

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ  
В ПЛАЗМЕ

УДК 533.9

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЦИКЛОТРОННЫХ ПЛАЗМЕННЫХ  
РЕЗОНАНСОВ В МОНОСЛОЙНОМ ГРАФЕНЕ

© 2023 г. А. М. Ишханян<sup>a,b</sup>, В. П. Крайнов<sup>c,\*</sup>

<sup>a</sup> Российско-армянский университет, Ереван, Армения

<sup>b</sup> Институт физических исследований НАН Армении, Аштарак, Армения

<sup>c</sup> Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),  
Долгопрудный, Россия

\*e-mail: vpkrainov@mail.ru

Поступила в редакцию 21.09.2022 г.

После доработки 17.11.2022 г.

Принята к публикации 26.12.2022 г.

На основе кинетического уравнения Больцмана аналитически рассмотрено распространение продольных гармонических плазменных колебаний в монослойном графене в присутствии внешнего магнитного поля. Представлены простые аналитические формулы для положений циклотронных резонансов в спектре магнето-плазменных колебаний.

*Ключевые слова:* кинетическое уравнение Больцмана, монослой, графен, продольные плазменные волны, циклотронные резонансы, спектр магнето-плазменных колебаний

DOI: 10.31857/S0367292122601163, EDN: FKKADS

1. ВВЕДЕНИЕ

Поверхностные магнето-плазмоны в двумерном графене представляют большой интерес для инфракрасной плазмоники [1–12]. Во внешнем магнитном поле спектр плазмонов имеет аномальное поведение, связанное с циклотронными резонансами (резонансами Бернштейна) [2, 3, 13].

Монослойный графен – это двумерный монослой атомов углерода, помещенных в структуру типа “пчелиные соты” с регулярной гексагональной решеткой. Три из четырех валентных электронов атома углерода образуют локализованные  $\sigma$ -связи с соседними атомами углерода. Четвертый электрон образует делокализованную  $\pi$ -связь и может двигаться свободно. Именно этот электрон и обеспечивает уникальные оптоэлектрические и фотоэлектрические свойства графена. Экспериментальный энергетический спектр этого электрона в зоне Бриллюэна является сплошным и с хорошей точностью представляется двумя верхними гранями равнобедренного треугольника с горизонтальным основанием и с максимумом в центре зоны Бриллюэна. Высота треугольника в энергетических единицах составляет около 15 эВ. Аналитически их можно приближенно описать простой формулой  $\varepsilon = \pm v|\mathbf{p}|$ . Величина  $v$  имеет размерность скорости. Она мала по сравнению со скоростью света, так что название “дираковский спектр” носит условный характер, от-

ражая только линейную зависимость энергии электрона от его импульса. Щель между валентной зоной, которая приближенно имеет вид параболы, и зоной проводимости равна нулю, так что с этой точки зрения графен можно назвать полуметаллом. Для описания длинноволновых плазменных колебаний в графене применимо классическое уравнение Больцмана, хотя характерная длина волны для магнето-плазмонов в графене много меньше, чем в обычных металлах.

Де-бройлевская длина волны электрона проводимости порядка межатомного расстояния как в обычном металле, так и в графене, что гораздо меньше всех характерных длин в поставленной задаче. Эта де-бройлевская длина электрона в данном случае есть длина волны плазмона, и обратно пропорциональная волновому числу. Обычно в металлах при расчетах кинетических коэффициентов всегда используется классическое кинетическое уравнение Больцмана, где предполагается, что де-бройлевская длина волны электрона проводимости мала по сравнению с длиной пробега. Учет конечности длины волны электрона, и учет того, что электрон-квантовая частица, имеющая волновые свойства, ведет к увеличению электрического сопротивления. Таким образом, здесь предполагается высокая плотность электронов и, соответственно, малая де-бройлевская длина волны электрона. Кинетическое уравнение Больцмана пишется для функции

распределения электронов по импульсам, а какая эта функция – бoльцмановская, фермиевская или бoзевская – вообще становится неважным в бесстолкновительном случае, так как вид функции обычно учитывается только в записи столкновительного члена уравнения. Если температура достаточно низкая, что имеет место в случае графена (масштаб зоны проводимости составляет несколько электрон-вольт), то электроны проводимости образуют вырожденное “ферми-море”, и можно определить поверхность Ферми (в двумерном случае – это линия). Соответственно определяется импульс Ферми. В двумерном случае импульс Ферми  $p_F$  определяется через двумерную концентрацию электронов проводимости  $n_s$  соотношением  $p_F = \hbar\sqrt{\pi n_s}$ . Соответственно энергия Ферми равна  $\epsilon_F = v p_F$ . В соответствии с экспериментальными данными о плотности электронов в графене заполняется лишь небольшая часть зоны проводимости [4].

В этой работе мы аналитически решаем кинетическое уравнение Больцмана для описания распространения магнито-плазмонов в графене в окрестности циклотронных резонансов. Классическое кинетическое уравнение может описывать вырожденный электронный газ при рассмотрении длинноволновых плазменных эффектов.

## 2. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

Рассмотрим графен как двухмерный монослой электронной плазмы в отсутствие магнитного поля. Кинетическое бесстолкновительное уравнение Больцмана для функции распределения  $n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  имеет известный вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{d\epsilon}{d\mathbf{p}} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (1)$$

Здесь введена сила Лоренца для электронов проводимости

$$\mathbf{F} = -e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \left[ \frac{d\epsilon}{d\mathbf{p}}, \mathbf{H} \right] \right). \quad (2)$$

Внешнее постоянное магнитное поле  $\mathbf{H}$  направлено перпендикулярно поверхности слоя графена (в этом разделе будем считать  $\mathbf{H} = 0$ , а случай  $\mathbf{H} \neq 0$  будет рассмотрен в следующем разделе).  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  – напряженность электрического поля плазменных колебаний в плоскости слоя графена. Здесь  $\epsilon = \pm v |\mathbf{p}|$  – линейный спектр энергий электрона в монослойном графене. Скорость нерелятивистского электрона  $v = \text{const}$ ,  $\mathbf{v} \equiv \mathbf{p}/p$ . Из эксперимента следует, что  $v = 1.0 \times 10^6$  м/с, что много меньше, чем скорость света.

Малое отклонение функции распределения  $\delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , производимое этой силой Лоренца, удовлетворяет уравнению, следующему из (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta n}{\partial t} + v \frac{\mathbf{p}}{p} \frac{\partial \delta n}{\partial \mathbf{r}} - \frac{ev}{pc} [\mathbf{p}, \mathbf{H}] \frac{\partial \delta n}{\partial \mathbf{p}} \\ = e \mathbf{E} \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} = \frac{ev}{p} (\mathbf{pE}) \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $n_0(p) = -\delta(\epsilon - \epsilon_F)$  – равновесная функция распределения Ферми при нулевой температуре, что является хорошим приближением для графена.

Считаем электрическое поле гармоническим:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$ . Для продольных колебаний волновой вектор  $\mathbf{k}$  направлен вдоль вектора  $\mathbf{E}$ . Уравнение (3) – линейное, поэтому и  $\delta n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \delta n(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{v}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$ . При  $\mathbf{H} = 0$ , подставляя  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$  в (3), находим малое отклонение функции распределения от равновесной функции распределения Ферми

$$\begin{aligned} \delta n(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{v}) &= \frac{ie(\mathbf{vE})}{\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v})} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} = \\ &= -\frac{ievE \cos \theta}{\omega - kv \cos \theta} \delta(\epsilon - \epsilon_F) \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\theta$  – полярный угол между импульсом электрона  $\mathbf{p}$  и вектором напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ .

Вычисляем двумерную плотность поляризованных зарядов с учетом двукратного вырождения по спину электрона и двух энергетических зон в спектре графена

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{k}, \omega) &= -e \int \delta n(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{v}) \frac{4d^2\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^2} = \\ &= 4ie^2 v E \int \frac{\cos \theta}{\omega - kv \cos \theta} \delta(\epsilon - \epsilon_F) \frac{pdpd\theta}{(2\pi\hbar)^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Множитель 2 возникает из-за вырождения спектра по спину электрона. Второй фактор 2 возникает из-за двух подзон графена,  $\epsilon = \pm v p$ . При переходе от интегрирования по импульсам к интегрированию по энергиям в (5) возникает энергетическая плотность состояний (учитывается одна из двух дельта-функций)

$$g(\epsilon) = \int_0^\infty pdp \{ \delta(\epsilon - vp) + \delta(\epsilon + vp) \} = \frac{|\epsilon|}{v^2}. \quad (6)$$

Тогда из (5) находим

$$\rho(\mathbf{k}, \omega) = \frac{ie^2 \epsilon_F E}{v\pi^2 \hbar^2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\omega - kv \cos \theta}. \quad (7)$$

Вычисляем интеграл по полярному углу между импульсом электрона  $\mathbf{p}$  и напряженностью электрического поля  $\mathbf{E}$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{s - \cos \theta} = -1 + \frac{s}{\sqrt{s^2 - 1}}; \quad s = \frac{\omega}{kv} > 1. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), находим

$$\rho(\mathbf{k}, \omega) = \frac{2ie^2 \epsilon_F E}{kv^2 \pi \hbar^2} \left( -1 + \frac{s}{\sqrt{s^2 - 1}} \right). \quad (9)$$

Зная координатную двумерную плотность зарядов  $\rho(r)$ , вычисляем соответствующий полярizationsный потенциал по закону Кулона

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^2 \mathbf{r}' = \rho(k, \omega) \int \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^2 \mathbf{r}' = \\ &= \rho(k, \omega) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} \exp(ikr \cos \psi) d\psi = \\ &= 2\pi \rho(k, \omega) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \int_0^\infty dr J_0(kr) = \\ &= \frac{1}{k} 2\pi \rho(k, \omega) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом,

$$\varphi(k, \omega) = \frac{2\pi}{k} \rho(k, \omega) \quad (11)$$

Двумерная плотность зарядов отлична от нуля только в монослое графена, вне его она равна нулю. Согласно уравнению (11) над и под слоем равны нулю потенциал и напряженность электрического поля волны. Напряженность электрического поля волны может быть направлена как вдоль волнового вектора, так и поперек. Здесь рассматриваются только продольные волны  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ .

Вычисляем компоненту индуцированной напряженности электрического поля, параллельной электронному слою

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = -\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}; \quad \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) = i\mathbf{k}\varphi(k, \omega). \quad (12)$$

Подставляя (11) в (12), находим

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) = \frac{2\pi i}{k} \mathbf{k} \rho(\mathbf{k}, \omega). \quad (13)$$

Подставляя (9) в (13), получим окончательное выражение для напряженности индуцированного поля и, следовательно, для вектора электрической поляризации  $\mathbf{P} = \mathbf{E}_0/4\pi$

$$\mathbf{P}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{i}{2k} \mathbf{k} \rho(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{e^2 \epsilon_F E}{kv^2 \pi \hbar^2} \left( \frac{s}{\sqrt{s^2 - 1}} - 1 \right) \frac{\mathbf{k}}{k} \quad (14)$$

Отсюда находим продольную диэлектрическую проницаемость тонкого плазменного слоя:

$$\epsilon_l(k, \omega) = 1 - \frac{4e^2 \epsilon_F}{kv^2 \hbar^2} \left( \frac{s}{\sqrt{s^2 - 1}} - 1 \right). \quad (15)$$

Приравнявая диэлектрическую проницаемость нулю, получаем уравнение для спектра продольных плазмонов в графене

$$1 = \frac{2\kappa}{kv^2} \left( \frac{s}{\sqrt{s^2 - 1}} - 1 \right); \quad \kappa = \frac{2e^2 \epsilon_F}{\hbar^2} \quad (16)$$

Из (16) находим спектр продольных плазмонов [14]

$$\omega^2 = \frac{\kappa k}{1 + v^2 k/4\kappa} + v^2 k^2. \quad (17)$$

Он упрощается в наиболее интересной длинноволновой области  $k \ll \kappa/v^2$

$$\omega = \sqrt{\kappa k} \gg kv; \quad s \gg 1, \quad (18)$$

и в менее интересной коротковолновой области  $k \gg \kappa/v^2$  (здесь нет дисперсии)

$$\omega = kv \quad (19)$$

Отличие от плазменных колебаний в обычной плазме небольшое: это другая зависимость энергии электрона от импульса. В обычной нерелятивистской плазме это было бы  $\epsilon = p^2/2m$ . В рассмотренном случае ситуация более похожа на ультрарелятивистскую плазму, где  $\epsilon = cp$  и  $c$  — скорость света. Но и здесь нет полного совпадения, так как есть ветвь спектра  $\epsilon = -cp$ . И, конечно, в графене величина  $c$  только по размерности совпадает с размерностью скорости. В действительности это — феноменологическое описание реального спектра. Как это не удивительно, но в двухслойном графене спектр является параболическим, как и в обычной нерелятивистской плазме, но с некоторой эффективной массой. Возбуждение ионно-звуковых колебаний в монослойном графене не реализуется, в отличие от обычной плазмы.

### 3. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Теперь включим постоянное поперечное магнитное поле  $\mathbf{H}$ . В отличие от обычного трехмерного металла, здесь картина более простая — внешнее магнитное поле перпендикулярно поверхности графена. Возбуждаемая волна является продольной, как и в случае без магнитного поля. А для образования поляритонов нужно несколько слоев графена.

Из (3) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta n}{\partial t} + v \frac{\mathbf{p}}{p} \frac{\partial \delta n}{\partial \mathbf{r}} - \frac{ev}{pc} [\mathbf{p}, \mathbf{H}] \frac{\partial \delta n}{\partial \mathbf{p}} = \\ = -\frac{ev}{p} (\mathbf{p} \mathbf{E}) \delta(\varepsilon - \varepsilon_F). \end{aligned} \quad (20)$$

Снова полагаем

$$\delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \delta n(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{p}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t). \quad (21)$$

Определим циклотронную частоту

$$\omega_C = \frac{evH}{cp_F} \quad (22)$$

Здесь определено  $p_F = \varepsilon_F/v$ . Тогда из (20) получим дифференциальное уравнение для фурье-компоненты отклонения функции распределения  $\delta n(k, \omega, \mathbf{p})$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta n(k, \omega, \theta)}{\partial \theta} + i(\alpha + \beta \cos \theta) \delta n(k, \omega, \theta) = \\ = -\frac{evE \cos \theta}{\omega_C} \delta(\varepsilon - \varepsilon_F); \\ \alpha = -\frac{\omega}{\omega_C}; \quad \beta = \frac{k v}{\omega_C}. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь, как и выше,  $\theta$  – полярный угол между импульсом электрона  $\mathbf{p}$  и напряженностью электрического поля  $\mathbf{E}$ . Производя замену  $\delta n = \exp(-i\beta \sin \theta) g(k, \omega, \theta)$ , из (23) получим уравнение

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} + i\alpha g = \exp(i\beta \sin \theta) \frac{evE \cos \theta}{\omega_C} \delta(\varepsilon - \varepsilon_F). \quad (24)$$

Решение этого дифференциального уравнения ищем в виде ряда Фурье:

$$g(\theta) = \sum_{N=-\infty}^{\infty} \exp(iN\theta) g_N \quad (25)$$

Подставляя (25) в (24), находим коэффициенты разложения:

$$g_N = -\frac{iQ_N}{\alpha + N}. \quad (26)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q_N = \\ = \frac{evE}{\pi \omega_C} \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) \int_0^\pi \cos(-N\tau + \beta \sin \tau) \cos \tau d\tau. \end{aligned} \quad (27)$$

Вычисляя интеграл, находим функцию распределения

$$\begin{aligned} \delta n(k, \omega, \theta) = -\frac{ieE}{k} \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) \times \\ \times \sum_{N=-\infty}^{\infty} \frac{N}{(\alpha + N)} J_N(\beta) \exp(iN\theta - i\beta \sin \theta). \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь  $J_N(\beta)$  – функция Бесселя. В соответствии с (5) находим электрическую поляризацию

$$\begin{aligned} P(k, \omega) = -\frac{ie}{2} \int \delta n(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{v}) \frac{4d^2 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^2} = \\ = -\frac{E\kappa}{2k\pi v^2} \sum_{N=-\infty}^{\infty} \frac{N}{(\alpha + N)} J_N^2(\beta); \quad \kappa = \frac{2e^2 \varepsilon_F}{\hbar^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Дисперсионный спектр магнето-плазмонов, содержащий много ветвей, имеет вид

$$1 = \frac{C}{\beta} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{N^2}{\alpha^2 - N^2} J_N^2(\beta). \quad (30)$$

Здесь обозначено  $C = \frac{4\kappa}{v\omega_C}$ . Для обычного двумерного металла это уравнение было получено в работе [15]. Например, в окрестности первого циклотронного резонанса  $N = 1$  из (30) имеем

$$\omega^2 = \omega_C^2 + \frac{4\kappa\omega_C^2}{kv^2} J_1^2\left(\frac{kv}{\omega_C}\right). \quad (31)$$

В частности, в длинноволновой области  $kv \ll \omega_C$  из (31) получим простой закон дисперсии

$$\omega^2 = \omega_C^2 + \kappa k. \quad (32)$$

В отсутствие магнитного поля из (32), как и должно быть, получаем длинноволновую часть спектра (18). Аналогичное выражение было получено ранее [16, 17] для двумерного слоя металла с обычным нерелятивистским законом дисперсии  $\varepsilon = p^2/2m$

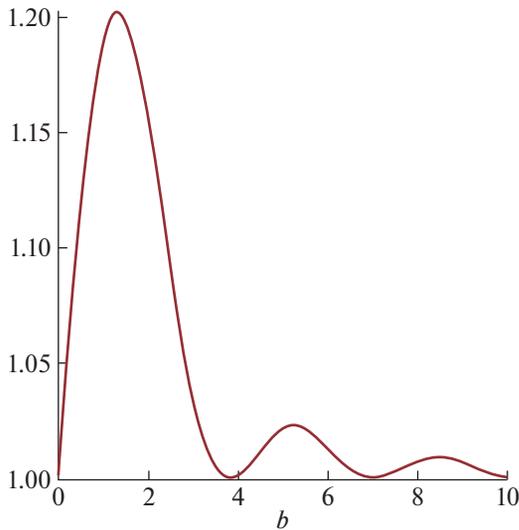
$$\omega^2 = \omega_C^2 + \frac{2\pi e^2 \rho d}{m} k \quad (33)$$

Здесь  $\rho$  – плотность электронов, а  $d$  – толщина двумерного слоя металла. Переход от обычного двумерного металла к графену меняет только численный коэффициент в законе дисперсии [16, 17]

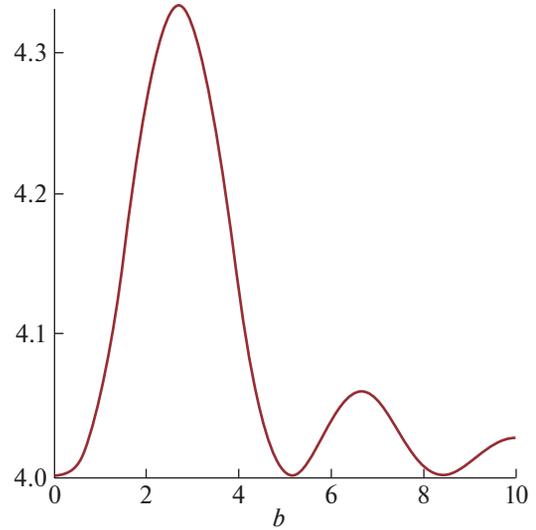
$$\frac{2\pi e^2 \rho d}{m} \rightarrow \frac{2e^2 \varepsilon_F}{\hbar^2} \quad (34)$$

Две ветви спектра (30) учитывающие два первых резонанса, имеют вид

$$\alpha_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left( 5 + \frac{C}{\beta} J_1^2(\beta) + \frac{4C}{\beta} J_2^2(\beta) \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( 5 + \frac{C}{\beta} J_1^2(\beta) + \frac{4C}{\beta} J_2^2(\beta) \right)^2 - 4 - \frac{4C}{\beta} (J_1^2(\beta) + J_2^2(\beta))}, \quad (35)$$



**Рис. 1.** Зависимость отношения квадратов частот  $(\omega_-/\omega_c)^2$  от параметра  $\beta = kv/\omega_c$  согласно (35).



**Рис. 2.** Зависимость отношения квадратов частот  $(\omega_+/\omega_c)^2$  от параметра  $\beta = kv/\omega_c$  согласно (35).

где параметр  $\beta = kv/\omega_c$ . Ветвь спектра при знаке “минус” показана на рис. 1 при  $C=1$ . Она отражает первый циклотронный резонанс (при учете второго). Ветвь спектра при знаке “плюс” показана на рис. 2. Она отражает второй резонанс (при учете первого). Ветви не пересекаются друг с другом. Ветвь спектра на рис. 1 слабо отличается от ветви, в которой второй резонанс не учитывается. При  $\beta < 1$  это объясняется тем, что вклад функций Бесселя быстро убывает с увеличением их индекса. А при  $\beta > 1$  частота плазмона для каждого номера резонанса становится близкой к соответствующей циклотронной частоте. Отметим существенно разный масштаб по оси ординат на рис. 1 и 2.

Начальная часть этой кривой при малых волновых числах была получена для идеального газа вырожденных электронов в обычном металле в работе [18]

$$\omega_-^2 = \omega_c^2 + \frac{2\pi e^2 \rho d}{m} k - \gamma k^3. \quad (36)$$

Здесь величина  $\gamma$  отражает влияние второго циклотронного резонанса. Отметим, что уравнения (16)–(17) (в отсутствие магнитного поля) не являются новыми. Результаты в уравнениях (30)–(31), (35) (в присутствии магнитного поля) являются новыми. Формулы (32)–(34), (36) также не являются новыми.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из спектра (31) следует, что роль магнитного поля уменьшается при высоких частотах, и

спектр описывается зависимостью  $\omega = \sqrt{\kappa k} \gg kv$ ;  $s \gg 1$  (18). Магнитное поле существенно изменяет плазменный спектр при низких частотах. Мы пренебрегли в кинетическом уравнении электрон-электронными столкновениями и другими столкновительными эффектами [11]. Роль электрон-электронных столкновений существенна как в пределе слабой связи, когда электронно-дырочные возбуждения определяются коллективными модами, так и в пределе сильной связи для частично заполненных релятивистских уровней Ландау [12]. В последнем случае экзотические ферромагнитные фазы и несжимаемые квантовые жидкости могут быть причиной возникновения квантового эффекта Холла. В сильном магнитном поле плазменный спектр может измениться из-за электрон-фононной связи.

Сегодня электроника, основанная на кремнии, достигла предела в миниатюризации, составляющего 50 нм для электронного канала. Полоска монослойного графена в 2–3 нм может быть использована как транзистор, – основной компонент электроники нового поколения. В присутствии магнитного поля в графене перспективно исследование роли квантового эффекта Холла в электронике. Толщина двумерных металлических пленок обычно больше постоянной кристаллической решетки. Полученные результаты относятся к монослою графена, дираковский спектр электронов проводимости которого существенно отличается от спектра электронов в тонких металлических пленках. Даже в двухслойном графене электронный спектр совершенно другой – он ближе к спектру электронов в металлических пленках.

Вследствие линейности электронного спектра графен представляет собой идеальный кандидат для проверки теоретических моделей квантовых полей, развиваемых в физике высоких энергий. Электроны в графене можно рассматривать как безмассовые заряженные фермионы, существующие в двухмерном пространстве. Действительно, все известные безмассовые частицы (фотоны, нейтрино) электрически нейтральны. Поэтому графен представляет собой мостик между физикой твердого тела и физикой высоких энергий. Плотность носителей в графене удобно контролировать, в отличие от обычного металла, прикладывая электрическое напряжение к концам образца.

Работа поддержана РФФИ (проект № 20-52-05012), комитетом Армении по науке (проекты № 20RF-171 и 21AG-1C064), а также Министерством науки и высшего образования РФ (проект № FSMG-2021-0005).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hu B.* Plasmonics / Ed. by *Tatjana Gric*, New York: Intech-Open, 2018. P. 213.
2. *Hu B., Tao J., Zhang Y., Wang Q.* // Optics Express. 2014. V. 22. 21727.
3. *Heydari M.B., Samiei M.H.V.* // arXiv.org/abs/2103.08557. 2021.
4. *Wallbank J.R.* Electronic properties of graphene heterostructures with hexagonal crystals. Berlin: Springer, 2014.
5. *Guo J., Dai X., Xiang Y., Tang D.* // J. Appl. Phys. 2019. V. 125. 013102.
6. *Kapralov K., Svintsov D.* // arXiv: 2203.04479v2 [cond-mat.mes-hall] 7 Jul 2022.
7. *Bandurin D.A., Mönch E., Kapralov K. et al.* // Nature Physics. 2022. V. 18. P. 462. <https://doi.org/10.1038/s41567-021-01494-8>
8. *Cui L., Wang J., Sun M.* // Reviews in Physics. 2021. V. 6. 100054.
9. *Goerbig M.O.* // Rev. Mod. Phys. 2011. V. 83. P. 1193.
10. *Castro Neto A.H., Guinea H., Peres N.M.R., Novoselov K.S., Geim A.K.* // Rev. Mod. Phys. 2009. V. 81. P. 109.
11. *Levitov L.S., Shtyk A.V., and Feigelman M.V.* // arXiv:1302.5036v2. 2013.
12. *Emani N., Kildishev A.V., Shalaev V.M., Boltasseva A.* // Nanophotonics 2015. V. 4. P. 214–223. <https://doi.org/10.1515/nanoph-2015-0014>
13. *Volkov V.A., Zabolotnykh A.A.* // Phys. Rev. 2014. B 89. 121410(R).
14. *Бурмистров С.Н.* Задачи по физической кинетике. Долгопрудный: изд-во “Интеллект”. 2014. Задача 28.
15. *Chaplik A.V., Heitmann D.* // J. Phys. C: Solid State Phys. 1985 V. 18. P. 3357. Eq. (7).
16. *Horing N.M., Yildiz M.* // Physics Letters A. 1973. V. 44. P. 386.
17. *Horing N.M., Yildiz M.* // Annals of Physics. 1976. V. 97. P. 216. Eq. (72).
18. *Ando T., Fowler A., Stern F.* // Rev. Mod. Phys. 1982. V. 54. P. 437.