

УДК 533.9

МНОГОГРУППОВАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА ТРАНСПОРТА ЭЛЕКТРОНОВ НИЗКИХ ЭНЕРГИЙ В СЛАБОИОНИЗОВАННЫХ ГАЗАХ

© 2024 г. Е. И. Бочков*

Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики (РФЯЦ-ВНИИЭФ), Саров, Нижегородская область, Россия

*e-mail: e_i_bochkov@mail.ru

Поступила в редакцию 04.02.2024 г.

После доработки 18.03.2024 г.

Принята к публикации 25.03.2024 г.

Исходя из кинетического уравнения Больцмана для электронов, в рамках приближения Лоренца выполнен вывод системы многогрупповых уравнений для нулевого и первого момента функции распределения электронов низких энергий. Система включает в себя уравнения баланса концентраций и плотности потока электронов и предназначена для численного моделирования транспорта и кинетики электронов в диапазоне энергий от нуля до нескольких десятков электрон-вольт, в котором угловое распределение электронов обладает слабой анизотропией. Проведено сравнение результатов численных расчетов транспорта электронов в гелии в однородном и неоднородном электрическом поле, выполненных по разработанной многогрупповой модели и методом Монте-Карло.

Ключевые слова: низкоэнергетические электроны, транспорт электронов, кинетическое уравнение, уравнения моментов, многогрупповая модель

DOI: 10.31857/S0367292124050093, EDN: PWBKDS

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, наиболее полная информация, необходимая для описания плазменных процессов, может быть получена из функции распределения электронов (ФРЭ), которая может быть рассчитана решением кинетического уравнения (КУ) или методом Монте-Карло (МК). Однако численное моделирование газового разряда непосредственно на основе КУ или метода МК требует больших вычислительных ресурсов. Чаще всего при моделировании газовых разрядов транспорт электронов рассчитывается на основе уравнения баланса концентрации электронов в рамках диффузионно-дрейфового приближения. Недостатком данного подхода является неспособность описать энергетическое распределение электронов. Кроме того, при моделировании транспорта электронов с использованием диффузионно-дрейфового уравнения чаще всего используют приближение локального поля, т. е. полагают, что коэффициенты уравнения (подвижность электронов, коэффициенты продольной и поперечной диффузии, частота ионизации) являются функциями напряженности поля. Это справедливо, если ФРЭ в каждой точке находится в равновесии с полем. Однако, например, в области катодного слоя данное

условие не выполняется и, следовательно, диффузионно-дрейфовое приближение неприменимо [1]. Также стоит отметить, что диффузионно-дрейфовое приближение становится неприменимым и в сильных электрических полях в связи с появлением большого числа быстрых электронов.

С целью сокращения требования к вычислительным ресурсам, с одной стороны, и необходимостью учета кинетики быстрых электронов, с другой, развиваются гибридные модели расчета транспорта электронов в газах [1–9]. В рамках гибридных стохастических моделей (hybrid-particle model) [3, 5, 7–9] транспорт электронов низких энергий описывается с помощью диффузионно-дрейфового уравнения, а электронов более высоких энергий — методом МК. Но, как говорилось выше, стохастические расчеты методом МК требуют больших вычислительных ресурсов, зачастую нереальных. В работе [10] построена гибридная модель расчета транспорта электронов в воздухе, в рамках которой транспорт электронов низких энергий описывается с помощью диффузионно-дрейфового уравнения, а кинетика электронов высоких энергий рассчитывается из системы одномерных многогрупповых уравнений, которая была получена в [11]. В рамках многогруппового приближения интересующий диапазон энергий

электрона разбивается на отдельные группы, для каждой группы записываются уравнения, определяющие концентрацию электронов в данной энергетической группе, и полученная система уравнений решается численно.

Впервые многогрупповая модель была реализована в [12], в этой работе в рамках двучленного приближения Лоренца для ФРЭ получена система уравнений, описывающая эволюцию энергетического распределения электронов, однако транспорт электронов в пространстве не рассматривался. В работе [13] была предпринята попытка построить одномерную модель расчета транспорта электронов в гелии. Модель описывала транспорт и кинетику как низкоэнергетических электронов, так и убегающих электронов. В основе модели [13] также лежит многогрупповой подход, причем в полученной системе уравнений для концентрации электронов были учтены члены, отвечающие за транспорт электронов вдоль вектора электрической силы. В области низких энергий вывод уравнений был выполнен также в приближении Лоренца для ФРЭ, при этом были приняты некоторые дополнительные упрощающие предположения о форме связи плотности потока электронов с концентрацией.

Цель данной работы – построить многогрупповую модель расчета транспорта электронов низких энергий, которая будет описывать транспорт электронов не только вдоль вектора напряженности электрического поля, но и в поперечном направлении. Более того, вывод будет выполнен в предположении наличия магнитного поля. Единственное используемое допущение то, что в каждой пространственной точке существует направление, относительно которого ФРЭ обладает слабой анизотропией (приближение Лоренца). При выводе уравнений мы будем следовать стандартной процедуре (см., например, [14]), при этом мы не будем делать каких-либо дополнительных предположений о связи величины плотности потока электронов с концентрацией. Таким образом, полученная система уравнений будет состоять из уравнений баланса концентраций электронов в энергетических ячейках и плотностей потока электронов на границе энергетических ячеек.

2. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Будем рассматривать случай слабоионизованного газа, когда столкновениями электронов друг с другом и с ионами можно пренебречь. Учитываются только упругие и неупругие столкновения электронов с

нейтральными атомами или молекулами газа. Эволюция ФРЭ $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ подчиняется кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \mathbf{F}_e \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = St_{el} + St_{ex} + St_{ion}. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_B = -q_e(\mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}])$ — сила, действующая на электрон, где q_e — элементарный заряд, \mathbf{E} — напряженность электрического поля, \mathbf{B} — индукция магнитного поля, \mathbf{v} — скорость электрона; $St_{el}, St_{ex}, St_{ion}$ — компоненты интеграла столкновений электронов, отвечающие за изменение ФРЭ в упругих столкновениях, в процессах возбуждения и ионизации атомов или молекул соответственно.

Для упрощения дальнейших выкладок мы будем рассматривать однокомпонентный газ, хотя модель может быть легко обобщена на случай многокомпонентных систем. Кроме того, полагаем, что кинетическая энергия электронов много больше энергии теплового движения атомов (молекул) и последние можно считать неподвижными. В этом случае интеграл упругих столкновений имеет следующий вид [15, 16]:

$$St_{el} = N_0 v \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} [f(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)] \sigma_{el}(p, \xi) da d\xi + \frac{N_0 v m_e}{p^3 M} \frac{\partial}{\partial p} \left[\int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} p^4 f(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t) \sigma_{el}(p, \xi) (1 - \xi) da d\xi \right]. \quad (2)$$

Здесь N_0 — концентрация атомов (молекул) газа, σ_{el} — дифференциальное сечение упругого рассеяния, $\xi = \cos \psi$, где ψ — угол рассеяния, m_e — масса электрона, M — масса атома, $\mathbf{p}'(p', \theta', \varphi')$ и $\mathbf{p}(p, \theta, \varphi)$ — импульс электрона до и после рассеяния, v — модуль скорости электрона. Используемая здесь система координат и геометрия рассеяния приведены на рис. 1 работы [16].

Интеграл, отвечающий за возбуждения электронных уровней атома [15, 16]

$$St_{ex} = N_0 v \sum_m \int_{\omega'} [f(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t) \sigma_{ex}^{(m)}(p', \psi) (p'/p)^2 - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \sigma_{ex}^{(m)}(p, \psi)] d\omega'. \quad (3)$$

Здесь суммирование ведется по всем уровням возбуждения, $\sigma_{ex}^{(m)}$ — дифференциальное сечение возбуждения уровня m с энергией $\epsilon_{ex}^{(m)}$ и $p' = p + \epsilon_{ex}^{(m)} / v$.

В предположении, что процесс ионизации можно рассматривать как рассеяние электрона на свободном электроном, выражение для ионизационного интеграла имеет вид [16]

$$St_{ion} = N_0 v \sum_m \left\{ \int_{\varepsilon + \varepsilon_{ion}^{(m)}}^{\infty} d\varepsilon' \sigma_{ion}^{(m)}(\varepsilon', \varepsilon) (p'/p)^2 \int_0^{2\pi} \frac{f(\mathbf{r}, p', \mu', \varphi', t)}{2\pi} d\alpha - f(\mathbf{r}, p, \mu, \varphi, t) q_{ion}^{(m)}(\varepsilon) \right\}. \quad (4)$$

Здесь суммирование ведется по всем ионизационным оболочкам с энергией ионизации $\varepsilon_{ion}^{(m)}$, $\sigma_{ion}^{(m)}$ и $q_{ion}^{(m)}$ — дифференциальное и полное сечение ионизации, и связь между величинами $\mu = \cos \theta$ и $\mu' = \cos \theta'$ задается уравнением [16]

$$\mu' = \mu \mu_0 + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu_0^2} \cos \alpha, \quad (5)$$

где $\mu_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon(\varepsilon' + 2m_e c^2)}{\varepsilon'(\varepsilon + 2m_e c^2)}}$ — косинус угла рассеяния электрона, c — скорость света в вакууме.

Далее будем полагать, что ФРЭ обладает слабой анизотропией, тогда ее можно представить в виде

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_0(\mathbf{r}, p, t) + (\mathbf{f}_1(\mathbf{r}, p, t) \cdot \mathbf{p}/p) = f_0(\mathbf{r}, p, t) + f_{1,x}(\mathbf{r}, p, t) \sin \theta \cos \varphi + f_{1,y}(\mathbf{r}, p, t) \sin \theta \sin \varphi + f_{1,z}(\mathbf{r}, p, t) \cos \theta. \quad (6)$$

Используя данное приближение (приближение Лоренца) интегралы столкновений можно упростить. Рассмотрим сначала интеграл упругих столкновений.

С учетом того, что в процессе упругого рассеяния на атоме (молекуле) модуль импульса электрона меняется слабо, т. е. $p \approx p'$, имеем

$$St_{el} = N_0 v \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} [f(\mathbf{r}, p, \mu', \varphi', t) - f(\mathbf{r}, p, \mu, \varphi, t)] \sigma_{el}(p, \xi) d\alpha d\xi + \frac{N_0 v m_e}{p^3 M} \frac{\partial}{\partial p} \left[\int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} p^4 f(\mathbf{r}, p, \mu', \varphi', t) \sigma_{el}(p, \xi) (1 - \xi) d\alpha d\xi \right]. \quad (7)$$

Подставляя выражение, связывающее вектор импульса электрона до рассеяния \mathbf{p}' и после \mathbf{p} [16]:

$$\mathbf{p}' = \frac{\mathbf{p}}{p} p' \cos \psi + \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{e}}{p \sin \theta} p' \sin \psi \sin \alpha + \frac{\mathbf{p} \times [\mathbf{e} \times \mathbf{p}]}{p^2 \sin \theta} p' \sin \psi \cos \alpha \quad (8)$$

в уравнение, и производя интегрирование, получаем выражение

$$St_{el} = -N_0 \sigma_{tr}(p) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, p, t)) + \frac{N_0}{M} \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[p^4 \left\{ f_0(\mathbf{r}, p, t) \sigma_{tr}(p) + (\mathbf{v} / v \cdot \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, p, t)) (\sigma_{tr}(p) - \sigma_{tr}^{(2)}(p)) \right\} \right]. \quad (9)$$

Здесь $\sigma_{tr}(p) \equiv 2\pi \int_{-1}^1 (1 - \xi) \sigma_{el}(p, \xi) d\xi$ — транспортное сечение и $\sigma_{tr}^{(2)}(p) \equiv 2\pi \int_{-1}^1 (1 - \xi)^2 \sigma_{el}(p, \xi) d\xi$.

Рассмотрим теперь ионизационный интеграл. Вычислим сначала интеграл по переменной α в правой части выражения (4)

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \frac{f(\mathbf{r}, p, \mu, \varphi, t)}{2\pi} d\alpha = \\
& = \int_0^{2\pi} \left[f_0(\mathbf{r}, p, t) + \frac{\mathbf{f}_1(\mathbf{r}, p, t)}{p} \cdot \left(\begin{array}{l} \mathbf{p}\mu_0 + \frac{[\mathbf{p} \times \mathbf{e}]}{\sqrt{1-\mu^2}} \sqrt{1-\mu_0^2} \sin \alpha + \\ + \frac{p\mathbf{e} - \mu\mathbf{p}}{\sqrt{1-\mu^2}} \sqrt{1-\mu_0^2} \cos \alpha \end{array} \right) \right] \frac{d\alpha}{2\pi} = \\
& = f_0(\mathbf{r}, p) + \mu_0 (\mathbf{f}_1(\mathbf{r}, p) \cdot \mathbf{p} / p).
\end{aligned} \tag{10}$$

С учетом данного выражения ионизационный интеграл после интегрирования по угловой переменной примет вид

$$\begin{aligned}
\text{St}_{\text{ion}} = \sum_m \left\{ \frac{N_0 \nu}{p^2} \int_{\varepsilon + \varepsilon_{\text{ion}}^{(m)}}^{\infty} \sigma_{\text{ion}}^{(m)}(\varepsilon', \varepsilon) p'^2 [f_0(\mathbf{r}, p', t) + \mu_0(\varepsilon', \varepsilon) (\mathbf{v} / \nu \cdot \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, p', t))] d\varepsilon' - \right. \\
\left. - N_0 \nu [f_0(\mathbf{r}, p, t) + (\mathbf{v} / \nu \cdot \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, p, t))] q_{\text{ion}}^{(m)}(\varepsilon) \right\}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Рассмотрим теперь интеграл, отвечающий за возбуждения электронных уровней атома. Будем полагать, что электрон в процессе возбуждения атома не меняет направление своего движения. Это упрощение не существенно, поскольку в боль-

шинстве газов угловое распределение электронов в основном определяется упругим рассеянием. Таким образом, полагая в (3) $\sigma_{\text{ex}}^{(m)}(p, \psi) = q_{\text{ex}}^{(m)}(p) \delta(\psi)$, где $q_{\text{ex}}^{(m)}(p)$ — полное сечение возбуждения, получаем

$$\begin{aligned}
\text{St}_{\text{ex}} = N_0 \nu \sum_m \left(1 + \varepsilon_{\text{ex}}^{(m)} / (p\nu) \right)^2 q_{\text{ex}}^{(m)}(p + \varepsilon_{\text{ex}}^{(m)} / \nu) \times \\
\times \left(f_0(\mathbf{r}, p + \varepsilon_{\text{ex}}^{(m)} / \nu, t) + (\mathbf{f}_1(\mathbf{r}, p + \varepsilon_{\text{ex}}^{(m)} / \nu, t) \cdot \mathbf{v} / \nu) \right) - \\
- N_0 \nu \sum_m q_{\text{ex}}^{(m)}(p) \left(f_0(\mathbf{r}, p, t) + (\mathbf{f}_1(\mathbf{r}, p, t) \cdot \mathbf{v} / \nu) \right).
\end{aligned} \tag{12}$$

Для того чтобы получить систему многогрупповых уравнений разобьем интересующий нас интервал значений импульса $[p_{\text{min}}, p_{\text{max}}]$ на K частей $\Delta p_{k+1/2, k-1/2} = p_{k+1/2} - p_{k-1/2}$, $k = 1, \dots, K$.

Определим величину концентрации электронов в k -й группе

$$\begin{aligned}
n_k(\mathbf{r}, t) \equiv \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}, p, \mu, \varphi, t) d\varphi = \\
= 4\pi \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2 f_0(\mathbf{r}, p, t) dp \approx 4\pi p_k^2 \Delta p_{k+1/2, k-1/2} f_{0,k}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Также определим величину плотности потока электронов на границе k -й группы

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}_{k+1/2}(\mathbf{r}, t) \equiv \int_{p_k}^{p_{k+1}} p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \mathbf{v} f(\mathbf{r}, p, \mu, \varphi, t) d\varphi = \\
= \frac{4\pi}{3} \int_{p_k}^{p_{k+1}} \nu p^2 \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, p, t) dp \approx \frac{4\pi}{3} \nu_{k+1/2} p_{k+1/2}^2 \Delta p_{k+1, k} \mathbf{f}_{1, k+1/2},
\end{aligned} \tag{14}$$

где $p_k \equiv (p_{k-1/2} + p_{k+1/2}) / 2$.

Далее при выводе уравнений для величин n_k и $\mathbf{j}_{k+1/2}$ будут использоваться следующие равенства:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} v_i d\varphi &= 0, \\ \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} v_i v_j d\varphi &= \frac{4\pi}{3} v^2 \delta_{ij}, \\ \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} v_i v_j v_l d\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера.

3. УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА КОНЦЕНТРАЦИЙ

Для того чтобы найти уравнения для величин n_k необходимо кинетическое уравнение (1) умножить на величину p^2 и проинтегрировать по переменным p, μ, φ на отрезках $p \in [p_{k-1/2}, p_{k+1/2}]$, $\mu \in [-1, 1]$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Интегрируя, таким образом, первый член в левой части кинетического уравнения, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}, p, \mu, t) d\varphi = \frac{\partial n_k}{\partial t}. \quad (16)$$

Далее интегрируем второй член

$$\nabla_{\mathbf{r}} \left(\int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2 dp \int_{-1}^1 \mu d\mu \int_0^{2\pi} \mathbf{v} f(\mathbf{r}, p, \mu, t) d\varphi \right) = \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{j}_k. \quad (17)$$

Интеграл от третьего члена разбивается на две части

$$\begin{aligned} \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} (\mathbf{F}_E \cdot \nabla_p f) d\varphi &= \iiint_{V_{p_k}} \text{div}_p (f \mathbf{F}_E) dV_p = \\ &= \iint_{S_{p_k}} f (\mathbf{F}_E \cdot \mathbf{dS}_p) = \iint_{S_{p_k}} f (\mathbf{F}_E \cdot \mathbf{e}_p) dS_p = \\ &= (\mathbf{F}_E \cdot \mathbf{j}_{k+1/2} / v_{k+1/2}) / (p_{k+1} - p_k) - (\mathbf{F}_E \cdot \mathbf{j}_{k-1/2} / v_{k-1/2}) / (p_k - p_{k-1}) \end{aligned} \quad (18)$$

и

$$\begin{aligned} \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} (\mathbf{F}_B \cdot \nabla_p f) d\varphi &= -q_e \iiint_{V_{p_k}} \text{div}_p (f [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]) dV_p = \\ &= -q_e \iint_{S_{p_k}} f ([\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \cdot \mathbf{dS}_p) = -q_e \iint_{S_{p_k}} f ([\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \cdot \mathbf{e}_p) dS_p = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь V_{p_k} — объем шарового слоя, ограниченного сферическими поверхностями $S_{p_{k+1/2}}$ ($p = p_{k+1/2}$) и $S_{p_{k-1/2}}$ ($p = p_{k-1/2}$), \mathbf{e}_p — вектор внешней нормали к данным поверхностям. При выводе выражений (18) и (19) мы воспользовались теоремой о дивергенции, а также тем фактом, что вектора \mathbf{e}_p и \mathbf{v} коллинеарные.

Вычислим теперь правую часть уравнений. Сначала рассмотрим член, отвечающий за изменение величины n_k в результате упругих столкновений. С учетом того, что интеграл

$$\int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, p, t)) d\varphi = 0$$

в виду первого соотношения (15), интегрируя выражение (9) для величины St_{el} , получаем

$$\begin{aligned} \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} St_{el} d\varphi &= \frac{N_0}{M} \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} \frac{\partial}{\partial p} [p^4 f_0(\mathbf{r}, p, t) \sigma_{tr}(p)] dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= \frac{N_0}{M} 4\pi \left\{ p_{k+1/2}^4 f_0(\mathbf{r}, p_{k+1/2}, t) \sigma_{tr}(p_{k+1/2}) - p_{k-1/2}^4 f_0(\mathbf{r}, p_{k-1/2}, t) \sigma_{tr}(p_{k-1/2}) \right\} = \\ &= \frac{F_{el, k+1/2} n_{k+1/2}}{\Delta p_{k, k+1}} - \frac{F_{el, k-1/2} n_{k-1/2}}{\Delta p_{k-1, k}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь введено обозначение $F_{el}(p) \equiv N_0 p^2 \sigma_{tr}(p) / M$.

Вычислим член, отвечающий за изменение величины n_k в результате возбуждения электронных уровней, для этого проинтегрируем выражение (12)

$$\begin{aligned} \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} St_{ex} d\varphi &= \\ &= N_0 \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} 4\pi v dp \sum_m (p + \varepsilon_{ex}^{(m)} / v)^2 q_{ex}^{(m)} (p + \varepsilon_{ex}^{(m)} / v) f_0(p + \varepsilon_{ex}^{(m)} / v) - \\ &- \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} N_0 v \sum_m q_{ex}^{(m)}(\varepsilon) f_0(p) 4\pi p^2 dp = \sum_m v_{ex, k_m}^{(m)} n_{k_m} - v_{ex, k} n_k. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь введены обозначения $v_{ex, k_m}^{(m)} \equiv N_0 v_{k_m} q_{ex}^{(m)}(\varepsilon_{k_m})$, $v_{ex, k} \equiv N_0 v_k \sum_m q_{ex}^{(m)}(\varepsilon_k)$, где k_m — это номер отрезка $[p_{k-1/2}, p_{k+1/2}]$ внутри которого лежит значение $p(\varepsilon_k + \varepsilon_{ex}^{(m)})$.

Вычислим теперь ионизационный член, проинтегрировав выражение (11)

$$\begin{aligned} & \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} St_{\text{ion}} d\varphi = \\ & = \sum_m \left\{ 4\pi \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} N_0 v \int_{\varepsilon+\varepsilon_{\text{ion}}^{(m)}}^{\infty} \sigma_{\text{ion}}^{(m)}(\varepsilon', \varepsilon) p'^2 f_0(p') v' dp' dp - 4\pi \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2 N_0 v f_0(p) q_{\text{ion}}^{(m)}(\varepsilon) dp \right\} \approx \\ & \approx \sum_{l=l_k}^K s_{lk} v_l n_l - v_{\text{ion},k} n_k. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь $s_{lk} \equiv N_0 v_k \Delta p_{k+1/2, k-1/2} \sum \sigma_{\text{ion}}^{(m)}(\varepsilon_l, \varepsilon_k)$, $[p_{k-1/2}, p_{k+1/2}]$ и l_k — это номер отрезка $[p_{k-1/2}, p_{k+1/2}]$, в котором лежит значение $p(\varepsilon_k + \min_m \{\varepsilon_{\text{ion}}^{(m)}\})$.

Объединяя выражения (16)–(22) получаем следующее уравнение баланса концентрации электронов в k -й группе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_k}{\partial t} + \text{div}_{\mathbf{r}} \mathbf{j}_k &= \left(\frac{(\mathbf{F}_E \cdot \mathbf{j}_{k-1/2}) / v_{k-1/2} - F_{\text{el}, k-1/2} n_{k-1/2}}{p_k - p_{k-1}} - \frac{(\mathbf{F}_E \cdot \mathbf{j}_{k+1/2}) / v_{k+1/2} - F_{\text{el}, k+1/2} n_{k+1/2}}{p_{k+1} - p_k} \right) - \\ & - (v_{\text{ion},k} + v_{\text{ex},k}) n_k + \sum_m v_{\text{ex},k_m}^{(m)} n_{k_m} + \sum_{l=l_k}^K s_{lk} v_l n_l. \end{aligned} \quad (23)$$

При решении уравнений (23) необходимо вычислять величины $n_{k+1/2}$ и $n_{k-1/2}$, для этого используем следующую процедуру:

$$\begin{aligned} n_{k+1/2} &= 4\pi \int_{p_k}^{p_{k+1}} p^2 f_0(p) dp \approx \frac{(p_{k+1} - p_k)}{2} (4\pi p_k^2 f_{0,k} + 4\pi p_{k+1}^2 f_{0,k+1}) = \\ &= \frac{(p_{k+1} - p_k)}{2} \left(\frac{n_k}{p_{k+1/2} - p_{k-1/2}} + \frac{n_{k+1}}{p_{k+3/2} - p_{k+1/2}} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

4. УРАВНЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ПОТОКА

Для того чтобы найти уравнения для величин $j_{k+1/2}$ необходимо уравнение (1) умножить на величину $\mathbf{v} p^2$ и проинтегрировать по переменным p, μ, φ на отрезках $p \in [p_k, p_{k+1}]$, $\mu \in [-1, 1]$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Интегрируя первый член в левой части кинетического уравнения (1), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{p_k}^{p_{k+1}} p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \mathbf{v} f(\mathbf{r}, p, \mu, \varphi, t) d\varphi = \frac{\partial \mathbf{j}_{k+1/2}}{\partial t}. \quad (25)$$

Далее интегрируем второй член

$$\int_{p_k}^{p_{k+1}} p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f) d\varphi = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \nabla_i \left[4\pi \int_{p_k}^{p_{k+1}} v^2 p^2 f_0(\mathbf{r}, p, t) dp \right] = \frac{1}{3} \nabla_{\mathbf{r}} (v_{k+1/2}^2 n_{k+1/2}). \quad (26)$$

При выводе данного выражения мы воспользовались вторым и третьим соотношением (15).

Используя соотношение

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{p}} f &= \nabla_{\mathbf{p}} (f_0(p) + (\mathbf{f}_1(p) / p \cdot \mathbf{p})) = \nabla_{\mathbf{p}} f_0(p) + \mathbf{f}_1(p) / p + \mathbf{p} \nabla_{\mathbf{p}} (f_1(p) / p) = \\ &= \frac{\partial f_0}{\partial p} \frac{\mathbf{p}}{p} + \frac{\mathbf{f}_1(p)}{p} + \mathbf{p} \left(\frac{\nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{f}_1(p)}{p} - \frac{(\mathbf{f}_1(p) \cdot \mathbf{p})}{p^3} \right), \end{aligned} \quad (27)$$

вычислим интеграл от третьего члена в левой части кинетического уравнения, который снова разбивается на две части

$$\begin{aligned} & \int_{p_k}^{p_{k+1}} p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \mathbf{v} (\mathbf{F}_E \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f) d\varphi = \int_{p_k}^{p_{k+1}} \frac{\partial f_0}{\partial p} p dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \mathbf{v} (\mathbf{F}_E \cdot \mathbf{p}) d\varphi + \int_{p_k}^{p_{k+1}} p dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \mathbf{v} (\mathbf{F}_E \cdot \mathbf{f}_1(p)) d\varphi + \\ & + \int_{p_k}^{p_{k+1}} p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \mathbf{v} (\mathbf{F}_E \cdot \mathbf{p}) \left(\frac{\nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{f}_1(p)}{p} - \frac{(\mathbf{f}_1(p) \cdot \mathbf{p})}{p^3} \right) d\varphi = \frac{\mathbf{F}_E}{3} \left\{ \frac{n_{k+1} v_{k+1}}{p_{k+3/2} - p_{k+1/2}} - \frac{n_k v_k}{p_{k+1/2} - p_{k-1/2}} - 3 \frac{n_{k+1/2} v_{k+1/2}}{p_{k+1/2}} \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

и член, включающий магнитное поле

$$\begin{aligned}
 & -q_e \int_{p_k}^{p_{k+1}} p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \mathbf{v} ([\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f) d\varphi = \\
 & = -q_e \int_{p_k}^{p_{k+1}} p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \mathbf{v} \underbrace{([\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \cdot \mathbf{p}/p)}_{=0} \left[\frac{\partial f_0(p)}{\partial p} + \nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{f}_1(p) - \frac{(\mathbf{f}_1(p) \cdot \mathbf{p})}{p^2} \right] d\varphi - \\
 & -q_e \int_{p_k}^{p_{k+1}} p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \mathbf{v} ([\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \cdot \mathbf{f}_1(p)/p) d\varphi = q_e \int_{p_k}^{p_{k+1}} p dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot [\mathbf{f}_1(p) \times \mathbf{B}]) d\varphi = \frac{q_e}{m_e} [\mathbf{j}_{k+1/2} \times \mathbf{B}].
 \end{aligned} \tag{29}$$

При выводе последнего выражения мы использовали свойства смешанного произведения векторов.

Проинтегрируем теперь правую часть кинетического уравнения. Интегрирование интеграла упругих столкновений (9) дает

$$\begin{aligned}
 & \int_{p_k}^{p_{k+1}} p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \mathbf{v} \text{St}_{\text{el}} d\varphi = \int_{p_k}^{p_{k+1}} p^2 dp \left[-N_0 \sigma_w(p) \frac{4\pi}{3} v^2 \mathbf{f}_1 \right] + \\
 & + \frac{N_0}{M} \int_{p_k}^{p_{k+1}} dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial p} \left[p^4 (\mathbf{v} / v \cdot \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, p, t)) (\sigma_{\text{tr}}(p) - \sigma_{\text{tr}}^{(2)}(p)) \right] d\varphi = \\
 & = -v_{\text{tr},k+1/2} \mathbf{j}_{k+1/2} + \frac{F_{\text{el},k+1} - F_{\text{el},k+1}^{(2)}}{p_{k+3/2} - p_{k+1/2}} \mathbf{j}_{k+1} - \frac{F_{\text{el},k} - F_{\text{el},k}^{(2)}}{p_{k+3/2} - p_{k-1/2}} \mathbf{j}_k - \frac{F_{\text{el},k+1/2} - F_{\text{el},k+1/2}^{(2)}}{p_{k+1/2}} \mathbf{j}_{k+1/2}.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Здесь введено обозначение $F_{\text{el}}^{(2)}(p) \equiv N_0 p^2 \sigma_{\text{tr}}^{(2)}(p) / M$.

Проинтегрируем теперь выражение (12)

$$\begin{aligned}
 & \int_{p_k}^{p_{k+1}} p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \mathbf{v} \text{St}_{\text{ex}} d\varphi = \\
 & = N_0 \int_{p_k}^{p_{k+1}} dp \sum_m (p + \varepsilon_{\text{ex}}^{(m)} / v)^2 \sigma_{\text{ex}}^{(m)}(p + \varepsilon_{\text{ex}}^{(m)} / v) \frac{4\pi}{3} v^2 \mathbf{f}_1(p + \varepsilon_{\text{ex}}^{(m)} / v) - \\
 & - \int_{p_k}^{p_{k+1}} N_0 \sum_m \sigma_{\text{ex}}^{(m)}(\varepsilon) \frac{4\pi}{3} v^2 \mathbf{f}_1(p) p^2 dp = \\
 & \approx N_0 v_{k+1/2} \sum_m \int_{\varepsilon_k + \varepsilon_{\text{ex}}^{(m)}}^{\varepsilon_{k+1} + \varepsilon_{\text{ex}}^{(m)}} \sigma_{\text{ex}}^{(m)}(\varepsilon') \frac{4\pi}{3} \mathbf{f}_1(\varepsilon') p'^2 d\varepsilon' - v_{\text{ex},k+1/2} \mathbf{j}_{k+1/2} = \\
 & = \sum_m (v_{k+1/2} / v_{k_m+1/2}) v_{\text{ex},k_m+1/2}^{(m)} \mathbf{j}_{k_m+1/2} - v_{\text{ex},k+1/2} \mathbf{j}_{k+1/2}.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Здесь $v_{\text{ex},k_m+1/2}^{(m)} \equiv N_0 v_{k_m+1/2} q_{\text{ex}}^{(m)}(\varepsilon_{k_m+1/2})$, $v_{\text{ex},k+1/2} \equiv N_0 v_{k+1/2} \sum_m q_{\text{ex}}^{(m)}(\varepsilon_{k+1/2})$ и $k_{m+1/2}$ — это номер отрезка $[p_k, p_{k+1}]$ внутри которого лежит значение $p(\varepsilon_{k+1/2} + \varepsilon_{\text{ex}}^{(m)})$.

Интегрирование ионизационного интеграла (11) дает

$$\begin{aligned}
 & \int_{p_k}^{p_{k+1}} p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \mathbf{v} \text{St}_{\text{ion}} d\varphi = \\
 & = \int_{p_k}^{p_{k+1}} v^2 dp \sum_m \left\{ \int_{\varepsilon + \varepsilon_{\text{ion}}^{(m)}}^{\infty} N_0 \sigma_{\text{ion}}^{(m)}(\varepsilon', \varepsilon) \mu_0(\varepsilon', \varepsilon) \frac{4\pi}{3} \mathbf{f}_1(p') p'^2 v' dp' - \int_{p_k}^{p_{k+1}} p^2 N_0 \sigma_{\text{ion}}^{(m)}(\varepsilon) \frac{4\pi}{3} v^2 \mathbf{f}_1(p) dp \right\} \approx \\
 & \approx N_0 v_{k+1/2}^2 \Delta p_{k+1,k} \sum_{l=k}^K \sum_m \sigma_{\text{ion}}^{(m)}(\varepsilon_{l+1/2}, \varepsilon_{l+1/2}) \mu_0(\varepsilon_{l+1/2}, \varepsilon_{k+1/2}) \mathbf{j}_{l+1/2} - v_{\text{ion},k+1/2} \mathbf{j}_{k+1/2} = \\
 & = \sum_{l=k+1/2}^K s_{l+1/2,k+1/2} \mu_0(\varepsilon_{l+1/2}, \varepsilon_{k+1/2}) v_{k+1/2} \mathbf{j}_{l+1/2} - v_{\text{ion},k+1/2} \mathbf{j}_{k+1/2}.
 \end{aligned} \tag{32}$$

Здесь $s_{l+1/2,k+1/2} \equiv N_0 v_{k+1/2} \Delta p_{k+1,k} \sum_m \sigma_{\text{ion}}^{(m)}(\varepsilon_{l+1/2}, \varepsilon_{k+1/2})$, $v_{\text{ion},k+1/2} \equiv N_0 v_{k+1/2} \sum_m q_{\text{ion}}^{(m)}(\varepsilon_{k+1/2})$, $l_{k+1/2}$ — это номер отрезка $[p_k, p_{k+1}]$, в котором лежит значение $p(\varepsilon_{k+1/2} + \min\{\varepsilon_{\text{ion}}^{(m)}\})$.

Объединяя выражения (25)–(32), получаем следующее уравнение для плотности потока электронов:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{j}_{k+1/2}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{v_{k+1/2}^2 n_{k+1/2}}{3} \right) = \\ & = \mathbf{F}_E \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{v_k n_k}{p_{k+1/2} - p_{k-1/2}} - \frac{v_{k+1} n_{k+1}}{p_{k+3/2} - p_{k+1/2}} \right) + \frac{v_{k+1/2} n_{k+1/2}}{p_{k+1/2}} \right\} - \frac{q_e}{m_e} [\mathbf{j}_{k+1/2} \times \mathbf{B}] + \\ & + \frac{F_{\text{el},k+1} - F_{\text{el},k+1}^{(2)}}{p_{k+3/2} - p_{k+1/2}} \mathbf{j}_{k+1} - \frac{F_{\text{el},k} - F_{\text{el},k}^{(2)}}{p_{k+1/2} - p_{k-1/2}} \mathbf{j}_k - \frac{F_{\text{el},k+1/2} - F_{\text{el},k+1/2}^{(2)}}{p_{k+1/2}} \mathbf{j}_{k+1/2} - \\ & - (v_{\text{tr},k+1/2} + v_{\text{ion},k+1/2} + v_{\text{ex},k+1/2}) \mathbf{j}_{k+1/2} + \\ & + \sum_m (v_{k+1/2} / v_{k_m+1/2}) v_{\text{ex},k_m+1/2}^{(m)} \mathbf{j}_{k_m+1/2} + \sum_{l=l_k+1/2}^K s_{l+1/2,k+1/2} \mu_0(\varepsilon_{l+1/2}, \varepsilon_{k+1/2}) v_{k+1/2} \mathbf{j}_{l+1/2}. \end{aligned} \quad (33)$$

При решении уравнений (33) величины \mathbf{j}_{k+1} и \mathbf{j}_k вычисляются согласно следующей процедуре:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_k &= \frac{4\pi}{3} \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v p^2 \mathbf{f}_1(p) dp \approx \frac{(p_{k+1/2} - p_{k-1/2})}{2} \left(\frac{4\pi}{3} p_{k-1/2}^2 \mathbf{f}_{1,k-1/2} + \frac{4\pi}{3} p_{k+1/2}^2 \mathbf{f}_{1,k+1/2} \right) = \\ & = \frac{(p_{k+1/2} - p_{k-1/2})}{2} \left(\frac{\mathbf{j}_{k-1/2}}{p_k - p_{k-1}} + \frac{\mathbf{j}_{k+1/2}}{p_{k+1} - p_k} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

5. СИСТЕМА МНОГОГРУППОВЫХ УРАВНЕНИЙ В ОБЛАСТИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЙ

Выпишем теперь полную систему многогрупповых уравнений для двух первых моментов ФРЭ в области низких энергий: баланса концентрации и плотности потока электронов

$$\begin{aligned} & \frac{\partial n_k}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{j}_k = \left(\frac{(\mathbf{F}_E \cdot \mathbf{j}_{k-1/2}) / v_{k-1/2} - F_{\text{el},k-1/2} n_{k-1/2}}{p_k - p_{k-1}} - \frac{(\mathbf{F}_E \cdot \mathbf{j}_{k+1/2}) / v_{k+1/2} - F_{\text{el},k+1/2} n_{k+1/2}}{p_{k+1} - p_k} \right) - \\ & - (v_{\text{ion},k} + v_{\text{ex},k}) n_k + \sum_m v_{\text{ex},k_m}^{(m)} n_{k_m} + \sum_{l=l_k}^K s_{lk} v_l n_l, \\ & \frac{\partial \mathbf{j}_{k+1/2}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{v_{k+1/2}^2 n_{k+1/2}}{3} \right) = \\ & = \mathbf{F}_E \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{v_k n_k}{p_{k+1/2} - p_{k-1/2}} - \frac{v_{k+1} n_{k+1}}{p_{k+3/2} - p_{k+1/2}} \right) + \frac{v_{k+1/2} n_{k+1/2}}{p_{k+1/2}} \right\} - \frac{q_e}{m_e} [\mathbf{j}_{k+1/2} \times \mathbf{B}] + \\ & + \frac{F_{\text{el},k+1} - F_{\text{el},k+1}^{(2)}}{p_{k+3/2} - p_{k+1/2}} \mathbf{j}_{k+1} - \frac{F_{\text{el},k} - F_{\text{el},k}^{(2)}}{p_{k+1/2} - p_{k-1/2}} \mathbf{j}_k - \frac{F_{\text{el},k+1/2} - F_{\text{el},k+1/2}^{(2)}}{p_{k+1/2}} \mathbf{j}_{k+1/2} - \\ & - (v_{\text{tr},k+1/2} + v_{\text{ion},k+1/2} + v_{\text{ex},k+1/2}) \mathbf{j}_{k+1/2} + \\ & + \sum_m (v_{k+1/2} / v_{k_m+1/2}) v_{\text{ex},k_m+1/2}^{(m)} \mathbf{j}_{k_m+1/2} + \sum_{l=l_k+1/2}^K s_{l+1/2,k+1/2} \mu_0(\varepsilon_{l+1/2}, \varepsilon_{k+1/2}) v_{k+1/2} \mathbf{j}_{l+1/2}. \end{aligned} \quad (35)$$

К данной системе нужно добавить уравнения (24) и (34).

Отметим, что величины $F_{el}, F_{el}^{(2)}$, которые определяют потери энергии электронами в упругих столкновениях, крайне малы (для гелия максимальные значения величин $F_{el}/q_e \approx 0.04$ кэВ/см, $F_{el}^{(2)}/q_e \approx 0.05$ кэВ/см), поэтому в практических расчетах членами, включающими данные величины, можно пренебречь, хотя в расчетах, выполненных ниже, мы этого делать не будем.

Далее мы будем решать задачу, обладающую осевой симметрией, это значит, что пространственное распределение электронов будет зависеть только от координат z и r в цилиндрической системе координат. Выпишем здесь уравнения (35) в цилиндрической системе координат в отсутствие магнитного поля

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial n_k}{\partial t} + \frac{\partial j_{k,z}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rj_{k,r})}{\partial r} = q_e E_z \left(\frac{(j_{k+1/2,z} / v_{k+1/2})}{p_{k+1} - p_k} - \frac{(j_{k-1/2,z} / v_{k-1/2})}{p_k - p_{k-1}} \right) + \\
 & + q_e E_r \left(\frac{(j_{k+1/2,r} / v_{k+1/2})}{p_{k+1} - p_k} - \frac{(j_{k-1/2,r} / v_{k-1/2})}{p_k - p_{k-1}} \right) + \left(\frac{F_{el,k+1/2} n_{k+1/2}}{p_{k+1} - p_k} - \frac{F_{el,k-1/2} n_{k-1/2}}{p_k - p_{k-1}} \right) - \\
 & - (v_{ion,k} + v_{ex,k}) n_k + \sum_m v_{ex,k_m}^{(m)} n_{k_m} + \sum_{l=l_k}^K s_{lk} v_l n_l, \\
 & \frac{\partial j_{k+1/2,z}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_{k+1/2}^2 n_{k+1/2}}{3} \right) = q_e E_z \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{v_{k+1} n_{k+1}}{p_{k+3/2} - p_{k+1/2}} - \frac{v_k n_k}{p_{k+1/2} - p_{k-1/2}} \right) - \frac{v_{k+1/2} n_{k+1/2}}{p_{k+1/2}} \right\} + \\
 & + \frac{F_{el,k+1} - F_{el,k+1}^{(2)}}{p_{k+3/2} - p_{k+1/2}} j_{k+1,z} - \frac{F_{el,k} - F_{el,k}^{(2)}}{p_{k+1/2} - p_{k-1/2}} j_{k,z} - \frac{F_{el,k+1/2} - F_{el,k+1/2}^{(2)}}{p_{k+1/2}} j_{k+1/2,z} - \\
 & - (v_{tr,k+1/2} + v_{ion,k+1/2} + v_{ex,k+1/2}) j_{k+1/2,z} + \\
 & + \sum_m (v_{k+1/2} / v_{k_m+1/2}) v_{ex,k_m+1/2}^{(m)} j_{k_m+1/2,z} + \sum_{l=l_k+1/2}^K s_{l+1/2,k+1/2} \mu_0(\epsilon_{l+1/2}, \epsilon_{k+1/2}) v_{k+1/2} j_{l+1/2,z}, \\
 & \frac{\partial j_{k+1/2,r}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_{k+1/2}^2 n_{k+1/2}}{3} \right) = q_e E_r \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{v_{k+1} n_{k+1}}{p_{k+3/2} - p_{k+1/2}} - \frac{v_k n_k}{p_{k+1/2} - p_{k-1/2}} \right) - \frac{v_{k+1/2} n_{k+1/2}}{p_{k+1/2}} \right\} + \\
 & + \frac{F_{el,k+1} - F_{el,k+1}^{(2)}}{p_{k+3/2} - p_{k+1/2}} j_{k+1,r} - \frac{F_{el,k} - F_{el,k}^{(2)}}{p_{k+1/2} - p_{k-1/2}} j_{k,r} - \frac{F_{el,k+1/2} - F_{el,k+1/2}^{(2)}}{p_{k+1/2}} j_{k+1/2,r} - \\
 & - (v_{tr,k+1/2} + v_{ion,k+1/2} + v_{ex,k+1/2}) j_{k+1/2,r} + \\
 & + \sum_m (v_{k+1/2} / v_{k_m+1/2}) v_{ex,k_m+1/2}^{(m)} j_{k_m+1/2,r} + \sum_{l=l_k+1/2}^K s_{l+1/2,k+1/2} \mu_0(\epsilon_{l+1/2}, \epsilon_{k+1/2}) v_{k+1/2} j_{l+1/2,r}.
 \end{aligned} \tag{36}$$

Численная схема решения системы уравнений (36) приведена в Приложении.

6. РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ЛАВИНЫ ЭЛЕКТРОНОВ В ГЕЛИИ В СЛАБОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ. СРАВНЕНИЕ С РЕЗУЛЬТАТАМИ РАСЧЕТОВ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Для того чтобы продемонстрировать точность, полученной системы многогрупповых уравнений, был выполнен расчет развития лавины электронов в гелии (концентрация атомов $N_0 = 2.69 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$) в однородных и неоднородных электрических полях в отсутствие магнитного поля. Величины $\sigma_{tr}^{(1)}(p)$,

$\sigma_{tr}^{(2)}(p)$ были рассчитаны на основе дифференциальных сечений упругого рассеяния, для которых использованы те же зависимости, что и в работе [17]. Полные сечения возбуждения электронных уровней, а также дифференциальное и полное сечения ионизации, также взяты из [17]. Система уравнений (36) решалась численно в диапазоне энергий от 0.01 эВ до 200 эВ. Данный энергетический диапазон был разбит на $N_\epsilon = 100$ групп, таким образом, что все интервалы $\Delta p_{k+1/2,k-1/2}$ равны.

Расчеты выполнялись в следующей постановке. Вектор напряженности электрического поля направлен против оси OZ , таким образом $E_r = 0$. Ввиду очевидной симметрии ФРЭ относительно вектора напряженности электрического поля, кинетика электронов будет описываться системой уравнений (36). Полагалось, что в начальный момент времени в точке $(z = 0, r = 0)$ задано максвелловское распределение электронов по энергиям f_M со средней энергией 10 эВ:

$$j_{1/2}(z, r, t) = j_{K+1/2}(z, r, t) = 0, \quad (37)$$

Задавались также следующие граничные условия

$$j_{1/2}(z, r, t) = j_{K+1/2}(z, r, t) = 0, \quad (38)$$

т. е. полагалось, что электроны не покидают рассматриваемую область энергий.

Постановка задачи МК-расчетов была максимально приближена к описанной выше: задавался точечный источник электронов в точке $(z = 0, r = 0)$, начальное распределение электронов по энергиям

также максвелловское со средней энергией 10 эВ, угловое распределение электронов полагалось изотропным, т. е. средний косинус угла между вектором скорости электрона и осью OZ равен нулю, что согласуется со вторым условием (37). МК-расчеты были выполнены по программе, описанной в [17].

На рисунке 1 представлены нормированные на единицу энергетические распределения электронов в однородном поле, рассчитанные по многогрупповой модели (МГМ), и методом МК. Распределения показаны в моменты времени t_{run} , когда число электронов в МК-расчетах увеличивалось в $\exp(8)$ раз. За это время распределение электронов по энергиям достигало равновесного состояния (см. [18]). Расчеты были выполнены для четырех значений приведенной напряженности поля $E/N = 50, 70, 100$ и 125 Тд. В гелии в полях с напряженностью, большей 125 Тд, анизотропия электронов становится заметной и двучленное приближение перестает работать [18]. Также на рис. 1 показаны значения средней энергии ансамбля электронов.

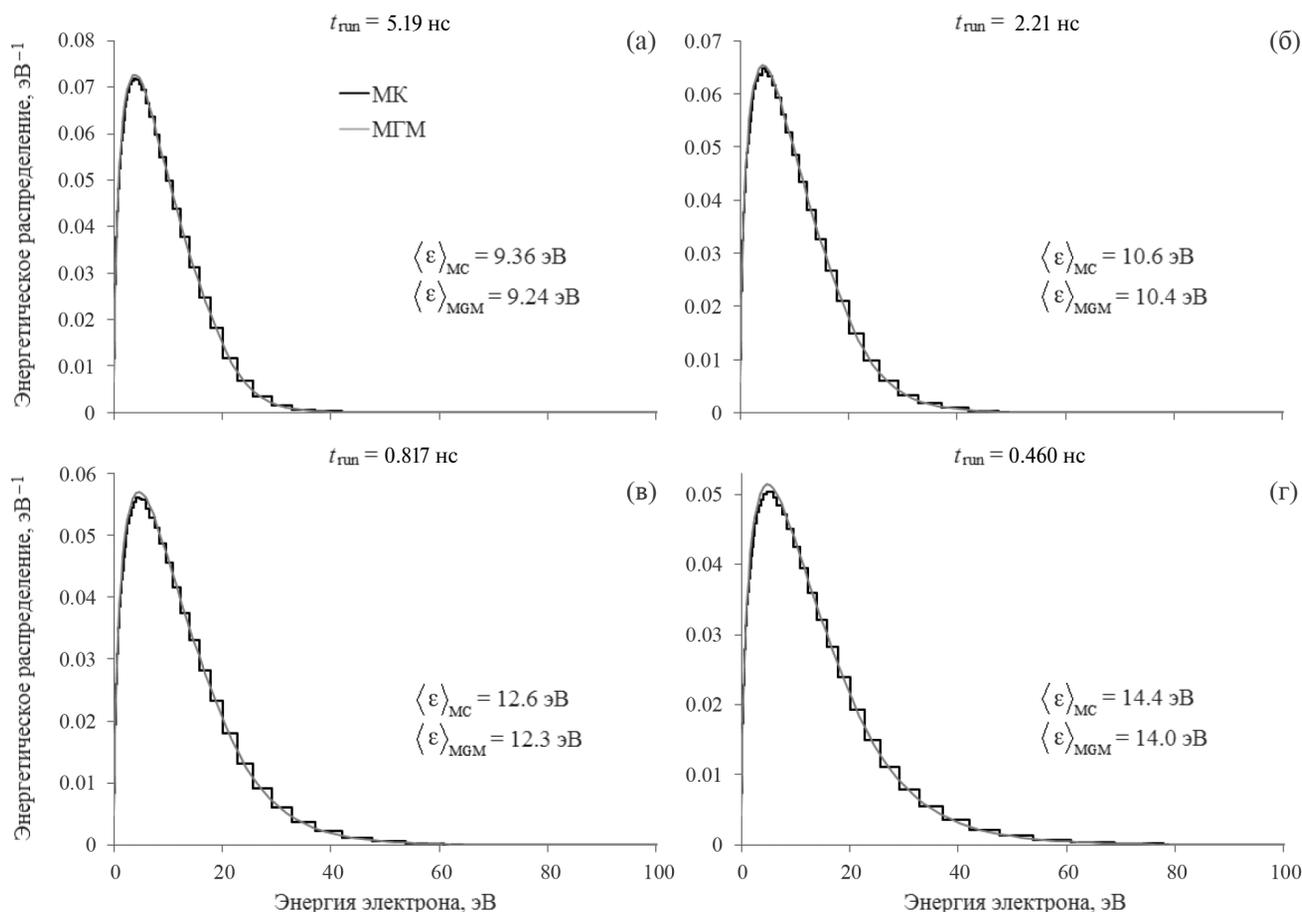


Рис. 1. Энергетическое распределение электронов. Однородное электрическое поле: $E/N = 50$ Тд (а), $E/N = 70$ Тд (б), $E/N = 100$ Тд (в), $E/N = 125$ Тд (г). МК расчет и решение по МГМ.

Как можно видеть, как формы энергетических распределений, так и значения средней энергии, полученные разными методами, близки между собой.

На рисунке 2 представлены зависимости от энергии среднего косинуса угла между вектором скорости электрона и направлением действия электрической силы (ось OZ). Данные зависимости позволяют определить верхнюю границу энергетического диапазона, в котором справедлива предложенная многогрупповая модель. Как можно видеть на рисунке 2 расчеты по многогрупповой модели хорошо согласуются с результатами МК-расчетов вплоть до значения энергии равного примерно 60 эВ, таким образом, для гелия это значение можно считать пределом, выше которого многогрупповая модель перестает действовать.

На рис. 3 показаны нормированные на единицу пространственные распределения электронов вдоль осей OZ и OR в те же самые моменты времени, что и на рис. 1. Видно, что наблюдается хорошее согласие между собой пространственных распределений.

На рисунке 3 также приведены значения коэффициента ионизации k_{ion} в единицах $\text{м}^3/\text{с}$. Относительная разница значений коэффициента k_{ion} , рассчитанных методом МК и по многогрупповой модели, не превышает 6.5%.

Представляет интерес оценить возможности многогрупповой модели при расчете транспорта электронов в сильно неоднородном электрическом поле, когда локальное равновесие ФРЭ с полем может не достигаться. С этой целью мы выполнили моделирование развития лавины электронов в электрическом поле с экспоненциально убывающим профилем

$$E_z(z, r) = \begin{cases} -E_{\text{max}} \exp(-z/l_z), & z \geq 0, \\ -E_{\text{max}}, & z < 0. \end{cases} \quad (39)$$

Расчеты выполнены для значений $E_{\text{max}}/N = 400$ Тд и $l_z = 10$ мкм. Как известно, ФРЭ по энергиям достигает локального равновесия с полем [19], если длина релаксации энергии Λ_u много меньше характерного масштаба изменения поля $\lambda_E = \left(\frac{1}{E} \frac{dE}{dz} \right)^{-1}$,

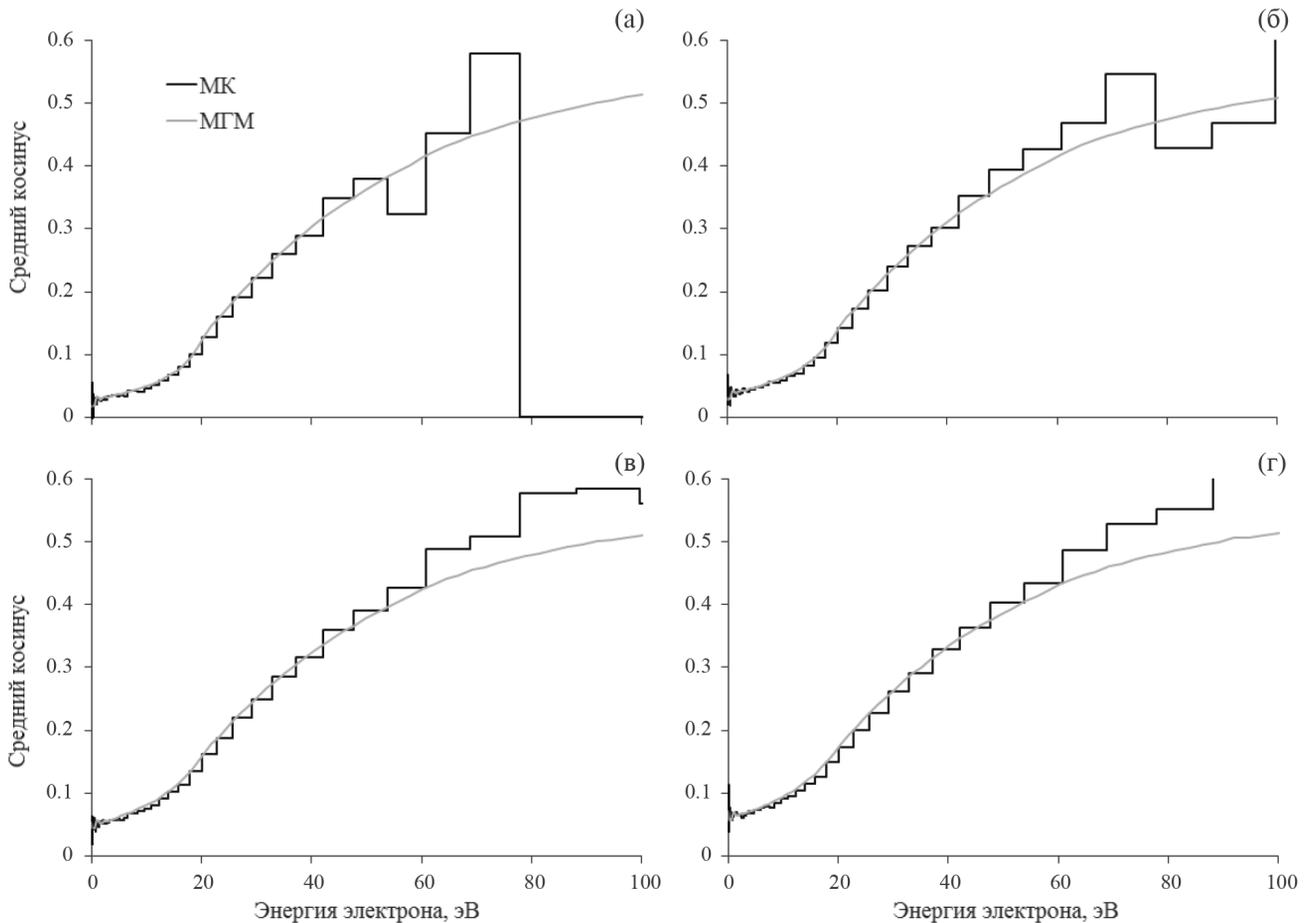


Рис. 2. Зависимость от энергии среднего косинуса угла между вектором скорости электрона и направлением действия электрической силы. Однородное электрическое поле: $E/N = 50$ Тд (а), $E/N = 70$ Тд (б), $E/N = 100$ Тд (в), $E/N = 125$ Тд (г). МК расчет и решение по МГМ.

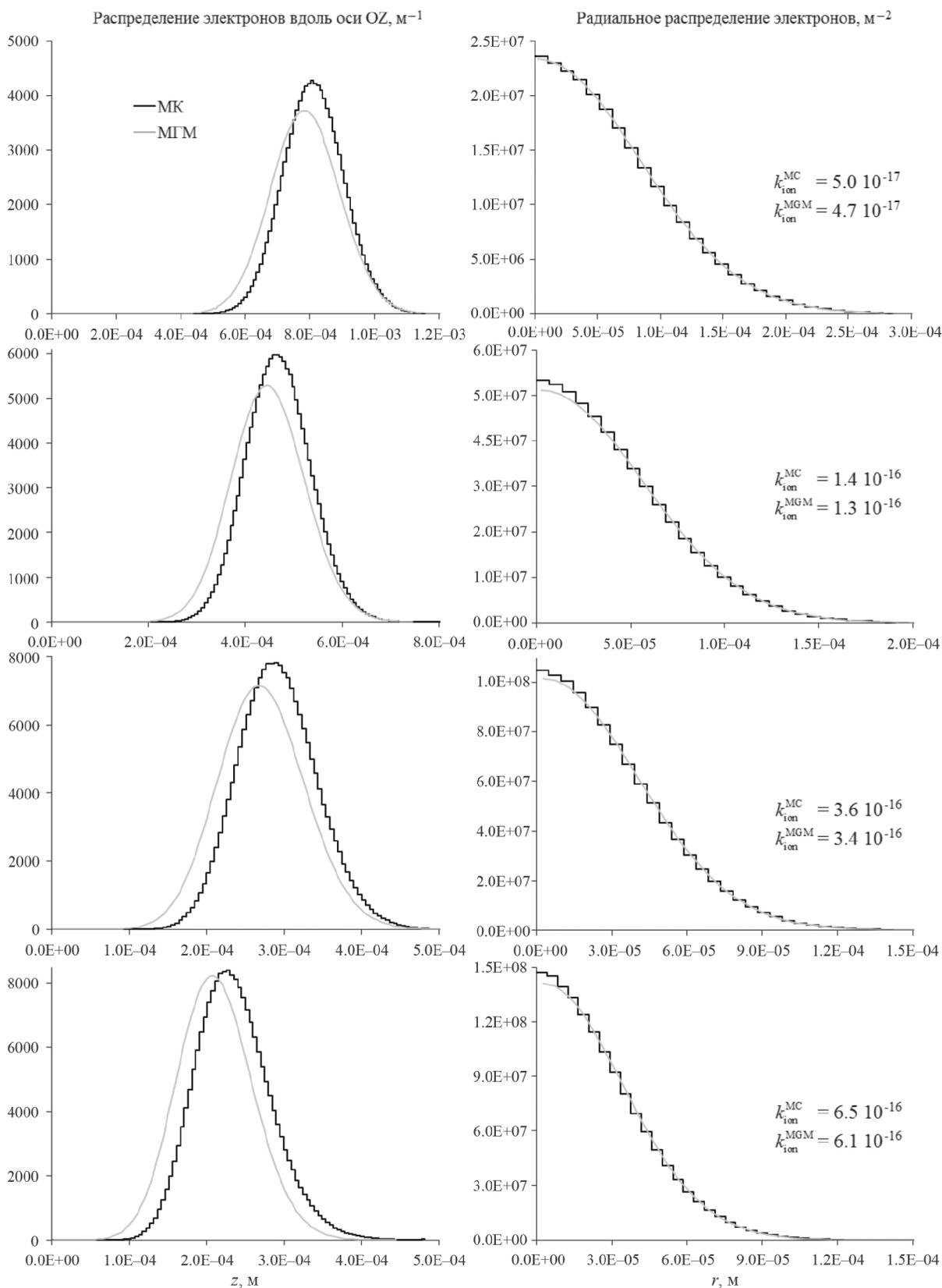


Рис. 3. Пространственные распределения электронов. Однородное электрическое поле. Сверху вниз: $E/N = 50$ Тд, $E/N = 70$ Тд, $E/N = 100$ Тд, $E/N = 125$ Тд. МК расчет и решение по МГМ.

для экспоненциального профиля $\lambda_E = l_z$. Значение величины Λ_u при заданной выше концентрации атомов гелия оценивается снизу значением 30 мкм для энергий электрона меньших 10 эВ, таким образом $\Lambda_u > \lambda_E$.

На рис. 4 приведены нормированные на единицу энергетическое и пространственные распределения электронов, а также зависимость от энергии среднего косинуса в неоднородном электрическом поле в момент времени $t_{\text{run}} = 0.024$ нс, когда число электронов в МК-расчете увеличилось в e раз. Видно, что пространственные и энергетические распределения в этом случае также согласуются между собой. Рассчитанное значение коэффициента усиления (отношение $N_e(t_{\text{run}})/N_e(t=0)$) равно 3.14 из результатов расчетов по МГМ-модели и 2.72 из МК-расчета. Для того чтобы проиллюстрировать неприменимость классического диффузионно-дрейфового приближения для расчета транспорта электронов в данной ситуации, на рис. 4 также показано решение диффузионно-дрейфового уравнения (ДДУ). Зависимости от приведенной напряженности поля транспортных

и кинетических коэффициентов, входящих в ДДУ, были рассчитаны по программе BOLSIG+ [1] с использованием того же набора сечений, что и в нашей МГМ. Как можно видеть на рис. 4, решение ДДУ значительно хуже описывает пространственные распределения электронов, кроме того, значение коэффициента усиления 5.93, вычисленное из решения ДДУ, заметно превышает полученное в МК-расчете.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана многогрупповая модель расчета транспорта электронов низких энергий (в диапазоне от нуля до нескольких десятков электрон-вольт) в слабом электрическом поле, когда анизотропия углового распределения электронов мала. Для демонстрации точности полученной системы многогрупповых уравнений выполнено численное моделирование развития лавины электронов в гелии в однородных и неоднородных электрических полях. Рассчитанные пространственные и энергетические распределения электронов хорошо согласуются с результатами расчетов методом МК. Представленная

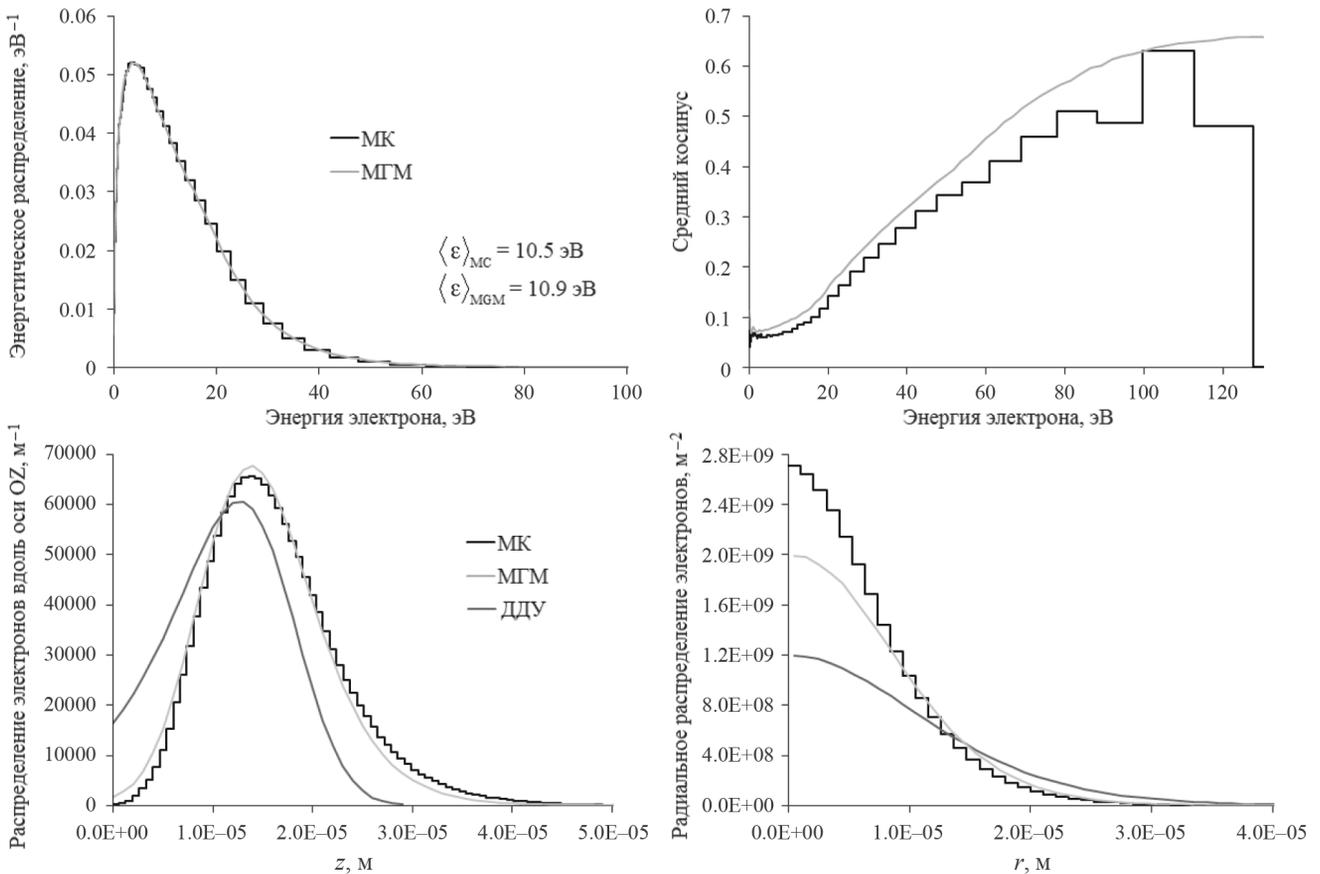


Рис. 4. Результаты расчетов для случая неоднородного электрического поля. МК расчет и решение по МГМ. Снизу также показано решение ДДУ.

многогрупповая модель может быть использована для численного моделирования газовых разрядов в различных газах. В частности, данная модель может быть использована при построении гибридных моделей расчета транспорта и кинетики электронов в

широком энергетическом диапазоне (от 0 до десятков кэВ), например электроны с энергией меньше нескольких десятков электронов-вольт описываются по представленной многогрупповой модели, а большей энергией методом Монте-Карло.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Численная схема, аппроксимирующая систему уравнений (36), выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \frac{(n_k)_{ij}^{n+1} - (n_k)_{ij}^n}{\Delta t} + \frac{\partial(j_{k,z})^n}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r(j_{k,r})^n)}{\partial r} = \\
& = \frac{q_e}{2} \left(\frac{E_z(j_{k+1/2,z})_{ij}^{n+1} + E_r(j_{k+1/2,r})_{ij}^{n+1}}{v_{k+1/2}(p_{k+1} - p_k)} - \frac{E_z(j_{k-1/2,z})_{ij}^{n+1} + E_r(j_{k-1/2,r})_{ij}^{n+1}}{v_{k-1/2}(p_k - p_{k-1})} \right) + \\
& + \frac{q_e}{2} \left(\frac{E_z(j_{k+1/2,z})_{ij}^n + E_r(j_{k+1/2,r})_{ij}^n}{v_{k+1/2}(p_{k+1} - p_k)} - \frac{E_z(j_{k-1/2,z})_{ij}^n + E_r(j_{k-1/2,r})_{ij}^n}{v_{k-1/2}(p_k - p_{k-1})} \right) + \\
& + \left(\frac{F_{\text{el},k+1/2}(n_{k+1/2})_{ij}^n}{p_{k+1} - p_k} - \frac{F_{\text{el},k-1/2}(n_{k-1/2})_{ij}^n}{p_k - p_{k-1}} \right) - (v_{\text{ion},k} + v_{\text{ex},k})(n_k)_{ij}^n + \sum_{l=k}^K s_{lk} v_l (n_l)_{ij}^n + \sum_m v_{\text{ex},k_m}^{(m)} (n_{k_m})_{ij}^n, \\
& \frac{(j_{k+1/2,z})_{ij}^{n+1} - (j_{k+1/2,z})_{ij}^n}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_{k+1/2}^2 (n_{k+1/2})^n}{3} \right) = \\
& = \frac{q_e E_z}{2} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{v_{k+1} (n_{k+1})_{ij}^{n+1}}{p_{k+3/2} - p_{k+1/2}} - \frac{v_k (n_k)_{ij}^{n+1}}{p_{k+1/2} - p_{k-1/2}} \right) - \frac{v_{k+1/2} (n_{k+1/2})_{ij}^{n+1}}{p_{k+1/2}} \right\} + \\
& + \frac{q_e E_z}{2} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{v_{k+1} (n_{k+1})_{ij}^n}{p_{k+3/2} - p_{k+1/2}} - \frac{v_k (n_k)_{ij}^n}{p_{k+1/2} - p_{k-1/2}} \right) - \frac{v_{k+1/2} (n_{k+1/2})_{ij}^n}{p_{k+1/2}} \right\} + \\
& + \frac{F_{\text{el},k+1} - F_{\text{el},k+1}^{(2)}}{p_{k+3/2} - p_{k+1/2}} (j_{k+1,z})_{ij}^n - \frac{F_{\text{el},k} - F_{\text{el},k}^{(2)}}{p_{k+1/2} - p_{k-1/2}} (j_{k,z})_{ij}^n - \frac{F_{\text{el},k+1/2} - F_{\text{el},k+1/2}^{(2)}}{p_{k+1/2}} (j_{k+1/2,z})_{ij}^n - \\
& - (v_{\text{tr},k+1/2} + v_{\text{ion},k+1/2} + v_{\text{ex},k+1/2}) (j_{k+1/2,z})_{ij}^n + \\
& + \sum_{l=k+1/2}^K s_{l+1/2,k+1/2} \mu_0 (\varepsilon_{l+1/2}, \varepsilon_{k+1/2}) v_{k+1/2} (j_{l+1/2,z})_{ij}^n + \sum_m (v_{k+1/2} / v_{k_m+1/2}) v_{\text{ex},k_m+1/2}^{(m)} (j_{k_m+1/2,z})_{ij}^n, \\
& \frac{(j_{k+1/2,r})_{ij}^{n+1} - (j_{k+1/2,r})_{ij}^n}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_{k+1/2}^2 (n_{k+1/2})^n}{3} \right) = \\
& = \frac{q_e E_r}{2} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{v_{k+1} (n_{k+1})_{ij}^{n+1}}{p_{k+3/2} - p_{k+1/2}} - \frac{v_k (n_k)_{ij}^{n+1}}{p_{k+1/2} - p_{k-1/2}} \right) - \frac{v_{k+1/2} (n_{k+1/2})_{ij}^{n+1}}{p_{k+1/2}} \right\} + \\
& + \frac{q_e E_r}{2} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{v_{k+1} (n_{k+1})_{ij}^n}{p_{k+3/2} - p_{k+1/2}} - \frac{v_k (n_k)_{ij}^n}{p_{k+1/2} - p_{k-1/2}} \right) - \frac{v_{k+1/2} (n_{k+1/2})_{ij}^n}{p_{k+1/2}} \right\} + \\
& + \frac{F_{\text{el},k+1} - F_{\text{el},k+1}^{(2)}}{p_{k+3/2} - p_{k+1/2}} (j_{k+1,r})_{ij}^n - \frac{F_{\text{el},k} - F_{\text{el},k}^{(2)}}{p_{k+1/2} - p_{k-1/2}} (j_{k,r})_{ij}^n - \frac{F_{\text{el},k+1/2} - F_{\text{el},k+1/2}^{(2)}}{p_{k+1/2}} (j_{k+1/2,r})_{ij}^n - \\
& - (v_{\text{tr},k+1/2} + v_{\text{ion},k+1/2} + v_{\text{ex},k+1/2}) (j_{k+1/2,r})_{ij}^n + \\
& + \sum_{l=k+1/2}^K s_{l+1/2,k+1/2} \mu_0 (\varepsilon_{l+1/2}, \varepsilon_{k+1/2}) v_{k+1/2} (j_{l+1/2,r})_{ij}^n + \sum_m (v_{k+1/2} / v_{k_m+1/2}) v_{\text{ex},k_m+1/2}^{(m)} (j_{k_m+1/2,r})_{ij}^n.
\end{aligned} \tag{40}$$

Здесь верхний индекс n относится к временному слою, а нижние индексы i и j показывают, что соответствующие значения величин определяются в центре пространственной ячейки $[Z_{i-1/2}, Z_{i+1/2}] \times [r_{j-1/2}, r_{j+1/2}]$. Систему уравнений (40) можно свести к системе уравнений для величин $(n_{k+1})_{ij}^{n+1}$, $(n_k)_{ij}^{n+1}$, $(n_{k-1})_{ij}^{n+1}$ с трехдиагональной матрицей, которая легко решается методом прогонки

$$c_k (n_{k+1})_{ij}^{n+1} - b_k (n_k)_{ij}^{n+1} + a_k (n_{k-1})_{ij}^{n+1} = d_k. \quad (41)$$

Здесь

$$a_k = E^2 \beta_k, \quad b_k = 1 + E^2 (\alpha_k + \beta_{k+1}), \quad c_k = E^2 \alpha_{k+1},$$

$$d_k = A_{b,k}^1 (E_z F_{k-1/2,z} + E_r F_{k-1/2,r}) - A_{b,k+1}^1 (E_z F_{k+1/2,z} + E_r F_{k+1/2,r}) - G_k;$$

$$E^2 = E_z^2 + E_r^2, \quad \alpha_k = A_{b,k}^1 f_k^1, \quad \beta_k = A_{b,k}^1 f_k^2;$$

$$G_k = A_{b,k+1}^1 (E_z (j_{k+1/2,z})_{ij}^n + E_r (j_{k+1/2,r})_{ij}^n) - A_{b,k}^1 (E_z (j_{k-1/2,z})_{ij}^n + E_r (j_{k-1/2,r})_{ij}^n) +$$

$$+ (A_{b,k+1}^2 (N_{c,k+1}^1 (n_k)_{ij}^n + N_{c,k+1}^2 (n_{k+1})_{ij}^n) - A_{b,k}^2 (N_{c,k}^1 (n_{k-1})_{ij}^n + N_{c,k}^2 (n_k)_{ij}^n)) +$$

$$+ (1 - \Delta t (v_{\text{ion},k} + v_{\text{ex},k})) (n_k)_{ij}^n + \Delta t \sum_{l=l_k}^K s_{lk} v_l (n_l)_{ij}^n + \Delta t \sum_m v_{\text{ex},k_m}^{(m)} (n_{k_m})_{ij}^n -$$

$$- \Delta t \left\{ \frac{\partial (j_{k,z})^n}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r(j_{k,r})^n)}{\partial r} \right\},$$

$$F_{k+1/2,z} = E_z \{ f_{k+1}^1 (n_{k+1})_{ij}^n - f_{k+1}^2 (n_k)_{ij}^n \} +$$

$$+ f_{k+1}^3 (j_{k+1/2,z})_{ij}^n + f_{k+1}^4 (j_{k+3/2,z})_{ij}^n - f_k^3 (j_{k-1/2,z})_{ij}^n - f_k^4 (j_{k+1/2,z})_{ij}^n + f_{k+1}^5 (j_{k+1/2,z})_{ij}^n +$$

$$+ \Delta t \sum_{l=l_k+1/2}^K s_{l+1/2,k+1/2} \mu_0 (\varepsilon_{l+1/2}, \varepsilon_{k+1/2}) v_{k+1/2} (j_{l+1/2,z})_{ij}^n + \Delta t \sum_m (v_{k+1/2} / v_{k_m+1/2}) v_{\text{ex},k_m+1/2}^{(m)} (j_{k_m+1/2,z})_{ij}^n -$$

$$- \Delta t \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_{k+1/2}^2 (n_{k+1/2})^n}{3} \right) \right\},$$

$$F_{k+1/2,r} = E_r \{ f_{k+1}^1 (n_{k+1})_{ij}^n - f_{k+1}^2 (n_k)_{ij}^n \} +$$

$$+ f_{k+1}^3 (j_{k+1/2,r})_{ij}^n + f_{k+1}^4 (j_{k+3/2,r})_{ij}^n - f_k^3 (j_{k-1/2,r})_{ij}^n - f_k^4 (j_{k+1/2,r})_{ij}^n + f_{k+1}^5 (j_{k+1/2,r})_{ij}^n +$$

$$+ \Delta t \sum_{l=l_k+1/2}^K s_{l+1/2,k+1/2} \mu_0 (\varepsilon_{l+1/2}, \varepsilon_{k+1/2}) v_{k+1/2} (j_{l+1/2,r})_{ij}^n + \Delta t \sum_m (v_{k+1/2} / v_{k_m+1/2}) v_{\text{ex},k_m+1/2}^{(m)} (j_{k_m+1/2,r})_{ij}^n -$$

$$- \Delta t \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_{k+1/2}^2 (n_{k+1/2})^n}{3} \right) \right\};$$

$$f_{k+1}^1 = A_{c,k+1}^1 - A_{b,k+1}^4 N_{c,k+1}^2, \quad f_{k+1}^2 = A_{c,k}^1 + A_{b,k+1}^4 N_{c,k+1}^1, \quad f_{k+1}^3 = A_{c,k+1}^2 N_{b,k+1}^1, \quad f_{k+1}^4 = A_{c,k+1}^2 N_{b,k+1}^2,$$

$$f_{k+1}^5 = 1 - A_{b,k+1}^3 - \Delta t (v_{\text{ion},k+1/2} + v_{\text{ex},k+1/2});$$

$$A_{b,k}^1 = \frac{\Delta t}{2} \frac{q_e}{v_{k-1/2}(p_k - p_{k-1})}, \quad A_{b,k}^2 = \Delta t \frac{F_{el,k-1/2}}{(p_k - p_{k-1})}, \quad A_{b,k}^3 = \Delta t \left(\frac{F_{el,k-1/2} - F_{el,k-1/2}^{(2)}}{p_{k-1/2}} + v_{tr,k-1/2} \right),$$

$$A_{b,k}^4 = q_e \frac{\Delta t}{2} \frac{v_{k-1/2}}{p_{k-1/2}}, \quad A_{c,k}^1 = q_e \frac{\Delta t}{6} \frac{v_k}{(p_{k+1/2} - p_{k-1/2})}, \quad A_{c,k}^2 = \frac{F_{el,k} - F_{el,k}^{(2)}}{p_{k+1/2} - p_{k-1/2}} \Delta t$$

$$N_{c,k}^1 = \frac{1}{2} \frac{p_k - p_{k-1}}{p_{k-1/2} - p_{k-3/2}}, \quad N_{c,k}^2 = \frac{1}{2} \frac{p_k - p_{k-1}}{p_{k+1/2} - p_{k-1/2}}, \quad N_{b,k}^1 = \frac{1}{2} \frac{p_{k+1/2} - p_{k-1/2}}{p_k - p_{k-1}}, \quad N_{b,k}^2 = \frac{1}{2} \frac{p_{k+1/2} - p_{k-1/2}}{p_{k+1} - p_k}.$$

и члены, описывающие пространственные потоки, аппроксимируются следующим образом:

$$\frac{\partial (j_{k,z})^n}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r(j_{k,r})^n)}{\partial r} = \frac{(j_{k,z})_{i+1/2,j}^n - (j_{k,z})_{i-1/2,j}^n}{z_{i+1/2} - z_{i-1/2}} + \frac{r_{j+1/2}(j_{k,r})_{i,j+1/2}^n - r_{j-1/2}(j_{k,r})_{i,j-1/2}^n}{r_j(r_{j+1/2} - r_{j-1/2})},$$

$$(j_{k,z})_{i+1/2,j}^n = \begin{cases} (u_{k,z})_{i+1/2,j} (n_k)_{ij}^n, & (u_{k,z})_{i+1/2,j} \geq 0, \\ (u_{k,z})_{i+1/2,j} (n_k)_{i+1,j}^n, & (u_{k,z})_{i+1/2,j} < 0, \end{cases}$$

$$(j_{k,r})_{i,j+1/2}^n = \begin{cases} (u_{k,r})_{i,j+1/2} (n_k)_{ij}^n, & (u_{k,r})_{i,j+1/2} \geq 0, \\ (u_{k,r})_{i,j+1/2} (n_k)_{i,j+1}^n, & (u_{k,r})_{i,j+1/2} < 0, \end{cases}$$

$$(u_{k,z})_{i+1/2,j} = (u_{k,z})_{ij} + ((u_{k,z})_{i+1,j} - (u_{k,z})_{ij})(z_{i+1/2} - z_i) / (z_{i+1} - z_i), \quad (u_{k,z})_{ij} = (j_{k,z})_{ij} / (n_k)_{ij},$$

$$(u_{k,r})_{i,j+1/2} = (u_{k,r})_{ij} + ((u_{k,r})_{i,j+1} - (u_{k,r})_{ij})(r_{j+1/2} - r_j) / (r_{j+1} - r_j), \quad (u_{k,r})_{ij} = (j_{k,r})_{ij} / (n_k)_{ij},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_{k+1/2}^2 (n_{k+1/2})^n}{3} \right) = \frac{v_{k+1/2}^2}{3} \frac{(n_{k+1/2})_{i+1,j}^n - (n_{k+1/2})_{ij}^n}{z_{i+1/2} - z_{i-1/2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_{k+1/2}^2 (n_{k+1/2})^n}{3} \right) = \frac{v_{k+1/2}^2}{3} \frac{(n_{k+1/2})_{i,j+1}^n - (n_{k+1/2})_{ij}^n}{r_{j+1/2} - r_{j-1/2}},$$

$$(n_{k+1/2})_{ij}^n = N_{c,k+1}^1 (n_k)_{ij}^n + N_{c,k+1}^2 (n_{k+1})_{ij}^n.$$

Граничные условия для системы (41)

$$j_{1/2,z} = j_{1/2,r} = 0 \Rightarrow A_{b,1}^1 = A_{b,1}^2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 = 0;$$

$$j_{K+1/2,z} = j_{K+1/2,r} = 0 \Rightarrow A_{b,K+1}^1 = A_{b,K+1}^2 = 0 \Rightarrow \alpha_{K+1} = \beta_{K+1} = 0. \quad (42)$$

Отметим, что в расчетах, выполненных в данной работе, использовалась равномерная пространственная сетка: $\Delta z = \Delta r = 5 \cdot 10^{-6}$ м и шаг по времени $\Delta t = 10^{-13}$ с для всех расчетов в однородном поле; $\Delta z = \Delta r = 10^{-6}$ м, $\Delta t = 2 \cdot 10^{-14}$ с для расчета в неоднородном поле.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hagelaar G.J.M., Pitchford L.C. // Plasma Source Sci. Technol. 2005. V. 14. P. 722.
2. Sommerer T.J., Hitchon W.N.G., Lawler J.E. // Phys. Rev. A. 1989. V. 39. P. 6356.
3. Boeuf J-P., Pitchford L.C. // IEEE Transac. Plasma Sci. 1991. V. 19. P. 286.
4. Hitchon W.N.G., Parker G.J., Lawler J.E. // IEEE Transac. Plasma Sci. 1993. V. 21. P. 228.
5. Bogaerts A., Gijbels R., Goedheer W.J. // Anal. Chem. 1996. V. 68. P. 2296.
6. Wichaidit C., Hitchon W.N.G. // J. Computational Phys. 2005. V. 203. P. 650.
7. Donko Z., Hartmann P., Kutasi K. // Plasma Sources Sci. Technol. 2006. V. 15. P. 178.
8. Brok W.J.M., Wagenaars E., van Dijk J., van der Mullen J.J.A.M. // IEEE Trans. Plasma Sci. 2007. V. 35. P. 1325.

9. *Derzsi A., Hartmann P., Korolov I., Karacsony J., Bano G., Donko Z.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 2009. V. 42. P. 225204.
10. *Бочков Е.И.* // Физика плазмы. 2023. Т. 49. С. 1151.
11. *Бочков Е.И.* // Физика плазмы. 2023. Т. 49. С. 175.
12. *Rockwood S.D.* // Phys. Rev. A. 1973. V. 8. P. 2348.
13. *Бабич Л.П., Куцык И.М.* // ТВТ. 1995. Т. 3. С. 191.
14. *Бабич Л.П., Кудрявцева М.Л.* // ЖЭТФ. 2007. Т. 131. С. 808.
15. *Holstein T.* // Phys. Rev. 1946. V. 70. P. 367.
16. *Бабич Л.П.* // ЖЭТФ. 2004. Т. 125. С. 808.
17. *Бочков Е.И., Бабич Л.П., Куцык И.М.* // Физика плазмы. 2021. Т. 47. С. 935.
18. *Бочков Е.И., Бабич Л.П.* // Физика плазмы. 2022. Т. 48. С. 276.
19. *Райзер Ю.П.* Физика газового разряда. М.: Наука, 1992.

MULTIGROUP MODEL OF CALCULATING THE LOW-ENERGY ELECTRON TRANSPORT IN WEAKLY IONIZED GASES

E. I. Bochkov^{a,*}

^a*Russian Federal Nuclear Center—All-Russian Scientific Research Institute of Experimental Physics,
Sarov, Nizhny Novgorod oblast, 607188 Russia*

^{*}*e-mail: e_i_bochkov@mail.ru*

Abstract—Proceeding from the Boltzmann kinetic equation for electrons, the system of multigroup equations for the zero and first moments of the distribution function of low-energy electrons is derived within the Lorentz approximation. The system includes the balance equations for concentration and flux density of electrons and is intended for numerical simulation of the transport and kinetics of electrons in the energy range from zero to several tens of electron volt where the angular distribution of electrons is weakly anisotropic. Results of the numerical calculations of electron transport in helium in homogeneous and inhomogeneous electric fields according to the developed multigroup model are compared with results obtained by the Monte Carlo method.

Keywords: low-energy electrons, electron transport, kinetic equation, equations of moments, multigroup model