\pm(T_0)$ в пределе больших R_q можно упорядочить. Для этого вспомним, что согласно выражению (7) на интервале $T_{\min} < T < T_{\max}$ справедливо $n^+ < n^-$. Значит, если Q растет с увеличением n , то $Q^+ < Q^-$. Следовательно, в силу выражения (30) имеем $I^+(T_0) < I^-(T_0)$, причем поскольку (30) есть интеграл как функция верхнего предела, утверждение распространяется в том числе на верхние граничные значения $I^+(T_{\max})$ и $I^-(T_{\max})$, т.е. $I_{\max}^+ < I_{\max}^-$.

Приближенное выражение, аналогичное (30), можно получить для значений плотности мощности источника $I^{\rightarrow+}$, необходимой для перехода из дозвукового в сверхзвуковой режим, и $I^{+\rightarrow-}$, необходимой для перехода из сверхзвукового режима в дозвуковой. Для этого подставим $\widetilde{W}_{\lessgtr}^\pm$ вместо $W_{\lessgtr}^\pm$ в выражения (21) и (22)

$$I^{\rightarrow+} \approx I^{+\rightarrow-} \approx \sqrt{2} \left(\int_{T_{\min}}^{T_{\max}} \kappa(T') Q^-(T') dT' \right)^{1/2} + \sqrt{2} \left(\int_{T_{\min}}^{T_{\max}} \kappa(T') Q^+(T') dT' \right)^{1/2}. \quad (31)$$

Величины $I^{\rightarrow+}$ и $I^{+\rightarrow-}$, найденные в приближении $R_q \gg 1$, получаются равными и делят пополам интервал $(I_{\max}^+, I_{\max}^-)$. Соответствующее значение показано синей точкой на рис. 1в, г. Небольшое различие между (31) и точными значениями (21) и (22) связано с наличием конвекции: для ускорения дозвукового потока до сверхзвуковых скоростей требуется несколько более высокая мощность, чем задаваемая (31), и, наоборот, в случае замедления сверхзвукового потока и организации перехода в дозвуковой режим требуется мощность, слегка меньшая чем (31). Таким образом, при $R_q \gg 1$ все четыре характерных значения однозначно упорядочены: $I_{\max}^+ < I^{+\rightarrow-} < I^{\rightarrow+} < I_{\max}^-$.

Возможность реализации стационарного течения и его тип определяются оставшимся управляющим параметром — плотностью мощности источника тепла I . Анализ данного вопроса удобно произвести, расположив значения $I_{\max}^+$, $I^{+\rightarrow-}$, $I^{\rightarrow+}$ и $I_{\max}^-$ на числовой прямой и выделив области возможной реализации тех или иных течений. Для $R_q \gg 1$ это сделано на рис. 6. Видим, что в данном случае можно выделить три характерных области значений плотности мощности источника тепла.

1. При $I \leq I_{\max}^+$ возможна реализация как дозвукового, так и сверхзвукового течений без звукового перехода.

2. При $I_{\max}^+ < I \leq I_{\max}^-$ возможна реализация дозвукового течения без звукового перехода, а также для выделенных значений плотности мощности возможны течения со звуковым переходом — из дозвукового в сверхзвуковой режим при $I = I^{\rightarrow+}$ и из сверхзвукового в дозвуковой при $I = I^{+\rightarrow-}$.

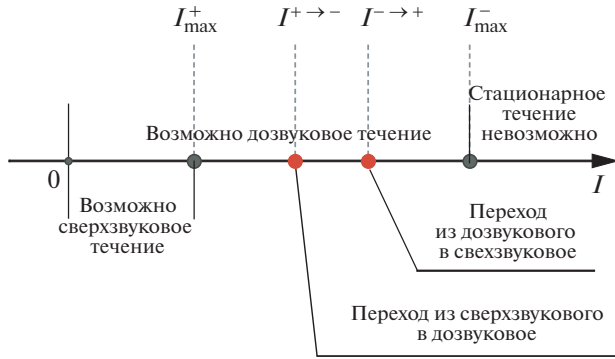


Рис. 6. Схема взаимного расположения характерных значений плотности мощности I при $R_q \geq 1$.

3. При $I > I_{\max}^-$ стационарное течение невозможно.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанная модель позволяет установить возможность реализации и определить газодинамические характеристики стационарного одномерного течения идеального газа с нелинейной теплопроводностью и объемными потерями энергии в присутствии локализованного источника тепла. Предложенный в работе подход к заданию граничных условий для уравнения баланса энергии по известной мощности энерговклада является достаточно общим и, после соответствующей модификации модели, может быть применен и полезен при решении широкого круга задач физики плазмы, связанных с описанием стационарных течений сред, обладающих более сложными уравнениями состояния и функциями потерь. Наиболее интересным с точки зрения приложений представляется применение изложенного подхода для описания субтерагерцевого разряда в потоке газа с образованием плотной сильно излучающей плазмы, ионный состав которой изменяется вследствие последовательной ионизации электронным ударом.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН (код-шифр тематики FFUF-2023-0002). Исследования И.С. Абрамова поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 19-32-90019).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Перепишем уравнение (9) для температуры, слегка превосходящей температуру отключения потерь $T_{\min}$, и разрешим его относительно малого

отклонения $\delta T = T - T_{\min} \ll T_{\max}$, в области $\delta T > 0$:

$$\frac{d^2 \delta T}{dz^2} = a^{\pm} \frac{d \delta T}{dz} + b^{\pm} \delta T^{\lambda}, \quad (32)$$

где коэффициенты $a^{\pm}$ и $b^{\pm}$ определяются выражениями

$$a^{\pm} = \frac{G}{2\kappa(T_{\min})} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \mp \sqrt{\frac{T_{\max}}{T_{\max}-T_{\min}}} \right], \quad (33)$$

$$b^{\pm} = \frac{\beta^{\pm}}{\kappa(T_{\min})}.$$

Функция $\beta^{\pm} \delta T^{\lambda}$ представляет собой асимптотику функции потерь $Q^{\pm}(T)$ при стремлении $T \rightarrow T_{\min}$ справа, $\beta^{\pm} = \text{const}$. Различные диапазоны λ соответствуют трем качественно разным ситуациям, когда выключение потерь происходит при нулевой ($\lambda > 1$), конечной ($\lambda = 1$) и бесконечной ($\lambda < 1$) производной функции потерь $dQ^{\pm}(T)/dT$ в точке $T = T_{\min}$.

Если пренебречь в уравнении (32) слагаемым с первой производной $d \delta T / dz$, то уравнение можно переписать для поиска соответствующих асимптотик искомых фазовых траекторий

$$\frac{d}{dT} \left(\frac{W^2}{2} \right) = b^{\pm} \delta T^{\lambda}. \quad (34)$$

Решив его, можем задать по два условия для каждого из режимов течения

$$W(T^*) = \left(\frac{2b^{\pm} (T^* - T_{\min})^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right)^{1/2}, \quad (35)$$

$$W(T^*) = - \left(\frac{2b^{\pm} (T^* - T_{\min})^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right)^{1/2}, \quad (36)$$

где T^* такова, что $T^* - T_{\min} \ll T_{\max}$. Условия (35) и (36) выделяют фазовые траектории, отвечающие (10), в верхней и нижней фазовой полуплоскости соответственно. Подставив решение уравнения (34) в исходное уравнение (32) и сравнив порядки малости слагаемых по δT , видим, что пренебрежение слагаемым с первой производной справедливо для случая $\lambda < 1$. Формулы (35) и (36) будут также справедливы в вырожденном случае равенства нулю коэффициента $a^{\pm}$ перед первой производной $d \delta T / dz$.

Если пренебречь в уравнении (32) слагаемым со второй производной $d^2 \delta T / dz^2$, оставшиеся

слагаемые непосредственно дадут асимптотику фазовых траекторий

$$W(T^*) = -\frac{b^\pm}{a^\pm}(T^* - T_{\min})^\lambda, \quad (37)$$

справедливую при $\lambda > 1$, что также проверяется подстановкой в (32) и сравнением порядков малости слагаемых. Видно, однако, что условие (37) задает решения для дозвукового и сверхзвукового режимов, но лишь в одной из фазовых полуплоскостей: нижней, если $a^\pm > 0$, и верхней, если $a^\pm < 0$. Чтобы задать условие для отыскания фазовых траекторий, принадлежащих другой полуплоскости, необходимо пренебречь в уравнении (32) диссипативным слагаемым

$$dW/dT = a^\pm. \quad (38)$$

Решив это уравнение, формулируем условие

$$W(T^*) = a^\pm(T^* - T_{\min}). \quad (39)$$

Подставляя решение уравнения (38) в (32), убеждаемся, что условие (39), как и (37), справедливо для случая $\lambda > 1$. Таким образом, при $\lambda > 1$ комбинация условий (37) и (39) выделяет все искомые фазовые траектории.

В случае $\lambda = 1$ все слагаемые (32) одного порядка малости. Общее решение $\delta T(z)$ состоит из двух слагаемых

$$\delta T(z) = \delta T_1(z) + \delta T_2(z), \quad (40)$$

$$\delta T_1(z) = C_1 \exp \left[\left(\frac{a^\pm}{2} - \sqrt{\left(\frac{a^\pm}{2} \right)^2 + b^\pm} \right) z \right], \quad (41)$$

$$\delta T_2(z) = C_2 \exp \left[\left(\frac{a^\pm}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^\pm}{2} \right)^2 + b^\pm} \right) z \right], \quad (42)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. В зависимости от знака $a^\pm$, одна из экспонент (41) и (42) убывающая, другая — возрастающая. Поскольку вне источника тепла производная температуры не может менять знак, одна из двух произвольных постоянных, C_1 или C_2 , в каждом из случаев равна нулю: решению в области $z > 0$ отвечает убывающая экспонента, а в области $z < 0$ — возрастающая. Дифференцируя (41) и (42) по z , получим условия

$$W(T^*) = \left(\frac{a^\pm}{2} - \sqrt{\left(\frac{a^\pm}{2} \right)^2 + b^\pm} \right) (T^* - T_{\min}), \quad (43)$$

$$W(T^*) = \left(\frac{a^\pm}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^\pm}{2} \right)^2 + b^\pm} \right) (T^* - T_{\min}), \quad (44)$$

выделяющие все искомые фазовые траектории в случае $\lambda = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mansfeld D., Sintsov S., Chekmarev N., Vodopyanov A. // J. CO2 Util. 2020. V. 40. P. 101197.
2. Sintsov S.V., Vodopyanov A.V., Viktorov M.E., Morozkin M.V. and Glyavin M. Yu. // J. Infrared Millim. Terahertz Waves. 2020. V. 41. P. 711.
3. Vodopyanov A.V., Mansfeld D.A., Chekmarev N.V., Viktorov M.E., Nikolaev A.G., Yushkov G. Yu. // Proc. SPIE. 2020. V. 11582. P. 115820Z-1.
4. Vodopyanov A.V., Sidorov A.V., Razin S.V., Dubinov I.D., Sintsov S.V., Proyavin M.D., Morozkin M.V., Fokin A.P., Glyavin M. Yu. // Proc. of 43rd Internat. Confer. on Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves. 2018. P. 8510395.
5. Shalashov A.G., Vodopyanov A.V., Abramov I.S., Sidorov A.V., Gospodchikov E.D., Razin S.V., Chkhalo N.I., Salashchenko N.N., Glyavin M. Yu., and Golubev S.V. // Appl. Phys. Lett. 2018. V. 113. P. 153502.
6. Thumm M. // J. Infrared Millim. Terahertz Waves. 2020. V. 41. P. 1.
7. Glyavin M. Yu., Golubev S.V., Izotov I.V., Litvak A.G., Luchinin A.G., Razin S.V., Sidorov A.V., Skalyga V.A., and Vodopyanov A.V. // Appl. Phys. Lett. 2014. V. 105. P. 174101.
8. Brown I.G.. The Physics and Technology of Ion Sources. WILEY-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, 2004.
9. Bakshi V. EUV Lithography. Second Edition. Bellingham, WA: SPIE, 2018.
10. Райзер Ю.П. // Физика газового разряда. — 3-е изд. перераб. и доп. Долгопрудный: Издательский дом "Интеллект", 2009. С. 537.
11. Райзер Ю.П. // Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 11. С. 195.
12. Герасименко М.В., Козлов Г.И., Кузнецов В.А. // Квантовая электроника. 1983. Т. 10. С. 709.
13. Райзер Ю.П. // УФН. 1980. Т. 132. С. 549.
14. Райзер Ю.П., Суржиков С.Т. // Квантовая электроника. 1984. Т. 11. С. 2301.
15. Райзер Ю.П., Суржиков С.Т. // ТВТ. 1985. Т. 23. С. 29.
16. Abramov I.S., Gospodchikov E.D., Shalashov A.G. // Phys. Rev. Applied. 2018. V. 10. P. 034065.
17. Шалашов А.Г., Абрамов И.С., Голубев С.В., Господчиков Е.Д. // ЖЭТФ. 2016. Т. 150 (2). С. 254.
18. Shalashov A.G., Golubev S.V., Abramov I.S., Gospodchikov E.D. AIP Conf. Proc. 2016. V. 1771 (1). P. 070001.
19. Абрамов И.С., Господчиков Е.Д., Шалашов А.Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 2015. Т. 58 (12). С. 1022.

20. Chkhalo N.I., Salashchenko N.N., Golubev S.V., Mansfeld D., Vodopyanov A.V., Sjmaenok L. // J. Micro/Nanolithogr. MEMS MOEMS. 2012. V. 11 (2). P. 021123.
21. Боханов А.Ф., Зорин В.Г., Изотов И.В., Разин С.В., Сидоров А.В., Скалыга В.А. // Физика плазмы. 2007. Т. 33 (5). С. 387.
22. Semenov V., Skalyga V., Smirnov A., Zorin V. // Rev. Sci. Instrum. 2002. V. 73 (2). P. 635.
23. Golubev S.V., Razin S.V., Semenov V.E., Smirnov A.N., Vodopyanov A.V., Zorin V.G. // Rev. Sci. Instrum. 2000. V. 71 (2). P. 669.
24. Соколова И.М. // ПМТФ. 1973. Т. 2. С. 80.
25. Брагинский С.И. // Вопросы теории плазмы. Вып. 1. М.: Атомиздат, 1963. С. 183.
26. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. 3-е изд., перераб. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.
27. Лойцянский Л.Г. // Механика жидкости и газа: Учеб. для вузов. 7-е изд., испр. М.: Дрофа, 2003. С. 120.
28. Чукбар К.В. // ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез. 2021. Т. 44 (3). С. 107.