

НЕУСТОЙЧИВОСТИ  
ПЛАЗМЫ

УДК 533.9

НЕЛИНЕЙНОЕ РАЗВИТИЕ ТИРИНГ-НЕУСТОЙЧИВОСТИ  
ТОНКОГО ТОКОВОГО СЛОЯ

© 2023 г. С. Ф. Гаранин<sup>а,\*</sup>, Е. М. Кравец<sup>а,\*\*</sup>

<sup>а</sup>Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики,  
Саров, Нижегородская обл., Россия

\*e-mail: SFGaranin@vniief.ru

\*\*e-mail: EMKravets@vniief.ru

Поступила в редакцию 12.05.2023 г.

После доработки 20.08.2023 г.

Принята к публикации 20.08.2023 г.

В плоских токовых слоях (фольгах или лайнерах), тонких по сравнению с их скин-слоем, может развиваться неустойчивость, связанная с тем, что параллельные токи на разных участках этих слоев притягиваются, что будет вызывать сжатие этих участков и разбиение токового слоя на нити. В работе исследуется нелинейное развитие тиринг-неустойчивости для одномерной постановки задачи, когда все основные величины (поверхностные плотности тока и массы, скорость и нормальная к плоскости слоя компонента магнитного поля) зависят только от координаты, перпендикулярной вектору плотности тока. Получена система одномерных уравнений, описывающая динамику магнитного поля и движение вещества в токовых слоях, и разработана численная методика решения одномерных задач магнитной гидродинамики, основанная на лагранжевой дискретизации массы. Показано, что при рассмотрении тиринг-неустойчивости малые возмущения токов, скоростей и плотности массы растут в соответствии с полученными ранее инкрементами роста малых возмущений, а затем, когда возмущения перестают быть малыми, наступает нелинейная стадия роста. В этой стадии возмущения поверхностной плотности тока  $j$  и поверхностной плотности массы  $\mu$  за конечное время неограниченно возрастают (по-видимому, по степенным законам  $j \sim (t_s - t)^{-\alpha}$ ,  $\mu \sim (t_s - t)^{-\gamma}$ ,  $t_s$  – момент времени, в который эти величины обращаются в бесконечность), однако ширина пиков плотности тока и массы стремится к нулю так, что полный ток и полная масса, вовлеченные в пики плотности тока и поверхностной плотности массы, уменьшаются, стремясь к нулю.

*Ключевые слова:* токовый слой, филаментация, тиринг-неустойчивость

DOI: 10.31857/S0367292123600474, EDN: FRMJGK

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Тиринг(tearing)-неустойчивость – это неустойчивость, которая вызывается притяжением параллельных токов в плоских токовых слоях [1]. Она связана с наличием конечного сопротивления у токовых слоев или лайнеров, поэтому при возмущениях может появляться магнитное поле, перпендикулярное поверхности этих слоев. Тогда параллельные токи на разных участках слоя будут притягиваться, что будет вызывать стягивание этих участков и разбиение слоя на отдельные токовые шнуры (филаментация, разрывание слоя, тиринг).

Эта неустойчивость, наряду с рэлей-тейлоровской (РТ) неустойчивостью, может существенно сказываться на имплозии лайнеров, препятствуя достижению высоких плотностей энергии, особенно для тонких резистивных лайнеров, в частности проволочных лайнерныхборок [2–8].

МГД-устойчивость имплозии цилиндрических проволочныхборок с учетом магнитной РТ- и тиринг-неустойчивостей изучалась в линейном приближении в ряде работ [9–12].

В работе [12] развитие малых возмущений в тонком резистивном лайнере или токовом слое было рассмотрено с учетом распределения магнитного поля и растекания токов, а также движения вещества. Было получено, что для любых длин волн в ускоряемом лайнере возникает неустойчивость, причем инкремент этой неустойчивости оказывается порядка  $\sqrt{kg}$  ( $g$  – ускорение лайнера) для любых волновых чисел и направлений волнового вектора. Учет сопротивления лайнера несколько увеличивает инкременты, а минимальные инкременты соответствуют случаю идеально проводящего лайнера. Максимально возможные инкременты равны  $\sqrt{kg}$  и соответ-

ствуют возмущениям, волновой вектор которых направлен вдоль тока, или возмущениям, волновой вектор которых направлен вдоль магнитного поля, что соответствует тиринг-неустойчивости. Однако для лайнеров, ускоряющихся магнитным давлением, действующим на одну их поверхность, магнитная РТ- и тиринг-неустойчивости оказываются смешанными и развиваются одновременно. Для изучения тиринг-неустойчивости в чистом виде удобнее рассматривать токовый слой, находящийся первоначально в равновесии, когда магнитные поля с обеих сторон слоя равны. В этом случае линейный анализ [12] показывает, что неустойчивость имеет место для любых длин волн, причем инкремент этой неустойчивости растет с ростом волнового числа  $k$ . Для коротковолновых возмущений (больших волновых чисел  $k$  или большого сопротивления слоя) инкремент неустойчивости токового слоя становится  $\sim\sqrt{kg}$  (если  $g$  определять, как для лайнера, через поверхностную плотность тока и поверхностную плотность слоя), т.е. порядка инкремента неустойчивости лайнера в этом же пределе, так как физика явления, обусловленная притяжением параллельных токов, в обоих случаях одинакова и дает инкременты порядка инкрементов РТ-неустойчивости. Сама же РТ-неустойчивость, играющая важную роль для лайнеров, не сказывается на неустойчивости плоского токового слоя.

Представляет интерес рассмотрение развития тиринг-неустойчивости в нелинейном случае для качественного (а иногда и количественного) понимания того, что будет происходить после экспоненциального роста возмущений, когда в игру вступают нелинейные эффекты. При учете нелинейных эффектов важно понять, как будет происходить концентрация и шнурование тока на финальной стадии. Для понимания качественных особенностей нелинейного развития тиринг-неустойчивости можно рассмотреть упрощенную постановку задачи — одномерную задачу с модельным описанием проводимости. Понимание физики тиринг-неустойчивости должно помочь в выяснении роли этой неустойчивости в лайнерной имплозии. Кроме того, методика, описывающая динамику магнитного поля и движения вещества, может быть полезна для анализа экспериментов с плоскими проводниками (см., например, [13]), а также для учета поправок на конечную ширину флаеров в экспериментах по изучению ударных адиабат и изэнтроп материалов (см., например, [14–17]).

Следует отметить, что существует обширная литература, посвященная изучению тиринг-неустойчивости (разрывной неустойчивости) с приложениями для стационарных конфигураций магнитного поля и космической плазмы, в том числе магнитосферы, см., например, [18–21]. Эти

исследования зачастую относятся к изучению развития неустойчивости в малоплотной плазме и потому для них важную роль играют кинетические явления и процессы внутри самого слоя, а также явления и масштабы, соответствующие конкретным экспериментам и наблюдениям. Есть важное отличие рассматриваемой нами задачи от задачи о классической тиринг-модели. В нашей задаче предполагается, что токовый слой (плазменная оболочка или лайнер) находится в вакууме, тогда как при рассмотрении классической тиринг-модели этот слой находится в плазме. При этом окружающая плазма препятствует перестройке магнитной топологии и необходим учет не только сопротивления и плотности слоя, но и сопротивления и массы окружающей плазмы. Отсутствие окружающей плазмы (или ее малая плотность или малая проводимость) позволяет упростить задачу и для тонкого слоя свести ее к одномерной. Мы будем использовать МГД-подход, считая слой бесконечно тонким и не интересуясь его структурой. При этом задача содержит только два размерных параметра: отношение магнитного давления к поверхностной плотности слоя (размерность ускорения) и поверхностная проводимость слоя (размерность скорости), поэтому результаты будут обладать большой общностью и, при использовании соотношений подобия, могут быть применимы к различным МГД-задачам.

Результатом нашей нелинейной задачи является филаментация токов, нарастающая неограниченно за конечное время. Надо сказать, что филаментация токов возможна также за счет других, отличных от тиринг-моды, механизмов. В качестве одного из примеров можно привести задачи о так называемой электротепловой неустойчивости [22, 23], когда для возрастающей с ростом температуры проводимости (как для классической  $T^{3/2}$  зависимости плазменной проводимости) ток перебрасывается в зоны с повышенной температурой, что приводит к увеличению там джоулевого тепловыделения, дальнейшему росту температуры и филаментации тока. В качестве другого примера можно указать образование волокнистой структуры токовой оболочки в разрядах в газе на начальной стадии Z-пинча [24] из-за неустойчивости процессов ионизации первоначально холодного газа. При этом волокнистая структура токовой оболочки может в Z-пинче сохраняться и на более поздних стадиях [25], вплоть до фокусировки. На этих поздних стадиях при больших токах тиринг-неустойчивость может уже существенно сказываться на волокнистой структуре токовой оболочки.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим плоский и бесконечно тонкий токовый слой, ось  $y$  направим перпендикулярно его плоскости (рис. 1а). Поверхностную плотность тока в нем  $\mathbf{j}$  (ниже для краткости поверхностную плотность тока будем называть плотностью тока) будем считать зависящей от  $x$  и направленной вдоль  $z$ :  $\mathbf{j} = j(x)\mathbf{e}_z$ . Будем рассматривать одномерную задачу, считая, что все величины в слое зависят только от  $x$  (рис. 1б).

Определим магнитное поле на поверхности, т.е. при  $y = 0$ . По закону Био–Савара плотность тока и создаваемое им магнитное поле связаны соотношением

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \mathbf{r} - \mathbf{r}']}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^2\mathbf{r}'. \quad (1)$$

Из (1) видно, что поскольку при  $y = 0$  вектор  $\mathbf{r}$  будет лежать в плоскости  $(x, z)$ , то вектор  $\mathbf{B}$  будет перпендикулярен этой плоскости:  $\mathbf{B} = B(x)\mathbf{e}_y$ . Величина  $B$  равна

$$\begin{aligned} B(x) &= -\frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j(x')(x' - x)}{((x' - x)^2 + (z' - z)^2)^{3/2}} dz' dx' = \\ &= -\frac{2}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j(x')}{x' - x} dx'. \end{aligned} \quad (2)$$

Применим к (2) преобразование Гильберта, как это сделано в [26], и выразим плотность тока через интеграл от магнитного поля

$$j(x) = j_0 - \frac{c}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(x')}{x - x'} dx' \quad (3)$$

(мы включили в  $j(x)$  для общности постоянный член  $j_0$ , который не дает нормальной компоненты магнитного поля). Таким образом, в рассматриваемой одномерной задаче для определения полей и токов можно не обращаться к уравнениям в перпендикулярном слое направлении  $y$ , а использовать уравнения (2) и (3), связывающие токи и поля, заданные на самом слое  $y$ -компонента магнитного поля вызывает лоренцеву силу, толкающую вещество в  $x$ -направлении. Обозначим  $\mathbf{v} = v(x)\mathbf{e}_x$  – скорость точки слоя,  $\rho$  и  $\Delta$  – плотность и толщину слоя (поверхностная плотность слоя при этом равна  $\mu = \rho\Delta$ ). Уравнение движения

$$\mu \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

$$\frac{d\mu}{dt} + \mu \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

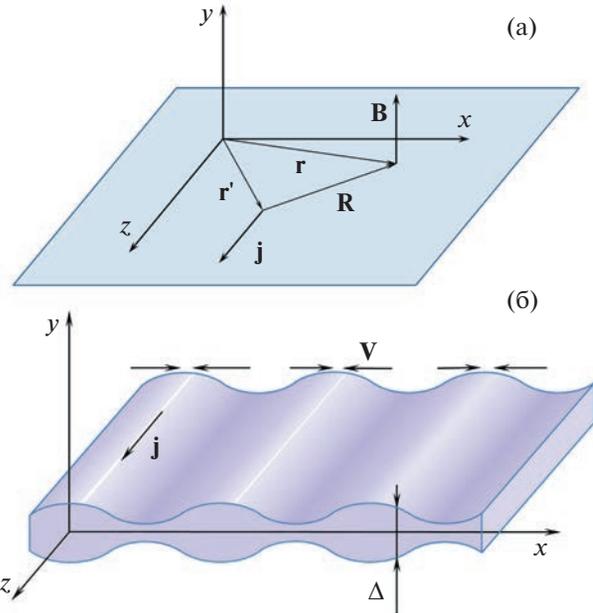


Рис. 1. Геометрия задачи: плоский токовый слой в отсутствие возмущений (а), развитие тиринг-неустойчивости (б).

$(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla))$  – субстанциональная производная) в рассматриваемой задаче запишется в виде

$$\mu \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{c} jB. \quad (4)$$

Уравнение движения (4) не содержит слагаемого с градиентом давления, хотя газокINETическое давление внутри слоя определяется магнитным давлением  $B^2/8\pi$  и по порядку величины равно ему. Однако, если оценить силу, вызванную градиентом давления и вносящую вклад в правую часть уравнения (4), то можно увидеть, что она  $\sim \Delta \frac{\partial p}{\partial x} \sim \Delta \frac{\partial(B^2/8\pi)}{\partial x} \sim \frac{\Delta jB}{L c}$  ( $L$  – характерные рассматриваемые масштабы, напомним, что  $j$  – поверхностная плотность тока,  $j \sim cB/4\pi$ ) и пропорциональна толщине слоя. Поскольку мы считаем малой толщину слоя, вкладом градиента давления в уравнение движения можно пренебречь.

Наличие скорости  $v$  будет приводить к перераспределению вещества слоя и изменению его поверхностной плотности. Ее величина будет определяться уравнением непрерывности

которое в нашем одномерном случае принимает вид

$$\frac{d\mu}{dt} + \mu \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Закон Ома с учетом вклада в электрическое поле члена  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}/c$  имеет вид

$$\mathbf{j} = \sigma\Delta \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)_\tau$$

( $\sigma$  – проводимость материала слоя, величина  $\sigma\Delta$  является поверхностной проводимостью слоя), и в нашем случае он записывается в виде

$$j = \sigma\Delta \left( E + \frac{v}{c} B \right). \quad (6)$$

Из (6) и уравнения Максвелла

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{E},$$

которое в нашей задаче запишется как

$$\frac{\partial B}{\partial t} = c \frac{\partial E}{\partial x},$$

получаем

$$\frac{1}{c} \frac{dB}{dt} + \frac{1}{c} B \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{j}{\sigma\Delta} \right). \quad (7)$$

Используя (5), перепишем (7) в виде

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{B}{\mu} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{j}{\sigma\Delta} \right). \quad (8)$$

Если предположить, что плотность слоя пропорциональна его проводимости, например, плотность слоя и проводимость постоянны, то уравнение (8) можно переписать в виде

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{B}{\mu} \right) = \frac{1}{\sigma\Delta} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{j}{\mu} \right). \quad (9)$$

Система уравнений (3), (4), (5) и (9) определяет нелинейное развитие тиринг-неустойчивости токового слоя.

В качестве исходного равновесия системы предположим, что невозмущенные магнитные поля с обеих сторон слоя равны по модулю

$$B_0 = \frac{2\pi}{c} j_0$$

и имеют противоположные направления. Невозмущенная поверхностная плотность тока в слое  $j(x) = j_0$  постоянна по пространству. Слой предполагается бесконечно тонким, структурой слоя в этом приближении мы не интересуемся. Поскольку магнитные давления с обеих сторон слоя равны, система в начальный момент времени находится в динамическом равновесии. Правая часть уравнения (9) обращается в нуль и магнитное поле остается постоянным.

Для полноты рассмотрим линейный предел системы уравнений (3), (4), (5) и (9). Индексом 0 будем обозначать невозмущенные величины, а индексом 1 – возмущения. Введем обозначения

$$g = \frac{2\pi j_0^2}{\mu_0 c^2} \equiv \frac{B_0^2}{2\pi\mu_0}, \quad u_0 = \frac{c^2}{4\pi\sigma\Delta_0}$$

( $g$  имеет размерность ускорения и характеризует силовое действие магнитного поля, а  $u_0$  имеет размерность скорости и характеризует скорость растекания возмущений магнитного поля [12]) и линеаризуем рассматриваемую систему:

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = -g \frac{B_1}{B_0}, \\ \frac{d\mu_1}{dt} + \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{d(B_1/B_0)}{dt} = 2u_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{j_1}{j_0} - \frac{\mu_1}{\mu_0} \right), \\ \frac{j_1(x)}{j_0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_1(x')/B_0}{x' - x} dx'. \end{cases} \quad (10)$$

Рассмотрим гармонические возмущения, зависящие от  $x$  пропорционально  $\exp(ikx)$ . В этом случае все величины будут зависеть от координаты  $x$  и времени как  $\sim \exp(ikx + \gamma t)$ , поэтому из (10) получаем

$$\begin{cases} \gamma v_1 = -g \frac{B_1}{B_0}, \\ \gamma \frac{\mu_1}{\mu_0} + ikv_1 = 0, \\ \gamma \frac{B_1}{B_0} = 2iu_0 k \left( \frac{j_1}{j_0} - \frac{\mu_1}{\mu_0} \right), \\ \frac{j_1}{j_0} = i \frac{B_1}{B_0}. \end{cases} \quad (11)$$

Из системы (11) получается дисперсионное соотношение для нахождения инкрементов  $\gamma$  [12]

$$\gamma^3 + 2u_0 k \gamma^2 - 2u_0 g k^2 = 0.$$

Это уравнение всегда имеет один корень  $\gamma_1$ , соответствующий неустойчивости ( $\text{Re } \gamma_1 > 0$ ), причем при больших  $k$  (когда токи успевают растекаться в соответствии с перераспределением массы)  $\gamma_1 \approx \sqrt{kg}$ .

В нелинейной задаче мы исследовали развитие неустойчивости для периодической по координате  $x$  системы. При этом, если даже вначале возмущения были гармоническими  $\sim \exp(ikx)$ , со временем их развитие приведет к отличию от гармонических, но они останутся периодическими. Поэтому будем считать, что возмущения всех величин, в том числе и плотности тока  $j_1(x)$ , пери-

одические с периодом  $a$ . В периодической задаче можно перейти от интегрирования по бесконечной прямой в (3) к интегрированию по конечному отрезку, просуммировав вклады всех периодов [27]. Тогда уравнение (3) можно переписать как

$$j(x) = j_0 + \frac{c}{2\pi^2} \int_{-1/2}^{1/2} B(x + a\zeta) \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} d\zeta, \quad (12)$$

где  $\zeta = (x' - x)/a$ ,  $\varphi(\zeta) = 1 - (\psi(1 + \zeta) - \psi(1 - \zeta))\zeta = = \pi\zeta \operatorname{ctg}\pi\zeta$ , а  $\psi$  – пси-функция Эйлера. Вид функции  $\varphi(\zeta)$  показан на рис. 2.

Решение нашей нелинейной задачи будет зависеть от безразмерного времени  $\tau = tu_0/a$ , безразмерной координаты  $\xi = x/a$  и одного безразмерного параметра  $\tilde{g} = ga/u_0^2$ , характеризующего силу токовой концентрации. Динамику развития неустойчивости мы будем описывать с помощью безразмерной плотности тока  $\tilde{j} = j/j_0 \equiv 1 + \tilde{j}_1$ , безразмерного магнитного поля  $\tilde{B} = B/B_0$ , безразмерной плотности слоя  $\tilde{\mu} = \mu/\mu_0 \equiv 1 + \tilde{\mu}_1$  и безразмерной скорости  $\tilde{v} = v/u_0$ .

Система уравнений (4), (5), (9) и (12) в безразмерном виде запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \tilde{\mu} \frac{d\tilde{v}}{d\tau} = -\tilde{g}\tilde{j}\tilde{B}, \\ \frac{d\tilde{\mu}}{d\tau} + \tilde{\mu} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi} = 0, \\ \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\tilde{B}}{\tilde{\mu}} \right) = \frac{2}{\tilde{\mu}} \frac{\partial}{\partial\xi} \left( \frac{\tilde{j}}{\tilde{\mu}} \right), \\ \tilde{j}(\xi) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{B}(\xi + \zeta) \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} d\zeta. \end{cases} \quad (13)$$

Перепишем систему уравнений (13), введя переменную Лагранжа

$$m = \int_0^\xi \tilde{\mu}(\xi') d\xi'$$

и магнитный поток

$$d\Phi = \tilde{B} d\xi.$$

В этом случае

$$dm = \tilde{\mu}(\xi) d\xi.$$

Поскольку второе уравнение (13) было использовано при выводе третьего уравнения этой систе-

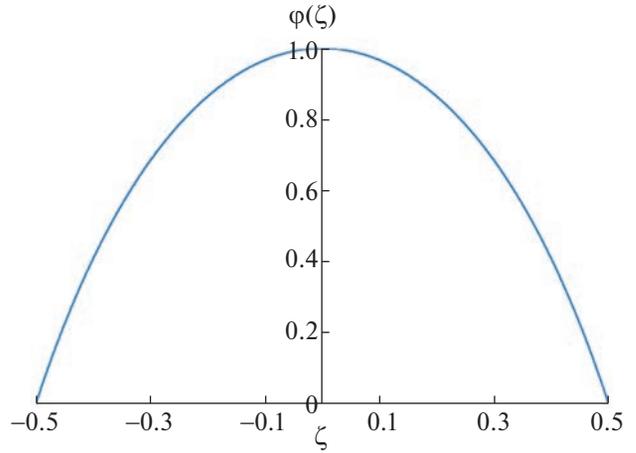


Рис. 2. График функции  $\varphi(\zeta)$ .

мы, то его можно больше не учитывать, и в лагранжевых координатах (13) примет вид

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{v}}{d\tau} = -\tilde{g}\tilde{j} \frac{d\Phi}{dm}, \\ \tilde{v} = \frac{d\xi}{d\tau}, \\ \tilde{\mu} = \frac{dm}{d\xi}, \\ \frac{d^2\Phi}{d\tau dm} = 2 \frac{d}{dm} \left( \frac{\tilde{j}}{\tilde{\mu}} \right), \\ \tilde{j}(\xi) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{m(\zeta=-1/2)}^{m(\zeta=1/2)} \frac{d\Phi(\xi + \zeta) \varphi(\zeta)}{dm' \zeta} dm'. \end{cases} \quad (14)$$

В качестве начальных условий для исследуемой задачи мы выбрали следующие: в начальный момент времени токовый слой имеет постоянную поверхностную плотность  $\mu_0 = \text{const}$ , плотность тока в нем равна  $j(x) = j_0 + j_1(x)$ , начальная скорость равна нулю  $v_0 = 0$ .

В безразмерных переменных начальные условия мы будем считать следующими: возмущения начальной плотности тока

$$\tilde{j}_1(\xi) = j_1^{(0)} \cos(2\pi\xi), \quad (15)$$

а начальные возмущения плотности и скорости  $\tilde{\mu}_1 = \tilde{v} = 0$ .

### 3. МЕТОДИКА РАСЧЕТА

Перейдем от эйлеровой сетки с узлами  $\xi_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) к лагранжевой с узлами

$$m_i = \int_0^{\xi_i(\tau=0)} \tilde{\mu}(\xi') d\xi'$$

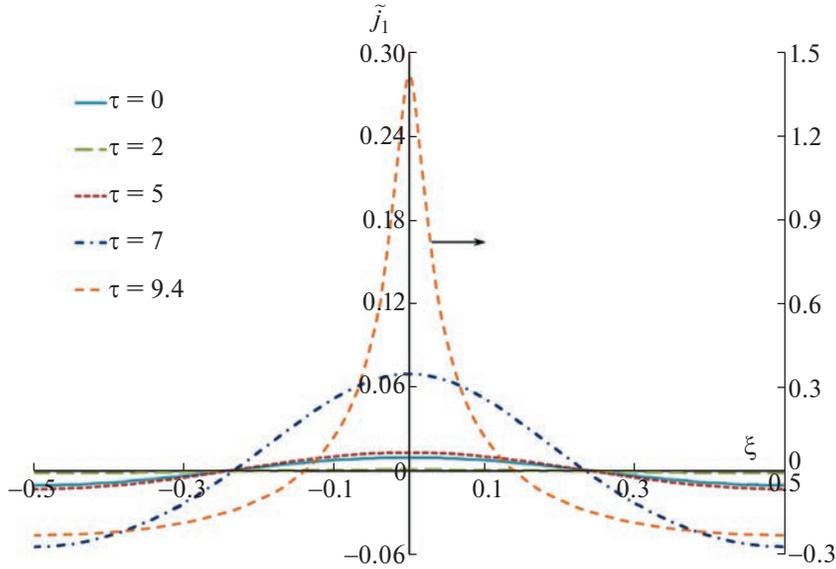


Рис. 3. Плотность тока  $\tilde{j}_1(\xi)$  для  $\tilde{g} = 0.1$ . У функции, отмеченной стрелочкой, значения отложены по правой оси.

(материальная точка с координатой  $m_i$  в момент времени  $\tau = 0$  имеет пространственную координату  $\xi_i(\tau = 0)$ ). Масса  $i$ -й ячейки будет равна  $\Delta m_i = \tilde{\mu}_i \Delta \xi_i$ , где  $\Delta \xi_i = \xi_i - \xi_{i-1}$ . Магнитный поток в ячейке  $\Delta \xi$  будет равен

$$\Delta \Phi = \tilde{B} \Delta \xi.$$

Последнее уравнение в (14) переписывается как

$$\begin{aligned} \tilde{j}(\xi_i) &= 1 + \frac{1}{\pi} \int_{m(\xi=-1/2)}^{m(\xi=1/2)} \frac{\tilde{B}(\xi_i + \zeta) \varphi(\zeta)}{\tilde{\mu}(\zeta) \zeta} dm' = \\ &= 1 + \frac{1}{\pi} \int_{m(\xi=-1/2)}^{m(\xi=1/2)} \frac{\Delta \Phi(\xi_i + \zeta) \varphi(\zeta)}{\Delta m' \zeta} dm', \end{aligned} \quad (16)$$

а уравнение для скорости  $i$ -й ячейки так

$$\frac{d\tilde{v}_i}{d\tau} = -\tilde{g} \tilde{j}_i \frac{\tilde{B}_i \Delta \xi_i}{\tilde{\mu}_i \Delta \xi_i} = -\tilde{g} \tilde{j}_i \frac{\Delta \Phi_i}{\Delta m_i}. \quad (17)$$

Перепишем четвертое уравнение в (14)

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\Delta \Phi_i}{\Delta m_i} \right) = 2 \left( \frac{d}{dm} \left( \frac{\tilde{j}}{\tilde{\mu}} \right) \right)_i$$

и проинтегрируем его по  $i$ -й ячейке

$$\frac{d}{d\tau} (\Delta \Phi_i) = 2 \left[ \frac{\tilde{j}}{\tilde{\mu}} \right]_{m_{i-1}}^{m_i}. \quad (18)$$

Таким образом, от системы уравнений (14) мы перешли к системе уравнений (16)–(18) для дискретной системы переменных в лагранжевой системе координат.

Чтобы узнать, как развиваются возмущения в токовом слое, мы задавали на отрезке  $\xi =$

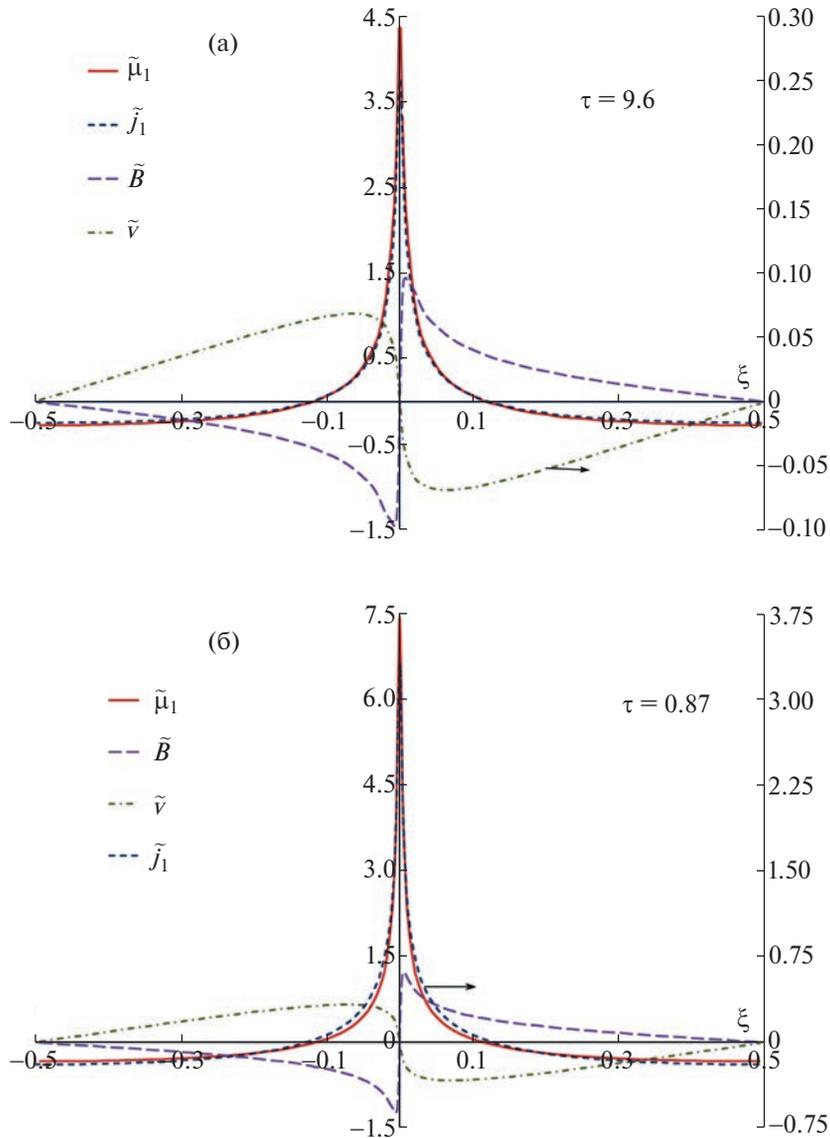
$[-0.5; 0.5]$  возмущения магнитного потока, соответствующие начальной плотности тока (15) с амплитудой  $|j_1^{(0)}| \ll 1$ , а затем решали систему (16)–(18). Величина  $\tilde{g}$  выступала в качестве параметра.

Счетная сетка по координате  $\xi$  в момент времени  $\tau = 0$  была равномерной с числом шагов  $N = 100$ . В начале временного шага (в момент времени  $\tau$ ) из уравнения (16) находилась плотность тока  $\tilde{j}(\xi_i)$ , соответствующая текущему распределению магнитного потока  $\Delta \Phi_i$ . Затем узлы сетки перемещались в соответствии с (17). После этого из (18) по явной схеме вычислялось распределение магнитного потока в момент времени  $\tau_{i+1} = \tau_i + \Delta \tau$ . Шаг по времени  $\Delta \tau$  был постоянным в каждом отдельном расчете и определялся значением параметра  $\tilde{g}$ . Для  $\tilde{g} = 0.01$  величина  $\Delta \tau$  была равна  $\Delta \tau = 0.001$ , для  $\tilde{g} = 0.1$  и  $\tilde{g} = 1$  задавалось  $\Delta \tau = 0.0001$ , а для  $\tilde{g} = 10 - \Delta \tau = 0.00001$ . Масса каждой ячейки  $\Delta \tilde{m}_i$  оставалась постоянной и равной  $\Delta \tilde{m}_i = 1/N$ . Амплитуда начальных возмущений плотности тока была равна  $j_1^{(0)} = 0.01$ .

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В качестве примера эволюции плотности тока на рис. 3 приведены значения плотности тока  $\tilde{j}_1$  на различные моменты времени для значения параметра  $\tilde{g} = 0.1$ .

Из рис. 3 видно, что амплитуда возмущений тока сначала уменьшается, а затем начинает возрастать. Форма возмущений долгое время остается почти неизменной, хотя постепенно величина



**Рис. 4.** Величины  $\tilde{\mu}_1$ ,  $\tilde{j}_1(\xi)$ ,  $\tilde{B}(\xi)$  и  $\tilde{v}(\xi)$  для  $\tilde{g} = 0.1$  при  $\tau = 9.6$  (а),  $\tilde{g} = 10$  при  $\tau = 0.87$  (б). У функций, отмеченных стрелочкой ( $\tilde{v}$  или  $\tilde{j}_1$ ), значения отложены по правой оси.

$\tilde{j}_1(\xi = 0)$  становится несколько больше величины  $|\tilde{j}_1(\xi = \pm 0.5)|$ , а нули функции  $\tilde{j}_1(\xi)$  смещаются к точке  $\xi = 0$ . При достаточно больших временах искажение формы становится заметным, плотность тока при  $\xi = 0$  резко возрастает. Плотность тока в точке  $\xi = 0$  к некоторому моменту времени  $\tau_s$  (моменту образования сингулярности) стремится к бесконечности (см. также рис. 4, на котором показаны величины  $\tilde{j}_1(\xi)$ ,  $\tilde{\mu}_1$ ,  $\tilde{B}(\xi)$  и  $\tilde{v}(\xi)$  незадолго до момента времени  $\tau_s$ ). Аналогичные результаты были получены в расчетах с другими  $\tilde{g}$ .

Таким образом, развитие тиринг-неустойчивости за конечное время приводит к образованию сингулярности, где плотности тока и массы обра-

щаются в бесконечность. Если сравнить развитие тиринг-неустойчивости тонкого слоя с развитием периодических возмущений РТ-неустойчивости тонкой оболочки [28], то можно отметить, что для тонкой оболочки развитие РТ-неустойчивости также приводит за конечное время к потере аналитичности решения, однако для РТ-неустойчивости в некоторый момент времени происходит лишь излом формы оболочки, а для тиринг-неустойчивости в некоторый момент времени характерные величины обращаются в некоторой точке в бесконечность.

Обращаем внимание, что для наших решений, хотя мы свели задачу к одномерной, фактически конфигурация магнитных полей является дву-

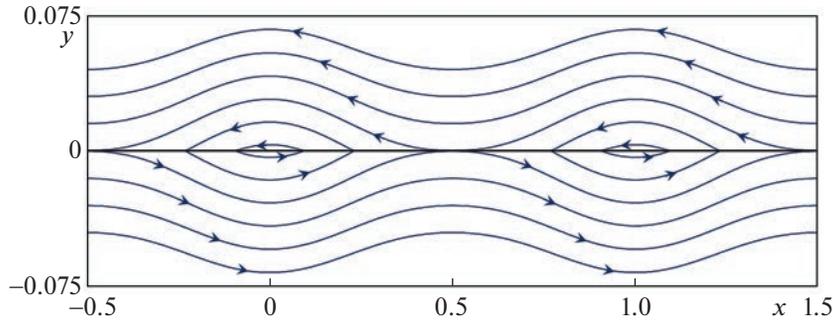


Рис. 5. Конфигурация магнитных силовых линий, соответствующая распределению тока в задаче с  $\tilde{g} = 0.1$  в момент времени  $\tau = 7.6$ .

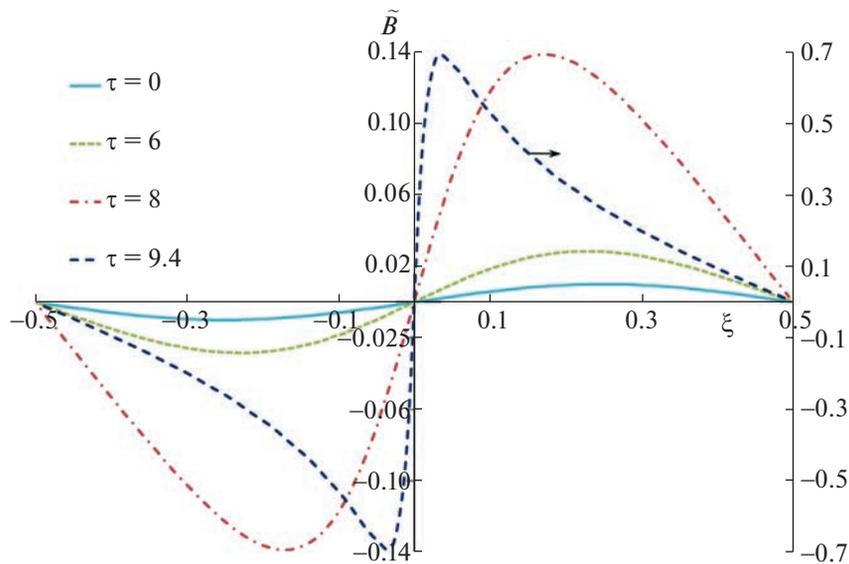


Рис. 6. Магнитное поле  $\tilde{B}(\xi)$  для  $\tilde{g} = 0.1$  на различные моменты времени. У функции, отмеченной стрелочкой, значения отложены по правой оси.

мерной и образует магнитные “острова”. Для иллюстрации на рис. 5 показана конфигурация магнитных силовых линий, соответствующая распределению тока в задаче с  $\tilde{g} = 0.1$  в момент времени  $\tau = 7.6$  (см. рис. 3).

На рис. 6 показано магнитное поле  $\tilde{B}$  для  $\tilde{g} = 0.1$  на различные моменты времени. Видно, что на больших временах начальная синусоида искажается, и координаты точек с максимальными значениями  $|\tilde{B}|$  смещаются к  $\xi = 0$ , сама же величина магнитного поля также стремится к бесконечности при приближении к моменту времени  $\tau_s$ .

На рис. 7 представлена скорость  $\tilde{v}(\xi)$  для  $\tilde{g} = 0.1$  на различные моменты времени. Видно, что вещество движется к точке  $\xi = 0$  с обеих сто-

рон, причем скорость движения со временем возрастает. Координаты, в которых величина  $|\tilde{v}(\xi)|$  достигает максимума, находятся заметно дальше от  $\xi = 0$ , чем аналогичные координаты для  $|\tilde{B}(\xi)|$ .

На рис. 8 представлена величина  $\tilde{\mu}_1$ , характеризующая отклонение поверхностной плотности от начальной, для  $\tilde{g} = 0.1$  на различные моменты времени. Видно, что на больших временах эта величина напоминает по форме плотность тока  $\tilde{j}_1$  и также стремится к бесконечности в точке  $\xi = 0$  при приближении к моменту времени  $\tau_s$ . Расчеты, проведенные для разных значений  $\tilde{g}$ , показывают, что при малых  $\tilde{g}$  формы  $\tilde{\mu}_1$  и  $\tilde{j}_1(\xi)$  почти совпадают (см. рис. 4), а с ростом  $\tilde{g}$  пик плотности тока становится несколько шире, чем пик  $\tilde{\mu}_1$ .

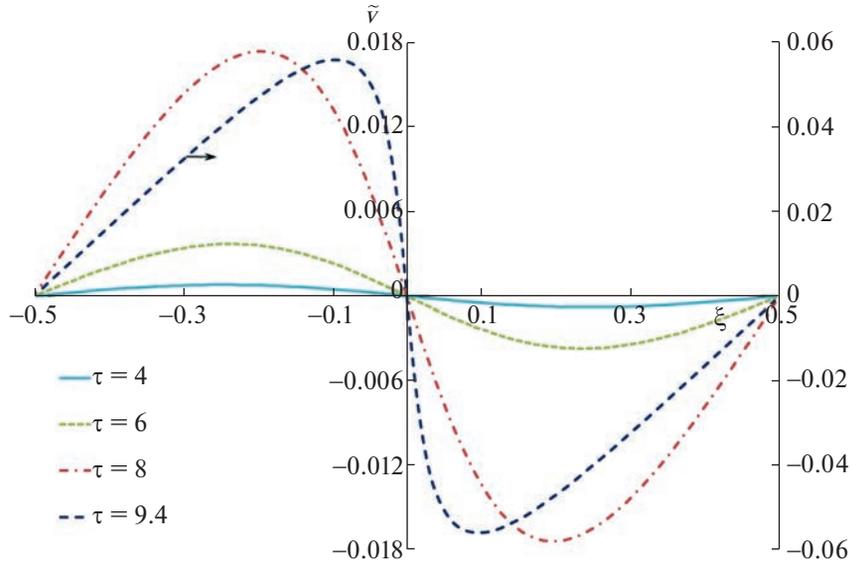


Рис. 7. Скорость  $\tilde{v}(\xi)$  для  $\tilde{g} = 0.1$  на различные моменты времени. У функции, отмеченной стрелочкой, значения отложены по правой оси.

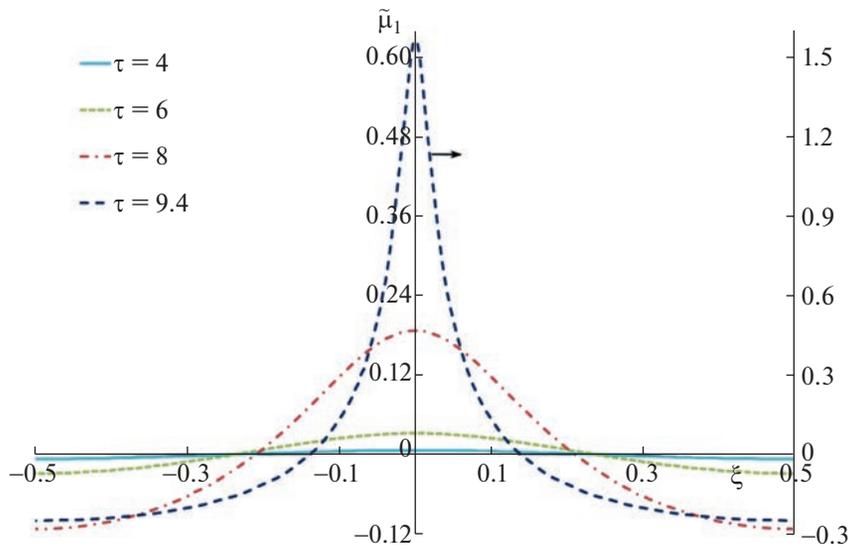


Рис. 8. Величина  $\tilde{\mu}_1$  для  $\tilde{g} = 0.1$  на различные моменты времени. У функции, отмеченной стрелочкой, значения отложены по правой оси.

В [12] было показано, что на линейной стадии возмущения в тиринг-слое растут со временем как

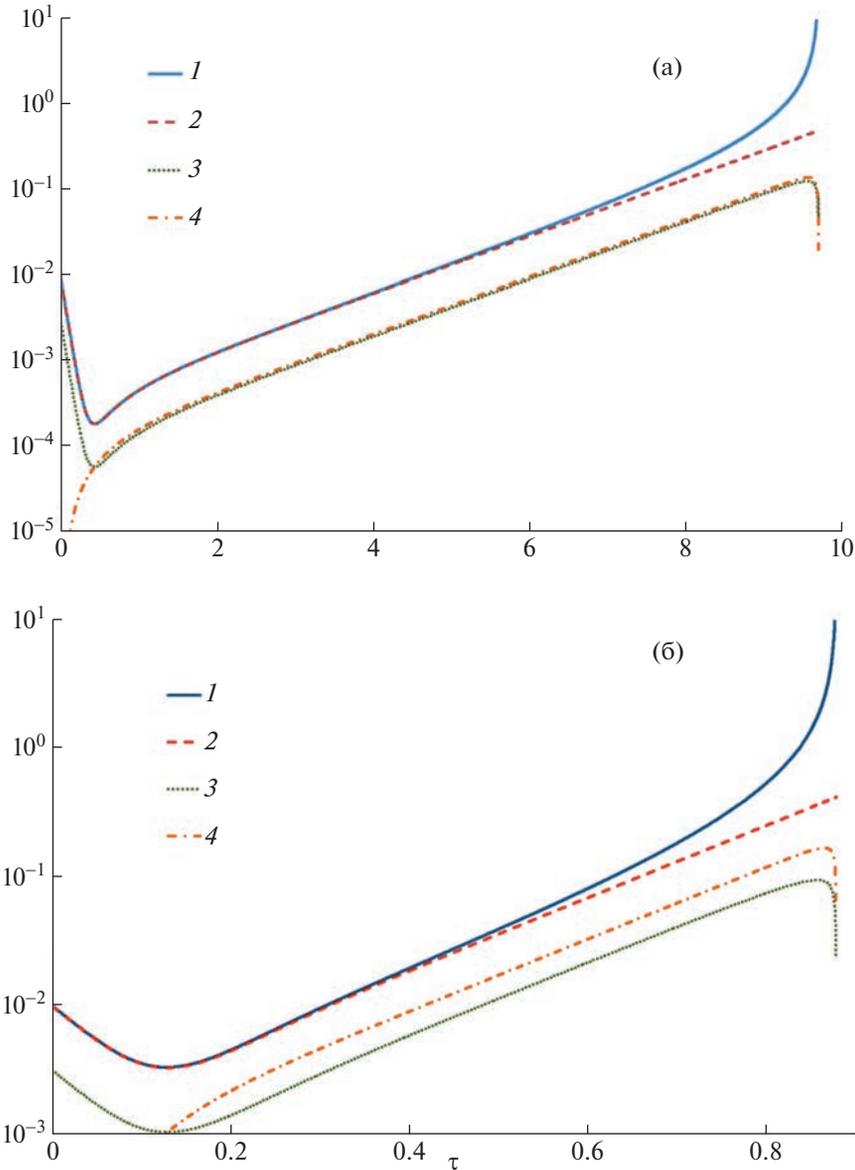
$$\begin{aligned} \tilde{j}_1 &= (C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} + C_3 e^{\gamma_3 t}) \exp(ikx) \equiv \\ &\equiv (C_1 e^{\tilde{\gamma}_1 \tau} + C_2 e^{\tilde{\gamma}_2 \tau} + C_3 e^{\tilde{\gamma}_3 \tau}) \exp(2\pi i \xi), \end{aligned} \quad (19)$$

где безразмерные инкременты неустойчивости  $\tilde{\gamma} = \gamma a / u_0$  являются корнями кубического уравнения

$$\tilde{\gamma}^3 + 2\tilde{k}\tilde{g}\tilde{\gamma}^2 - 2\tilde{k}^2\tilde{g}^3 = 0. \quad (20)$$

В (20)  $\tilde{k}$  – безразмерное волновое число  $\tilde{k} = ku_0^2/g$ ; в нашем случае  $k = 2\pi/a$  и, значит,  $\tilde{k} = 2\pi/\tilde{g}$ . В частности, для  $\tilde{k} \gg 1$  инкременты равны

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{1,2} &= \pm \sqrt{2\pi\tilde{g}} - \frac{1}{4}\tilde{g}, \\ \tilde{\gamma}_3 &= -4\pi + \frac{1}{2}\tilde{g}. \end{aligned}$$



**Рис. 9.** Зависимость плотности тока  $\tilde{j}_1(\xi = 0)$  от времени, полученная в расчетах (1), 2 – эта же величина, вычисленная по формуле (19), 3 –  $J_p(\tau)$ , 4 –  $M_p(\tau)$ , для значений параметра  $\tilde{g}$ :  $\tilde{g} = 0.1$  (а),  $\tilde{g} = 10$  (б).

Используя начальные условия

$$\begin{aligned} \tilde{j}_1(\tau = 0) &= j_1^{(0)} \cos(2\pi\xi), \\ \tilde{v}(\tau = 0) &= 0, \quad \tilde{\mu}(\tau = 0) = 1, \end{aligned}$$

легко составить систему уравнений для коэффициентов  $C_1, C_2, C_3$  и найти их.

На рис. 9 приведены зависимости от времени плотности тока  $\tilde{j}_1(\xi = 0)$  для значений параметра  $\tilde{g} = 0.1$  и  $\tilde{g} = 10$ , полученные в расчетах и вычис-

ленные по формуле (19). Также на этом рисунке представлены величины

$$J_p = \int_{-\xi_{10}}^{\xi_{10}} \tilde{j}_1(\xi) d\xi$$

и

$$M_p = \int_{-\xi_{10}}^{\xi_{10}} \tilde{\mu}_1(\xi) d\xi,$$

где  $\xi_{10}$  – координата, в которой  $\tilde{j}_1(\xi_{10}) = 0.1\tilde{j}_1(\xi = 0)$  (величина, характеризующая ширину токового

пика).  $J_p(\tau)$  и  $M_p(\tau)$  – интегралы от возмущений плотности тока и поверхностной плотности около максимума плотности тока.

Из рис. 9 видно, что амплитуда возмущений вначале падает по закону  $\tilde{j}_1 \sim e^{\tilde{\gamma}_1 \tau}$  (при малых  $\tau$  основной вклад в (19) вносит это слагаемое), а затем возрастает, поскольку в тиринг-неустойчивости всегда есть положительный инкремент  $\tilde{\gamma}_1$ . Расчеты с различными  $\tilde{g}$  показывают, что, как и следовало ожидать, при малых  $\tilde{g}$  начальное падение амплитуды гораздо сильнее, чем при больших  $\tilde{g}$ , а зависимость  $\tilde{j}_1(\xi = 0)$  от времени согласуется с (19) несколько дольше.

Когда возмущения плотности тока  $\tilde{j}_1(\xi = 0)$  становятся порядка 1, скорость роста возмущений превышает экспоненциальную, и плотность тока уходит в бесконечность за конечное время. Время, за которое возмущения плотности тока вырастают до бесконечности, примерно пропорционально  $1/\sqrt{\tilde{g}}$ . В табл. 1 представлены  $\tau_s$  – время наступления сингулярности,  $\tau_{10}$  – время, в которое отклонение  $\tilde{j}_1(\xi = 0)$  от (19) превысило 10%, и  $j_{10}$  – величина  $\tilde{j}_1(\xi = 0)$  в момент времени  $\tau_{10}$  для различных  $\tilde{g}$ . Из табл. 1 видно, что возмущения плотности тока становятся нелинейными (на 10% превышают значения, вычисленные по формуле (19)), начиная с величины, примерно равной  $j_{10} \sim 0.04$ .

Зависимости  $J_p(\tau)$  и  $M_p(\tau)$  на стадии роста возмущений возрастают экспоненциально заметно дольше, чем  $\tilde{j}_1(\xi = 0)$ , а затем начинают уменьшаться незадолго до разрушения слоя. Макси-

**Таблица 1.** Величины  $\tau_s$ ,  $\tau_{10}$  и  $j_{10}$  для различных  $\tilde{g}$

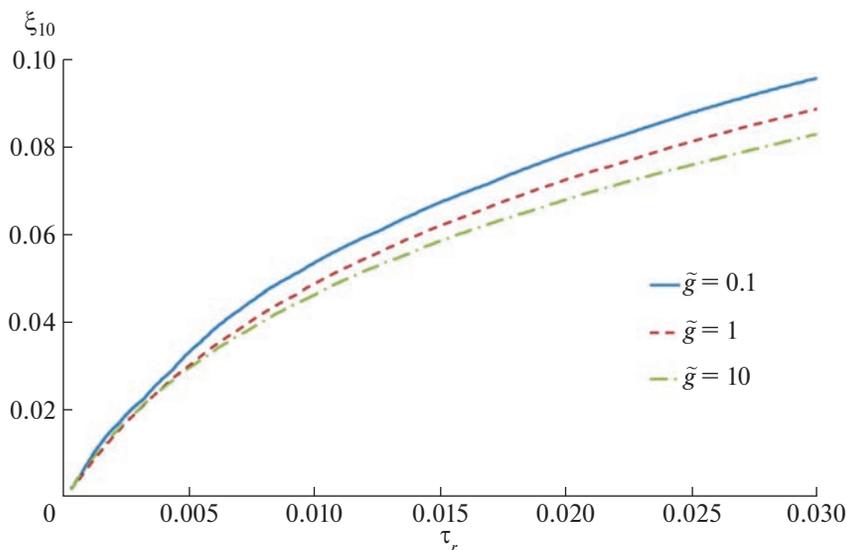
$\tilde{g}$	$\tau_s$	$\tau_{10}$	$j_{10}$
0.01	34.284	23.86	0.0394
0.1	9.689	6.524	0.0467
1	2.8173	1.788	0.0487
10	0.8788	0.515	0.0441

мальная амплитуда возмущений  $\tilde{j}_1(\xi = 0)$  вблизи  $\tau_s$  ведет себя степенным образом:  $\tilde{j}_1(\xi = 0) \sim (\tau_s - \tau)^{-\alpha}$ ,  $\alpha \sim 0.6-0.7$ .

На рис. 10 представлена характеристика ширины пика плотности тока,  $\xi_{10}$ , в зависимости от величины  $\tau_r = (\tau_s - \tau)/\tau_s$  для нескольких значений  $\tilde{g}$ . На временах  $\tau_r < 0.005$  ширина пика  $\xi_{10}(\tau_r)$  стремится к нулю довольно быстро, по крайней мере, по линейному закону.

На рис. 11 представлены величины  $J_p$  и  $M_p$  в зависимости от  $\tau_r$  для нескольких значений  $\tilde{g}$ . Видно, что незадолго до разрушения слоя после прекращения экспоненциального роста, показанного на рис. 9, зависимости  $J_p$  и  $M_p$  убывают до нуля по закону  $\sim \tau_r^\beta$ ,  $\beta = 0.3-0.4$ . Таким образом, ток, и вещество концентрируются вблизи точки  $\xi = 0$ , но со временем в пике концентрируется все меньшая масса и ток.

На рис. 12 представлено отношение  $M_p/J_p$  в зависимости от величины  $\tau_r$  для нескольких значений  $\tilde{g}$ .



**Рис. 10.** Зависимость  $\xi_{10}$  от величины  $\tau_r$ .

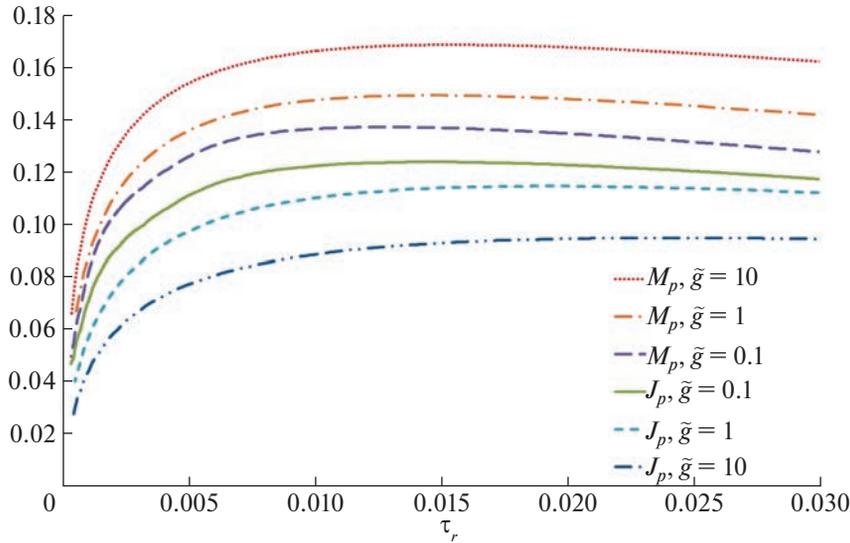


Рис. 11.  $J_p$  и  $M_p$  в зависимости от величины  $\tau_r$ .

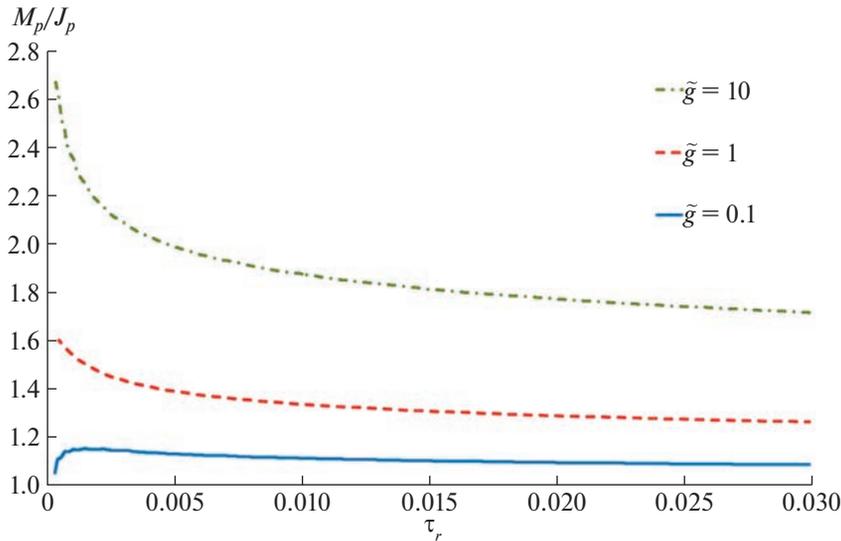


Рис. 12. Отношение  $M_p/J_p$  в зависимости от величины  $\tau_r$ .

Рисунок 12 показывает, что для малых  $\tilde{g}$  отношение  $M_p/J_p$  остается примерно равным 1, а для  $\tilde{g} = 10$  и  $\tilde{g} = 1$  это отношение возрастает при  $\tau_r \rightarrow 0$ . Это объясняется тем, что для малых  $\tilde{g}$  движение более медленное и ток успевает растекаться по массе, а при больших  $\tilde{g}$  только часть тока успевает переброситься в район сингулярности.

### 5. ОЦЕНКИ ПОВЕДЕНИЯ ВЕЛИЧИН ВБЛИЗИ СИНГУЛЯРНОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ТОКА

Рассмотрим возможное поведение величин при  $\tau_r \rightarrow 0$ ,  $\xi \rightarrow 0$ , исходя из системы уравнений

(3)–(5), (9), причем в уравнении (5) считалось, что  $\sigma\Delta \sim \mu$ , а величиной  $j_0$  в уравнении (3) пренебрегалось. Будем предполагать, что концентрация плотности тока со временем в этой области происходит по закону

$$j \sim \tau_r^{-\alpha} \tag{21}$$

(в этих оценках, поскольку речь идет об основных зависимостях, мы не будем делать различия между безразмерными и размерными величинами, обозначая их буквами без тильды, а для размерного времени под  $\tau_r$  будем подразумевать  $\tau_r = t_s - t$ ,

где  $t_s$  — момент времени образования сингулярности). Из уравнения (3) следует, что

$$B \sim j, \quad (22)$$

а из уравнения непрерывности (5)

$$x \sim v\tau_r. \quad (23)$$

Согласно рис. 12 ток может немного не успевать за концентрацией массы. Для оценки концентрации тока и массы будем теперь использовать уравнение (9), которое дает

$$\mu \sim \tau_r/x, \quad (24)$$

что с учетом уравнения движения (4) и связи (22) дает

$$v \sim \frac{j^2 \tau_r}{\mu} \sim x \tau_r^{-2\alpha} \quad (25)$$

и, в результате, с учетом (23), получим  $\alpha = 0.5$ . Будем считать, что концентрация плотности массы со временем при приближении к сингулярности происходит по закону

$$\mu \sim \tau_r^{-\gamma},$$

где  $\gamma > \alpha$ , т.е.  $\gamma > 0.5$ . Тогда из (25) и (23) получаем, что

$$v \sim \tau_r^\gamma, \quad x \sim \tau_r^{1+\gamma}. \quad (26)$$

При этом имеем некоторое несоответствие рис. 9, на котором  $\alpha \approx 0.6-0.7$ , и рис. 10, где ширина пика плотности ведет себя при малых  $\tau_r$  ближе к линейному закону  $x \sim \tau_r$ . Это несоответствие, вероятно, связано с неточностями расчетов при малых  $\tau_r$ , поскольку очень трудно проводить расчеты в малой области, где необходимо добиваться хорошего разрешения, да еще в условиях неустойчивости. Для интегральных же тока и массы  $J_p(\tau)$ ,  $M_p(\tau)$  получаем в соответствии с (21), (24), (26), что они убывают при приближении к сингулярности как  $J_p \sim \tau_r^{0.5+\gamma}$ ,  $M_p \sim \tau_r$ . Сравнивая эти степени со степенями, полученными в численных расчетах (рис. 11), также представляется, что численные расчеты завышают  $\alpha$  и занижают степень убывания  $x(\tau_r)$ .

В реальных физических системах возрастание концентрации тока и массы не будет происходить неограниченно и прекратится из-за наличия ряда факторов и явлений, не учитываемых в нашей модели. На самом деле, начиная с каких-то моментов времени необходимо будет учитывать, что слой не является тонким, учитывать неоднородность задачи, давление вещества и т.д. Однако в некоторых задачах полученное в работе возрастание концентрации тока и массы может до определенного момента времени реализоваться.

Обратим внимание на одну особенность концентрации тока и массы вблизи точек сингулярности при тиринг-неустойчивости. Поскольку масса вблизи этих точек концентрируется быстрее чем ток, ( $\gamma > \alpha$ ), джоулево тепловыделение на единицу массы должно в этой модели вблизи этих точек уменьшаться, т.е. в местах концентрации вещество должно быть более холодным. Поэтому, например, вряд ли можно объяснить свечение, наблюдаемое в работе [13] в середине фольги, концентрацией тока и массы в результате нелинейного развития тиринг-неустойчивости.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получена система одномерных уравнений, описывающая динамику магнитного поля и движение вещества в плоских тонких токовых слоях, с учетом нелинейного взаимодействия токов. Эта система может быть применена для анализа экспериментов с плоскими проводниками при рассмотрении явлений, происходящих вдоль ширины проводников (токовых листов, фольг и флаэров конечной ширины).

Разработана численная методика для решения одномерных (вдоль ширины слоев или фольг) задач магнитной гидродинамики, основанная на лагранжевой дискретизации массы вдоль этой ширины. Эта методика используется для изучения нелинейного развития тиринг-неустойчивости.

Показано, что при рассмотрении тиринг-неустойчивости, начиная с малых возмущений, возмущения токов, скоростей и плотности массы растут в соответствии с полученными ранее инкрементами роста малых возмущений, пока возмущения токов не достигают примерно 4% от начальной плотности тока токового слоя. Далее благодаря нелинейному взаимодействию токов возмущения поверхностной плотности тока и поверхностной плотности массы за конечное время неограниченно возрастают. Полученные в расчетах зависимости от времени для неограниченного роста поверхностной плотности тока можно описать зависимостью  $j \sim \tau_r^{-\alpha}$ , где  $\tau_r \sim t_s - t$ , а  $t_s$  — момент времени обращения плотности тока и плотности массы в бесконечность (момент времени образования сингулярности). В расчетах получено  $\alpha \sim 0.6-0.7$ , однако теоретические оценки дают меньшее значение этой величины  $\alpha = 0.5$ . Возможно, в расчетах из-за неточностей не удастся приблизиться к точному значению  $\alpha$ . В расчетах получено также, что ширина пиков плотности тока и массы стремится к нулю при  $\tau_r \rightarrow 0$  так, что полные ток  $J_p$  и масса  $M_p$ , вовлеченные в эти пики, также стремятся к нулю. Теоретические оценки для  $x(\tau_r)$ ,  $J_p(\tau)$  и  $M_p(\tau)$  дают

более быстрое стремление к нулю по сравнению с расчетами, что можно также связать с неточностями численных расчетов при малых  $\tau_r$  и малых массах. Тем не менее в рамках принятых в работе приближений качественное поведение тиринг-неустойчивости с неограниченным ростом поверхностной плотности тока и поверхностной плотности массы представляется надежно установленным.

Следует заметить, что исторически [1, 10] неустойчивость тонкого токового слоя в вакууме получила название тиринг (разрывная). Наше рассмотрение показывает, что фактически развитие неустойчивости в этой конфигурации не приводит к каким-либо разрывам, а приводит к образованию токовых шнуров (филаментации), куда стягивается и вещество. Поэтому может быть лучше называть эту неустойчивость филаментацией токового слоя.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Furth H.P., Killeen J., Rosenbluth M.N.* // Phys. Fluids. 1963. V. 6. P. 459.
2. *Айвазов И.К., Вихарев В.Д., Волков Г.С., Никандров Л.Б., Смирнов В.П., Царфин В.Я.* // Физика плазмы. 1988. Т. 14. С. 197.
3. *Spielman R.B., Deeney C., Chandler G.A., Douglas M.R., Fehl D.L., Matzen M.K., McDaniel D.H., Nash T.J., Porter J.L., Sanford T.W.L., Seamen J.F., Stygar W.A., Struve K.W., Breeze S.P., McGurn J.S., Torres J.A., Zagar D.M., Gilliland T.L., Jobe D.O., McKenney J.L., Mock R.C., Vargas M., Wagoner T.* // Phys. Plasmas. 1998. V. 5. P. 2105.
4. *Александров В.В., Браницкий А.В., Волков Г.С., Грабовский Е.В., Зурин М.В., Недосеев С.Л., Олейник Г.М., Самохин А.А., Сасоров П.В., Смирнов В.П., Федюлов М.В., Фролов И.Н.* // Физика плазмы. 2001. Т. 27. С. 99.
5. *Lebedev S.V., Beg F.N., Bland S.N., Chittenden J.P., Dangor A.E., Haines M.G., Kwek K.H., Pikuz S.A., Shelkovenko T.A.* // Phys. Plasmas. 2001. V. 8. P. 3734.
6. *Alexandrov V.V., Frolov I.N., Fedulov M.V., Grabovsky E.V., Mitrofanov K.N., Nedoseev S.L., Oleinik G.M., Porofeev I.Yu., Samokhin A.A., Sasorov P.V., Smirnov V.P., Volkov G.S., Zurin M.V., Zukakishvili G.G.* // IEEE Trans. on Plasma Sci. 2002. V. 30. P. 559.
7. *Cuneo M.E., Waisman E.M., Lebedev S.V., Chittenden J.P., Stygar W.A., Chandler G.A., Vesey R.A., Yu E.P., Nash T.J., Bliss D.E., Sarkisov G.S., Wagoner T.C., Bennett G.R., Sinars D.B., Porter J.L., Simpson W.W., Ruggles L.E., Wenger D.F., Garasi C.J., Oliver B.V., Aragon R.A., Fowler W.E., Hettrick M.C., Idzorek G.C., Johnson D., Keller K., Lazier S.E., McGurn J.S., Mehlhorn T.A., Moore T., Nielsen D.S., Pyle J., Speas S., Struve K.W., Torres J.A.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. P. 046406.
8. *Yu E.P., Oliver B.V., Sinars D.B., Mehlhorn T.A., Cuneo M.E., Sasorov P.V., Haines M.G., Lebedev S.V.* // Phys. Plasmas. 2007. V. 14. P. 022705.
9. *Felber F.S., Rostoker N.* // Phys. Fluids. 1981. V. 24. P. 1049.
10. *Самохин А.А.* // ПМТФ. 1988. Т. 2. С. 89.
11. *Hammer J.H., Ryutov D.D.* // Phys. Plasmas. 1999. V. 6. P. 3302.
12. *Garanin S.F., Kravets E.M., Dolinskiy V.Yu.* // IEEE Trans. Plasma Sci. 2020. V. 48. P. 4279. <https://doi.org/10.1109/TPS.2020.3034933>
13. *Чайковский С.А., Орешкин В.И., Лабеецкая Н.А., Давыдов И.М., Рыбка Д.В., Ванькевич В.А., Ратахин Н.А.* // Изв. вузов. Физика. 2019. Т. 62. С. 130.
14. *Knudson M.D., Lemke R.W., Hayes D.B., Hall C.A., Deeney C., Asay J.R.* // J. Appl. Phys. 2003. V. 94. P. 4420. <https://doi.org/10.1063/1.1604967>
15. *Lemke R.W., Knudson M.D., Hall C.A., Hail T.A., Desjarlais M.P., Asay J.R., Mehlhorn T.A.* // Phys. Plasmas. 2003. V. 10. P. 1092.
16. *Deng J., Xie W., Feng Sh., Wang M., Li H., Song Sh., Xia M., Ce J., He A., Tian Q., Gu Y., Guan Y., Wei B., Huang X., Ren X., Dan J., Li J., Zhou Sh., Cai H., Zhang S., Wang K., Xu Q., Wang Y., Zhang Zh., Wang G., Guo Sh., He Y., Zhou Y., Zhang Zh., Yang L., Zou W.* // Matter and Radiation at Extremes. 2016. V. 1. P. 48.
17. *Kuznetsov S.D., Garanin S.F.* // Proc. 2017 IEEE 21st International Conference on Pulsed Power (PPC), Brighton, 2017. P. 362. <https://doi.org/10.1109/PPC.2017.8291230>.
18. *Зеленый Л.М., Тактакишвили А.Л.* // Физика плазмы. 1981. Т. 7. С. 1064.
19. *Зеленый Л.М., Тактакишвили А.Л.* // Физика плазмы. 1984. Т. 10. С. 50.
20. *Zeleny L.M., Taktakishvili A.L.* // Astrophys. Space Sci. 1987. V. 134. P. 185.
21. *Zeleny L.M., Taktakishvili A.L.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 1988. V. 30. P. 663.
22. *Haines M.* // J. Plasma Phys. 1974. V. 12. P. 1.
23. *Haines M.* // Phys. Rev. Lett. 1981. V. 47. P. 917.
24. *Вихрев В.В., Брагинский С.И.* // Вопросы теории плазмы. Вып. 10 / Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1980. С. 243.
25. *Sadowski M.J.* // Proc. 12-th Symposium on High Current Electronics. V. 2 / Ed. G. Mesyats, B. Kovalchuk, G. Remnev. Tomsk: Institute of High Current Electronics SD RAS, 2000. P. 185.
26. *Кингсен А.С., Чукбар К.В., Яньков В.В.* // Вопросы теории плазмы. Вып. 16 / Под ред. акад. Б.Б. Кадомцева М.: Энергоатомиздат, 1987. С. 209.
27. *Гаранин С.Ф., Кравец Е.М.* // ПМТФ. 2022. Т. 63. С. 48.
28. *Ott E.* // Phys. Rev. Lett. 1972. V. 29. P. 1429.