

ISSN 0367-2921

Том 49, Номер 3

Март 2023



ФИЗИКА ПЛАЗМЫ



www.sciencejournals.ru

Журнал для научных работников в области теоретических и экспериментальных исследований по физике плазмы и взаимодействию плазмы с твердым телом, по проблеме управляемого термоядерного синтеза



СОДЕРЖАНИЕ

Том 49, номер 3, 2023

КОСМИЧЕСКАЯ ПЛАЗМА

Волновые процессы в плазменной астрофизике

М. А. Федотова, Д. А. Климачков, А. С. Петросян

209

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ

СВЧ газовый разряд низкого давления, поддерживаемый полем
стоячей поверхностной волны дипольной моды

В. И. Жуков, Д. М. Карфидов

260

Об одной распространенной неточности и ее устранении в теориях
нелинейных электростатических волн в плазме, базирующихся
на методе псевдопотенциала Сагдеева

А. Е. Дубинов

270

НИЗКОТЕМПЕРАТУРНАЯ ПЛАЗМА

О концепции плазменной масс-сепарации в скрещенных $E \times B$ -полях
с потенциальной ямой (обзор)

*Г. Д. Лизякин, Н. Н. Антонов, Н. А. Ворона, А. В. Гавриков,
С. А. Кисленко, С. Д. Кузьмичев, А. Д. Мельников, А. П. Ойлер,
В. П. Смирнов, Р. А. Тимирханов, Р. А. Усманов*

278

Моделирование продольно-поперечного разряда в сверхзвуковом
воздушном потоке в гидродинамическом приближении

К. Н. Корнев, А. А. Логунов, В. М. Шибков

288

Деградационный спектр электронов в метане

В. П. Коновалов

296

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПЛАЗМЕННОЙ АСТРОФИЗИКЕ

© 2023 г. М. А. Федотова^a, Д. А. Климачков^a, А. С. Петросян^{a, b, *}

^a Институт космических исследований Российской академии наук, Москва, Россия

^b Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Московская обл., Россия

*e-mail: apetrosy@iki.rssi.ru

Поступила в редакцию 30.09.2022 г.

После доработки 20.10.2022 г.

Принята к публикации 25.11.2022 г.

Обсуждаются теоретические исследования волновых процессов во вращающейся астрофизической плазме. Особое внимание уделено новым теоретическим моделям астрофизической плазмы, таким как магнитогидродинамическое приближение мелкой воды и неупругое приближение наряду с часто применяемым приближением Буссинеска. Помимо традиционного приближения для силы Кориолиса обсуждаются эффекты, вызванные ее нетрадиционным представлением, учитывающим горизонтальную составляющую вращения. Подробно описаны линейные волны в такой плазме и обсуждаются их дисперсионные характеристики. Приведен обзор неустойчивостей в астрофизической плазме вследствие нелинейных эффектов.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, мелкая вода, приближение Буссинеска, неупругое приближение, волны, нелинейные волны, параметрические неустойчивости

DOI: 10.31857/S0367292122601229, **EDN:** NAAFPE

1. ВВЕДЕНИЕ

Большинство наблюдаемых объектов во Вселенной находится в состоянии плазмы и подвержены вращению. В последнее время активно развиваются теоретические и численные исследования, направленные на решение фундаментальной проблемы описания и изучения многомасштабных течений плазмы путем исследования общих свойств, характеризующих различные астрофизические объекты.

Поведение различных звезд и планет описывается магнитной гидродинамикой тонких слоев плазмы со свободной границей в поле силы тяжести. Например, течения солнечного тахоклина (тонкого слоя внутри Солнца, находящегося над конвективной зоной) [1–3], динамика атмосфер нейтронных звезд [4, 5], течения аккреционных дисков нейтронных звезд [6, 7], экзопланеты с магнитоактивными атмосферами, захваченные приливами звезд [8–10]. Полная трехмерная система магнитогидродинамических уравнений вращающейся плазмы достаточно сложна как для аналитического исследования, так и для численного моделирования. Поэтому для описания таких течений астрофизической плазмы используется магнитогидродинамическое приближение мелкой воды [2] и квазигеострофическое приближение в магнитной гидродинамике [11, 12]. На самых больших масштабах плазменная среда ис-

пытывает воздействие гравитации и вращения. Полная система уравнений магнитной гидродинамики вращающейся плазмы в поле силы тяжести представляет собой практически неразрешимую проблему, как для аналитического исследования, так и для численного моделирования. Поэтому актуальна разработка приближенных моделей, описывающих течения астрофизической плазмы на глобальных масштабах. Уравнения магнитной гидродинамики вращающейся плазмы в приближении мелкой воды являются альтернативой магнитогидродинамическим уравнениям тяжелой жидкости со свободной границей в случае, когда исследуется слой малой толщины по отношению к характерному горизонтальному линейному размеру задачи, и вертикальными ускорениями в слое можно пренебречь. Практически, речь идет о развитии идей геофизической гидродинамики с учетом существенных отличий в поведении плазменных течений вследствие присутствия силы Лоренца и влияния магнитных полей. Магнитогидродинамические уравнения мелкой воды получаются в предположении гидростатичности распределения давлений и малости толщины слоя по отношению к характерному горизонтальному линейному размеру задачи из полной системы уравнений магнитной гидродинамики несжимаемой плазмы усреднением по высоте слоя [2, 13–18]. В работе [2] получены магнитогидродинамические

уравнения в приближении мелкой воды без учета внешнего вертикального магнитного поля. В работе [4] полученные в [2] уравнения записаны путем введения эффектов внешнего поля в уравнения для горизонтальных скоростей и для горизонтальных магнитных полей. Тем не менее в работе [4] оставался открытым вопрос о корректной формулировке условия бездивергентности магнитного поля в приближении мелкой воды во внешнем магнитном поле. Заметим, что предложенное в работе [2] условие бездивергентности не удовлетворяется в модернизированной системе магнитогидродинамических уравнений мелкой воды во внешнем поле. Поэтому актуальной является задача развития последовательной теории как для понимания структуры магнитного поля, так и для постановки корректных начальных условий при численном моделировании. Полученная система играет такую же важную роль в космической и астрофизической плазме, как и классические уравнения мелкой воды в гидродинамике нейтральной жидкости. Заметим, что существенным отличием магнитогидродинамических уравнений вращающейся плазмы по сравнению с нейтральной жидкостью является присутствие условия бездивергентности магнитного поля, выполняющегося тождественно при задании корректных начальных условий.

Важным принципиальным свойством течений в астрофизической плазме является свойство сжимаемости, характеризующее большинство наблюдаемых во Вселенной плазменных течений. Для описания сжимаемых течений, как правило, необходимо использовать полную трехмерную систему магнитогидродинамических уравнений, которая также представляет собой сложную задачу для теоретического рассмотрения и численного моделирования. В работах [19, 20] выведена система уравнений мелкой воды для нейтральной жидкости с учетом крупномасштабной сжимаемости. Полученные в этих работах уравнения не учитывают важнейшие для плазменных течений свойства, такие как вращение и наличие магнитного поля. Поэтому представляется важным обобщить полученные в [19, 20] уравнения для магнитогидродинамических течений, характерных для астрофизической плазмы.

Гиперболичность магнитогидродинамических уравнений мелкой воды определяет, наряду с гладкими, наличие разрывных автомодельных решений. Даже в случае, когда начальные условия являются гладкими, нелинейный характер уравнений, наряду с их гиперболичностью, за конечное время может привести к разрывному решению. В простейшем случае невращающейся плазмы система магнитогидродинамических уравнений допускает полное аналитическое решение в виде простых волн на ровной границе [13] и на наклонной плоскости [14]. Точное явное

решение начальной задачи с кусочно-постоянными начальными условиями, известной как задача Римана [21, 22], для уравнений магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды на ровной границе найдено в [13] и на наклонной плоскости в [14]. Аналогично, для случая нейтральной жидкости в работах [19] (на ровной границе), [20] (на наклонной плоскости) найдены решения системы уравнений мелкой воды с учетом крупномасштабной сжимаемости в отсутствии вращения в виде простых волн, а также решена задача распада произвольного разрыва. Учет крупномасштабной сжимаемости позволяет описывать динамику столба плазмы в зависимости не только от высоты слоя и скорости, но и средней плотности столба жидкости. Вследствие этого учет горизонтального импульса в уравнениях происходит более точно, по сравнению со случаем несжимаемой жидкости, что является преимуществом при применении этих уравнений для описания космических и астрофизических течений. Полученные в этих работах решения являются точными, сильно нелинейными, ключевыми для разработки конечно-объемных численных методов Годуновского типа [23, 24]. Учитывая важность таких решений, представляется полезным и интересным обобщить теорию, развитую в [13, 14, 19, 20] для сжимаемых магнитогидродинамических течений в приближении мелкой воды.

Течения в плазменной астрофизике, так же как течения в геофизике, как правило, являются стратифицированными. Учет стратификации в магнитогидродинамических моделях вращающейся плазмы важен для анализа множества астрофизических объектов и явлений, например, процессов в солнечном тахоклине [1–3, 25–27], устойчиво-стратифицированных областей в недрах звезд (излучающей зоны) [28] и планет (внешний жидкий слой ядра) [29], астрофизических дисков [30], экзопланет [31], осцилляций вращающихся звезд и Солнца [32–34], в частности осцилляций R -моды [35–37]. Кроме того, учет стратификации позволяет существенно расширить возможности для интерпретации имеющихся данных наблюдений крупномасштабных волн Россби на Солнце [32, 33, 38–41]. Эффективной моделью для описания непрерывно стратифицированной плазмы является модель n слоев плазмы различной плотности, наложенных друг на друга [17, 42]. Приближение мелкой воды является одним из основным магнитогидродинамических приближений, используемых для изучения крупномасштабных процессов во вращающейся астрофизической плазме.

Большое число работ посвящено изучению волновых процессов в приближении мелкой воды [3, 4, 12–14, 27, 33, 38, 43–56]. Когда рассматривают крупномасштабные течения при наличии вращения в магнитогидродинамическом приближе-

нии мелкой воды, выделяют волны магнито-Пуанкаре [4, 46, 49] и волны магнито-Россби [48]. Волны магнито-Пуанкаре возникают во вращающихся течениях под действием силы тяжести и магнитного поля. Поскольку динамика волн определяется вращением, магнитным полем и гравитацией, также распространено название магнитные инерционно-гравитационные волны. Вследствие того, что название “волны магнито-Пуанкаре” используется в основном в работах по мелкой воде, а “магнитные инерционно-гравитационные волны” встречается чаще в различных приближениях и является более общим, мы будем использовать здесь именно его. Наряду с магнитными инерционно-гравитационными волнами (волнами магнито-Пуанкаре) в магнитной гидродинамике вращающейся плазмы возникают магнитострофические волны [4, 46, 49], восстанавливаемыми силами которых являются сила Кориолиса, сила Лоренца и сила гравитации. Магнитные инерционно-гравитационные волны являются аналогом магнитогравитационных волн в плазме при наличии вращения. В работе [46] показано, что условия синхронизма для магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн обеспечивают их трехволновые взаимодействия, и развита слабонелинейная теория. Показано наличие нелинейных взаимодействий двух магнитных инерционно-гравитационных волн и одной магнитострофической волны и двух магнитострофических волн и одной магнитной инерционно-гравитационной волны.

Волны магнито-Россби — крупномасштабные волны, возникающие вследствие неоднородности силы Кориолиса в зависимости от широты на сфере, распространяющиеся вследствие сохранения полной завихренности во вращающейся плазме, по аналогии с нейтральной жидкостью [53–55, 57, 58]. Волны магнито-Россби определяют крупномасштабную динамику Солнца и звезд [3, 25, 27, 59–63], динамику магнитоактивных атмосфер экзопланет, захваченных приливами от несущей звезды [8–10] и атмосфер нейтронных звезд [5, 6, 64–66], течения в аккреционных дисках нейтронных звезд [7]. Несмотря на сложность наблюдения волн Россби в астрофизической плазме, они недавно были обнаружены на Солнце [38, 39, 67]. Отметим также ряд исследований о влиянии волн магнито-Россби на солнечные сезоны [33, 41, 68, 69] и космическую погоду [70, 71]. Кроме того, отметим работы с исследованиями, косвенно указывающими на существование волн Россби на Солнце [72–76]. В работах [43, 48, 77] волны магнито-Россби исследованы в приближении β -плоскости для силы Кориолиса. Приближение β -плоскости описывает вращающиеся сферические течения плазмы в локальной декартовой системе координат. В этом случае параметр Кориолиса слабо меняется при малых из-

менениях широты и раскладывается в ряд до первого порядка по широте. Слабонелинейная теория волн магнито-Россби в магнитогидродинамической модели однослойной мелкой воды развита в [48], при наличии крупномасштабной сжимаемости в [77]. В работе [43] развита линейная и слабонелинейная теория волн магнито-Россби во вращающейся стратифицированной плазме в магнитогидродинамической двуслойной модели мелкой воды. В работах [43, 48, 77] исследованы условия синхронизма и найдены нелинейные взаимодействия трех волн магнито-Россби. Нелинейные взаимодействия волн магнито-Россби связывают с длительностью солнечного цикла. Нерегулярные переходы по амплитудам волн напоминают наблюдаемые временные ряды солнечной активности [63]. Приближение β -плоскости развито для упрощения теории сферических волн Россби. Тем не менее заметим, что представление силы Кориолиса в таком приближении содержит слагаемое, не зависящее от широты, которое обеспечивает существование магнитных инерционно-гравитационных волн на β -плоскости. Такие волны не исследовались в работах [3, 4, 43, 48, 77], хотя их нелинейные взаимодействия могут быть важны для интерпретации различных явлений в плазменной астрофизике.

Магнитогидродинамическая теория мелкой воды является двумерной, что исключает не только вертикальные компоненты скоростей и магнитного поля, но и учет вертикального изменения их горизонтальных составляющих. Таким образом, не являясь трехмерной, магнитогидродинамическая система уравнений в приближении мелкой воды не может полностью описывать важный для астрофизики случай устойчиво и непрерывно стратифицированного слоя плазмы. В работе [78] сделан существенный шаг вперед в изучении трехмерных волновых процессов в магнитогидродинамических течениях вращающейся стратифицированной плазмы, являющийся принципиальным для реальных течений с непрерывной стратификацией. Как хорошо известно, в геофизической гидродинамике стратифицированных вращающихся течений возникают инерционно-гравитационные волны вследствие двух восстанавливающих механизмов — вращения и стратификации. В случае магнитных течений волновая картина гораздо богаче вследствие наличия дополнительной восстанавливающей силы, а именно силы Лоренца, наряду с силой Кориолиса и силой плавучести [78]. Кроме того, учет трехмерности позволяет детально исследовать волновые процессы в магнитогидродинамике стратифицированной плазмы с учетом горизонтальной составляющей силы Кориолиса, что является особенно принципиальным при изучении экваториальных течений. Отметим, что волны Россби [32] обнаружены именно в эквато-

риальной зоне Солнца. Для учета горизонтальной составляющей вектора Кориолиса используются приближения нестандартных f - и β -плоскостей [55, 79]. Для изучения устойчиво-стратифицированных течений как нейтральной жидкости [79–81], так и астрофизической плазмы [82–84] широко используется приближение Буссинеска. Отметим, что приближение Буссинеска работает, когда градиент плотности пропорционален только градиенту температуры, и описывает несжимаемые стратифицированные течения [54]. Вариации плотности и температуры в приближении Буссинеска должны быть малыми. Таким образом, приближение Буссинеска правильно описывает несжимаемую жидкость, но также учитывает изменения плотности [85]. В [86] показано, что уравнения магнитной гидродинамики в приближении Буссинеска представляют собой систему уравнений несжимаемой плазмы с градиентом температуры, близким к адиабатическому, и отфильтровывают быстрые (акустические) волновые процессы. В [87] приближение Буссинеска расширено за счет включения переменных магнитных полей. В приближении Буссинеска для нейтральной жидкости флуктуации давления не учитываются в уравнении состояния. В магнитных уравнениях Буссинеска флуктуации полного давления (магнитного и теплового) по-прежнему считаются небольшими.

Важным принципиальным отличием течений астрофизической плазмы является свойство сжимаемости, характеризующее большинство наблюдаемых объектов в плазменной астрофизике. Отметим, что первые экспериментальные наблюдения крупномасштабных течений астрофизической плазмы выполнены на основе изучения магнитных полей или методами астросейсмологии, что естественным образом мотивирует развитие магнитогидродинамической теории с учетом как эффектов сжимаемости, так и эффектов магнитных полей. Учет сжимаемости в магнитогидродинамических моделях вращающейся плазмы существенно повышает возможность интерпретации астросейсмологических данных, например, данных о широтной зависимости собственных мод солнечных осцилляций [32]. В работах [19, 20] выведена система уравнений мелкой воды для нейтральной жидкости с учетом крупномасштабной сжимаемости, и затем в [77] обобщена для магнитогидродинамических течений. В работах [88, 89] волновые процессы в сжимаемых течениях исследуются в неупругом приближении (anelastic approximation). В таком приближении акустические волны отфильтрованы, а градиент плотности зависит как от градиента давления, так и от градиента температуры [90]. Магнитогидродинамическая система уравнений в неупругом приближении не содержит акустических волн и получается из полной системы сжимаемых урав-

нений магнитной гидродинамики в предположении малых возмущений плотности и описывает течения с малыми числами Маха.

Подробный качественный анализ эффектов малых чисел Маха в астрофизике приведен в работе [91], которая посвящена разработке нового численного алгоритма для описания объектов плазменной астрофизики. В [91] приведено краткое, но информативное сравнение различных типов приближений, используемых при численном моделировании течений с малым числом Маха. Наиболее простым является приближение несжимаемой жидкости, предполагающее постоянство фоновой плотности и давления по координате. В таком приближении при движении плотность жидкости можно считать постоянной вдоль всего объема жидкости в течение всего времени движения. Следующим важным приближением при условии несжимаемого потока жидкости является приближение Буссинеска. В нем по-прежнему считается постоянным фоновое состояние, однако в уравнении импульса при массовых силах включены эффекты плавучести. Как в несжимаемом, так и в приближении Буссинеска уравнение непрерывности переходит в условие бездивергентности поля скоростей в силу отсутствия эффектов сжимаемости. Следующие два приближения, неупругое и псевдонесжимаемое, основаны на стратифицированном фоновом состоянии (исходном состоянии равновесия). В обоих этих приближениях элемент жидкости может расширяться или сжиматься при движении по вертикали относительно фонового состояния в ответ на изменение давления окружающей среды. Уравнение непрерывности в неупругом приближении является условием бездивергентности произведения фоновой плотности и скорости течения. Уравнение непрерывности в псевдосжимаемом приближении имеет более сложный вид, а именно ненулевую дивергенцию произведения скорости и фонового давления, возведенного в степень $1/\gamma$ ($\gamma = c_p/c_v$ — показатель адиабаты). При этом уравнения в псевдосжимаемом приближении сводятся к уравнениям в неупругом приближении в случае малых возмущений плотности и температуры, но сами по себе не предполагают малости таких изменений. Кроме того, псевдосжимаемые уравнения учитывают локальные эффекты нагрева.

Впервые неупругое приближение предложено в [92] для решения задач геофизической гидродинамики. В [92] с использованием масштабного анализа приведен вывод уравнений на основе предположения о том, что распределение давления, плотности и потенциальной температуры газа всегда близки к модели адиабатически стратифицированной атмосферы, а временной масштаб определяется частотой Брента–Вайсяля. Такие

предположения и приближения при выводе уравнений привели к отсутствию в них акустических волн, хотя это не было непосредственной целью исследования. Задача о фильтрации акустических волн в крупномасштабных моделях геофизической гидродинамики была впервые сформулирована в работе [93] с целью упростить численное моделирование тепловой конвекции в геофизике, поскольку присутствие акустических волн в полной сжимаемой системе уравнений требует очень малого временного шага в численной схеме конечно-разностного интегрирования. Отметим работу [94], в которой показана возможность использования неупругого приближения для исследования внутренних гравитационных волн при малых числах Маха, а также работы [95–99], в которых исследуются математические свойства неупругого приближения для течений нейтральной жидкости. Упомянем работы по развитию теории неупругого приближения в рамках задач земной конвекции и геодинамики [100–103], которые инициировали применение неупругого приближения для изучения астрофизических течений. Говоря о развитии неупругого приближения в астрофизике и физике планет отметим работы [104, 105], в которых используется неупругое приближение в нейтральной жидкости, и работы [106–112], в которых используются магнитогидродинамические уравнения в неупругом приближении для исследования конвекции и динамо на Солнце и в звездах.

2. ЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ДВУМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Поведение различных звезд и планет описывается магнитной гидродинамикой тонких слоев плазмы со свободной границей в поле силы тяжести. Например, течения солнечного тахоклина (тонкого слоя внутри Солнца, находящегося над конвективной зоной) [1–3], динамика атмосфер нейтронных звезд [4, 5], течения аккреционных дисков нейтронных звезд [6, 7], захваченные приливами экзопланеты с магнитоактивными атмосферами [8–10]. Полная трехмерная система магнитогидродинамических уравнений вращающейся плазмы достаточно сложна как для аналитического исследования, так и для численного моделирования. Поэтому для описания таких течений в тонких слоях астрофизической плазмы используется магнитогидродинамическое приближение мелкой воды [2]. Уравнения магнитной гидродинамики вращающейся плазмы в приближении мелкой воды являются альтернативой магнитогидродинамическим уравнениям тяжелой жидкости со свободной границей в случае, когда исследуется слой малой толщины по отношению к характерному горизонтальному линейному раз-

меру задачи, и вертикальными ускорениями в слое можно пренебречь. Практически, речь идет о развитии идей геофизической гидродинамики с учетом существенных отличий в поведении плазменных течений вследствие присутствия силы Лоренца и важности магнитных полей. Магнитогидродинамические уравнения мелкой воды получаются в предположении гидростатичности распределения давлений и малости толщины слоя по отношению к характерному горизонтальному линейному размеру задачи из полной системы уравнений магнитной гидродинамики несжимаемой плазмы усреднением по высоте слоя [2, 13–18]. В работе [2] получены магнитогидродинамические уравнения в приближении мелкой воды без учета внешнего вертикального магнитного поля. В работе [4] полученные в [2] уравнения записаны путем введения эффектов внешнего поля в уравнения для горизонтальных скоростей и для горизонтальных магнитных полей. Такая конфигурация магнитного поля характерна для атмосфер нейтронных звезд [4], и для магнитоактивных атмосфер экзопланет [8]. Тем не менее в работе [4] остается открытым вопрос о корректной формулировке условия бездивергентности магнитного поля в приближении мелкой воды во внешнем магнитном поле. Заметим, что предложенное в работе [2] условие бездивергентности не удовлетворяется в модернизированной системе магнитогидродинамических уравнений мелкой воды во внешнем поле. Поэтому актуальной стала задача развития последовательной теории как для понимания структуры магнитного поля, так и для постановки корректных начальных условий при численном моделировании. Данная теория была разработана в [49], где была выведена система магнитогидродинамических уравнений мелкой воды во внешнем магнитном поле, которая показала принципиальную трехмерность магнитного поля. Полученная система играет такую же важную роль в космической и астрофизической плазме, как и классические уравнения мелкой воды в гидродинамике нейтральной жидкости. Заметим, что существенным отличием магнитогидродинамических уравнений вращающейся плазмы по сравнению с нейтральной жидкостью является присутствие условия бездивергентности магнитного поля, выполняющегося тождественно при задании корректных начальных условий. В уравнениях, полученных в работе [49] это условие выполнено. Кроме того, дальнейшие исследования магнитогидродинамических уравнений мелкой воды во внешнем поле показали возможность корректного учета не только эффектов стратификации, но и эффектов крупномасштабной сжимаемости в двумерных течениях вращающейся астрофизической плазмы. Так, в работе [43] были выведены магнитогидродинамические уравнения двуслойной мелкой воды для стратифицирован-

ного слоя плазмы во внешнем магнитном поле, а в работе [77] были выведены магнитогидродинамические уравнения с учетом крупномасштабной сжимаемости во внешнем магнитном поле. В следствие значимости нелинейных взаимодействий волн в исследовании космической погоды и солнечных циклов, в работе [113] в рамках магнитогидродинамических уравнений мелкой воды (одного слоя и двух слоев различной, но постоянной плотности) впервые были исследованы магнитные инерционно-гравитационные волны и волны магнито-Россби на β -плоскости и выявлены их нелинейные взаимодействия.

2.1. Приближение мелкой воды для течений вращающейся плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле

В данном разделе приведем обзор линейных волн в двумерных течениях вращающейся плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле в приближении мелкой воды [48]. В этом случае в магнитогидродинамическом приближении мелкой воды появляются дополнительные слагаемые, приводящие, при постоянном параметре Кориолиса $f = 2\Omega$ (стандартная f -плоскость, Ω — скорость вращения слоя плазмы), к возникновению в линейном приближении двух типов быстрых волн: магнитных инерционно-гравитационных и магнитоострофических волн [4]. При учете сферичности (стандартная β -плоскость) в линейном приближении исследуются высокочастотные магнитные инерционно-гравитационные волны и низкочастотные волны магнито-Россби. Вывод уравнений мелкой воды магнитной гидродинамики осуществлялся методом усреднения по высоте слоя исходной системы уравнений (МГД-уравнений для вращающейся несжимаемой невязкой плазмы), широко используемых и хорошо себя зарекомендовавших в геофизической гидродинамике [54, 114] и в физике планетных атмосфер [10, 57, 115, 116]. При выводе уравнений во внешнем магнитном поле возникают дополнительные условия на границах для магнитного поля, учитывающие наличие постоянно-го внешнего вертикального магнитного поля, пронизывающего слой плазмы. Уравнения записаны в неинерционной системе отсчета, вращающейся со скоростью Ω вместе со слоем плазмы. Система магнитогидродинамических уравнений мелкой воды во внешнем магнитном поле имеет вид

$$\partial_t h + \partial_x(hu_x) + \partial_y(hu_y) = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(hu_x) + \partial_x \left[h \left(u_x^2 - B_x^2 + \frac{gh^2}{2} \right) \right] + \\ + \partial_y [h(u_x u_y - B_x B_y)] + B_0 B_x - fhu_y = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(hu_y) + \partial_y [h(u_x u_y - B_x B_y)] + \\ + \partial_x \left[h \left(u_y^2 - B_y^2 + \frac{gh^2}{2} \right) \right] + B_0 B_y + fhu_x = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\partial_t(hB_x) + \partial_y [h(B_x u_y - B_y u_x)] - B_0 u_x = 0, \quad (4)$$

$$\partial_t(hB_y) + \partial_x [h(B_y u_x - B_x u_y)] - B_0 u_y = 0, \quad (5)$$

$$\partial_t B_z + B_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (6)$$

$$\partial_x(hB_x) + \partial_y(hB_y) = 0, \quad (7)$$

где h — высота слоя поверхности, u_x, u_y — горизонтальные скорости в приближении мелкой воды, усредненные по высоте слоя, B_x, B_y — горизонтальные компоненты магнитного поля в приближении мелкой воды, усредненные по высоте слоя, B_z — вертикальная компонента магнитного поля, B_0 — постоянное внешнее вертикальное магнитное поле, $f = 2\Omega$ — параметр Кориолиса, Ω — угловая скорость вращения. Заметим, что первое уравнение системы (1) — уравнение изменения высоты слоя, уравнения (2), (3) — закон изменения импульса, (4)–(6) — уравнения изменения магнитного поля, уравнение (7) — следствие уравнения бездивергентности магнитного поля в полной системе исходных уравнений магнитной гидродинамики. Уравнение (7) при задании корректных начальных условий, определяемых уравнением (6) выполняется тождественно как следствие уравнений (4)–(6). Таким образом показано сохранение трехкомпонентности магнитного поля в магнитогидродинамическом приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле, в то время как поле скоростей двумерно. Полученная система (1)–(5) магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле в частном случае переходит в классические уравнения нейтральной жидкости и широко известные в астрофизике магнитогидродинамические уравнения без внешнего магнитного поля [2].

Система (1)–(5) имеет два взаимоисключающих стационарных решения: решение со внешним вертикальным магнитным полем

$$\begin{aligned} h_0 = \text{const}, \quad u_{x_0} = u_{y_0} = B_{x_0} = B_{y_0} = 0, \\ B_0 = \text{const}, \end{aligned} \quad (8)$$

и решение с горизонтальным магнитным полем

$$\begin{aligned} h_0 = \text{const}, \quad u_{x_0} = u_{y_0} = B_0 = 0, \\ \mathbf{B}_0 = (B_{x_0}, B_{y_0}) = \text{const}. \end{aligned} \quad (9)$$

2.1.1. Волны в астрофизической плазме при наличии внешнего вертикального поля. В приближении стандартной f -плоскости, когда вектор Кориолиса $\mathbf{f} = (0, 0, f_v)$ постоянен и направлен

строго по вертикали, линейными решениями системы (1)–(5) во внешнем вертикальном магнитном поле на фоне стационара (8) являются магнитные инерционно-гравитационные волны с дисперсионным соотношением

$$\omega_{MIG_{V_1}} = \pm \sqrt{\frac{gh_0 k^2}{2} + \frac{f_V^2}{2} + \frac{B_0^2}{h_0^2} + \frac{1}{2} \sqrt{(f_V^2 + gh_0 k^2)^2 + 4f_V^2 \frac{B_0^2}{h_0^2}}} \quad (10)$$

и магнитоastroфические волны с дисперсионным соотношением

$$\omega_{MS_{V_1}} = \pm \sqrt{\frac{gh_0 k^2}{2} + \frac{f_V^2}{2} + \frac{B_0^2}{h_0^2} - \frac{1}{2} \sqrt{(f_V^2 + gh_0 k^2)^2 + 4f_V^2 \frac{B_0^2}{h_0^2}}} \quad (11)$$

В дисперсионных соотношениях (10), (11) знак “+” соответствует волнам, распространяющимся вдоль волнового вектора $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$, а знак “–” – волнам, распространяющимся противоположно направлению волнового вектора $\mathbf{k}$.

Магнитные инерционно-гравитационные волны (10) – поверхностные гравитационные волны во вращающейся мелкой воде при наличии магнитного поля. В отсутствие магнитного поля уравнение (10) принимает вид

$$\omega_p = \pm \sqrt{gh_0 k^2 + f_V^2} \quad (12)$$

и описывает инерционно-гравитационные волны в мелкой воде, являющиеся объектом многочисленных исследований в динамике нейтральной жидкости [54].

Магнитоastroфические волны, как и магнитные инерционно-гравитационные волны, также возникают во вращающейся мелкой воде при наличии магнитного поля вследствие гравитации и силы Кориолиса. Однако данный тип волн не имеет аналога в динамике нейтральной жидкости. В отсутствие магнитного поля уравнение (11) обращается в ноль.

Для исследования сферических течений в рамках системы магнитогидродинамических уравнений мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле (1)–(5) используется приближение стандартной β -плоскости для вектора Кориолиса $\mathbf{f}$. Данное приближение широко применяется для исследования крупномасштабных волн Россби, как в динамике нейтральной жидкости [54], так и в магнитной гидродинамике [117]. Однако в работах [48], [113] показано, что в уравнениях мелкой воды на β -плоскости, как при наличии так и в отсутствие магнитного поля, помимо низкочастотных волн Россби существует решение, описывающее высокочастотные магнитные инерционно-гравитационные волны.

В приближении стандартной β -плоскости предполагается, что вектор Кориолиса $\mathbf{f} = 2\boldsymbol{\Omega} = 2\sin\theta$ слабо меняется при малых изменениях широты θ . Такое предположение позволяет перейти в локальную декартову систему координат на сфере радиуса R и разложить выражение для вектора $\mathbf{f}$ в ряд по широте, сохраняя первый порядок малости:

$$f = 2\Omega \sin\theta \approx 2\Omega \sin\theta_0 + 2\Omega(\theta - \theta_0) \cos\theta_0 \approx f_0 + \beta y, \quad (13)$$

где $f_0 = 2\Omega \sin\theta_0$, $\beta = \partial f / \partial y$, $\beta y \ll f_0$, $y = R(\theta - \theta_0)$. Таким образом в случае приближения стандартной β -плоскости для описания сферических течений в системе магнитогидродинамических уравнений мелкой воды (1)–(5) слагаемые с вектором Кориолиса $f u_{x,y}$ в уравнениях (2), (3) принимают вид $(f_V + \beta y)u_y$ и $f_V u_x$ соответственно, где $f_V \equiv f_0$.

Линейным решением системы (1)–(5) в приближении стандартной β -плоскости на фоне стационарного решения с внешним вертикальным магнитным полем (8) является дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$\omega^4 - \omega^2 \left(f_V^2 + gh_0 k^2 + 2 \frac{B_0^2}{h_0^2} \right) - \omega gh_0 \beta k_x + \frac{B_0^2}{h_0^2} \left(\frac{B_0^2}{h_0^2} + gh_0 k^2 \right) = 0. \quad (14)$$

Решением уравнения (14) в высокочастотном пределе является дисперсионное соотношение в виде

$$\omega'_{MIG_{V_1}} = \pm \sqrt{f_V^2 + gh_0 k^2 + 2 \frac{B_0^2}{h_0^2}}, \quad (15)$$

которое описывает высокочастотные магнитные инерционно-гравитационные на β -плоскости. Отметим здесь существенное различие с магнитными инерционно-гравитационными волнами (10) на f -плоскости. Дисперсионное соотношение (15) имеет более простой вид, в нем отсутствует дополнительный внутренний радикал, что меняет динамику волны. Однако восстанавливающими силами для обоих типов волн являются сила Лоренца, гравитации и Кориолиса. В отсутствие магнитного поля выражение (15) переходит в выражение (12) и описывает стандартные гидродинамические инерционно-гравитационные волны в мелкой воде. Кроме того, в приближении β -плоскости отсутствуют магнитоastroфические волны.

Решением уравнения (14) в низкочастотном пределе является дисперсионное соотношение в виде

$$\omega_{MR_{V_1}} = \frac{B_0^2}{h_0^2} \left(\frac{B_0^2}{h_0^2} + gh_0 k^2 \right) (gh_0 \beta k_x)^{-1}, \quad (16)$$

которое описывает крупномасштабные волны магнито-Россби в мелкой воде на β -плоскости, распространяющиеся вдоль направления волнового вектора $\mathbf{k}$. Основной механизм их образования заключается в сдвиге вращающегося потока вследствие того, что сила Кориолиса изменяется в зависимости от широты.

Заметим, что в интервале между высокочастотными решениями дисперсионного уравнения в виде магнитных инерционно-гравитационных волн и низкочастотными решениями для медленных волн магнито-Россби, дисперсионное соотношение допускает моды быстрых магнито-Россби волн [3].

2.1.2. Волны в астрофизической плазме в горизонтальном магнитном поле. В отсутствие внешнего вертикального магнитного поля линейными решениями системы (1)–(5) на фоне стационара (9) являются магнитные инерционно-гравитационные волны с дисперсионным соотношением

$$\omega_{MIG_{h_1}} = \pm \sqrt{\frac{gh_0 k^2}{2} + \frac{f_V^2}{2} + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2} + \frac{1}{2} \sqrt{(f_V^2 + gh_0 k^2)^2 + 4f_V^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2} \quad (17)$$

и магнитострофические волны с дисперсионным соотношением

$$\omega_{MS_{h_1}} = \pm \sqrt{\frac{gh_0 k^2}{2} + \frac{f_V^2}{2} + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2} - \frac{1}{2} \sqrt{(f_V^2 + gh_0 k^2)^2 + 4f_V^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2}. \quad (18)$$

В дисперсионных соотношениях (17), (18) знак “+” соответствует волнам, распространяющимся вдоль волнового вектора $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$, а знак “–” соответствует волнам, распространяющимся противоположно направлению волнового вектора $\mathbf{k}$.

Магнитные инерционно-гравитационные волны в горизонтальном магнитном поле (17) при нулевом магнитном поле переходят в свой гидродинамический аналог – инерционно-гравитационные волны в мелкой воде с дисперсионным соотношением (12). Магнитострофические волны в горизонтальном магнитном поле (18) не имеют аналога в динамике нейтральной жидкости. В отсутствие магнитного поля дисперсионное соотношение (18) обращается в ноль.

Линейным решением системы (1)–(5) в приближении стандартной β -плоскости на фоне стационарного решения с горизонтальным магнитным полем (9) является дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$\omega^4 - \omega^2 (f_V^2 + gh_0 k^2 + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2) - \omega gh_0 \beta k_x + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 ((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + gh_0 k^2) = 0. \quad (19)$$

Решением уравнения (19) в высокочастотном пределе является дисперсионное соотношение в виде

$$\omega_{MIG_{h_1}} = \pm \sqrt{f_V^2 + gh_0 k^2 + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2}, \quad (20)$$

которое описывает высокочастотные магнитные инерционно-гравитационные волны на β -плоскости, существенно отличающиеся от магнитных

инерционно-гравитационных волн (17) на f -плоскости. В отсутствие магнитного поля выражение (20) переходит в выражение (12) и описывает стандартные гидродинамические инерционно-гравитационные волны в мелкой воде. Кроме того, в приближении β -плоскости отсутствуют магнитострофические волны.

Решением уравнения (19) в низкочастотном пределе является дисперсионное соотношение в виде

$$\omega_{MR_{h_1}} = \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 ((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + gh_0 k^2)}{gh_0 \beta k_x}, \quad (21)$$

которое описывает крупномасштабные волны магнито-Россби в мелкой воде в горизонтальном магнитном поле на β -плоскости, распространяющиеся вдоль направления волнового вектора $\mathbf{k}$.

В отсутствие магнитного поля уравнение (19) принимает вид

$$\omega^3 - \omega (f_V^2 + gh_0 k^2) - gh_0 \beta k_x = 0 \quad (22)$$

и имеет решение в высокочастотном пределе в виде инерционно-гравитационных волн в мелкой воде с дисперсионным соотношением (12), а в низкочастотном пределе в виде стандартных гидродинамических волн Россби в мелкой воде с дисперсионным соотношением

$$\omega_R = -\frac{gh_0 \beta k_x}{f_V^2 + gh_0 k^2}. \quad (23)$$

Общий вид дисперсионных кривых для волн во вращающихся течениях плазмы в приближении мелкой воды представлен на рис. 1а, б для

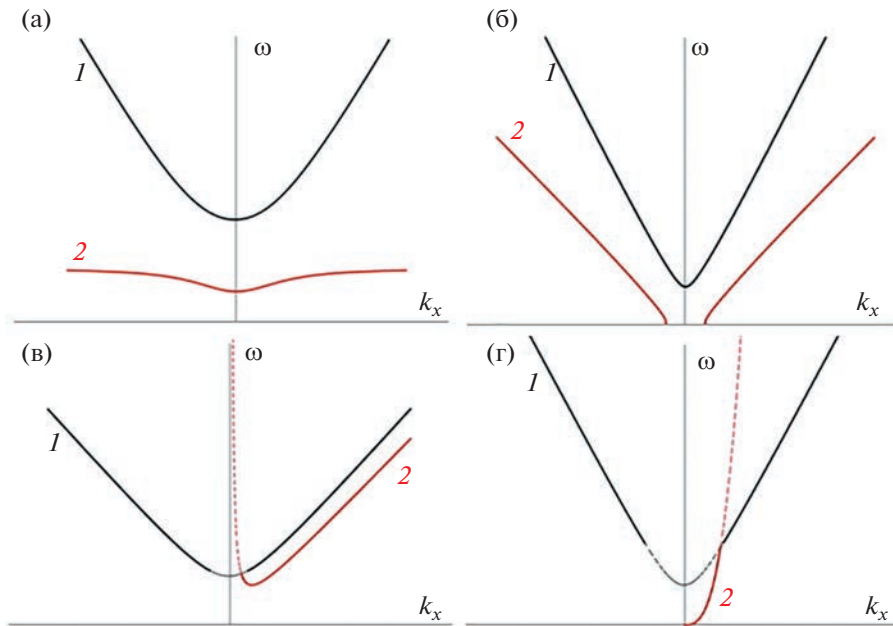


Рис. 1. Дисперсионные кривые для волн в однослойной мелкой воде на стандартной f -плоскости во внешнем вертикальном магнитном поле: магнитная инерционно-гравитационная волна $1 - \omega_{MIG_{V_1}}$ и магнитострофическая волна $2 - \omega_{MS_{V_1}}$ (а); на стандартной f -плоскости в горизонтальном магнитном поле: магнитная инерционно-гравитационная волна $1 - \omega_{MIG_{H_1}}$ и магнитострофическая волна $2 - \omega_{MS_{H_1}}$ (б); на стандартной β -плоскости во внешнем вертикальном магнитном поле: магнитная инерционно-гравитационная волна $1 - \omega_{MIG_{V_1}}$ и волна магнито-Россби $2 - \omega_{MR_{V_1}}$ (в); на стандартной β -плоскости в горизонтальном магнитном поле: магнитная инерционно-гравитационная волна $1 - \omega_{MIG_{H_1}}$ и волна магнито-Россби $2 - \omega_{MR_{H_1}}$ (г).

магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном магнитном поле; на рис. 1в, г для магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби во внешнем вертикальном и в горизонтальном магнитных полях.

2.1.3. Выводы. В разделе обсуждается существенное отличие структуры магнитного поля в магнитогидродинамических течениях мелкой воды при наличии внешней вертикальной компоненты от аналогичных течений в ее отсутствии. Необходимость учета условия бездивергентности магнитного поля в этом случае навязывает системе вертикальную компоненту магнитного поля, делая структуру магнитного поля существенно трехмерной. При отсутствии внешнего вертикального магнитного поля, как хорошо известно, в приближении мелкой воды магнитное поле двумерно. Замечено, что предложенная система уравнений в частном случае отсутствия вертикального магнитного поля переходит в традиционную. Развита теория магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн на f -плоскости, а также магнитных инерционно-

гравитационных волн и волн магнито-Россби на β -плоскости в магнитогидродинамических течениях вращающейся плазмы в приближении мелкой воды. Изучены дисперсионные уравнения для двух стационарных течений: внешнее вертикальное магнитное поле и горизонтальное магнитное поле.

2.2. Приближение двухслойной мелкой воды для течений вращающейся стратифицированной плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле

Течения астрофизической плазмы, как и геофизические течения, в основном стратифицированные. Здесь и далее под стратификацией понимается зависимость профиля плотности от вертикальной координаты z . В случае устойчивой стратификации, рассматриваемом в данном обзоре, профиль плотности (энтропии — в случае сжимаемых течений) предполагается линейным по вертикальной координате и удовлетворяющим условию отсутствия конвекции — вертикальный градиент плотности (энтропии) отрицателен. Обсудим линейные волны в двумерных течениях вращающейся стратифицированной плазмы во

внешнем вертикальном магнитном поле в приближении двуслойной мелкой воды. Магнитогидродинамические уравнения двуслойной мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле являются обобщением уравнений, полученных в [46, 47, 49], на случай тонкого вращающегося слоя плазмы разделенного на два слоя с постоянными, но различными плотностями. Вывод магнитогидродинамических уравнений двуслойной мелкой воды, как и вывод однослойных уравнений, основан на методе усреднения по высоте слоя и учитывает наличие постоянного внешнего вертикального магнитного поля, пронизывающего оба слоя [43]. Уравнения как и для однослойного случая записаны в неинерционной системе отсчета, вращающейся со скоростью Ω вместе со слоем плазмы. Система магнитогидродинамических уравнений двуслойной мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле имеет вид

$$\partial_t(h_i - a_i) + \partial_x[(h_i - a_i)u_{xi}] + \partial_y[(h_i - a_i)u_{yi}] = 0, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t[(h_i - a_i)u_{xi}] + \\ & + \partial_x \left[(h_i - a_i) \left(u_{xi}^2 - B_{xi}^2 + \frac{g(h_i - a_i)}{2} \right) \right] + \\ & + \frac{\rho_2}{\rho_i} g(h_i - a_i) \partial_x H_i + \\ & + \partial_y[(h_i - a_i)(u_{xi}u_{yi} - B_{xi}B_{yi})] + \\ & + B_0 B_{xi} - f[(h_i - a_i)u_{yi}] = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t[(h_i - a_i)u_{yi}] + \partial_x[(h_i - a_i)(u_{xi}u_{yi} - B_{xi}B_{yi})] + \\ & + \partial_y \left[(h_i - a_i) \left(u_{yi}^2 - B_{yi}^2 + \frac{g(h_i - a_i)}{2} \right) \right] + \\ & + \frac{\rho_2}{\rho_i} g(h_i - a_i) \partial_y H_i + B_0 B_{yi} + (h_i - a_i) f u_{xi} = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t[(h_i - a_i)B_{xi}] + \\ & + \partial_y[(h_i - a_i)(B_{xi}u_{yi} - B_{yi}u_{xi})] - B_0 u_{xi} = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t[(h_i - a_i)B_{yi}] + \\ & + \partial_x[(h_i - a_i)(B_{yi}u_{xi} - B_{xi}u_{yi})] - B_0 u_{yi} = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где h_i — высота слоя, ρ_i — плотность плазмы в слое, Ω — угловая скорость вращения, равная для обоих слоев, $u_{xi,yi}$ — усредненные по высоте слоев горизонтальные скорости, $B_{xi,yi}$ — усредненные по высоте слоев горизонтальные магнитные поля, индекс $i = 1$ соответствует нижнему слою плазмы, в котором $a_i = 0$, $h_i = h_1$, $H_i = \Delta h$, а индекс $i = 2$ соответствует верхнему слою плазмы, в котором $a_i = h_1$, $h_i = h_2$, $H_i = h_1$. Данные уравнения двуслойной мелкой воды представляют собой единственную возможность самосогласованного учета внешнего магнитного поля и стратификации. Двуслойные магнитогидродинамические

уравнения мелкой воды играют такую же важную роль в космической и астрофизической стратифицированной плазме, как и классические уравнения мелкой воды в гидродинамике нейтральной стратифицированной жидкости [54, 114, 118]. В частном случае равенства высот и плотностей слоев плазмы уравнения (24)–(28) переходят в магнитогидродинамические уравнения мелкой воды во внешнем магнитном поле для одного слоя плазмы (1)–(5). Таким образом уравнения (24)–(28) сохраняют все свойства однослойной системы (1)–(5), включая принципиальную трехмерность магнитного поля и дополнительные уравнения на вертикальное магнитное поле (6) в обоих слоях. В частном случае отсутствия внешнего вертикального магнитного поля уравнения сводятся к магнитогидродинамическим уравнениям мелкой воды для двух слоев [42] в горизонтальном магнитном поле.

Система уравнений (24)–(28) имеет два взаимоисключающих стационарных решения: решение со внешним вертикальным магнитным полем

$$\begin{aligned} h_{0i} &= \text{const}, \quad u_{x0i} = u_{y0i} = B_{x0i} = B_{y0i} = 0, \\ B_0 &= \text{const}, \end{aligned} \quad (29)$$

и решение с горизонтальным магнитным полем

$$\begin{aligned} h_{0i} &= \text{const}, \quad u_{x0i} = u_{y0i} = B_0 = 0, \\ \mathbf{B}_{0i} &= (B_{x0i}, B_{y0i}) = \text{const}. \end{aligned} \quad (30)$$

2.2.1. Волны в астрофизической плазме во внешнем вертикальном магнитном поле. Линейным решением системы (24)–(28) в приближении стандартной β -плоскости на фоне стационарного решения с внешним вертикальным магнитным полем (29) является дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$\begin{aligned} & (\omega^4 - b_1 \omega^2 - c_1 \omega + d_1)(\omega^4 - b_2 \omega^2 - c_2 \omega + d_2) = \\ & = \frac{\rho_2}{\rho_1} g^2 k^4 h_{01} \Delta h_0 (\omega^2 + a \omega + q_1)(\omega^2 + a \omega + q_2), \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$b_1 = \frac{2B_0^2}{h_{01}^2} + f_V^2 + gk^2 h_{01}, \quad c_1 = \beta g k_x h_{01},$$

$$d_1 = \frac{B_0^4}{h_{01}^4} + \frac{B_0^2 g k^2}{h_{01}},$$

$$b_2 = \frac{2B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_V^2 + gk^2 \Delta h_0, \quad c_2 = \beta g k_x \Delta h_0,$$

$$d_2 = \frac{B_0^4}{\Delta h_0^4} + \frac{B_0^2 g k^2}{\Delta h_0},$$

$$a = \frac{\beta k_x}{k^2}, \quad q_1 = \frac{B_0^2}{h_{01}^2}, \quad q_2 = \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2}.$$

Правая часть дисперсионного соотношения (31) описывает эффекты стратификации в двухслойной модели, левая часть является произведением двух выражений, первое из которых соответствует нижнему слою, а второе — верхнему.

Строгий теоретический анализ полученного дисперсионного уравнения (31) не представляется возможным, поэтому ограничимся качественным рассмотрением. В первом приближении выделим магнитные инерционно-гравитационные волны и волны магнито-Россби в отсутствие стратификации. В случае малого различия в плотностях слоев плазмы представим решение дисперсионного уравнения (31) в высокочастотном пределе в виде суммы магнитной инерционно-гравитационной волны в отсутствие стратификации и малой поправки, связанной со стратификацией плазмы. В низкочастотном пределе решение дисперсионного уравнения (31) представим в виде суммы волны магнито-Россби в отсутствие стратификации и малой поправки, связанной со стратификацией плазмы.

В отсутствие стратификации ($\rho_2 = \rho_1$) уравнение (31) принимает вид

$$\begin{aligned} & \left[\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_V^2 \right) + \frac{B_0^4}{h_{01}^2 \Delta h_0^2} \right] \times \\ &= \left[\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_V^2 + gk^2 h_{02} \right) - \right. \\ & \quad \left. - \omega g h_{02} \beta k_x + \frac{B_0^2}{h_{01} \Delta h_0} \times \right. \\ & \quad \left. \times \left(\frac{B_0^2}{h_{01} \Delta h_0} + gk^2 \frac{h_{01}^3 + \Delta h_0^3}{h_{01} \Delta h_0} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

где ω — частота возмущения, $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ — волновой вектор возмущения. Би-квадратное уравнение в первой скобке дает следующие значения для частоты:

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 = & \frac{1}{2} \left(f_V^2 + \frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} \pm \right. \\ & \left. \pm \sqrt{\left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} - \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} \right)^2 + f_V^2 \left(f_V^2 + \frac{2B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{2B_0^2}{\Delta h_0^2} \right)} \right). \end{aligned}$$

Если предположить, что $\omega \neq \omega_{1,2}$, то уравнение (33) сводится к

$$\begin{aligned} & \omega^4 - \omega^2 \left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_V^2 + gk^2 H \right) - \omega g H \beta k_x + \\ & + \frac{B_0^2}{h_{01} \Delta h_0} \left(\frac{B_0^2}{h_{01} \Delta h_0} + gk^2 \frac{h_{01}^3 + \Delta h_0^3}{h_{01} \Delta h_0} \right) = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

В высокочастотном пределе решением уравнения (33) является следующее дисперсионное соотношение:

$$\omega_{MIG_{V_2}} = \pm \sqrt{\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_V^2 + gk^2 h_{02}}, \quad (34)$$

которое описывает магнитные инерционно-гравитационные волны на β -плоскости во внешнем вертикальном магнитном поле. Дисперсионное соотношение (34) в частном случае равенства высот слоев сводится к дисперсионному соотношению для магнитных инерционно-гравитационных волн на β -плоскости в однослойной мелкой воде во внешнем вертикальном магнитном поле (15).

В низкочастотном пределе решением уравнения (33) является следующее дисперсионное соотношение:

$$\begin{aligned} & \omega_{MR_{V_2}} = \\ &= \frac{B_0^2}{h_{01} \Delta h_0} \left(\frac{B_0^2}{h_{01} \Delta h_0} + \frac{gk^2 (h_{01}^3 + \Delta h_0^3)}{h_{01} \Delta h_0} \right) (\beta k_x g h_{02})^{-1}, \end{aligned} \quad (35)$$

которое описывает волны магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле. Дисперсионное соотношение (35) в частном случае равенства высот слоев сводится к дисперсионному соотношению для волн магнито-Россби в однослойной мелкой воде во внешнем вертикальном магнитном поле (16).

Выпишем поправки к частотам (34), (35), описывающие влияние стратификации ($\rho_1 \neq \rho_2$). Перепишем уравнение (31) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \left[\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_V^2 \right) + \frac{B_0^4}{h_{01}^2 \Delta h_0^2} \right] \times \\ & \times \left[\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_V^2 + gk^2 h_{02} \right) - \right. \\ & \quad \left. - \omega g h_{02} \beta k_x + \frac{B_0^2}{h_{01} \Delta h_0} \left(\frac{B_0^2}{h_{01} \Delta h_0} + gk^2 \frac{h_{01}^3 + \Delta h_0^3}{h_{01} \Delta h_0} \right) \right] = \\ &= \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) g^2 k^4 h_{01} \Delta h_0 \times \\ & \times \left(\omega^2 + \frac{\beta k_x}{k^2} \omega + \frac{B_0^2}{h_{01}^2} \right) \left(\omega^2 + \frac{\beta k_x}{k^2} \omega + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Пусть искомые поправки к частотам $\delta_{MIG_{V_2}} = \omega - \omega_{MIG_{V_2}}$, $\delta_{MR_{V_2}} = \omega - \omega_{MR_{V_2}}$ малы по сравнению с самими частотами

$$\omega_{MIG_{V_2}}^\alpha \delta_{MIG_{V_2}} \gg 1 \quad \forall \alpha > 0,$$

$$\omega_{MR_{V_2}}^\alpha \delta_{MR_{V_2}} \gg 1 \quad \forall \alpha > 0.$$

Тогда влияние стратификации на высокочастотную магнитную инерционно-гравитационную волну (34) описывается поправкой к частоте в следующем виде:

$$\delta_{MIG_{v_2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_V^2 + gk^2 h_{02} \right) \pm \frac{1}{2} \left(\left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_V^2 + gk^2 h_{02} \right)^2 - \frac{\Phi_1 \left(\rho_2 / \rho_1, \omega_{MIG_{v_2}} \right)}{(\omega_{MIG_{v_2}}^2 - \omega_1^2)(\omega_{MIG_{v_2}}^2 - \omega_2^2)} \right)^{(1/2)}. \quad (37)$$

Здесь Φ_1 — правая часть дисперсионного уравнения (36) при $\omega = \omega_{MIG_{v_2}}$.

Влияние стратификации на высокочастотную волну магнито-Россби (35) описывается поправкой к частоте в следующем виде:

$$\delta_{MR_{v_2}} = - \frac{\Phi_2 \left(\rho_2 / \rho_1, \omega_{MR_{v_2}} \right)}{(\omega_{MR_{v_2}}^2 - \omega_1^2)(\omega_{MR_{v_2}}^2 - \omega_2^2) g h_{02} \beta k_x}. \quad (38)$$

Здесь Φ_2 — правая часть дисперсионного уравнения (36) при $\omega = \omega_{MR_{v_2}}$.

2.2.2. Волны в астрофизической плазме в горизонтальном магнитном поле. Линейным решением системы (24)–(28) в приближении стандартной β -плоскости на фоне стационарного решения с горизонтальным магнитным полем (30) является дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$(\omega^4 - b_1 \omega^2 - c_1 \omega + d_1)(\omega^4 - b_2 \omega^2 - c_2 \omega + d_2) = \frac{\rho_2}{\rho_1} g^2 k^4 h_{01} \Delta h_0 (\omega^2 + a \omega + q_1)(\omega^2 + a \omega + q_2), \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_1^2 + f_V^2 + gk^2 h_{01}, & c_1 &= \beta g k_x h_{01}, \\ d_1 &= (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_1^2 ((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_1^2 + gk^2 h_{01}), \\ b_2 &= (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_2^2 + f_V^2 + gk^2 \Delta h_0, & c_2 &= \beta g k_x \Delta h_0, \\ d_2 &= (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_2^2 ((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_2^2 + gk^2 \Delta h_0), \\ a &= \frac{\beta k_x}{k^2}, & q_1 &= (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_1^2, & q_2 &= (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_2^2. \end{aligned}$$

Правая часть дисперсионного соотношения (39) описывает эффекты стратификации в двуслойной модели, левая часть является произведением двух выражений, первое из которых соответствует нижнему слою, а второе — верхнему.

Строгий теоретический анализ полученного дисперсионного уравнения (39) не представляется возможным, поэтому ограничимся качественным рассмотрением при равных магнитных полях в обоих слоях $(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_1 = (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_2 \equiv (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})$. В первом приближении выделим магнитные инерционно-гравитационные волны и волны магнито-Россби в отсутствие стратификации. В случае малого различия в плотностях слоев плазмы представим решение дисперсионного уравнения (39) в высокочастотном пределе в виде суммы магнитной инерционно-гравитационной волны в отсутствие стратификации и малой поправки, связанной со стратификацией плазмы. В низкочастотном пределе решение дисперсионного уравнения (39) представим в виде суммы волны магнито-Россби в отсутствие стратификации и малой поправки, связанной со стратификацией плазмы.

В отсутствие стратификации ($\rho_2 = \rho_1$) уравнение (39) принимает вид

$$\begin{aligned} &(\omega^4 - \omega^2(f_V^2 + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2) + \\ &+ (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^4)(\omega^4 - \omega^2(f_V^2 + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + g h_{02} k^2) - \\ &- \omega g h_{02} \beta k_x + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + g h_{02} k^2)) = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Би-квадратное уравнение в первой скобке дает следующие значения для частоты:

$$\omega_{3,4}^2 = \frac{f_V^2}{2} + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \pm f_V \sqrt{\frac{f_V^2}{4} + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2}.$$

Предполагая, что $\omega \neq \omega_{3,4}$, уравнение (41) сводится к

$$\begin{aligned} &\omega^4 - \omega^2(f_V^2 + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + g h_{02} k^2) - \\ &- \omega g h_{02} \beta k_x + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + g h_{02} k^2) = 0, \end{aligned} \quad (41)$$

которое имеет вид дисперсионного уравнения для одного слоя плазмы высоты h_{02} в приближении мелкой воды на бета-плоскости (19), что существенно отличается течение плазмы в горизонтальном магнитном поле от течения плазмы при наличии внешнего вертикального поля. В высокочастотном пределе решением уравнения являются магнитные инерционно-гравитационные волны на β -плоскости в горизонтальном магнитном поле, аналогичные волнам в однослойной модели (20). В высокочастотном пределе решением уравнения (33) являются волны магнито-Россби на β -плоскости в горизонтальном магнитном поле, аналогичные волнам в однослойной модели (21).

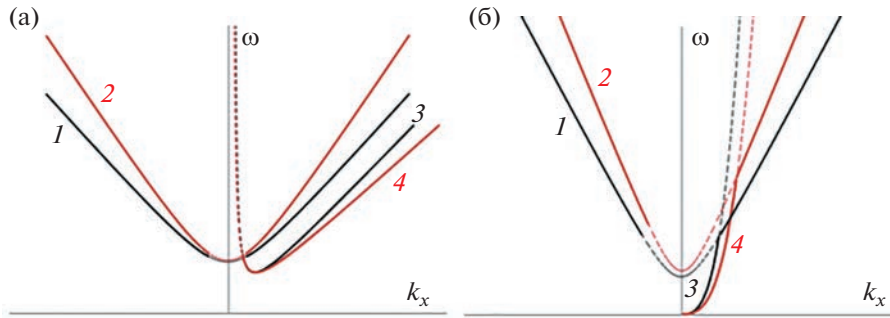


Рис. 2. Дисперсионные кривые для волн в двуслойной мелкой воде на стандартной β -плоскости во внешнем вертикальном магнитном поле (а): магнитная инерционно-гравитационная волна без учета стратификации $1 - \omega_{MIG_{V_2}}$ и с учетом малой поправки $2 - \omega_{MIG_{V_2}} + \delta_{\omega_{MIG_{V_2}}}$, волна магнито-Россби без учета стратификации $3 - \omega_{MR_{V_2}}$ и с учетом малой поправки $4 - \omega_{MR_{V_2}} + \delta_{\omega_{MR_{V_2}}}$; в горизонтальном магнитном поле (б): магнитная инерционно-гравитационная волна без учета стратификации $1 - \omega_{MIG_{h_2}}$ и с учетом малой поправки $2 - \omega_{MIG_{h_2}} + \delta_{\omega_{MIG_{h_2}}}$, волна магнито-Россби без учета стратификации $3 - \omega_{MR_{h_2}}$ и с учетом малой поправки $4 - \omega_{MR_{h_2}} + \delta_{\omega_{MR_{h_2}}}$.

Представим уравнение (39) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & (\omega^4 - \omega^2(f_0^2 + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2) + \\
 & + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^4)(\omega^4 - \omega^2(f_0^2 + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + gh_0k^2) - \\
 & - \omega gh_0\beta k_x + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + gh_0k^2)) = \quad (42) \\
 & = \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) g^2 k^2 h_0 \Delta h_0 \left[k^2 \omega^4 - 2\beta k_x \omega^3 + \right. \\
 & \left. + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 k^2 \omega^2 + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \beta k_x \omega - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^4 \right].
 \end{aligned}$$

Пусть искомые поправки к частотам $\delta_{MIG_{h_2}} = \omega - \omega_{MIG_{h_2}}$, $\delta_{MR_{h_2}} = \omega - \omega_{MR_{h_2}}$ малы по сравнению с самими частотами:

$$\omega_{MIG_{h_2}}^\alpha \delta_{MIG_{h_2}} \gg 1 \quad \forall \alpha > 0,$$

$$\omega_{MR_{h_2}}^\alpha \delta_{MR_{h_2}} \gg 1 \quad \forall \alpha > 0.$$

Тогда влияние стратификации на высокочастотную волну магнито-Пуанкаре (20) описывается поправкой к частоте в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \delta_{MIG_{h_2}} = & \frac{1}{2} (2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + f_0^2 + gh_0k^2) \pm \\
 & \pm \frac{1}{2} \left((2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + f_0^2 + gh_0k^2)^2 - \right. \quad (43) \\
 & \left. - \frac{\Phi_3(\rho_2/\rho_1, \omega_{MIG_{h_2}})}{(\omega_{MIG_{h_2}}^2 - \omega_3^2)(\omega_{MIG_{h_2}}^2 - \omega_4^2)} \right)^{(1/2)}.
 \end{aligned}$$

Здесь Φ_3 — правая часть дисперсионного уравнения (42) при $\omega = \omega_{MIG_{h_2}}$.

Влияние стратификации на высокочастотную волну магнито-Россби (21) описывается поправкой к частоте в следующем виде:

$$\delta_{MR_{h_2}} = - \frac{\Phi_4(\rho_2/\rho_1, \omega_{MR_{h_2}})}{(\omega_{MR_{h_2}}^2 - \omega_3^2)(\omega_{MR_{h_2}}^2 - \omega_4^2) gh_0\beta k_x}. \quad (44)$$

Здесь Φ_4 — правая часть дисперсионного уравнения (42) при $\omega = \omega_{MR_{h_2}}$.

Общий вид дисперсионных кривых для волн во вращающихся течениях плазмы в приближении двуслойной мелкой воды представлен на рис. 2а, б для магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби соответственно во внешнем вертикальном магнитном поле; на рис. 2в, г для магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби соответственно в горизонтальном магнитном поле.

2.2.3. Выводы. Приведен обзор модели мелкой двуслойной воды, применяемой для изучения крупномасштабных волн в астрофизической плазме. Показано существенное отличие уравнений мелкой воды для вращающейся плазмы при наличии двух слоев с различными постоянными плотностями в присутствии внешнего магнитного поля от системы в отсутствие внешнего магнитного поля, заключенное в дополнительном уравнении, требующемся для выполнения условия бездивергентности. Появление этого уравнения включает в систему вертикальную компоненту поля и делает поле трехмерным, в отличие от случая с отсутствием внешнего поля, при котором магнитное поле в уравнениях мелкой воды двумерно. Система уравнений двуслойной мелкой воды во внешнем магнитном поле переходит

в традиционную при отсутствии внешнего поля и равенства плотностей и высот слоев. Развита линейная теория магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби на β -плоскости в магнитогидродинамических течениях вращающейся плазмы в приближении мелкой воды. Изучены дисперсионные уравнения для двух стационарных течений: внешнее вертикальное магнитное поле и горизонтальное магнитное поле. Найдены поправки к дисперсионным соотношениям магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби, связанные с наличием стратификации в системе.

Кроме того изучено влияние стратификации на групповые и фазовые скорости магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби как во внешнем вертикальном, так и в горизонтальном магнитных полях. Анализ выражений для скоростей показал, что наличие стратификации ($\rho_2 \neq \rho_1$) в системе:

- увеличивает фазовую и групповую скорости магнитной инерционно-гравитационной волны вдоль направления k_x в вертикальном магнитном поле при малых k_x ($k_x < 1$) и уменьшает при больших k_x ;
- увеличивает фазовую скорость волны магнито-Россби вдоль направления k_x в вертикальном магнитном поле;
- увеличивает групповую скорость волны магнито-Россби вдоль направления k_x в вертикальном магнитном поле при малых k_x и уменьшает при больших k_x ;
- увеличивает фазовую и групповую скорости магнитной инерционно-гравитационной волны вдоль направления k_x в горизонтальном магнитном поле;
- увеличивает фазовую скорость волны магнито-Россби вдоль направления k_x в горизонтальном магнитном поле;
- увеличивает групповую скорость волны магнито-Россби вдоль направления k_x в горизонтальном магнитном поле при малых k_x и уменьшает при больших k_x .

2.3. Приближение мелкой воды для течений вращающейся плазмы с учетом крупномасштабной сжимаемости

Важным принципиальным свойством течений в плазменной астрофизике является свойство сжимаемости, характеризующее большинство наблюдаемых объектов во Вселенной. В данном разделе опишем линейные волны в двумерных течениях сжимаемой вращающейся плазмы в рамках системы магнитогидродинамических уравне-

ний при наличии вращения в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле с учетом крупномасштабной сжимаемости [77]. Вывод магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды с учетом крупномасштабной сжимаемости основан на методе усреднения по высоте слоя. Вследствие наличия сжимаемости в исходной системе, для задания корректных начальных и граничных условий используется уравнение Клапейрона и свойство адиабатичности рассматриваемых процессов. В результате в этом приближении фильтруются звуковые волны и учитывается зависимость плотности от давления на крупных масштабах, описывающая эффекты статической сжимаемости по сравнению со случаем несжимаемой плазмы [19, 20, 47]. Система магнитогидродинамических уравнений мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле, записанная в системе отсчета, вращающейся вместе со слоем плазмы со скоростью Ω , имеет вид

$$\partial_t l + \partial_x(lu_x) + \partial_y(lu_y) = 0, \quad (45)$$

$$\partial_t(lu_x) + \partial_x[l(u_x^2 - B_x^2)] + a^2 g \partial_x l + \partial_y[l(u_x u_y - B_x B_y)] + B_0 B_x - f l u_y = 0, \quad (46)$$

$$\partial_t(lu_y) + \partial_x[l(u_x u_y - B_x B_y)] + \partial_y[l(u_y^2 - B_y^2)] + a^2 g \partial_y l + B_0 B_y + f l u_x = 0, \quad (47)$$

$$\partial_t(lB_x) + \partial_y[l(u_y B_x - u_x B_y)] - B_0 u_x = 0, \quad (48)$$

$$\partial_t(lB_y) + \partial_x[l(u_x B_y - u_y B_x)] - B_0 u_y = 0. \quad (49)$$

В системе уравнений (45)–(49) аналогом высоты слоя h выступает следующая переменная:

$$l = h \bar{\rho} = \frac{p_h}{g} \left[\left(1 + \frac{h}{H_p} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} - 1 \right], \quad (50)$$

где h – высота слоя, $\bar{\rho}$ – среднее значение плотности, p_h – постоянное давление на верхней границе слоя, γ – показатель адиабаты, H_p – характерная плотностная высота, соответствующая масштабу высоты, на котором вариация плотности по высоте становится существенной, и выражаемая в следующем виде:

$$H_p = \frac{c_p T_h}{g}, \quad (51)$$

где $c_p = R\gamma/(\gamma-1) = \text{const}$ – теплоемкость при постоянном давлении, T_h – постоянная температура на границе, R – универсальная газовая постоянная. В уравнениях (45)–(49) $u_{xi,yi}$ – усредненные по высоте слоев горизонтальные скорости, $B_{xi,yi}$ – усредненные по высоте слоев горизонтальные магнитные поля, $B_0 = \rho_0 B'_0$ – внешнее

вертикальное магнитное поле, умноженное на плотность на нижней границе, а переменная a^2 выражается формулой

$$a^2 = \frac{l}{\rho_h} \left(l \frac{g}{p_h} + 1 \right)^{-1/\gamma},$$

$$\frac{\partial l B_x}{\partial x} + \frac{\partial l B_y}{\partial y} + B_z = 0. \quad (52)$$

Система (45)–(49) нетривиальным образом зависит от отношения характерного вертикального масштаба течения и масштаба высот, на котором вариация плотности становится существенной. В отличие от магнитогидродинамических уравнений мелкой воды для несжимаемой плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле (1)–(5), высота свободной поверхности не является определяющей характеристикой для описания течений, так как закон сохранения массы записывается через новую переменную, которая зависит от плотности плазмы и высоты столба.

Система уравнений (45)–(49) записана для слоя плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле, что приводит к существенным изменениям в структуре уравнений. Магнитное поле становится принципиально трехкомпонентным, причем вертикальная компонента магнитного поля зависит только от горизонтальных координат и времени, и ее изменение описывается уравнением

$$\partial_t B_z + B_0 \nabla \cdot u = 0. \quad (53)$$

Уравнение для вертикальной составляющей магнитного поля отделяется от полной системы и необходимо для задания корректных начальных условий, обеспечивающих выполнение условия бездивергентности магнитного поля, по аналогии с несжимаемой плазмой во внешнем вертикальном магнитном поле в приближении мелкой воды (6).

В отсутствие внешнего вертикального магнитного поля система (45)–(49) переходит в уравнения сжимаемой магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды, полученные в [47]. Величина H_p (51) характеризует масштаб высоты, на котором становятся существенными изменения плотности. Если характерная высота h слоя много меньше характерной высоты H_p , то $\varepsilon =$

$= h/H_p \rightarrow 0$, и данное течение можно считать несжимаемым. При этом система уравнений мелкой воды для сжимаемой плазмы (45)–(49) переходит в классические магнитогидродинамические уравнения вращающейся мелкой воды для несжимаемой плазмы.

Система уравнений (45)–(49) существенно отличается от классических магнитогидродинамических уравнений для несжимаемых течений. В классических магнитогидродинамических уравнениях мелкой воды высота, скорость и магнитное поле столба жидкости полностью определяют его взаимодействие с остальным объемом жидкости. В уравнениях (45)–(49) это взаимодействие определяется не только высотой, скоростью и магнитным полем, но и средней плотностью столба жидкости, поэтому учет горизонтального импульса в уравнениях происходит более точно. Как следствие появляется новая переменная, определяющая закон сохранения массы и однозначно связанная с высотой свободной поверхности. Таким образом, при наличии эффектов крупномасштабной сжимаемости, закон сохранения массы формулируется для переменной, нетривиально зависящей от характерного вертикального масштаба течения и масштаба высот, на котором вариация плотности становится существенной. Кроме того, учет крупномасштабной сжимаемости существенно модернизирует уравнения изменения импульса.

Система (45)–(49) имеет два взаимоисключающих стационарных решения: решение с внешним вертикальным магнитным полем

$$l_0 = \text{const}, \quad u_{x_0} = u_{y_0} = B_{x_0} = B_{y_0} = 0, \quad (54)$$

$$B_0 = \text{const},$$

и решение с горизонтальным магнитным полем

$$l_0 = \text{const}, \quad u_{x_0} = u_{y_0} = B_0 = 0, \quad (55)$$

$$\mathbf{B}_0 = (B_{x_0}, B_{y_0}) = \text{const}.$$

2.3.1. Волны в астрофизической плазме во внешнем вертикальном магнитном поле. Линейным решением системы (45)–(49) в приближении стандартной f -плоскости на фоне стационарного решения с внешним вертикальным магнитным полем (54) являются магнитные инерционно-гравитационные волны с дисперсионным соотношением

$$\tilde{\omega}_{MIG_V} = \pm \sqrt{\frac{a_0^2 g k^2}{2} + \frac{f_V^2}{2} + \frac{B_0^2}{l_0^2} + \frac{1}{2} \sqrt{(f_V^2 + a_0^2 g k^2)^2 + 4 f_V^2 \frac{B_0^2}{l_0^2}}} \quad (56)$$

и магнитофизические волны с дисперсионным соотношением

$$\tilde{\omega}_{MS_V} = \pm \sqrt{\frac{a_0^2 g k^2}{2} + \frac{f_V^2}{2} + \frac{B_0^2}{l_0^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{(f_V^2 + a_0^2 g k^2)^2 + 4 f_V^2 \frac{B_0^2}{l_0^2}}. \quad (57)$$

В случае отсутствия магнитного поля в системе уравнение (56) сводится к уравнению

$$\tilde{\omega}_P = \pm \sqrt{a_0^2 g k^2 + f_V^2}, \quad (58)$$

которое описывает инерционно-гравитационные волны в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости. Магнитофизические волны не имеют аналога в динамике нейтральной жидкости.

Линейным решением системы (45)–(49) в приближении стандартной β -плоскости на фоне стационарного решения с внешним вертикальным магнитным полем (54) является дисперсионное соотношение в следующем виде:

$$\omega^4 - \omega^2 \left(2 \frac{B_0^2}{l_0^2} + f_0^2 + k^2 a_0^2 g \right) - \omega k_x a_0^2 g \beta + \frac{B_0^2}{l_0^2} \left(k^2 a_0^2 g + \frac{B_0^2}{l_0^2} \right) = 0. \quad (59)$$

В высокочастотном пределе решением уравнения являются магнитные инерционно-гравитационные волны с дисперсионным соотношением:

$$\tilde{\omega}_{MIG_V} = \pm \sqrt{2 \frac{B_0^2}{l_0^2} + f_0^2 + k^2 a_0^2 g}, \quad (60)$$

а в низкочастотном пределе — волны магнито-Россби с дисперсионным соотношением

$$\tilde{\omega}_{MR_V} = \frac{B_0^2}{l_0^2} \left(k^2 a_0^2 g + \frac{B_0^2}{l_0^2} \right) (a_0^2 g k_x \beta)^{-1}. \quad (61)$$

Рассмотрим подробнее выражения (56), (57), (60), (61). Заметим, что при условии малости высоты слоя по сравнению с характерной высотой H_p , на которой проявляется сжимаемость, переменная l_0 переходит в высоту слоя h_0 и дисперсионные соотношения переходят в аналогичные соотношения для несжимаемой плазмы (10), (11), (15), (16). Сравнивая дисперсионные соотношения для магнитных инерционно-гравитационных (56), магнитофизических волн (57) и волн магнито-Россби (61) в сжимаемой среде с несжимаемым случаем (10), (11), заметим, что дисперсионные соотношения совпадают за тем исключением, что слагаемое с внешним магнитным полем $(B_0/h_0)^2$ переходит в $(B_0/l_0)^2$, а также выражение для квадрата скорости слабых возмущений gh изменяется на $a_0^2 g$. Данные отличия в общем случае приводят к изменению групповой скорости магнитных инерционно-гравитационных и магнитофизических волн. Сжимаемость приводит к изменению кривизны дисперсионных поверхностей, при этом их общая форма остается аналогичной случаю несжимаемой плазмы [48].

2.3.2. Волны в астрофизической плазме в горизонтальном магнитном поле. В отсутствие внешнего вертикального магнитного поля линейными решениями системы (45)–(49) в приближении стандартной f -плоскости на фоне стационара (55) являются магнитные инерционно-гравитационные волны

$$\tilde{\omega}_{MIG_h} = \pm \sqrt{\frac{a_0^2 g k^2}{2} + \frac{f_V^2}{2} + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2} + \frac{1}{2} \sqrt{(f_V^2 + a_0^2 g k^2)^2 + 4 f_V^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2} \quad (62)$$

и магнитофизические волны

$$\tilde{\omega}_{MS_h} = \pm \sqrt{\frac{a_0^2 g k^2}{2} + \frac{f_V^2}{2} + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2} - \frac{1}{2} \sqrt{(f_V^2 + a_0^2 g k^2)^2 + 4 f_V^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2}. \quad (63)$$

В случае отсутствия магнитного поля в системе уравнение (62) сводится к уравнению (58), которое описывает инерционно-гравитационные волны в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимае-

мости. Магнитофизические волны не имеют аналога в динамике нейтральной жидкости.

Линейным решением системы (45)–(49) в приближении стандартной β -плоскости на фоне

стационарного решения с горизонтальным магнитным полем (54) является дисперсионное соотношение в следующем виде:

$$\omega^4 - \omega^2 (2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + f_0^2 + k^2 a_0^2 g) - \omega k_x a_0^2 g \beta + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 (k^2 a_0^2 g + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2) = 0. \quad (64)$$

В высокочастотном пределе решением уравнения являются магнитные инерционно-гравитационные волны с дисперсионным соотношением

$$\tilde{\omega}_{MIG_v} = \pm \sqrt{2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + f_0^2 + k^2 a_0^2 g}, \quad (65)$$

а в низкочастотном пределе — волны магнито-Россби с дисперсионным соотношением

$$\tilde{\omega}_{MR_v} = \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 (k^2 a_0^2 g + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2)}{a_0^2 g k_x \beta}. \quad (66)$$

Рассмотрим подробнее выражения (62), (63), (65), (66). Заметим, что при условии малости высоты слоя по сравнению с характерной высотой H_p , на которой проявляется сжимаемость, переменная l_0 переходит в высоту слоя h_0 и дисперсионные соотношения переходят в аналогичные соотношения для несжимаемой плазмы (17), (18), (20), (21). Сравнивая дисперсионные соотношения для магнитных инерционно-гравитационных (62), магнитострофических волн (63) и волн магнито-Россби (66) в сжимаемой среде с несжимаемым случаем (17), (18), заметим, что дисперсионные соотношения совпадают за тем исключением, что слагаемое с внешним магнитным полем $(B_0/h_0)^2$ переходит в $(B_0/l_0)^2$, а также выражение для квадрата скорости слабых возмущений gh изменяется на $a_0^2 g$. Данные отличия в общем случае приводят к изменению групповой скорости магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн. Сжимаемость приводит к изменению кривизны дисперсионных поверхностей, при этом их общая форма остается аналогичной случаю несжимаемой плазмы [48].

Общий вид дисперсионных кривых для волн во вращающихся течениях плазмы в приближении мелкой воды с учетом крупномасштабной сжимаемости представлен на рис. 3а, б для магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном магнитном поле; на рис. 3в, г для магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби во внешнем вертикальном и в горизонтальном магнитных полях.

2.3.3. Выводы. В разделе исследованы эффекты сжимаемости в магнитной гидродинамике вращающейся астрофизической плазмы в приближении мелкой воды. В отличие от известных магнитогидродинамических уравнений в при-

ближении мелкой воды с учетом сжимаемости мы предлагаем обобщение такой системы на случай тонкого слоя астрофизической плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле. Отметим, что учет вертикального магнитного поля существенно расширяет возможности применения приближения мелкой воды в задачах плазменной астрофизики. Упрощенная система магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды, используемая в настоящей работе, получается из исходных уравнений магнитной гидродинамики сжимаемой плазмы, получена усреднением по глубине в предположении гидростатичности распределения давлений и малости толщины слоя по отношению к характерному горизонтальному линейному размеру задачи. В результате в этом приближении фильтруются звуковые волны и учитывается зависимость плотности от давления на крупных масштабах, описывающая эффекты статической сжимаемости. На основе предложенной системы уравнений получены новые магнитогидродинамические уравнения мелкой воды для сферических течений в приближении β -плоскости с учетом крупномасштабной сжимаемости. Развита теория линейных волн на основе предложенных уравнений. В случае уравнений на f -плоскости полученные дисперсионные соотношения для магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн существенным образом зависят как от высоты свободной поверхности, так и от величины, характеризующей степень изменения плотности вследствие статической сжимаемости, а также от термодинамических характеристик плазмы. Аналогично в случае уравнений на β -плоскости дисперсионные соотношения для магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном магнитном поле зависят как от высоты свободной поверхности, так и от величины, характеризующей степень изменения плотности вследствие статической сжимаемости, а также от термодинамических характеристик плазмы. Кроме того, показано, что скорость распространения слабых возмущений в обеих системах также зависит от степени изменения плотности. Таким образом, исследование линейных волн в магнитной гидродинамике вращающейся плазмы с учетом крупномасштабной сжимаемости показывает зависимость групповых скоростей магнитных инерционно-гравитационных волн, магнитострофических волн и волн магнито-Россби от степени сжимаемости плазмы.

3. ЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ

В разделе 2.2 приведен учет стратификации при исследовании волновых процессов во вращающейся плазме в рамках магнитогидродинами-

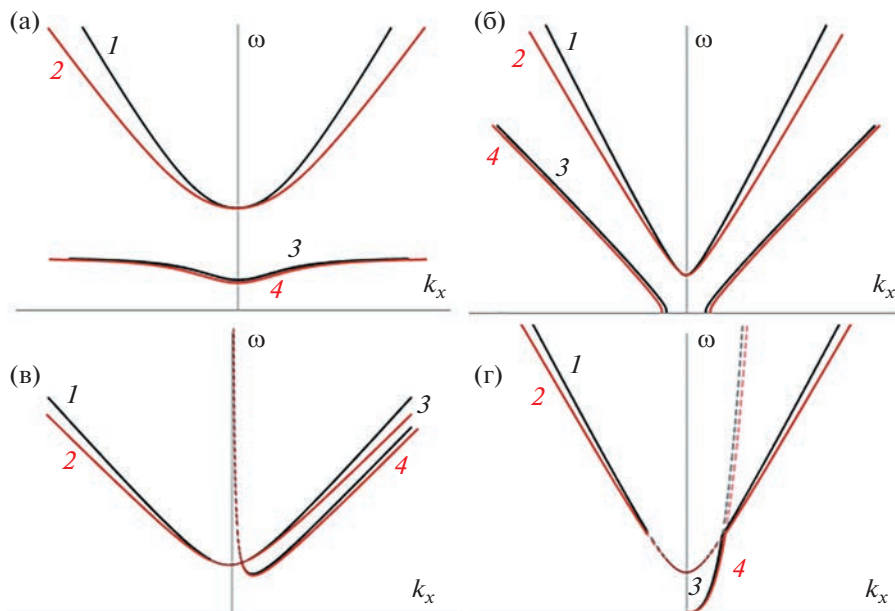


Рис. 3. Дисперсионные кривые для волн в однослойной мелкой воде на стандартной f -плоскости во внешнем вертикальном магнитном поле (а): магнитная инерционно-гравитационная волна без учета сжимаемости $1 - \omega_{MIG_{V_1}}$ и с учетом крупномасштабной сжимаемости $2 - \tilde{\omega}_{MIG_V}$, магнитоострофическая волна без учета сжимаемости $3 - \omega_{MS_{V_1}}$ и с учетом крупномасштабной сжимаемости $4 - \tilde{\omega}_{MS_V}$; на стандартной f -плоскости в горизонтальном магнитном поле (б): магнитная инерционно-гравитационная волна без учета сжимаемости $1 - \omega_{MIG_{h_1}}$ и с учетом крупномасштабной сжимаемости $2 - \tilde{\omega}_{MIG_h}$, магнитоострофическая волна без учета сжимаемости $3 - \omega_{MS_{h_1}}$ и с учетом крупномасштабной сжимаемости $4 - \tilde{\omega}_{MS_h}$; на стандартной β -плоскости во внешнем вертикальном магнитном поле (в): магнитная инерционно-гравитационная волна без учета сжимаемости $1 - \omega_{MIG'_{V_1}}$ и с учетом крупномасштабной сжимаемости $2 - \tilde{\omega}_{MIG'_V}$, волна магнито-Росси без учета сжимаемости $3 - \omega_{MR_{V_1}}$ и с учетом крупномасштабной сжимаемости $4 - \tilde{\omega}_{MR_V}$; на стандартной β -плоскости в горизонтальном магнитном поле (г): магнитная инерционно-гравитационная волна без учета сжимаемости $1 - \omega_{MIG'_{h_1}}$ и с учетом крупномасштабной сжимаемости $2 - \tilde{\omega}_{MIG'_h}$, волна магнито-Росси без учета сжимаемости $3 - \omega_{MR_{h_1}}$ и с учетом крупномасштабной сжимаемости $4 - \tilde{\omega}_{MR_h}$.

ческих уравнений мелкой воды во внешнем магнитном поле. В разделе 2.3 приведен учет крупномасштабной сжимаемости при исследовании волновых процессов во вращающейся плазме в рамках магнитогиродинамических уравнений мелкой воды во внешнем магнитном поле. Однако магнитогиродинамическая теория мелкой воды является двумерной, что исключает вертикальные ускорения и учет вертикального изменения горизонтальных составляющих магнитного поля и поля скорости. Кроме того, в двумерных уравнениях невозможно исследование таких важных для астрофизической плазмы течений, как течения с непрерывной стратификацией. Таким образом, для расширения области исследования волновых процессов вращающейся плазмы мы переходим к приближениям для трехмерных течений. В разделе 3.1 рассматриваются трехмер-

ные течения в рамках магнитогиродинамических уравнений несжимаемой стратифицированной вращающейся плазмы в приближении Буссинеска. В разделе 3.2 рассматриваются трехмерные течения в рамках магнитогиродинамических уравнений сжимаемой стратифицированной плазмы в неупругом приближении. Отметим, что трехмерность рассматриваемых систем уравнений позволяет произвести учет горизонтальной составляющей вектора Кориолиса, что особенно важно при исследовании экваториальных течений. Таким образом сила Кориолиса рассматривается не только в приближении стандартных f - и β -плоскостей, но и в приближении нестандартных f - и β -плоскостей, в которых вектор Кориолиса содержит как вертикальную компоненту вдоль z , так и горизонтальную компоненту вдоль y .

3.1. Приближение Буссинеска для течений вращающейся стратифицированной плазмы

Приведен обзор трехмерных магнитогидродинамических течений вращающейся устойчиво-стратифицированной плазмы. Трехмерность течений позволяет рассматривать волновые процессы в устойчиво-стратифицированном слое плазмы с непрерывным линейным профилем плотности. Как хорошо известно в геофизической гидродинамике стратифицированных вращающихся течений возникают инерционно-гравитационные волны вследствие двух восстанавливающих механизмов — вращения и стратификации. В рассматриваемом здесь случае магнитных течений волновая картина гораздо богаче вследствие наличия дополнительной восстанавливающей силы, а именно силы Лоренца, наряду с силой Кориолиса и силой плавучести. Кроме того учет трехмерности позволяет детально исследовать волновые процессы в магнитогидродинамике стратифицированной плазмы с учетом горизонтальной составляющей силы Кориолиса, что является особенно принципиальным при изучении экваториальных течений. Отметим, что волны Россби обнаружены именно в экваториальной зоне Солнца [32, 38]. Для исследования волн в трехмерных магнитогидродинамических течениях вращающейся стратифицированной плазмы используется трехмерная магнитогидродинамическая система в приближении Буссинеска. Уравнения записаны в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вместе со слоем плазмы со скоростью Ω :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{f} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\tilde{\rho}_0} \nabla p + \frac{\rho \mathbf{g}}{\tilde{\rho}_0} - \frac{1}{4\pi\tilde{\rho}_0} \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{b}), \quad (67)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (68)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)_h \rho = -\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} u_z, \quad (69)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0, \quad (70)$$

где $\mathbf{u}$ — вектор скорости плазмы, $\mathbf{b}$ — вектор напряженности магнитного поля в плазме, $\mathbf{f}$ — вектор Кориолиса, ρ — плотность плазмы, $\tilde{\rho}_0$ — плотность при равновесной температуре, $\bar{\rho}(z)$ — начальный профиль плотности, обеспечивающий устойчивую стратификацию, p — давление, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$. Первое уравнение системы — уравнение изменения импульса, второе — уравнение переноса магнитного поля, третье — уравнение изменения плотности, четвертое — условие бездивергентности поля скоростей. Введем следующие

переобозначения: $\rho' = \rho g / \tilde{\rho}_0$, $P = p / \tilde{\rho}_0$, $\mathbf{B} = \mathbf{b} / \sqrt{4\pi\tilde{\rho}_0}$.

Система (67)–(70) изучается в четырех различных приближениях для силы Кориолиса:

- *приближение стандартной f -плоскости*, в котором вектор Кориолиса $\mathbf{f}$ предполагается постоянным и направленным строго по вертикали $\mathbf{f} = (0, 0, f_V)$;

- *приближение нестандартной f -плоскости* [55, 79], в котором вектор Кориолиса $\mathbf{f}$ предполагается постоянным и отклоненным от вертикали в плоскость (y, z) , $\mathbf{f} = (0, f_H, f_V)$;

- *приближение стандартной β -плоскости*, в котором предполагается, что вектор Кориолиса $\mathbf{f} = (0, 0, f_z)$ направлен по вертикали и слабо меняется при малых изменениях широты θ . В таком случае вертикальная компонента вектора раскладывается в ряд $f_z \approx f_V + \beta y$, где $f_V = 2\Omega \sin \theta_0$, $\beta = \partial f_z / \partial y$, $\beta y \ll f_V$;

- *приближение нестандартной β -плоскости* [55, 79], в котором предполагается, что вектор Кориолиса $\mathbf{f} = (0, f_y, f_z)$ расположен в плоскости (y, z) и слабо меняется при малых изменениях широты θ . В таком случае вертикальная и горизонтальная компоненты вектора раскладываются в ряд $f_z \approx f_V + \beta y$, $f_y \approx f_H + \gamma y$, где $f_V = 2\Omega \sin \theta_0$, $\beta = \partial f_z / \partial y$, $\beta y \ll f_V$, $f_H = 2\Omega \cos \theta_0$, $\gamma = \partial f_y / \partial y$, $\gamma y \ll f_H$.

Система (67)–(70) имеет стационарное решение в виде покоящегося слоя плазмы с постоянным магнитным полем и линейным профилем плотности

$$u_{x0} = u_{y0} = u_{z0} = 0, \quad \mathbf{B}_0 = (B_{x0}, B_{y0}, B_{z0}) = \text{const}, \quad (71)$$

$$P_0 : \partial_z P_0 = -\bar{\rho}(z), \quad \bar{\rho}(z) = N^2 z \frac{\tilde{\rho}_0}{g},$$

где N^2 — квадрат частоты Брента–Вайсяля для несжимаемых течений.

3.1.1. Волны в астрофизической плазме без учета сферичности. В приближении стандартной f -плоскости решением системы (67)–(70), линеаризованной на фоне стационара (71), является дисперсионное соотношение в следующем виде:

$$\omega^4 - \omega^2 \left(f_V^2 \frac{k_z^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right) + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} \right) = 0, \quad (72)$$

которое описывает волны во вращающейся стратифицированной плазме в приближении Буссинеска. Его решением являются трехмерные магнитные инерционно-гравитационные волны с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mig_{3D}} = \pm \left[\frac{1}{2} \left(f_V^2 \frac{k_z^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right) + \frac{1}{2k^2} \sqrt{f_V^4 k_z^4 + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 f_V^2 k_z^2 k^2 - 2f_V^2 k_z^2 N^2 k_h^2 + N^4 k_h^4} \right]^{1/2} \quad (73)$$

и трехмерные магнитострофические волны с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mstr_{3D}} = \pm \left[\frac{1}{2} \left(f_V^2 \frac{k_z^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right) - \frac{1}{2k^2} \sqrt{f_V^4 k_z^4 + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 f_V^2 k_z^2 k^2 - 2f_V^2 k_z^2 N^2 k_h^2 + N^4 k_h^4} \right]^{1/2}. \quad (74)$$

В выражениях (73), (74) знак “+” соответствует волне, распространяющейся по направлению волнового вектора $\mathbf{k}$, а знак “−” — волне, распространяющейся в направлении, противоположном $\mathbf{k}$. Восстанавливающими силами найденных волн являются сила Кориолиса, сила Лоренца и сила плавучести. Эффекты стратификации в дисперсионных соотношениях (73), (74) представлены слагаемыми с частотой Брэнта–Вайсяля N^2 . Отметим, что трехмерные магнитострофические волны (74) не имеют аналога в динамике нейтральной жидкости, тогда как дисперсионное соотношение (73) в отсутствие магнитного поля описывает гидродинамические инерционно-гравитационные волны. Для инерционно-гравитационных волн в отсутствие магнитного поля выполняется условие перпендикулярности групповой скорости волновому вектору [119]. Исследование дисперсионного соотношения выявило, что присутствие магнитного поля (73) это условие нарушает, $\mathbf{v}_{gr_{mig_{3D}}} \cdot \mathbf{k} \neq 0$.

В частном случае горизонтальных возмущений ($\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0)$) дисперсионное уравнение (72) принимает вид

$$\omega^4 - \omega^2 (2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N^2) + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 ((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N^2) = 0 \quad (75)$$

и имеет решение в виде волн Альфвена, динамика которых определяется силой Лоренца

$$\omega_A = \pm (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h, \quad (76)$$

и магнитогравитационных волн, динамика которых определяется силой плавучести и силой Лоренца

$$\omega_{mgr} = \pm \sqrt{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N^2}. \quad (77)$$

Знак “+” соответствует волнам, распространяющимся в направлении $\mathbf{k}_h$, а знак “−” — волнам, распространяющимся в направлении, противоположном $\mathbf{k}_h$. Волны Альфвена (76) представляют частный тип магнитных инерционно-гравитаци-

онных волн, распространяющихся в горизонтальной плоскости. Магнитогравитационные волны (77) представляют частный тип магнитострофических волн, распространяющихся по горизонтальной плоскости. В отсутствие магнитного поля ($\mathbf{B}_0 = 0$) их дисперсионное соотношение описывает гравитационные волны с частотой Брэнта–Вайсяля $\omega_{gr} = \pm \sqrt{-N^2}$.

В частном случае вертикальных возмущений в системе ($\mathbf{k} = (0, 0, k_z)$) дисперсионное уравнение (72) принимает вид

$$\omega^4 - \omega^2 (f_V^2 - 2B_{0z}^2 k_z^2) + B_{0z}^4 k_z^4 = 0 \quad (78)$$

и имеет решение в виде двух магнитных инерционных волн, динамика которых определяется силой Лоренца и силой Кориолиса:

$$\omega_{z1} = \pm \sqrt{\frac{f_V^2}{2} + B_{0z}^2 k_z^2} + f_V \sqrt{\frac{f_V^2}{4} + B_{0z}^2 k_z^2}, \quad (79)$$

$$\omega_{z2} = \pm \sqrt{\frac{f_V^2}{2} + B_{0z}^2 k_z^2} - f_V \sqrt{\frac{f_V^2}{4} + B_{0z}^2 k_z^2}. \quad (80)$$

Знак “+” соответствует волнам, распространяющимся в направлении k_z , а знак “−” — волнам, распространяющимся в направлении, противоположном k_z . Данный тип волн является резонансными волнами в модели мелкой воды в горизонтальном магнитном поле (17), (18). Волны с частотой ω_{z1} (79) представляют частный тип магнитных инерционно-гравитационных волн, распространяющихся только вдоль вертикальной компоненты волнового вектора. В отсутствие магнитного поля ($\mathbf{B}_0 = 0$) их дисперсионное соотношение (79) принимает вид $\omega = \pm f_0$. Волны с частотой ω_{z2} (80) представляют частный тип магнитострофических волн, распространяющихся только вдоль вертикальной компоненты волнового вектора. В отсутствие магнитного поля ($\mathbf{B}_0 = 0$) их дисперсионное соотношение обращается в нуль.

В приближении нестандартной f -плоскости решением системы (67)–(70), линеаризованной на фоне стационара (71), является дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{(f_H k_y + f_V k_z)^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right) + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} \right) = 0. \quad (81)$$

Решениями уравнения (81) являются дисперсионные соотношения, аналогичные полученным в приближении f -плоскости (73), (74), описывающие два типа волн: трехмерные инерционно-гравитационные волны и трехмерные магнитострофические волны. Дисперсионное соотношение для трехмерных магнитных инерционно-гравитационных волн в приближении Буссинеска на нестандартной f -плоскости имеет следующий вид:

$$\omega_{mig_{3D}} = \pm \left[\frac{1}{2} \left(\frac{(f_H k_y + f_V k_z)^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right) + \frac{1}{2k^2} \sqrt{(f_H k_y + f_V k_z)^4 + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 (f_H k_y + f_V k_z)^2 k^2 - 2(f_H k_y + f_V k_z)^2 N^2 k_h^2 + N^4 k_h^4} \right]^{1/2}. \quad (82)$$

Дисперсионное соотношение для трехмерных магнитострофических волн на нестандартной f -плоскости имеет следующий вид:

$$\omega_{mstr_{3D}} = \pm \left[\frac{1}{2} \left(\frac{(f_H k_y + f_V k_z)^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right) - \frac{1}{2k^2} \sqrt{(f_H k_y + f_V k_z)^4 + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 (f_H k_y + f_V k_z)^2 k^2 - 2(f_H k_y + f_V k_z)^2 N^2 k_h^2 + N^4 k_h^4} \right]^{1/2}. \quad (83)$$

В частном случае вертикальных возмущений в системе $(\mathbf{k} = (0, 0, k_z))$ дисперсионное уравнение (81) принимает вид аналогичный дисперсионному уравнению на f -плоскости (78) и имеет решение в виде двух магнитных инерционных волн, динамика которых определяется силой Лоренца и силой Кориолиса (79), (80).

В частном случае горизонтальных возмущений в системе $(\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0))$ дисперсионное уравне-

ние (81) принимает вид

$$\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{f_H^2 k_y^2}{k_h^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N^2 \right) + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 \left((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N^2 \right) = 0 \quad (84)$$

и имеет решение в виде двумерных магнитных инерционно-гравитационных волн с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mig_{2D}} = \pm \sqrt{\frac{f_H^2 k_y^2}{2k_h^2} - \frac{N^2}{2} + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 + \sqrt{\frac{f_H^2 k_y^2}{4k_h^2} \left(\frac{f_H^2 k_y^2}{k_h^2} - 2N^2 + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 \right) + \frac{N^4}{4}}}, \quad (85)$$

и двумерных магнитострофических волн с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mstr_{2D}} = \pm \sqrt{\frac{f_H^2 k_y^2}{2k_h^2} - \frac{N^2}{2} + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - \sqrt{\frac{f_H^2 k_y^2}{4k_h^2} \left(\frac{f_H^2 k_y^2}{k_h^2} - 2N^2 + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 \right) + \frac{N^4}{4}}}. \quad (86)$$

Знак “+” соответствует волнам, распространяющимся в направлении $\mathbf{k}_h$, а знак “–” — волнам, распространяющимся в направлении, противоположном $\mathbf{k}_h$. Динамика волн определяется силами Лоренца, Кориолиса и плавучести. В отличие от стандартной f -плоскости, в силу наличия горизонтальной составляющей вектора Кориолиса

f_H в частном случае горизонтальных течений динамика волн остается прежней. Трехмерные магнитные инерционно-гравитационные волны (73) и трехмерные магнитострофические волны (74) переходят в свои двумерные аналоги. В отсутствие магнитного поля дисперсионное соотношение (85) переходит в $\omega = \pm \sqrt{f_H^2 k_y^2 / k_h^2 - N^2}$,

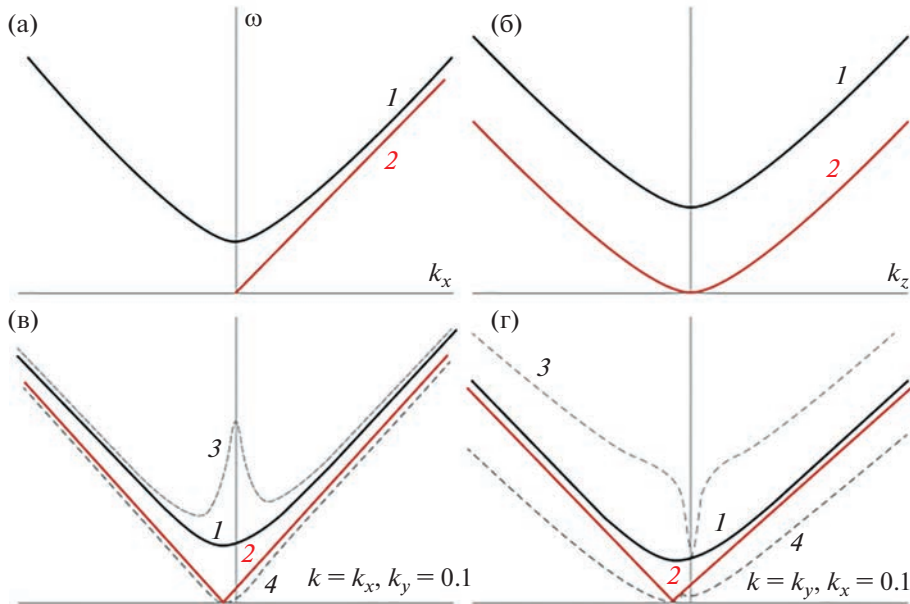


Рис. 4. Дисперсионные кривые волн на стандартной f -плоскости в приближении Буссинеска: 1 – магнитогравитационная волна $\omega_{mgr}(k_x)$, 2 – волна Альфвена $\omega_A(k_x)$ (а); 1 – магнитная инерционная волна $\omega_{i1}(k_z)$, 2 – магнитная инерционная волна $\omega_{i2}(k_z)$ (б). Дисперсионные кривые двумерных магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн на нестандартной стандартной f -плоскости в приближении Буссинеска: 1 – магнитная инерционно-гравитационная волна $\omega_{mig_{2D}}(k_x, 0.1)$, 2 – магнитострофическая волна $\omega_{mstr_{2D}}(k_x, 0.1)$, 3 – магнитная инерционно-гравитационная волна $\omega_{mig_{2D}}(k_x, 0.1)$ при $f_H \gg 1$, 4 – магнитострофическая волна $\omega_{mstr_{2D}}(k_x, 0.1)$ при $f_H \gg 1$ (в); 1 – магнитная инерционно-гравитационная волна $\omega_{mig_{2D}}(0.1, k_y)$, 2 – магнитострофическая волна $\omega_{mstr_{2D}}(0.1, k_y)$, 3 – магнитная инерционно-гравитационная волна $\omega_{mig_{2D}}(0.1, k_y)$ при $f_H \gg 1$, 4 – магнитострофическая волна $\omega_{mstr_{2D}}(0.1, k_y)$ при $f_H \gg 1$ (г).

описывающее двумерные инерционно-гравитационные волны [119]. Двумерные магнитострофические волны не имеют аналога в динамике нейтральной жидкости. Отметим, что порядок величины горизонтальной составляющей силы Кориолиса f_H влияет на динамику волн. Найденные отличия в дисперсионных кривых, связанные с горизонтальной компонентой f_H в нестандартном приближении f -плоскости, существенно влияют на трехволновые взаимодействия.

Общий вид дисперсионных кривых для волн на стандартной f -плоскости при $\omega > 0$, $k = k_x$ представлен на рис. 4а, при $\omega > 0$, $k = k_z$ – на рис. 4б. Общий вид дисперсионных кривых для волн на нестандартной f -плоскости при $\omega(k_x) > 0$, $k_y = \text{const}$ представлен на рис. 4в, при $\omega(k_y) > 0$, $k_x = \text{const}$ – на рис. 4г.

3.1.2 Волны в астрофизической плазме с учетом сферичности. В приближении стандартной β -плоскости решением системы (67)–(70), линеаризо-

ванной на фоне стационара (71), является дисперсионное соотношение в следующем виде:

$$k^2 \omega^4 + \beta k_x \omega^3 - \omega^2 [f_0^2 k_z^2 - N^2 k_h^2 + 2k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2] - \beta k_x \omega [(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2] + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 [k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 k_h^2] = 0. \quad (87)$$

Рассмотрим распространение волн в плоскости (k_x, k_y) при условии $k_z \ll k$. Дисперсионное соотношение в данном приближении имеет вид

$$(\omega^2 - N^2 + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2) \left(\omega^2 + \omega \frac{\beta k_x}{k_h^2} - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 \right) = 0 \quad (88)$$

и описывает три типа волн. Первый тип волн – магнитогравитационные волны, аналогичные волнам на f -плоскости (77).

Второй тип волн – волны магнито-Россби с дисперсионным соотношением [117]

$$\omega_{MR_1} = -\frac{\beta k_x}{2k_h^2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta^2 k_x^2}{k_h^4} + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2}, \quad (89)$$

которое, в случае отсутствия магнитного поля, переходит в дисперсионное соотношение для стандартной гидродинамической волны Россби [54]

$$\omega_R = -\frac{\beta k_x}{k_h^2}. \quad (90)$$

Третий тип волн — волны магнито-Россби с дисперсионным соотношением

$$\omega_{MR_2} = -\frac{\beta k_x}{2k_h^2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta^2 k_x^2}{k_h^4} + 4(b_0 \cdot k)^2}, \quad (91)$$

которое обращается в ноль в отсутствии магнитного поля в системе.

Динамика волн магнито-Россби определяется силой Кориолиса и силой Лоренца. Оба типа волн магнито-Россби (89), (91) при распространении строго по k_y вырождаются в альфвеновские волны с дисперсионным соотношением

$$\omega_{A_y} = \pm B_{0y} k_y, \quad (92)$$

аналогичные волнам Альфвена на f -плоскости при $k = k_y$ (76).

Отметим, что в низкочастотном пределе уравнение (87) имеет решение в виде волны магнито-Россби, динамику которой определяют не только сила Кориолиса и Лоренца, но и сила плавучести:

$$\omega_{MR_{3D}} = \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 (k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 k_h^2)}{\beta k_x ((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2)}. \quad (93)$$

Дисперсионное соотношение (93) переходит в дисперсионное соотношение для волны магнито-Россби в двумерных магнитогидродинамических течениях вращающейся плазмы на β -плоскости [54] при $k_z \ll k$:

$$\omega = \frac{k_h^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2}{\beta k_x}. \quad (94)$$

Рассмотрим переход в дисперсионном соотношении (87) к случаю гидродинамики нейтральной вращающейся жидкости. В отсутствие магнитного поля ($\mathbf{B}_0 = 0$) уравнение (87) принимает вид

$$\omega^3 + \beta \frac{k_x}{k^2} \omega^2 - \omega \left(f_0^2 \frac{k_z^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} \right) + N^2 \beta \frac{k_x}{k^2} = 0. \quad (95)$$

Заметим, что для решения в низкочастотном пределе можно получить выражение для частоты трехмерной гидродинамической волны Россби в приближении Буссинеска

$$\omega_{R_{3D}} = \frac{N^2 \beta k_x}{f_0^2 k_z^2 - N^2 k_h^2}, \quad (96)$$

которое переходит, при условии $k_z \ll k$, в стандартную гидродинамическую волну Россби (90). Динамика трехмерной волны Россби (96) опреде-

ляется не только силой Кориолиса, но и силой плавучести.

В приближении нестандартной β -плоскости решением системы (67)–(70), линеаризованной на фоне стационара (71), является дисперсионное соотношение в следующем виде:

$$\begin{aligned} & k^2 \omega^4 + k_x \omega^3 \left[\beta - \gamma \frac{k_z}{k_y} \right] - \\ & - \omega^2 \left[(f_V k_z + f_H k_y)^2 - N^2 k_h^2 + 2k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right] - \\ & - k_x \omega \left[(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left(\beta - \gamma \frac{k_z}{k_y} \right) - \beta N^2 \right] + \\ & + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left[k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 k_h^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (97)$$

Рассмотрим распространение волн в плоскости (k_x, k_y) при условии $k_z \ll k$. Дисперсионное соотношение в данном приближении имеет вид

$$\begin{aligned} & \omega^4 + \omega^3 \frac{\beta k_x}{k_h^2} - \omega^2 \left[\frac{f_H^2 k_y^2}{k_h^2} - N^2 + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 \right] - \\ & - \omega \frac{\beta k_x}{k_h^2} \left[(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N^2 \right] + \\ & + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 \left[(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (98)$$

При $k = k_y$ уравнение (98) описывает два типа волн, аналогичных волнам на нестандартной f -плоскости: одномерные магнитные инерционно-гравитационные волны

$$\begin{aligned} & \omega_{mig_y} = \\ & = \pm \sqrt{\frac{f_H^2}{2} - \frac{N^2}{2} + B_{0y}^2 k_y^2 + \sqrt{\left(\frac{f_H^2}{2} - \frac{N^2}{2} \right)^2 + f_H^2 B_{0y}^2 k_y^2}} \end{aligned} \quad (99)$$

и одномерные магнитострофические волны

$$\begin{aligned} & \omega_{mstr_y} = \\ & = \pm \sqrt{\frac{f_H^2}{2} - \frac{N^2}{2} + B_{0y}^2 k_y^2 - \sqrt{\left(\frac{f_H^2}{2} - \frac{N^2}{2} \right)^2 + f_H^2 B_{0y}^2 k_y^2}}. \end{aligned} \quad (100)$$

Важное отличие, связанное с нестандартным приближением β -плоскости, которые мы можем получить аналитически — низкочастотный предел в уравнении (97), который дает новое выражение для волны магнито-Россби:

$$\omega_{MR'_{3D}} = \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left[k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 k_h^2 \right]}{k_x \left[(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left(\beta - \gamma \frac{k_z}{k_y} \right) - \beta N^2 \right]}. \quad (101)$$

Выражение (101), так же как и выражение (93) описывает волны магнито-Россби, динамика которых определяется не только силами Кориолиса

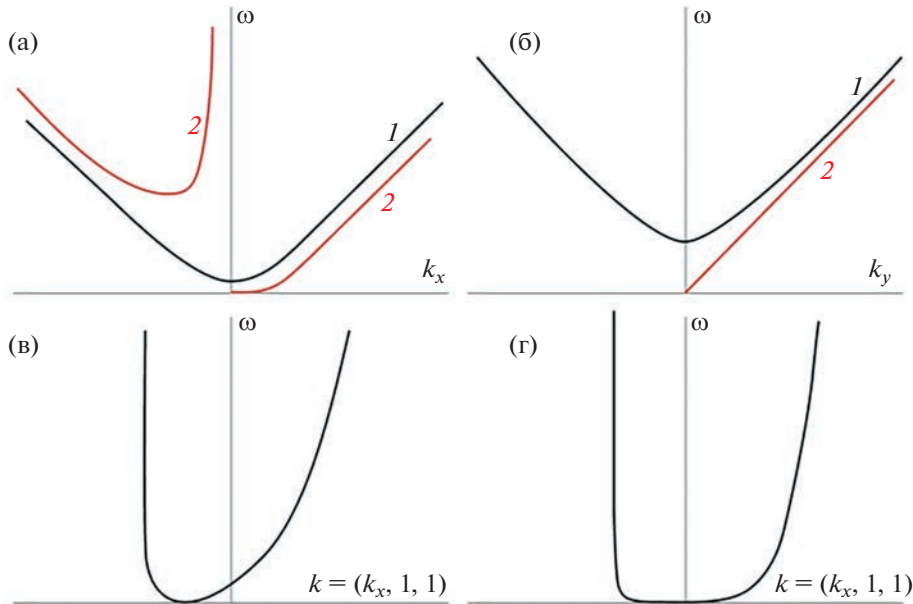


Рис. 5. Дисперсионные кривые волн на стандартной β -плоскости в приближении Буссинеска: 1 – магнитогравитационная волна $\omega_{mgr}(k_x)$, 2 – волна магнито-Россби $\omega_{MR_1}(k_x)$ (а); 1 – магнитогравитационная волна $\omega_{mgr}(k_y)$, 2 – волна Альфвена $\omega_A(k_y)$ (б). Дисперсионные кривые низкочастотных волн магнито-Россби на стандартной β -плоскости $\omega_{MR_{3D}}(k_x, 1, 1)$ (в) и на нестандартной β -плоскости $\omega_{MR_{3D}}(k_x, 1, 1)$ (г).

и Лоренца, но и силой плавучести, а при $k_z \ll k$ сводится к выражению аналогичному полученному в работах по исследованию магнитогидродинамических течений вращающейся плазмы на β -плоскости в двумерной магнитогидродинамике [54].

Рассмотрим переход в дисперсионном соотношении (97) к случаю вращающейся нейтральной жидкости. В отсутствие магнитного поля ($\mathbf{B}_0 = 0$) уравнение (97) принимает вид

$$k^2 \omega^3 + k_x \omega^2 \left(\beta - \gamma \frac{k_z}{k_y} \right) - \omega \left[(f_V k_y + f_H k_z)^2 - N^2 k_h^2 \right] + N^2 \beta k_x = 0. \quad (102)$$

В низкочастотном пределе получаем выражение для частоты трехмерной гидродинамической волны Россби в приближении Буссинеска на нестандартной β -плоскости

$$\omega = \frac{N^2 \beta k_x}{(f_V k_y + f_H k_z)^2 - N^2 k_h^2}, \quad (103)$$

которое переходит, при условии $k_z \ll k$, в стандартную гидродинамическую волну Россби (90).

Общий вид дисперсионных кривых волн на стандартной β -плоскости при $\omega > 0$, $k = k_x$ представлен на рис. 5а, для $k = k_y$ – на рис. 5б. Дисперсионные кривые низкочастотных волн магни-

то-Россби при $\mathbf{k} = (k_x, 1, 1)$ представлены на рис. 5в для стандартной бета-плоскости и на рис. 5г для нестандартной.

3.1.3. Выводы. В разделе обсуждаются магнитогидродинамические волны в стратифицированной вращающейся плазме в поле силы тяжести в приближении Буссинеска (в устойчиво стратифицированном слое с линейным профилем плотности). Для плоских течений на f -плоскости и на нестандартной f -плоскости получены дисперсионные уравнения и найдены решения, описывающие трехмерные магнитные инерционно-гравитационные волны (73), которые в отсутствие магнитного поля переходят в трехмерные инерционно-гравитационные волны в приближении Буссинеска в нейтральной жидкости [119], и трехмерные магнитострофические волны (74), не имеющие аналога в гидродинамике нейтральной жидкости. Найдено, что наличие магнитного поля нарушает условие перпендикулярности групповой скорости инерционно-гравитационных волн волновому вектору. В частном случае распространения трехмерных волн в горизонтальной плоскости ($\mathbf{k} = (k_x, k_y)$) магнитные инерционно-гравитационные волны на f -плоскости превращаются в волны Альфвена (76), магнитострофические волны на f -плоскости превращаются в магнитогравитационные волны (77), магнитные инерционно-гравитационные волны на нестандартной f -плоскости превращаются в дву-

мерные магнитные инерционно-гравитационные волны (85), а магнитострофические волны на нестандартной f -плоскости превращаются в двумерные магнитострофические волны (86). При распространении волн на f -плоскости и на нестандартной f -плоскости только вдоль вертикальной составляющей волнового вектора ($k = k_z$) магнитные инерционно-гравитационные волны превращаются в магнитные волны с частотой ω_{z1} (79), а магнитострофические волны превращаются в волны с частотой ω_{z2} (80), динамика которых определяется только силой Лоренца и силой Кориолиса. Для сферических течений на β -плоскости и на нестандартной β -плоскости также получены дисперсионные уравнения и найдены решения в виде магнито-гравитационных волн (77), одномерных магнитных инерционно-гравитационных волн (99) и одномерных магнитострофических волн (100), аналогичных волнам в плоских течениях, волн магнито-Россби (89), которые в отсутствие магнитного поля превращаются в гидродинамические волны Россби (90), и волн магнито-Россби (91), исчезающих в отсутствие магнитного поля. Отметим, что в низкочастотном пределе найдены дисперсионные соотношения для трехмерных волн магнито-Россби на β -плоскости (93) и трехмерных волн магнито-Россби на нестандартной β -плоскости (101), которые в приближении двумерных потоков ($kz \ll k$) описывают волны магнито-Россби (94), аналогичные полученным в работах по исследованию магнито-гидродинамических течений вращающейся плазмы в приближении мелкой воды. Кроме того, в приближении вертикальных течений ($k = k_z$) дисперсионные соотношения как на β -плоскости, так и на нестандартной β -плоскости описывают магнитные волны, распространяющиеся вдоль вертикальной составляющей волнового вектора, аналогичные магнитным волнам на f -плоскости и на нестандартной f -плоскости (79), (80).

3.2. Неупругое приближение для течений сжимаемой вращающейся стратифицированной плазмы

Как было отмечено в разделе 2.3, сжимаемость является принципиально важным свойством течений в плазменной астрофизике и характеризует большинство наблюдаемых объектов во Вселенной. Наряду со сжимаемостью, большой интерес представляет исследование влияния стратификации на волновые процессы в течениях астрофизической плазмы. Далее описываются течения вращающейся сжимаемой плазмы с устойчивым непрерывно стратифицированным профилем энтропии в неупругом приближении. Неупругое приближение является одним из приближений,

используемых при исследовании течений с малым числом Маха, в котором характерный временной масштаб изучаемых течений астрофизической плазмы значительно превышает время распространения акустических волн. В неупругом приближении для стратифицированной плазмы элемент жидкости при движении по вертикали меняет свой объем вследствие изменения давления окружающей среды. Изучаются линейные волны в трехмерных течениях сжимаемой стратифицированной вращающейся плазмы в рамках системы магнито-гидродинамических уравнений в неупругом приближении. Вывод системы магнито-гидродинамических уравнений в неупругом приближении основан на методике, предложенной в [120]. В качестве исходной используется полная система магнито-гидродинамических уравнений сжимаемой плазмы при наличии вращения, состоящая из уравнения Навье—Стокса, уравнения для энтропии, уравнения индукции для идеально проводящей плазмы, уравнения непрерывности, уравнения бездивергентности магнитного поля и уравнения состояния. Для удобства анализа производят переход от энтропии S к потенциальной температуре θ , используя их простую зависимость, заданную выражением $dS = c_p d \ln \theta$. В качестве исходного рассматривается состояние равновесия плазмы ($\mathbf{u}_0 = 0$) в постоянном магнитном поле ($\mathbf{b}_0 = \text{const}$) при наличии стратификации $\rho_0(z)$. Возмущение исходного состояния равновесия $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}'$, $p = p_0 + p'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$, $\theta = \theta_0 + \theta'$ такое, что возмущение плотности полагается малым ($\rho' \ll \rho_0$). Кроме того, в уравнение Навье—Стокса вводится новая переменная $\bar{\omega} = p' / \rho_0$ (“reduced pressure”) [120]. Пренебрегая всеми слагаемыми, пропорциональными $\bar{\omega}$, за исключением слагаемых, содержащих градиент $\bar{\omega}$, обеспечивается выполнение условия сохранения энергии в системе, а полученная система уравнений становится удобна для дальнейшего исследования, поскольку не включает в явном виде слагаемых, содержащих возмущение плотности. Система магнито-гидродинамических уравнений в неупругом приближении для сжимаемой стратифицированной вращающейся плазмы имеет вид [88]

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' + [\mathbf{f} \times \mathbf{u}'] = -\nabla \bar{\omega} - \frac{\theta'}{\theta_0} \mathbf{g} - \frac{[\mathbf{b}_0 \times [\nabla \times \mathbf{b}']]}{4\pi\rho_0} - \frac{[\mathbf{b}' \times [\nabla \times \mathbf{b}']]}{4\pi\rho_0}, \quad (104)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \theta_0 + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \theta' = 0, \quad (105)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial t} = [\nabla \times [\mathbf{u}' \times \mathbf{b}_0]] + [\nabla \times [\mathbf{u}' \times \mathbf{b}']], \quad (106)$$

$$\nabla(\rho_0 \cdot \mathbf{u}') = 0, \quad (107)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{b}') = 0, \quad (108)$$

$$\frac{\theta'}{\theta_0} = \frac{p'}{\gamma p_0} - \frac{\rho'}{\rho_0}. \quad (109)$$

Ключевые отличия системы уравнений в неупругом приближении от уравнений в приближении Буссинеска (67)–(70) заключаются в уравнении энергии, записанном для потенциальной температуры, в уравнении непрерывности, включающем в себя исходный стратифицированный профиль плотности и в уравнении состояния, определяющем функцию плотности, как функцию не только давления, но и потенциальной температуры (энтропии). Таким образом, в неупругом приближении изменение давления и плотности жидкости связаны не только с силой плавучести, как в приближении Буссинеска, но и с изменением потенциальной температуры (энтропии).

Система уравнений (104)–(107) допускает аналитическое исследование для стратифицированного слоя плазмы с исходным устойчивым линейным профилем энтропии:

$$\frac{\partial S_0}{\partial z} = \frac{1}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = \text{const}. \quad (110)$$

В этом случае уравнение состояния для невозмущенных величин определяет связь между плотностью и потенциальной температурой следующим образом:

$$\frac{1}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = -\frac{\rho_0 g}{\gamma p_0} - \frac{1}{g \rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \quad (111)$$

Введем понятие частоты Брента–Вайсяля в сжимаемых течениях стратифицированной астрофизической плазмы в следующем виде:

$$N_\theta^2 = -g \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{g \rho_0}{\gamma p_0} \right) = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z}. \quad (112)$$

Учет сжимаемости в выражении (112) приводит к зависимости частоты Брента–Вайсяля не только от плотности, но и от давления. Первое слагаемое в частоте Брента–Вайсяля N_θ^2 для сжимаемых течений в неупругом приближении с линейным профилем энтропии (112) имеет вид, аналогичный частоте Брента–Вайсяля в приближении Буссинеска $N^2 = -(g/\bar{\rho}_0)(\partial \bar{\rho}/\partial z)$, где $\bar{\rho}_0$ – постоянная фоновая плотность, а $\bar{\rho}$ – линейный профиль плотности, обеспечивающий устойчивую стратификацию. В случае сжимаемых течений в неупругом приближении предполагается стратификация исходного профиля плотности $\rho_0(z)$, обеспечивающая линейность и устойчивость профиля энтропии ($\partial_z \ln \rho_0 = \text{const}$). Таким образом для удобства дальнейшего анализа мы

обозначим первое слагаемое в (112) в следующем виде:

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z}. \quad (113)$$

Кроме того введем следующие переобозначения для потенциальной температуры и магнитного поля

$$T' = \frac{\theta'}{\theta_0}, \quad \mathbf{b}_0 = \sqrt{4\pi\rho_0} \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{b}' = \sqrt{4\pi\rho_0} \mathbf{B}'.$$

Магнитогидродинамические уравнения в неупругом приближении (104)–(107) записаны для полной силы Кориолиса. Для дальнейшего исследования используем четыре различных приближения силы Кориолиса, описанные в разделе 3.1: приближение стандартной f -плоскости, приближение нестандартной f -плоскости, приближение стандартной β -плоскости, приближение нестандартной β -плоскости.

3.2.1. Волны в астрофизической плазме без учета сферичности. В приближении стандартной f -плоскости решением системы (104)–(107), лиnearизованной на фоне стационарного состояния покоящегося слоя плазмы с постоянным магнитным полем и линейным профилем энтропии (110), является дисперсионное соотношение

$$\begin{aligned} \omega^4 - \left[2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + \frac{f_V^2 k_z^2}{k^2} - \frac{k_h^2 N_\theta^2}{k^2} \right] \omega^2 - \\ - \frac{N^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})}{g k^2} [f_V k_z (B_{y_0} k_x - B_{x_0} k_y)] \omega + \\ + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left[(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - \frac{k_h^2}{k^2} N_\theta^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (114)$$

При условии когда в состоянии покоя магнитное поле направлено вдоль вертикальной координаты z ($\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_{z_0})$), дисперсионное уравнение (114) принимает вид

$$\begin{aligned} \omega^4 - \left[2B_{z_0}^2 k_z^2 + \frac{f_V^2 k_z^2}{k^2} - \frac{k_h^2}{k^2} N_\theta^2 \right] \omega^2 + \\ + B_{z_0}^2 k_z^2 \left[B_{z_0}^2 k_z^2 - \frac{k_h^2}{k^2} N_\theta^2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (115)$$

и его решение включает два типа волн: трехмерные сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны и трехмерные сжимаемые магнитострофические волны. Дисперсионное уравнение для трехмерных сжимаемых магнитных

инерционно-гравитационных волн в неупругом приближении имеет вид

$$\omega_{mig_{B_z}} = \pm \left(B_{z_0}^2 k_z^2 + \frac{f_V^2 k_z^2}{2k^2} - \frac{k_h^2}{2k^2} N_\theta^2 + \right. \\ \left. + \frac{2}{k} \sqrt{\left(\frac{f_V^2 k_z^2}{2} - \frac{k_h^2}{2} N_\theta^2 \right)^2 + B_{z_0}^2 k_z^4 f_V^2} \right)^{1/2}. \quad (116)$$

Выражение (116) имеет вид аналогичный дисперсионному соотношению для трехмерных магнитных инерционно-гравитационных волн в приближении Буссинеска (73). Однако принципиальным отличием является присутствие в (116) частоты Брента–Вайсяля для сжимаемых течений N_θ^2 , которая зависит как от исходного профиля плотности, так и от исходного профиля давления. Таким образом для волн, описываемых дисперсионным соотношением (116) восстанавливающими механизмами являются не только вращение, магнитное поле и гравитация, но и сжимаемость. В частном случае отсутствия вертикального магнитного поля ($B_{z_0} = 0$) выражение (116) переходит в дисперсионное соотношение для трехмерных инерционно-гравитационных волн в нейтральной жидкости

$$\omega_{ig3D} = \pm \left(\frac{f_V^2 k_z^2}{k^2} - \frac{k_h^2}{k^2} N_\theta^2 \right)^{1/2}. \quad (117)$$

Дисперсионное соотношение для трехмерных магнитострофических волн в неупругом приближении имеет вид

$$\omega_{mstr_{B_z}} = \pm \left(B_{z_0}^2 k_z^2 + \frac{f_V^2 k_z^2}{2k^2} - \frac{k_h^2}{2k^2} N_\theta^2 - \right. \\ \left. - \frac{2}{k} \sqrt{\left(\frac{f_V^2 k_z^2}{2} - \frac{k_h^2}{2} N_\theta^2 \right)^2 + B_{z_0}^2 k_z^4 f_V^2} \right)^{1/2}. \quad (118)$$

Также как и в случае трехмерных магнитных инерционно-гравитационных волн, трехмерные магнитострофические волны в неупругом приближении описываются дисперсионным уравнением, аналогичным дисперсионному уравнению в приближении Буссинеска (74), с учетом эффектов сжимаемости в частоте Брента–Вайсяля N_θ^2 .

В случае двумерных возмущений, направленных только в горизонтальном направлении ($k_z = 0$), дисперсионное уравнение (114) принимает вид

$$\omega^4 - [2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N_\theta^2] \omega^2 + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 [(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N_\theta^2] = 0 \quad (119)$$

и допускает решение в виде двух типов волн. Первый тип – волны Альфвена с дисперсионным соотношением

$$\omega_A = \pm (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h. \quad (120)$$

Второй тип – двумерные магнитогравитационные волны в неупругом приближении с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mgr} = \pm \sqrt{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N_\theta^2}. \quad (121)$$

Выражение (121) в отсутствие магнитного поля описывает сжимаемые гравитационные волны в нейтральной жидкости в неупругом приближении с частотой $\omega_{gr} = \pm \sqrt{-N_\theta^2}$.

В противоположном случае одномерных вертикальных возмущений ($k = k_z$) дисперсионное уравнение (114) записывается в виде

$$\omega^4 - [2B_{z_0}^2 k_z^2 + f_V^2] \omega^2 + B_{z_0}^4 k_z^4 = 0 \quad (122)$$

и описывает два типа магнитных инерционной гравитационных волн, аналогичных волнам в приближении Буссинеска (79), (80).

Общий вид дисперсионных кривых сжимаемых волн на стандартной f -плоскости при $\omega > 0$, $k = k_x$ представлен на рис. 6а для магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн и на рис. 6б для волн Альфвена и магнитогравитационных волн.

В приближении нестандартной f -плоскости решением системы (104)–(107), линеаризованной на фоне стационарного состояния покоящегося слоя плазмы с постоянным магнитным полем и линейным профилем энтропии (110), является дисперсионное соотношение

$$\omega^4 - \frac{N^2 k_x f_H}{g k^2} \omega^3 - \left[2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + \right. \\ \left. + \frac{(f_H k_y + f_V k_z)^2}{k^2} - \frac{k_h^2 N_\theta^2}{k^2} \right] \omega^2 + \frac{N^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})}{g k^2} \times \\ \times [f_H (B_{x_0} k_h^2 + B_{z_0} k_z k_x) - f_V k_z (B_{y_0} k_x - B_{x_0} k_y)] \omega + \\ + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left[(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - \frac{k_h^2}{k^2} N_\theta^2 \right] = 0. \quad (123)$$

Проанализируем решение полученного дисперсионного уравнения в частных случаях. Рассмотрим возмущение, направленное вдоль тороидальной компоненты магнитного поля B_{x_0} . Тогда дисперсионное уравнение (123) принимает вид

$$(\omega^2 - B_{x_0}^2 k_x^2) \left(\omega^2 - \frac{N^2 f_H}{g k_x} \omega - B_{x_0}^2 k_x^2 + N_\theta^2 \right) = 0. \quad (124)$$

В неупругом приближении слагаемое с массовой силой в уравнении на z -компоненту скорости со-

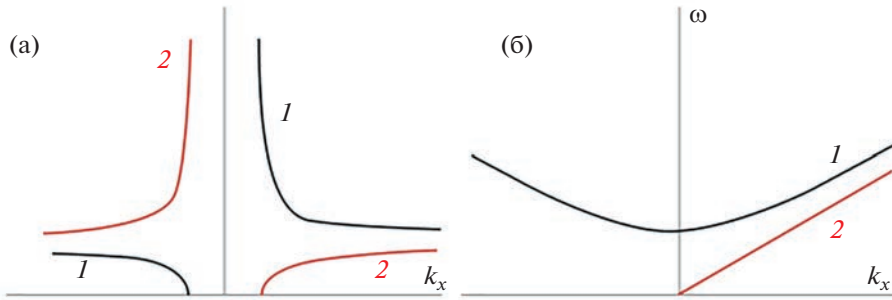


Рис. 6. Дисперсионные кривые волн на стандартной f -плоскости в неупругом приближении: 1 – сжимаемая магнитная инерционно-гравитационная волна $\omega_{mig_{B_z}}$ и 2 – сжимаемая магнитострофическая волна $\omega_{mstr_{B_z}}$ (а); 1 – сжимаемая магнитогравитационная волна ω_{mgr} и 2 – волна Альфвена ω_A (б).

держит потенциальную температуру, зависящую как от плотности, так и от давления. Уравнение непрерывности в неупругом приближении включает в себя исходный профиль плотности, в то время как в приближении Буссинеска является условием бездивергентности поля скоростей. Таким образом в неупругом приближении дисперсионное уравнение волн (123) на нестандартной f -плоскости имеет значительное отличие в выражениях при первой и третьей степени частоты, что в частном случае распространения волн вдоль тороидального магнитного поля приводит к появлению новых типов сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн.

Соотношение (123) описывает три типа волн. Первый тип волн – одномерные волны Альфвена с дисперсионным соотношением

$$\omega_{A_x} = \pm B_{x_0} k_x. \quad (125)$$

Второй тип линейных волн – сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с дисперсионным соотношением в следующем виде:

$$\omega_{mig_{x_1}} = \frac{N^2 f_H}{2gk_x} + \sqrt{\frac{N^4 f_H^2}{4g^2 k_x^2} + B_{x_0}^2 k_x^2 - N_\theta^2}. \quad (126)$$

Выражение (126) значительно отличается от дисперсионного соотношения (116) для сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн, полученных в предыдущем разделе, а также и от дисперсионного соотношения для магнитных инерционно-гравитационных волн в приближении Буссинеска (82). Однако восстанавливающие механизмы для волн, описываемых выражениями (126) и (116), одинаковы. Тем не менее выражение (126) описывает физические эффекты, сопровождающие сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны в неупругом приближении с новым законом дисперсии, восстанавливаемыми механизмами которых являются вращение, гравитация, магнитное поле и сжимаемость. Отметим, что исходный профиль плотности связан непосредственно с горизонтальной со-

ставляющей силы Кориолиса. Такая связь обусловлена учетом эффектов сжимаемости и горизонтальной компоненты вектора Кориолиса, а также распространением волн вдоль тороидального магнитного поля. В предположении отсутствия стратификации плотности ($N^2 = 0$) вклад силы инерции в дисперсионное соотношение (126) исчезает и оно описывает одномерные сжимаемые магнитогравитационные волны в неупругом приближении с частотой:

$$\omega_{mg_{x_1}} = \sqrt{B_{x_0}^2 k_x^2 - N_\theta'^2}, \quad (127)$$

где $N_\theta'^2 = -g^2 \rho_0 / (\gamma p_0)$.

В частном случае отсутствия магнитного поля ($B_{x_0} = 0$) дисперсионное соотношение (126) представимо в виде

$$\omega_{ig_{x_1}} = \frac{N^2 f_H}{2gk_x} + \sqrt{\frac{N^4 f_H^2}{4g^2 k_x^2} - N_\theta^2} \quad (128)$$

и описывает одномерные сжимаемые инерционно-гравитационные волны в нейтральной жидкости. Дисперсионное соотношение (128) в предположении отсутствия стратификации плотности ($N^2 = 0$) описывает сжимаемые гравитационные волны в неупругом приближении с частотой $\omega = \sqrt{-N_\theta'^2}$.

Третий тип волн – сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mig_{x_2}} = \frac{N^2 f_H}{2gk_x} - \sqrt{\frac{N^4 f_H^2}{4g^2 k_x^2} + B_{x_0}^2 k_x^2 - N_\theta^2}, \quad (129)$$

аналогичным полученному выше (126) с точностью до знака перед корнем. В предположении отсутствия стратификации плотности ($N^2 = 0$) данный тип волн переходит в сжимаемые магни-

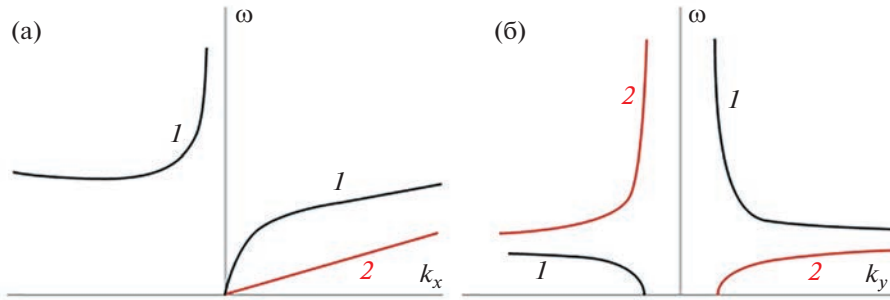


Рис. 7. Дисперсионные кривые волн на нестандартной f -плоскости в неупругом приближении: 1 – сжимаемая магнитная инерционно-гравитационная волна $\omega_{mig_{x_1}}$ и 2 – волна Альфвена ω_{A_x} (а); 1 – сжимаемая магнитная инерционно-гравитационная волна ω_{mig_y} и 2 – сжимаемая магнитострофическая волна ω_{mstr_y} (б).

тогравитационные волны в неупругом приближении с частотой

$$\omega_{mgr_{x_2}} = -\sqrt{B_{x_0}^2 k_x^2 - N_\theta^2}. \quad (130)$$

В частном случае отсутствия магнитного поля ($B_{x_0} = 0$) выражение (129) описывает сжимаемые инерционно-гравитационные волны в нейтральной жидкости с частотой

$$\omega_{ig_{x_2}} = \frac{N^2 f_H}{2gk_x} - \sqrt{\frac{N^4 f_H^2}{4g^2 k_x^2} - N_\theta^2}. \quad (131)$$

В случае полного отсутствия стратификации ($N_\theta^2 = 0$, $N^2 = 0$) оба типа волн (126), (129) переходят в одномерные волны Альфвена с частотой $\omega_{A_x} = \pm B_{x_0} k_x$.

В случае полоидального магнитного поля в состоянии покоя и одномерного возмущения, направленного вдоль магнитного поля, дисперсионное уравнение (123) принимает вид

$$\omega^4 - [2B_{y_0}^2 k_y^2 + f_H^2 - N_\theta^2] \omega^2 + B_{y_0}^2 k_y^2 [B_{y_0}^2 k_y^2 - N_\theta^2] = 0 \quad (132)$$

и описывает два типа волн: одномерные магнитные инерционно-гравитационные волны и одномерные магнитострофические волны. Дисперсионное соотношение для одномерных магнитных инерционно-гравитационных волн в неупругом приближении имеет следующий вид:

$$\omega_{mig_y} = \pm \left(B_{y_0}^2 k_y^2 + \frac{f_H^2}{2} - \frac{N_\theta^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{f_H^2}{2} - N_\theta^2 \right)^2 + B_{y_0}^2 k_y^2 f_H^2} \right)^{1/2}. \quad (133)$$

Такой тип волн, также как и в случае трехмерных магнитных инерционно-гравитационных волн на стандартной f -плоскости (116), является

сжимаемым одномерным аналогом одномерных магнитных инерционно-гравитационных волн в приближении Буссинеска (82). В частном случае отсутствия магнитного поля ($B_{y_0} = 0$) выражение (133) переходит в дисперсионное соотношение для одномерных инерционно-гравитационных волн в нейтральной жидкости

$$\omega_{ig_y} = \pm \sqrt{f_H^2 - N_\theta^2}. \quad (134)$$

Дисперсионное соотношение для одномерных магнитострофических волн имеет вид

$$\omega_{mstr_y} = \pm \left(B_{y_0}^2 k_y^2 + \frac{f_H^2}{2} - \frac{N_\theta^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{f_H^2}{2} - N_\theta^2 \right)^2 + B_{y_0}^2 k_y^2 f_H^2} \right)^{1/2}, \quad (135)$$

аналогичный дисперсионному соотношению для одномерных магнитострофических волн в приближении Буссинеска (83), с учетом эффектов сжимаемости, представленных частотой Брента–Вайсяля N_θ^2 .

Общий вид дисперсионных кривых сжимаемых волн на нестандартной f -плоскости представлен на рис. 7а при $\omega > 0$, $k = k_x$ и на рис. 7б при $\omega > 0$, $k = k_y$.

3.2.2. Волны в астрофизической плазме с учетом сферичности. В приближении стандартной β -плоскости решением системы (104)–(107), линеаризованной на фоне стационарного состояния покоящегося слоя плазмы с постоянным магнитным полем и линейным профилем энтропии (110), является дисперсионное соотношение

$$k^2 \omega^4 + \beta k_x \omega^3 - \omega^2 \left[f_V^2 k_z^2 + \frac{\beta N^2 f_V k_z}{gk_y} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + 2k^2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - k_h^2 N_\theta^2 \Big] - \omega \left[k_x \beta \left((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N_\theta^2 \right) + \right. \\
& \left. + \frac{N^2 f_V k_z}{g} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) (B_{y_0} k_x - B_{x_0} k_y) \right] + \\
& + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left[k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - k_h^2 N_\theta^2 \right] = 0
\end{aligned} \quad (136)$$

В случае двумерных возмущений, направленных только в горизонтальном направлении ($k_z = 0$), дисперсионное уравнение (136) принимает вид

$$\begin{aligned}
& \left(\omega^2 - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 + N_\theta^2 \right) \times \\
& \times \left(\omega^2 + \omega \frac{\beta k_x}{k_h^2} - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 \right) = 0.
\end{aligned} \quad (137)$$

Выражение (137) описывает три типа волн. Первый тип — сжимаемые магнитогравитационные волны в неупругом приближении, аналогичные волнам на f -плоскости (121). Второй тип — волны магнито-Россби, которые в отсутствие магнитного поля переходят в стандартные гидродинамические волны Россби. Эти волны аналогичны волнам магнито-Россби (89) в приближении Буссинеска. Третий тип — волны магнито-

Россби, не имеющие аналога в динамике нейтральной жидкости. Эти волны аналогичны волнам магнито-Россби (91) в приближении Буссинеска.

В случае одномерных возмущений, направленных только вдоль полоидальной составляющей магнитного поля, дисперсионное уравнение (136) принимает вид

$$\omega^4 - \omega^2 (2B_{y_0}^2 k_y^2 - N_\theta^2) + B_{y_0}^2 k_y^2 (B_{y_0}^2 k_y^2 - N_\theta^2) = 0. \quad (138)$$

Выражение (138) описывает два типа волн: одномерные волны Альфвена с дисперсионным соотношением

$$\omega_{A_y} = \pm B_{y_0} k_y \quad (139)$$

и одномерные сжимаемые магнитогравитационные волны в неупругом приближении с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mgr_y} = \pm \sqrt{B_{y_0}^2 k_y^2 - N_\theta^2}. \quad (140)$$

В низкочастотном пределе уравнение (136) описывает сжимаемую трехмерную волну магнито-Россби в неупругом приближении с дисперсионным соотношением в следующем виде:

$$\omega_{MR_{3D}} = \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left[k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - k_h^2 N_\theta^2 \right]}{\left[k_x \beta \left((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N_\theta^2 \right) + (N^2 f_V k_z / g) (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) (B_{y_0} k_x - B_{x_0} k_y) \right]}. \quad (141)$$

Выражение (141) учитывает эффекты сжимаемости в низкочастотных трехмерных волнах Россби, вследствие зависимости частоты Брента—Вайсяля для сжимаемых течений N_θ^2 не только от исходного профиля плотности, но и от исходного профиля давления. Дисперсионное соотношение (141) имеет вид, аналогичный дисперсионному соотношению для трехмерных низкочастотных волн магнито-Россби в приближении Буссинеска (93). Однако в результате учета эффектов сжимаемости в неупругом приближении выражение (141) имеет дополнительное слагаемое в знаменателе, связанное со стратификацией плотности, которое исчезает, если в состоянии покоя магнитное поле направлено вдоль вертикали.

Общий вид дисперсионных кривых сжимаемых волн на стандартной β -плоскости представлен на рис. 8а при $\omega > 0$, $k = k_y$ для сжимаемой магнитогравитационной волны и волны Альфвена, на рис. 8б—г для сжимаемой низкочастотной волны магнито-Россби при $\mathbf{k} = (k_x, 1, 1)$ (б), $\mathbf{k} = (1, k_y, 1)$ (в), $\mathbf{k} = (1, 1, k_z)$ (г).

В приближении нестандартной β -плоскости решением системы (104)–(107), линеаризован-

ной на фоне стационарного состояния покоящегося слоя плазмы с постоянным магнитным полем и линейным профилем энтропии (110), является дисперсионное соотношение

$$\begin{aligned}
& k^2 \omega^4 - k_x \omega^3 \left[\frac{N^2 f_H}{g} + \gamma \frac{k_z}{k_y} - \beta \right] - \\
& - \omega^2 \left[(f_H k_y + f_V k_z)^2 + \frac{\beta N^2}{g} \left(f_H + f_V \frac{k_z}{k_y} \right) + \right. \\
& \left. + 2k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - k_h^2 N_\theta^2 \right] + \\
& + \omega \left\{ k_x (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left(\gamma \frac{k_z}{k_y} - \beta \right) + \beta k_x N_\theta^2 + \right. \\
& + \frac{N^2}{g} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) \left[f_H (B_{x_0} k_h^2 + B_{x_0} k_x k_z) + \right. \\
& \left. + f_V k_z (B_{x_0} k_y - B_{y_0} k_x) \right] \Big\} + \\
& + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left[k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - k_h^2 N_\theta^2 \right]
\end{aligned} \quad (142)$$

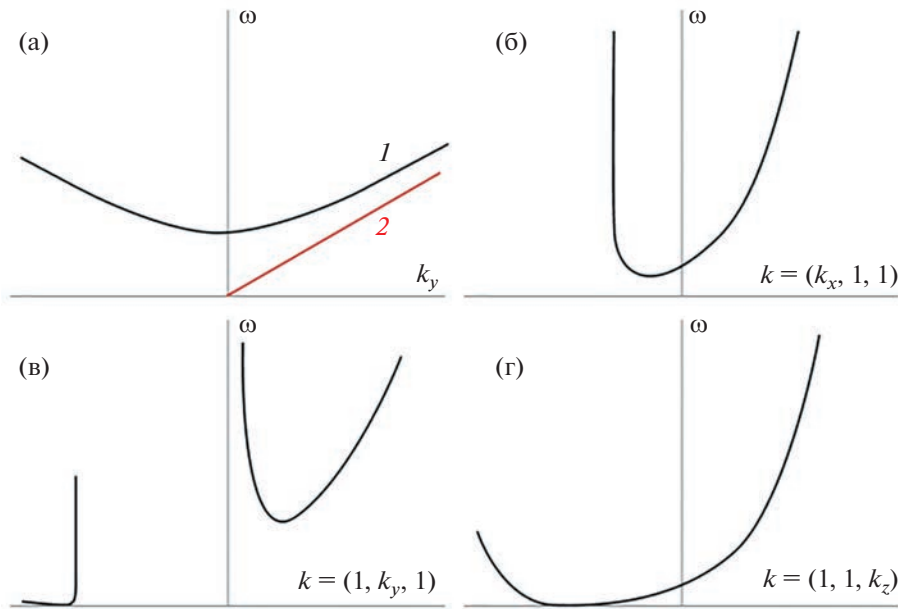


Рис. 8. Дисперсионные кривые волн на стандартной β -плоскости в неупругом приближении: 1 — сжимаемая магнитогра-
витационная волна ω_{mgr_y} и 2 — волна Альфвена ω_{A_y} (а); сжимаемая низкочастотная волна магнито-Россби $\omega_{MR_{3D}}$ (б–г).

Проанализируем решение полученного дисперсионного уравнения в частных случаях. Рассмотрим исходное состояние равновесия с тороидальным магнитным полем. Для двумерных возмущений, направленных только в горизонтальном направлении ($k_z = 0$), таких что $k_y \ll k_x$ и слагаемые $k_y^2/k_h^2 \ll 1$, $k_x^2/k_h^2 \sim 1$, дисперсионное уравнение (142) принимает вид

$$\left(\omega^2 + \frac{\beta k_x}{k_h^2} \omega - B_{x_0}^2 k_x^2 \right) \times \left(\omega^2 - \frac{N^2 f_H k_x}{k_h^2 g} \omega - B_{x_0}^2 k_x^2 + N_\theta^2 \right) = 0 \quad (143)$$

и допускает решение в виде четырех типов волн. Первый и второй тип — волны магнито-Россби, аналогичные волнам магнито-Россби на стандартной β -плоскости (и соответственно волнам магнито-Россби в приближении Буссинеска (89), (91)), с учетом однокомпонентности магнитного поля ($\mathbf{B} = (B_{x_0}, 0, 0)$). Третий тип — сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с дисперсионным соотношением в следующем виде:

$$\omega_{mig_1} = \frac{N^2 f_H k_x}{2k_h^2 g} + \sqrt{\frac{N^4 f_H^2 k_x^2}{4k_h^4 g^2} + B_{x_0}^2 k_x^2 - N_\theta^2}. \quad (144)$$

Дисперсионное соотношение (144) аналогично полученному при изучении волн на нестандартной f -плоскости (126).

Четвертый тип — сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с дисперсионным соотношением в следующем виде:

$$\omega_{mig_2} = \frac{N^2 f_H k_x}{2k_h^2 g} - \sqrt{\frac{N^4 f_H^2 k_x^2}{4k_h^4 g^2} + B_{x_0}^2 k_x^2 - N_\theta^2}. \quad (145)$$

Дисперсионное соотношение (145) аналогично полученному при изучении волн на нестандартной f -плоскости (129).

В случае, когда в состоянии покоя магнитное поле полоидально и одномерные возмущения направлены вдоль магнитного поля, дисперсионное уравнение (142) записывается в виде

$$\omega^4 - \omega^2 \left[f_H^2 + \frac{\beta N^2 f_H}{g k_y^2} + 2B_{y_0}^2 k_y^2 - N_\theta^2 \right] + B_{y_0}^2 k_y^2 [B_{y_0}^2 k_y^2 - N_\theta^2] = 0. \quad (146)$$

В неупругом приближении слагаемое с массовой силой в уравнении на z -компоненту скорости содержит потенциальную температуру, зависящую как от плотности, так и от давления. Уравнение непрерывности в неупругом приближении включает в себя исходный профиль плотности, в то время как в приближении Буссинеска является условием бездивергентности поля скоростей. Таким образом в неупругом приближении дисперсионное уравнение волн на нестандартной β -плоскости (142) имеет значительное отличие в выражениях при первой, второй и третьей степени частоты, что в частном случае распространения волн вдоль полоидального магнитного поля

(146) приводит к появлению новых типов сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных и сжимаемых магнитострофических волн.

Дисперсионное соотношение для сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн имеет следующий вид:

$$\omega_{mig\beta} = \left[\frac{f_H^2}{2} + \frac{\beta N^2 f_H}{2gk_y^2} - \frac{N_\theta^2}{2} + B_{y_0}^2 k_y^2 + \left(\frac{f_H^2}{2} + \frac{\beta N^2 f_H}{2gk_y^2} - \frac{N_\theta^2}{2} \right)^2 + f_H^2 B_{y_0}^2 k_y^2 + \frac{f_H \beta N^2 B_{y_0}^2}{g} \right]^{1/2} \quad (147)$$

Выражение (147) имеет вид, аналогичный дисперсионному соотношению для сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн, полученных в предыдущих разделах. Однако дисперсионное соотношение (147) имеет дополнительные слагаемые, включающие в себя параметр β , характерный для волн магнито-Россби, которые непосредственно связаны с градиентом профиля плотности и горизонтальной составляющей силы Кориолиса. Такая связь обусловлена учетом эффектов сжимаемости и горизонтальной компонентой вектора Кориолиса, а также распространением волн вдоль пологоидального магнитного поля. В предположении отсутствия стратификации плотности ($N^2 = 0$) дисперсионное соотношение (147) описывает одномерные магнитные инерционно-гравитационные волны, аналогичные волнам на нестандартной f -плоскости (133). В частном случае отсутствия магнитного поля ($B_{y_0} = 0$) дисперсионное соотношение (147) описывает новый тип сжимаемых инерционно-гравитационных волн в нейтральной жидкости с частотой

$$\omega = \sqrt{f_H^2 + \frac{\beta N^2 f_H}{gk_y^2} - N_\theta^2}. \quad (148)$$

Выражение (148) в предположении отсутствия стратификации плотности ($N^2 = 0$) переходит в выражение (134), которое также описывает инерционно-гравитационные волны в нейтральной жидкости.

Дисперсионное соотношение для сжимаемых магнитострофических волн, являющееся решением дисперсионного уравнения (146) имеет следующий вид:

$$\omega_{mstr\beta} = \left[\frac{f_H^2}{2} + \frac{\beta N^2 f_H}{2gk_y^2} - \frac{N_\theta^2}{2} + B_{y_0}^2 k_y^2 - \left(\frac{f_H^2}{2} + \frac{\beta N^2 f_H}{2gk_y^2} - \frac{N_\theta^2}{2} \right)^2 + f_H^2 B_{y_0}^2 k_y^2 + \frac{f_H \beta N^2 B_{y_0}^2}{g} \right]^{c1/2} \quad (149)$$

Волны, описываемые дисперсионным соотношением (149), не имеют аналога в динамике нейтральной жидкости. Выражение (149) имеет вид аналогичный дисперсионному соотношению для сжимаемых магнитострофических волн, полученных в предыдущих разделах. Однако дисперсионное соотношение (149) включает в себя параметр β , характерный для волн магнито-Россби, который как и в случае со сжимаемыми магнитными инерционно-гравитационными волнами с частотой (147), неразрывно связан с градиентом профиля плотности и горизонтальной составляющей силы Кориолиса. В предположении отсутствия стратификации плотности ($N^2 = 0$) дисперсионное соотношение (149) описывает одномерные сжимаемые магнитострофические волны, аналогичные волнам на нестандартной f -плоскости (135). В случае полного отсутствия стратификации ($N_\theta^2 = 0$, $N^2 = 0$) оба типа волн (147), (149) переходят в одномерные волны Альфвена с частотой $\omega_{A_y} = \pm B_{y_0} k_y$.

В низкочастотном пределе дисперсионное уравнение (142) допускает решение в виде сжимаемой трехмерной волны магнито-Россби в неупругом приближении с частотой

$$\omega_{MR_{3D}} = \{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 [k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - k_h^2 N_\theta^2]\} \times \left\{ k_x (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left(\beta - \gamma \frac{k_z}{k_y} \right) - \beta k_x N_\theta^2 - \frac{N^2}{g} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) \times \left[f_H (B_{x_0} k_h^2 + B_{z_0} k_x k_z) + f_V k_z (B_{x_0} k_y - B_{y_0} k_x) \right] \right\}^{-1} \quad (150)$$

Выражение (150) учитывает эффекты сжимаемости в низкочастотных трехмерных волнах Россби, вследствие зависимости частоты Брента–Вайся для сжимаемых течений N_θ^2 не только от исходного профиля плотности, но и от исходного профиля давления. Дисперсионное соотношение (150) имеет вид, аналогичный дисперсионному соотношению для трехмерных низкочастотных волн магнито-Россби в приближении Буссинеска на нестандартной β -плоскости (101). Кроме того в результате учета эффектов сжимаемости в неупругом приближении выражение (150) имеет дополнительное слагаемое в знаменателе, связан-

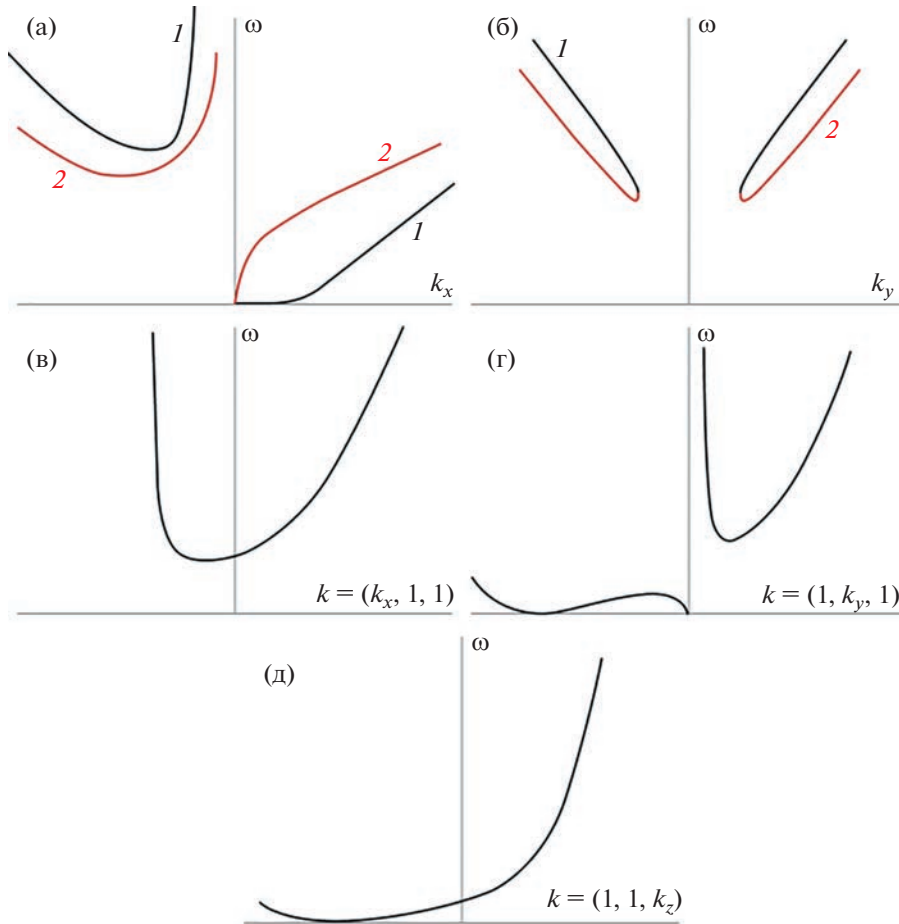


Рис. 9. Дисперсионные кривые волн на нестандартной β -плоскости в неупругом приближении: 1 – волна магнито-Россби ω_{MR_1} , 2 – волна Альфвена ω_{A_y} (а); 1 – сжимаемая магнитная инерционно-гравитационная волна $\omega_{mig\beta}$, 2 – сжимаемая магнитострофическая волна $\omega_{mstr\beta}$ (б); сжимаемая низкочастотная волна магнито-Россби $\omega_{MR_{5D}}$ при $\mathbf{k} = (k_x, 1, 1)$ (в); сжимаемая низкочастотная волна магнито-Россби $\omega_{MR'_{5D}}$ при $\mathbf{k} = (1, k_y, 1)$ (г); сжимаемая низкочастотная волна магнито-Россби $\omega_{MR''_{5D}}$ при $\mathbf{k} = (1, 1, k_z)$ (д).

ное со стратификацией плотности, которое, однако, не исчезает при отсутствии горизонтальных компонент магнитного поля, как в случае стандартного приближения β -плоскости.

Общий вид дисперсионных кривых сжимаемых волн на нестандартной β -плоскости представлен на рис. 9а при $\omega > 0$, $k = k_x$, на рис. 9б при $\omega > 0$, $k = k_y$, на рис. 9в при $\omega > 0$, $\mathbf{k} = (k_x, 1, 1)$, на рис. 9г при $\omega > 0$, $\mathbf{k} = (1, k_y, 1)$, на рис. 9д при $\omega > 0$, $\mathbf{k} = (1, 1, k_z)$.

3.2.3. Выводы. Приведен обзор системы магнитогидродинамических уравнений сжимаемой вращающейся плазмы с устойчивой стратификацией в поле силы тяжести в неупругом приближении. Рассмотрены магнитогидродинамические течения в слое сжимаемой устойчиво стратифицированной вращающейся плазмы с линейным профилем энтропии в неупругом приближении.

Приведена теория линейных волн в сжимаемых течениях на стандартной и нестандартной f -плоскостях, получены дисперсионные уравнения и найдены решения, описывающие различные типы волн. В приближении f -плоскости найдены дисперсионные соотношения, описывающие следующие типы волн: сжимаемые трехмерные магнитные инерционно-гравитационные волны (116), которые в отсутствие магнитного поля переходят в сжимаемые трехмерные инерционно-гравитационные волны в нейтральной жидкости в неупругом приближении (117); трехмерные магнитострофические волны (118), не имеющие аналога в гидродинамике нейтральной жидкости; двумерные волны Альфвена (120); двумерные сжимаемые магнитогравитационные волны (121); вертикальные магнитные волны, аналогичные найденным в приближении Буссинеска (79), (80). На нестандартной f -плоскости найдены диспер-

сионные соотношения, описывающие следующие типы волн: одномерные волны Альфвена (125); одномерные сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с новыми законами дисперсии (126), (129), которые при равенстве нулю горизонтальной компоненты вектора Кориолиса переходят в одномерные сжимаемые магнитогравитационные волны в (127), (130), а в отсутствие магнитного поля переходят в сжимаемые инерционно-гравитационные волны с новыми законами дисперсии (128), (131); одномерные сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные (133) и магнитострофические волны (135), аналогичные найденным волнам в приближении Буссинеска (99), (100), с точностью до слагаемых с частотой Брента–Вайсяля для сжимаемых течений. Эффекты сжимаемости в найденных типах волн представлены слагаемыми с частотой Брента–Вайсяля N_0^2 для сжимаемых стратифицированных течений, зависящей как от исходного профиля плотности, так и от исходного профиля давления. Для сферических течений в приближении стандартной и нестандартной β -плоскостях также развита теория линейных волн и получены дисперсионные уравнения. В приближении стандартной β -плоскости получены дисперсионные соотношения, описывающие следующие типы волн: двумерные сжимаемые магнитогравитационные волны (121); волны магнито-Россби (89), (91), аналогичные волнам в приближении Буссинеска; одномерные волны Альфвена (139); низкочастотные сжимаемые трехмерные волны магнито-Россби (141). В приближении нестандартной β -плоскости получены дисперсионные соотношения, описывающие следующие типы волн: волны магнито-Россби, аналогичные волнам на β -плоскости; двумерные сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с новыми законами дисперсии (144), (145), аналогичные волнам на нестандартной f -плоскости; одномерные сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные (147) и магнитострофические (149) волны с новыми законами дисперсии, включающими слагаемые с параметром β ; низкочастотные сжимаемые трехмерные волны магнито-Россби (150). Эффекты сжимаемости в найденных типах волн представлены слагаемыми с частотой Брента–Вайсяля N_0^2 для сжимаемых стратифицированных течений, зависящей как от исходного профиля плотности, так и от исходного профиля давления.

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН В ПЛАЗМЕННОЙ АСТРОФИЗИКЕ

Исследование нелинейных взаимодействий волн вносит вклад в развитие теории различных процессов в плазменной астрофизике, в частно-

сти солнечных сезонов и космической погоды. Нелинейные взаимодействия волн магнито-Россби связывают с длительностью солнечного цикла. Нерегулярные переходы по амплитудам волн напоминают наблюдаемые временные ряды солнечной активности [63]. Развитие слабонелинейной теории найденных типов волн в двумерных и трехмерных вращающихся течениях астрофизической плазмы состоит из выявления трехволновых взаимодействий, вывода амплитудных уравнений и инкрементов неустойчивости для случая распада и усиления волн [43, 77]. Для существования нелинейного взаимодействия между тремя волнами с волновыми векторами $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}_3$ и частотами $\omega(\mathbf{k}_1)$, $\omega(\mathbf{k}_2)$ и $\omega(\mathbf{k}_3)$, необходимо, чтобы их дисперсионные соотношения удовлетворяли условию синхронизма [121]

$$\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \quad \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3. \quad (151)$$

Чтобы определить, существуют ли такие три волны, удовлетворяющие условию синхронизма (151), используется качественный анализ дисперсионных кривых волн. На графике $\omega(\mathbf{k})$ необходимо изобразить две дисперсионные кривые, смещенные друг относительно друга. Первое слагаемое $\omega(\mathbf{k}_1)$ в условии синхронизма (151) задает точку $(k_1, \omega(k_1))$ на дисперсионной кривой. На смещенной дисперсионной кривой слагаемое $\omega(\mathbf{k}_2)$ задает точку $(k_2, \omega(k_2))$. Если при смещении относительно начала координат одной из дисперсионных кривых она пересечет другую в некоторой точке $(k_3, \omega(k_3))$, то это будет означать выполнение условия синхронизма [121]. Таким образом для всех найденных типов волн необходимо проанализировать их дисперсионные кривые на выполнение условия синхронизма.

Для каждой возможной конфигурации трехволнового взаимодействия существует система амплитудных уравнений, предполагающая наличие неустойчивостей типа распад и усиление. Вывод системы уравнений для амплитуд трех взаимодействующих волн, удовлетворяющих условию синхронизма (151), производится асимптотическим методом многих масштабов. Детальное описание метода многих масштабов в магнитогидродинамических течениях вращающейся плазмы можно найти в [122]. Решение исследуемой системы представляется в виде ряда по малому параметру ϵ

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \epsilon \mathbf{u}_1 + \epsilon^2 \mathbf{u}_2 + \dots, \quad (152)$$

где $\mathbf{u}_0$ — стационарное решение исследуемой системы, $\mathbf{u}_1$ — решение линеаризованной исследуемой системы, $\mathbf{u}_2$ — поправка, описывающая влияние квадратичной нелинейности. Выписав слагаемые, пропорциональные ϵ^2 , получим систему

линейных неоднородных дифференциальных уравнений относительно u_2 , содержащую в правой своей части резонансные слагаемые, приводящие к линейному росту решения (по времени и по координате). Таким образом, нарушается условие сходимости ряда (152) $\varepsilon^2 u_2 \ll \varepsilon u_1$ на больших масштабах. Поэтому, чтобы исключить влияние резонансных слагаемых, введем зависимость амплитуды волны от больших временных и больших пространственных масштабов в виде $u_1(T_1, X_1, Y_1) \exp(i(k_x X_0 + k_y Y_0 - \omega T_0))$. Эволюционное уравнение для медленно меняющейся амплитуды обеспечивает равномерную сходимость асимптотического ряда. Перейдем, таким образом, от аргументов t, x, y к “быстрым” (T_0, X_0, Y_0) и “медленным” аргументам (T_1, X_1, Y_1) в соответствии с соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}, & \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial Y_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial Y_1}. \end{aligned} \quad (153)$$

Подставим в исходную систему выражения (152) и (153) и выпишем слагаемые, пропорциональные ε^2 . В правой части полученной системы уравнений будут стоять нелинейные слагаемые, которые могут вызвать резонанс с оператором левой части. Представим решение линейной системы уравнений в виде суммы трех волн, удовлетворяющих условию синхронизма (151). Для исключения резонансных слагаемых в правой части необходимо воспользоваться условием ортогональности правой части системы ядру оператора левой части, известным как условие совместности. Выписав условие совместности для каждого независимого решения, получим систему уравнений на амплитуды взаимодействующих волн.

Система уравнений на амплитуды ϕ, ψ, χ взаимодействующих волн является универсальной для описания неустойчивостей трехволновых взаимодействий [123] и имеет вид

$$s_1 \phi = f_1 \psi^* \chi, \quad (154)$$

$$s_2 \psi = f_2 \phi^* \chi, \quad (155)$$

$$s_3 \chi = f_3 \phi \psi, \quad (156)$$

где s_i – дифференциальные операторы по “медленным” аргументам T_1, X_1, Y_1, Z_1 ,

$$s_i = t_i \frac{\partial}{\partial T_1} + p_i \frac{\partial}{\partial X_1} + q_i \frac{\partial}{\partial Y_1} + w_i \frac{\partial}{\partial Z_1}. \quad (157)$$

Коэффициенты f_i, t_i, p_i, q_i, w_i зависят только от начальных условий и характеристик взаимодействующих волн.

Система амплитудных уравнений для взаимодействующих волн имеет общий вид (154)–(156) и в предельных случаях описывает два следующих варианта изменения системы [123]:

- *распад волны* с частотой $\omega_1(\mathbf{k}_1)$ на две волны с частотами $\omega_2(\mathbf{k}_2)$ и $\omega_3(\mathbf{k}_3)$: данная неустойчивость реализуется, когда амплитуда одной из волн много больше амплитуд двух других волн ($\phi \gg \psi, \chi$, $\phi = \phi_0$); инкремент такой неустойчивости имеет вид: $\Gamma = \sqrt{f_2 f_3 / t_2 t_3} |\phi_0| > 0$;

- *линейный рост волны* с частотой $\omega_1(\mathbf{k}_1)$ в результате усиления двумя волнами с частотами $\omega_2(\mathbf{k}_2)$ и $\omega_3(\mathbf{k}_3)$: такой линейный рост одной из взаимодействующих волн реализуется, когда ее амплитуда много меньше амплитуд двух других волн ($\phi \ll \psi, \chi$, $\psi = \psi_0, \chi = \chi_0$); в таком случае амплитуда волны возрастает линейно по медленному времени T_1 со скоростью $\kappa = (f_1 / |t_1|) |\psi_0 \chi_0|$.

Несмотря на общий вид амплитудных уравнений (154)–(156) и инкрементов неустойчивости, они различны для каждого типа трехволновых взаимодействий. Различие в неявном виде представлено в коэффициентах f_i, t_i, p_i, q_i, w_i , которые не только могут иметь различные выражения, но и содержат в неявном виде собственные вектора и частоты, характерные для определенного типа волны. Таким образом, полученные в [43, 48, 49, 77, 78, 88] амплитудные уравнения для приведенных ниже нелинейных взаимодействий различны для каждой конфигурации из трех взаимодействующих волн. Инкременты неустойчивостей, полученные в [43, 48, 49, 77, 78, 88], и скорости линейного роста также отличаются для каждого случая трехволнового взаимодействия. Далее в разделах 4.1 и 4.2 показаны все возможные варианты трехволновых взаимодействий для найденных типов волн и описаны распадные неустойчивости и линейный рост амплитуд в специальных начальных условиях. Детальное описание слабонелинейной теории волн во вращающихся течениях астрофизической плазмы, содержащий выражения для коэффициентов f_i, t_i, p_i, q_i, w_i , представлено в работах [43, 48, 49, 77] для двумерных течений и в работах [78, 88] для трехмерных течений.

4.1. Нелинейные взаимодействия волн в двумерных вращающихся течениях

4.1.1. Приближение однослойной мелкой воды для несжимаемой нестратифицированной вращающейся плазмы. Проанализируем дисперсионные соотношения магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн в мелкой воде на стандартной f -плоскости. Для волн во внешнем вертикальном магнитном поле, как и

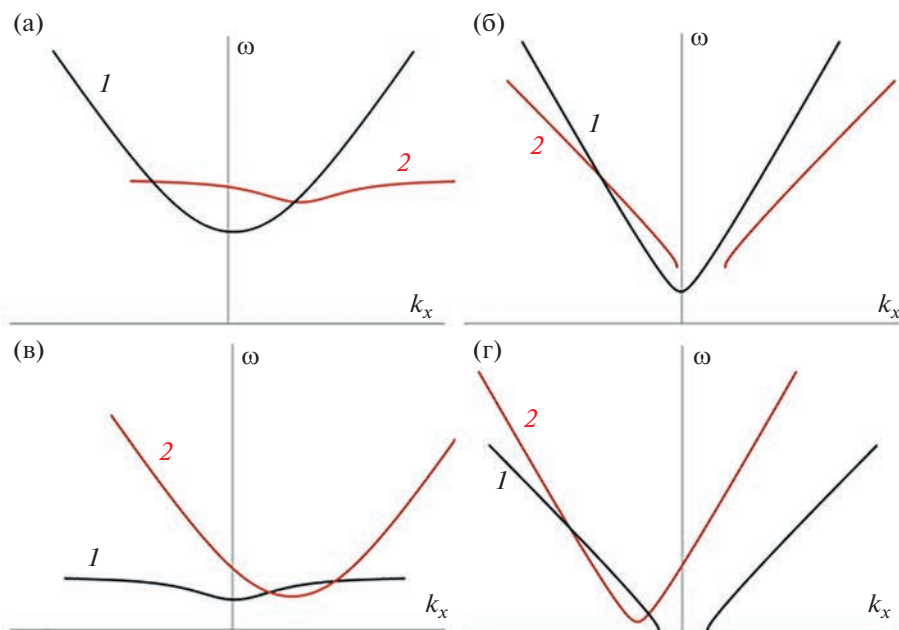


Рис. 10. Условие синхронизма для трех волн в однослойной мелкой воде: две магнитные инерционно-гравитационные волны и магнитострофическая волна во внешнем вертикальном магнитном поле (а): $1 - \omega_{MIG_{V_1}}(k_x)$, $2 - \omega_{MS_{V_1}}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MIG_{V_1}}(k_{x_c})$; в горизонтальном магнитном поле (б): $1 - \omega_{MIG_{H_1}}(k_x)$, $2 - \omega_{MS_{H_1}}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MIG_{H_1}}(k_{x_c})$; две магнитострофические волны и магнитная инерционно-гравитационная волна во внешнем вертикальном магнитном поле (в): $1 - \omega_{MS_{V_1}}(k_x)$, $2 - \omega_{MIG_{V_1}}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MS_{V_1}}(k_{x_c})$; в горизонтальном магнитном поле (г): $1 - \omega_{MS_{H_1}}(k_x)$, $2 - \omega_{MIG_{H_1}}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MS_{H_1}}(k_{x_c})$.

для волн в горизонтальном магнитном поле условие синхронизма выполняется для следующих конфигураций трех волн:

- две магнитные инерционно-гравитационные волны и магнитострофическая волна в мелкой воде во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 10а) и в горизонтальном магнитном поле (рис. 10б);
- две магнитострофические волны и магнитная инерционно-гравитационная волна в мелкой воде во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 10в) и в горизонтальном магнитном поле (рис. 10г).

Таким образом, при взаимодействии магнитных инерционно-гравитационных волн и магнитострофических волн в мелкой воде во внешнем вертикальном магнитном поле возможно возникновение следующих неустойчивостей:

- распад магнитной инерционно-гравитационной волны на магнитострофическую и магнитную инерционно-гравитационную волну;
- распад магнитострофической волны на магнитную инерционно-гравитационную и магнитострофическую волны.

При взаимодействии магнитных инерционно-гравитационных волн и магнитострофических

волн в мелкой воде в горизонтальном магнитном поле возможно возникновение следующих неустойчивостей:

- распад магнитной инерционно-гравитационной волны на магнитострофическую и магнитную инерционно-гравитационную волну;
- распад магнитострофической волны на магнитную инерционно-гравитационную и магнитострофическую волны.

Проанализируем дисперсионные соотношения магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби в мелкой воде на стандартной β -плоскости. Для волн во внешнем вертикальном магнитном поле, как и для волн в горизонтальном магнитном поле условие синхронизма выполняется для следующих конфигураций трех волн:

- три волны магнито-Россби в мелкой воде во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 11а) и в горизонтальном магнитном поле (рис. 11б);
- две волны магнито-Россби и магнитная инерционно-гравитационная волна в мелкой воде во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 11в) и в горизонтальном магнитном поле (рис. 11г);

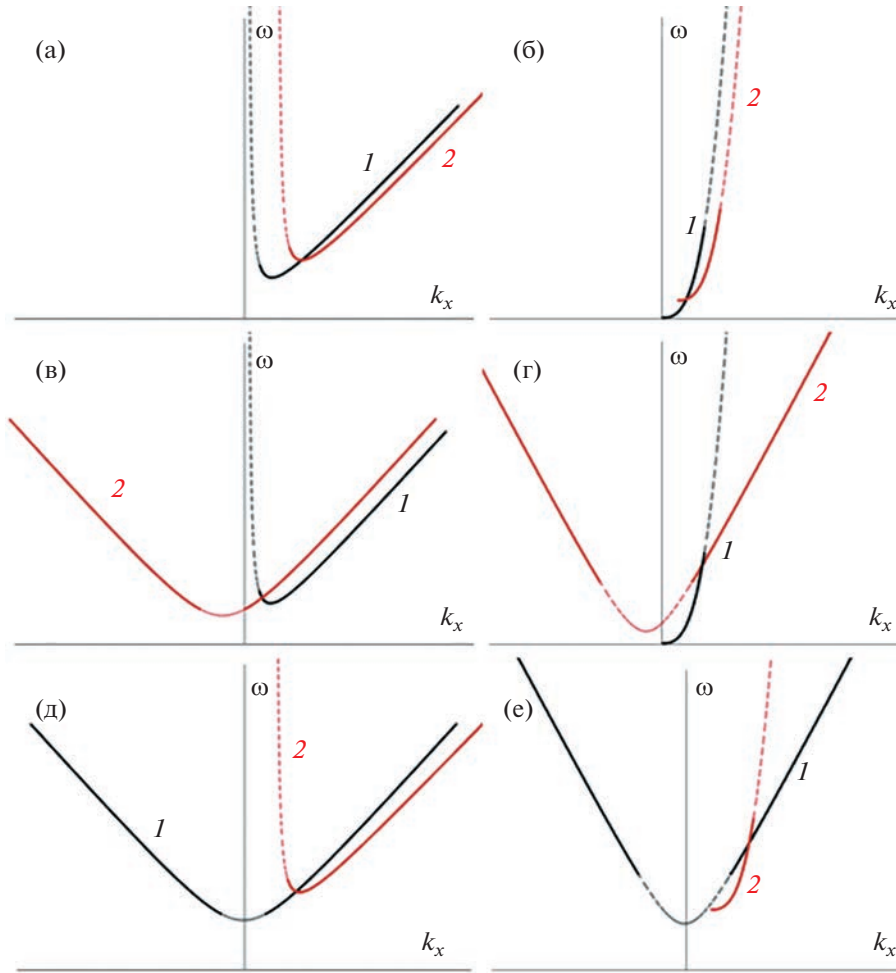


Рис. 11. Условие синхронизма для трех волн в однослойной мелкой воде: три волны магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле (а): $1 - \omega_{MR_{V_1}}(k_x)$, $2 - \omega_{MR_{V_1}}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MR_{V_1}}(k_{x_c})$; три волны магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле (б): $1 - \omega_{MR_{H_1}}(k_x)$, $2 - \omega_{MR_{H_1}}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MR_{H_1}}(k_{x_c})$; две волны магнито-Россби и магнитная инерционно-гравитационная волна во внешнем вертикальном магнитном поле (в): $1 - \omega_{MR_{V_1}}(k_x)$, $2 - \omega_{MIG_{V_1}}(k_x + k_{x_c}) - \omega_{MR_{V_1}}(k_{x_c})$; две волны магнито-Россби и магнитная инерционно-гравитационная волна в горизонтальном магнитном поле (г): $1 - \omega_{MR_{H_1}}(k_x)$, $2 - \omega_{MIG_{H_1}}(k_x + k_{x_c}) - \omega_{MR_{H_1}}(k_{x_c})$; две магнитные инерционно-гравитационные волны и волна магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле (д): $1 - \omega_{MIG_{V_1}}(k_x)$, $2 - \omega_{MR_{V_1}}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MIG_{V_1}}(k_{x_c})$; две магнитные инерционно-гравитационные волны и волна магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле (е): $1 - \omega_{MIG_{H_1}}(k_x)$, $2 - \omega_{MR_{H_1}}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MIG_{H_1}}(k_{x_c})$.

- две магнитные инерционно-гравитационные волны и волна магнито-Россби в мелкой воде во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 11д) и в горизонтальном магнитном поле (рис. 11е).

Важно отметить, что в силу различия в динамике магнитных инерционно-гравитационных волн в мелкой воде на β -плоскости и магнитных инерционно-гравитационных волн в мелкой воде на f -плоскости, в случае β -плоскости условие

синхронизма не выполняется для трех магнитных инерционно-гравитационных волн [113].

Таким образом, при взаимодействии магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби в мелкой воде во внешнем вертикальном магнитном поле возможно развитие возникновений следующих неустойчивостей:

- распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби или магнитной инерционно-гравитационную волну и волну магнито-Россби;

- распад магнитной инерционно-гравитационной волны на волну магнито-Россби и магнитную инерционно-гравитационную волну.

При взаимодействии магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби в мелкой воде в горизонтальном магнитном поле возможно возникновение следующих неустойчивостей:

- распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби или магнитную инерционно-гравитационную волну и волну магнито-Россби;
- распад магнитной инерционно-гравитационной волны на волну магнито-Россби и магнитную инерционно-гравитационную волну.

4.1.2. Приближение двуслойной мелкой воды для несжимаемой стратифицированной вращающейся плазмы. Проанализируем дисперсионные соотношения магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби с учетом эффектов стратификации в двуслойной мелкой воде на стандартной β -плоскости. Для волн во внешнем вертикальном магнитном поле, как и для волн в горизонтальном магнитном поле условие синхронизма выполняется для следующих конфигураций трех волн:

- три волны магнито-Россби в двуслойной мелкой воде во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 12а) и в горизонтальном магнитном поле (рис. 12б);
- две волны магнито-Россби и магнитная инерционно-гравитационная волна в двуслойной мелкой воде во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 12в) и в горизонтальном магнитном поле (рис. 12г);
- две магнитные инерционно-гравитационные волны и волна магнито-Россби в двуслойной мелкой воде во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 12д) и в горизонтальном магнитном поле (рис. 12е).

Таким образом, при взаимодействии магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби в двуслойной мелкой воде во внешнем вертикальном магнитном поле возможно возникновение следующих неустойчивостей:

- распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби или на магнитную инерционно-гравитационную волну и волну магнито-Россби;
- распад магнитной инерционно-гравитационной волны на волну магнито-Россби и магнитную инерционно-гравитационную волну.

При взаимодействии магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби в мелкой воде в горизонтальном магнитном поле возможно возникновение следующих неустойчивостей:

- распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби или на магнитную инерционно-гравитационную волну и волну магнито-Россби;
- распад магнитной инерционно-гравитационной волны на волну магнито-Россби и магнитную инерционно-гравитационную волну.

4.1.3. Приближение однослойной мелкой воды для нестратифицированной вращающейся плазмы с учетом крупномасштабной сжимаемости. Проанализируем дисперсионные соотношения магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости на стандартной f -плоскости. Для волн во внешнем вертикальном магнитном поле, как и для волн в горизонтальном магнитном поле условие синхронизма выполняется для следующих конфигураций трех волн:

- три магнитные инерционно-гравитационные волны в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном магнитном поле;
- две магнитные инерционно-гравитационные волны и магнитострофическая волна в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 13а) и в горизонтальном магнитном поле (рис. 13б);
- две магнитострофические волны и магнитная инерционно-гравитационная волна в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 13в) и в горизонтальном магнитном поле (рис. 13г).

Таким образом, при взаимодействии магнитных инерционно-гравитационных волн и магнитострофических волн в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости во внешнем вертикальном магнитном поле возможно возникновение следующих неустойчивостей:

- распад магнитной инерционно-гравитационной волны на магнитострофическую и магнитную инерционно-гравитационную волны;
- распад магнитострофической волны на магнитную инерционно-гравитационную и магнитострофическую волны.

При взаимодействии магнитных инерционно-гравитационных волн и магнитострофических волн в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости в горизонтальном магнитном поле возможно возникновение следующих неустойчивостей:

- распад магнитной инерционно-гравитационной волны на магнитострофическую и магнитную инерционно-гравитационную волны;

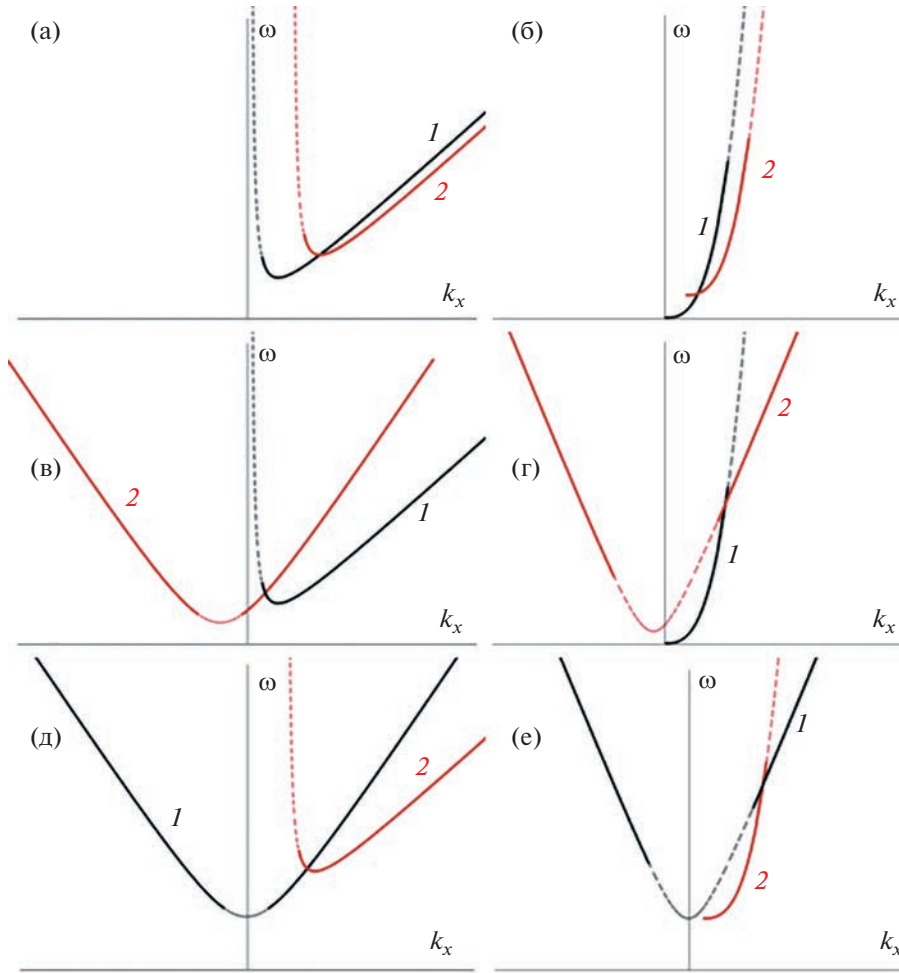


Рис. 12. Условие синхронизма для трех волн в двуслойной мелкой воде: три волны магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле (а): $1 - \omega_{MR_{V_2}}(k_x) + \delta_{MR_{V_2}}(k_x)$, $2 - \omega_{MR_{V_2}}(k_x - k_{xc}) + \delta_{MR_{V_2}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{MR_{V_2}}(k_{xc}) + \delta_{MR_{V_2}}(k_{xc})$; три волны магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле (б): $1 - \omega_{MR_{H_2}}(k_x) + \delta_{MR_{H_2}}(k_x)$, $2 - \omega_{MR_{H_2}}(k_x - k_{xc}) + \delta_{MR_{H_2}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{MR_{H_2}}(k_{xc}) + \delta_{MR_{H_2}}(k_{xc})$; две волны магнито-Россби и магнитная инерционно-гравитационная волна во внешнем вертикальном магнитном поле (в): $1 - \omega_{MR_{V_2}}(k_x) + \delta_{MR_{V_2}}(k_x)$, $2 - \omega_{MIG_{V_2}}(k_x + k_{xc}) + \delta_{MIG_{V_2}}(k_x + k_{xc}) - \omega_{MR_{V_2}}(k_{xc}) - \delta_{MR_{V_2}}(k_{xc})$; две волны магнито-Россби и магнитная инерционно-гравитационная волна в горизонтальном магнитном поле (г): $1 - \omega_{MR_{H_2}}(k_x) + \delta_{MR_{H_2}}(k_x)$, $2 - \omega_{MIG_{H_2}}(k_x + k_{xc}) + \delta_{MIG_{H_2}}(k_x + k_{xc}) - \omega_{MR_{H_2}}(k_{xc}) - \delta_{MR_{H_2}}(k_{xc})$; две магнитные инерционно-гравитационные волны и волна магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле (д): $1 - \omega_{MIG_{V_2}}(k_x) + \delta_{MIG_{V_2}}(k_x)$, $2 - \omega_{MR_{V_2}}(k_x - k_{xc}) + \delta_{MR_{V_2}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{MIG_{V_2}}(k_{xc}) + \delta_{MIG_{V_2}}(k_{xc})$; две магнитные инерционно-гравитационные волны и волна магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле (е): $1 - \omega_{MIG_{H_2}}(k_x) + \delta_{MIG_{H_2}}(k_x)$, $2 - \omega_{MR_{H_2}}(k_x - k_{xc}) + \delta_{MR_{H_2}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{MIG_{H_2}}(k_{xc}) + \delta_{MIG_{H_2}}(k_{xc})$.

- распад магнитоострофической волны на магнитную инерционно-гравитационную и магнитоострофическую волны.

Проанализируем дисперсионные соотношения магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости на стандартной β -плоскости. Для волн во внешнем вер-

тикальном магнитном поле, как и для волн в горизонтальном магнитном поле условие синхронизма выполняется для следующих конфигураций трех волн:

- три волны магнито-Россби в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 14а) и в горизонтальном магнитном поле (рис. 14б);

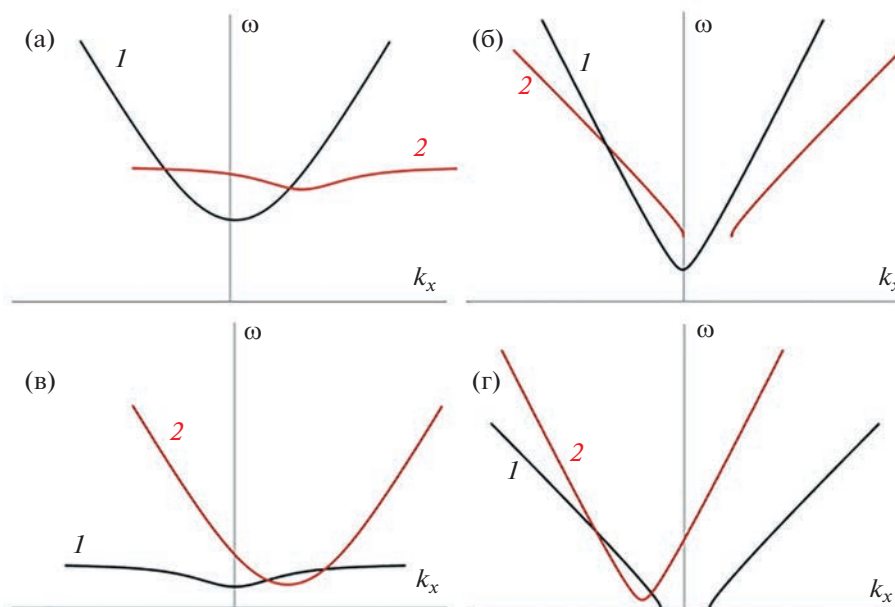


Рис. 13. Условие синхронизма для трех волн в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости: две магнитные инерционно-гравитационные волны и магнитострофическая волна во внешнем вертикальном магнитном поле (а): $1 - \tilde{\omega}_{MIG_v}(k_x)$, $2 - \tilde{\omega}_{MS_v}(k_x - k_{xc}) + \tilde{\omega}_{MIG_v}(k_{xc})$; в горизонтальном магнитном поле (б): $1 - \tilde{\omega}_{MIG_h}(k_x)$, $2 - \tilde{\omega}_{MS_h}(k_x - k_{xc}) + \tilde{\omega}_{MIG_h}(k_{xc})$; две магнитострофические волны и магнитная инерционно-гравитационная волна во внешнем вертикальном магнитном поле (в): $1 - \tilde{\omega}_{MS_v}(k_x)$, $2 - \tilde{\omega}_{MIG_v}(k_x - k_{xc}) + \tilde{\omega}_{MS_v}(k_{xc})$; в горизонтальном магнитном поле (г): $1 - \tilde{\omega}_{MS_h}(k_x)$, $2 - \tilde{\omega}_{MIG_h}(k_x - k_{xc}) + \tilde{\omega}_{MS_h}(k_{xc})$.

- две волны магнито-Россби и магнитная инерционно-гравитационная волна в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 14в) и в горизонтальном магнитном поле (рис. 14г);

- две магнитные инерционно-гравитационные волны и волна магнито-Россби в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 14д) и в горизонтальном магнитном поле (рис. 14е).

Важно отметить, что в силу различия в динамике магнитных инерционно-гравитационных волн в мелкой воде на β -плоскости и магнитных инерционно-гравитационных волн в мелкой воде на f -плоскости, в случае β -плоскости условие синхронизма не выполняется для трех магнитных инерционно-гравитационных волн [113].

Таким образом, при взаимодействии магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости во внешнем вертикальном магнитном поле возможно возникновение следующих неустойчивостей:

- распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби или на магнитную инерционно-гравитационную волну и волну магнито-Россби;

- распад магнитной инерционно-гравитационной волны на волну магнито-Россби и магнитную инерционно-гравитационную волну.

При взаимодействии магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости в горизонтальном магнитном поле возможно возникновение следующих неустойчивостей:

- распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби или на магнитную инерционно-гравитационную волну и волну магнито-Россби;

- распад магнитной инерционно-гравитационной волны на волну магнито-Россби и магнитную инерционно-гравитационную волну.

4.2. Нелинейные взаимодействия волн в трехмерных вращающихся течениях

4.2.1. Приближение Буссинеска для несжимаемой стратифицированной вращающейся плазмы.

Проанализируем дисперсионные соотношения волн в приближении Буссинеска на стандартной f -плоскости. Для найденных в разделе 3.1 волн во вращающейся стратифицированной плазме условие синхронизма выполняется для следующих конфигураций трех волн:

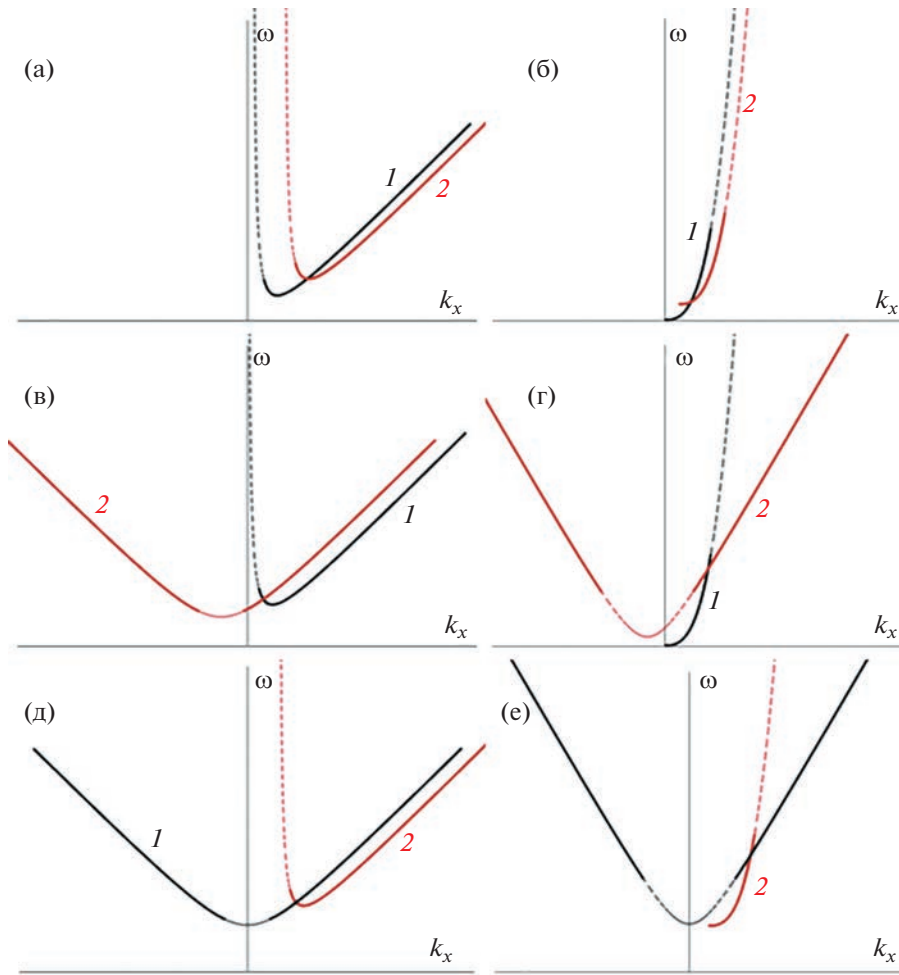


Рис. 14. Условие синхронизма для трех волн в однослойной мелкой воде на стандартной β -плоскости с учетом крупномасштабной сжимаемости: три волны магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле (а): $1 - \tilde{\omega}_{MR_{V_1}}(k_x)$, $2 - \tilde{\omega}_{MR_{V_1}}(k_x - k_{x_c}) + \tilde{\omega}_{MR_{V_1}}(k_{x_c})$; три волны магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле (б): $1 - \tilde{\omega}_{MR_{H_1}}(k_x)$, $2 - \tilde{\omega}_{MR_{H_1}}(k_x - k_{x_c}) + \tilde{\omega}_{MR_{H_1}}(k_{x_c})$; две волны магнито-Россби и магнитная инерционно-гравитационная волна во внешнем вертикальном магнитном поле (в): $1 - \tilde{\omega}_{MR_{V_1}}(k_x)$, $2 - \tilde{\omega}_{MIG_{V_1}}(k_x + k_{x_c}) - \tilde{\omega}_{MR_{V_1}}(k_{x_c})$; две волны магнито-Россби и магнитная инерционно-гравитационная волна в горизонтальном магнитном поле (г): $1 - \tilde{\omega}_{MR_{H_1}}(k_x)$, $2 - \tilde{\omega}_{MIG_{H_1}}(k_x + k_{x_c}) - \tilde{\omega}_{MR_{H_1}}(k_{x_c})$; две магнитные инерционно-гравитационные волны и волна магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле (д): $1 - \tilde{\omega}_{MIG_{V_1}}(k_x)$, $2 - \tilde{\omega}_{MR_{V_1}}(k_x - k_{x_c}) + \tilde{\omega}_{MIG_{V_1}}(k_{x_c})$; две магнитные инерционно-гравитационные волны и волна магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле (е): $1 - \tilde{\omega}_{MIG_{H_1}}(k_x)$, $2 - \tilde{\omega}_{MR_{H_1}}(k_x - k_{x_c}) + \tilde{\omega}_{MIG_{H_1}}(k_{x_c})$.

- две магнитогравитационные волны в приближении Буссинеска и волна Альфвена (рис. 15а);

- две вертикальные магнитные инерционные волны с частотами ω_{z1} и вертикальная магнитная инерционная волна с частотой ω_{z2} (рис. 15б);

- три вертикальные магнитные инерционные волны с частотами ω_{z2} (рис. 15в).

Таким образом, при взаимодействии магнито-гравитационных волн и волн Альфвена в стратифицированных течениях вращающейся плазмы в приближении Буссинеска на стандартной f -плоскости возможно возникновение следующей неустойчивости: распад магнитогравитационной волны на волну Альфвена и магнитогравитационную волну.

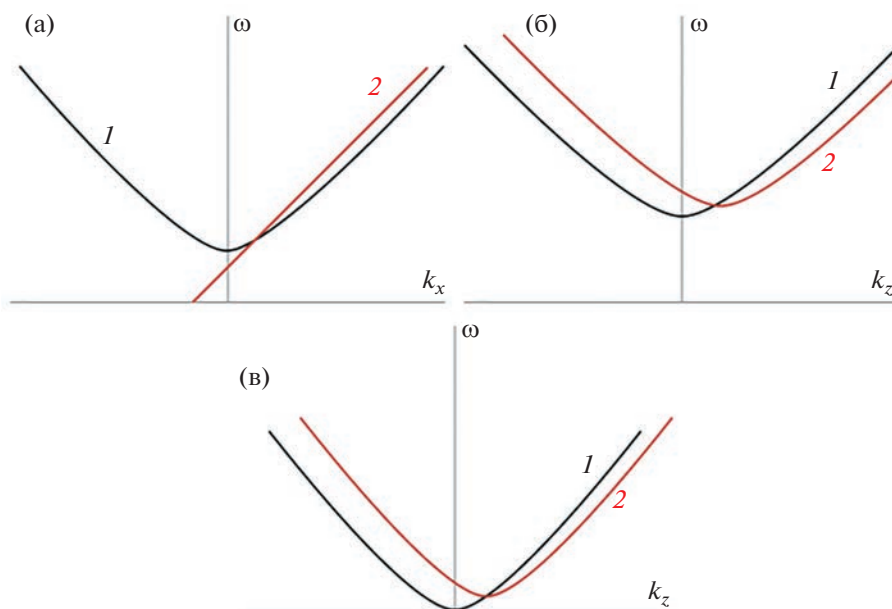


Рис. 15. Условие синхронизма для трех волн на стандартной f -плоскости: две магнитогравитационные волны и волна Альфвена (а): $1 - \omega_{mgr}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_A(k_x - k_{xc}) + \omega_{mgr}(k_{xc})$; три магнитные инерционные волны (б): $1 - \omega_{z1}(k_z)$, $2 - \omega = \omega_{z2}(k_z - k_{zc}) + \omega_{z1}(k_{zc})$; три магнитные инерционные волны (в): $1 - \omega = \omega_{z2}(k_z)$, $2 - \omega = \omega_{z2}(k_z - k_{zc}) + \omega_{z2}(k_{zc})$.

При взаимодействии вертикальных магнитных инерционных волн в стратифицированных течениях вращающейся плазмы в приближении Буссинеска на стандартной f -плоскости возможно возникновение следующих неустойчивостей:

- распад магнитной инерционной волны на магнитную инерционную волну и магнитную инерционную волну;
- распад магнитной инерционной волны на две магнитные инерционные волны.

Проанализируем дисперсионные соотношения волн в приближении Буссинеска на нестандартной f -плоскости. Для найденных в разделе 3.1 волн во вращающейся стратифицированной плазме условие синхронизма выполняется для следующих конфигураций трех волн:

- две магнитострофические волны и магнитная инерционно-гравитационная волна при малом f_H (рис. 16а);
- две магнитострофические волны и магнитная инерционно-гравитационная волна при большом f_H (рис. 16б);
- две магнитные инерционно-гравитационные волны и магнитострофическая волна при большом f_H (рис. 16в).

Таким образом, при взаимодействии магнитогравитационных и магнитострофических волн в стратифицированных течениях вращающейся плазмы в приближении Буссинеска на нестандартной f -плоскости при малом f_H возможно

возникновение следующей неустойчивости: распад магнитной инерционно-гравитационной волны на две магнитострофические волны.

При взаимодействии магнитогравитационных и магнитострофических волн в стратифицированных течениях вращающейся плазмы в приближении Буссинеска на нестандартной f -плоскости при большом f_H возможно возникновение следующей неустойчивости: распад магнитной инерционно-гравитационной волны на две магнитострофические волны или на магнитострофическую и магнитную инерционно-гравитационную волны.

Проанализируем дисперсионные соотношения волн в приближении Буссинеска на стандартной и нестандартной β -плоскости. Для найденных в разделе 3.1 новых типов волн во вращающейся стратифицированной плазме условие синхронизма выполняется для следующих конфигураций трех волн:

- три волны магнито-Россби на стандартной β -плоскости (рис. 17а);
- две магнитогравитационные волны и волна магнито-Россби на стандартной β -плоскости (рис. 17б);
- две волны магнито-Россби и магнитогравитационная волна на стандартной β -плоскости (рис. 17в);
- три низкочастотные волны магнито-Россби на стандартной β -плоскости (рис. 17г) и на нестандартной β -плоскости (рис. 17д).

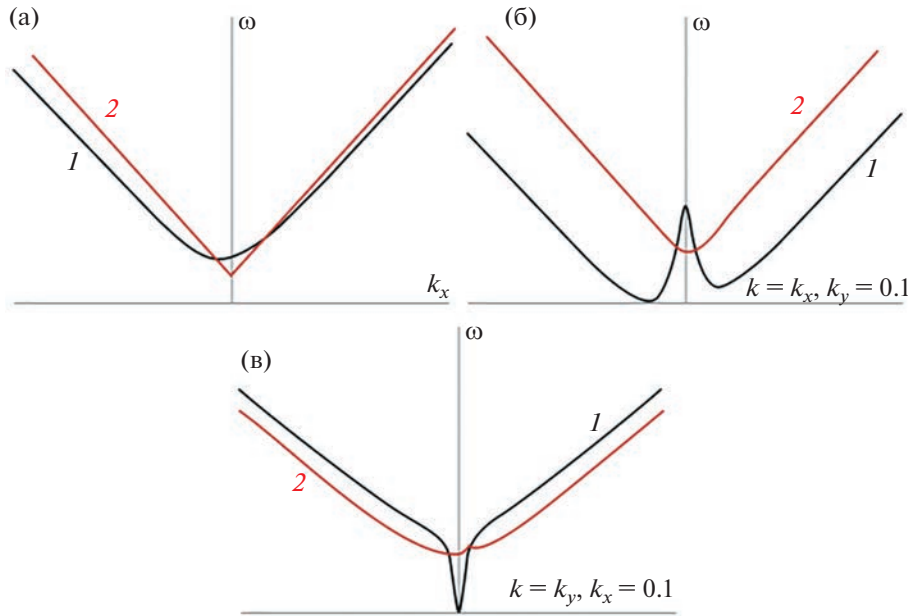


Рис. 16. Условие синхронизма для трех волн на нестандартной f -плоскости: две магнитострофические волны и магнитная инерционно-гравитационная волна (а): $1 - \omega = \omega_{mig_{2D}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mstr_{2D}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mstr_{2D}}(k_{xc})$; две магнитные инерционно-гравитационные волны и магнитострофическая волна при $f_H \gg 1$ (б): $1 - \omega = \omega_{mig_{2D}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mstr_{2D}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mig_{2D}}(k_{xc})$; две магнитные инерционно-гравитационные волны и магнитострофическая волна при $f_H \gg 1$ (в): $1 - \omega = \omega_{mig_{2D}}(k_y)$, $2 - \omega = \omega_{mstr_{2D}}(k_y - k_{yc}) + \omega_{mig_{2D}}(k_{yc})$.

Таким образом, при взаимодействии магнито-гравитационных волн и волн магнито-Россби в стратифицированных течениях вращающейся плазмы в приближении Буссинеска на стандартной β -плоскости возможно возникновение следующих неустойчивостей:

- распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби или магнито-гравитационную волну и волну магнито-Россби;
- распад магнито-гравитационной волны на волну магнито-Россби и магнито-гравитационную волну;
- распад низкочастотной волны магнито-Россби на две низкочастотные волны магнито-Россби.

При взаимодействии низкочастотных волн магнито-Россби в стратифицированных течениях вращающейся плазмы в приближении Буссинеска на нестандартной β -плоскости возможно возникновение следующей неустойчивости: распад низкочастотной волны магнито-Россби на две низкочастотные волны магнито-Россби.

4.2.2. Неупругое приближение для сжимаемой стратифицированной вращающейся плазмы. Проанализируем дисперсионные соотношения волн в неупругом приближении на стандартной f -плоскости. Для найденных в разделе 3.2 волн в сжимаемой вращающейся стратифицированной плазме

условие синхронизма выполняется для следующих конфигураций трех волн:

- две магнито-гравитационные волны в неупругом приближении и волна Альфвена (рис. 18а);
- две магнитострофические и магнитная инерционно-гравитационная волны в вертикальном магнитном поле (рис. 18б, г, д);
- две магнитные инерционно-гравитационные и магнитострофическая волны в вертикальном магнитном поле (рис. 18в);
- три магнитострофические волны в вертикальном магнитном поле (рис. 18е).

Таким образом при взаимодействии магнито-гравитационных волн и волн Альфвена в стратифицированных течениях сжимаемой вращающейся плазмы в неупругом приближении на стандартной f -плоскости возможно возникновение следующей неустойчивости: распад или усиление магнито-гравитационной волны при участии волны Альфвена и магнито-гравитационной волны.

При взаимодействии магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн в вертикальном магнитном поле в стратифицированных течениях сжимаемой вращающейся плазмы в неупругом приближении на стандартной f -плоскости возможно возникновение следующих неустойчивостей:

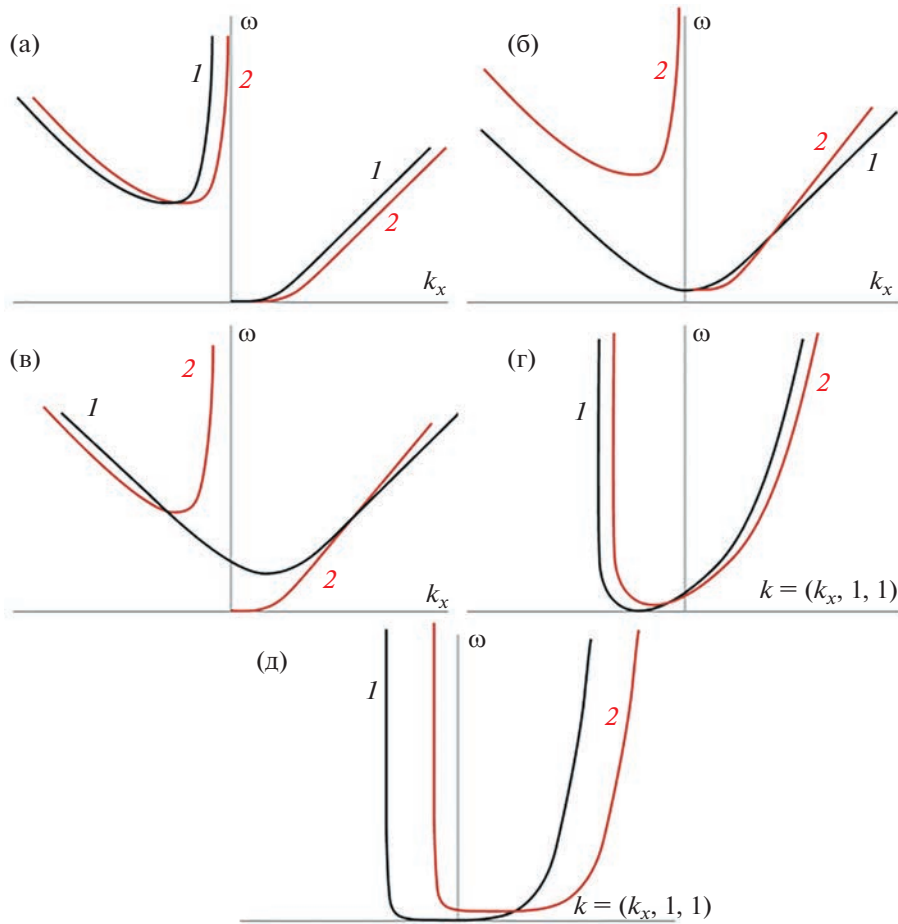


Рис. 17. Условие синхронизма для трех волн: три волны магнито-Россби на стандартной β -плоскости (а): $1 - \omega = \omega_{MR_1}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{MR_1}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MR_1}(k_{x_c})$; две магнитогравитационные волны и волна магнито-Россби на стандартной β -плоскости (б): $1 - \omega = \omega_{mgr}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{MR_1}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{mgr}(k_{x_c})$; две волны магнито-Россби и магнитогравитационная волна на стандартной β -плоскости (в): $1 - \omega = \omega_{MR_1}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mgr}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MR_1}(k_{x_c})$; три низкочастотные волны магнито-Россби на стандартной β -плоскости (г): $1 - \omega = \omega_{MR_{3D}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{MR_{3D}}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MR_{3D}}(k_{x_c})$; три низкочастотные волны магнито-Россби на нестандартной β -плоскости (д): $1 - \omega = \omega_{MR_{3D}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{MR_{3D}}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MR_{3D}}(k_{x_c})$.

- распад магнитофической волны на магнитную инерционно-гравитационную и магнитофическую волны, или две магнитные инерционно-гравитационные волны, или магнитофическую и магнитную инерционно-гравитационную волны, или две магнитофические волны;

- распад магнитной инерционно-гравитационной волны на две магнитофические волны.

Проанализируем дисперсионные соотношения волн в неупругом приближении на нестандартной f -плоскости. Для магнитных инерционно-гравитационных волн с принципиально новым дисперсионным соотношением и волн Альфвена в сжимаемой вращающейся стратифи-

цированной плазме условие синхронизма выполняется для следующих конфигураций трех волн:

- две магнитные инерционно-гравитационные волны и волна Альфвена (рис. 19а);
- три магнитные инерционно-гравитационные волны (рис. 19б).

Таким образом, при взаимодействии магнитных инерционно-гравитационных волн с принципиально новым дисперсионным соотношением и волн Альфвена в стратифицированных течениях сжимаемой вращающейся плазмы в неупругом приближении на нестандартной f -плоскости возможно возникновение следующей неустойчивости: распад магнитной инерционно-гравитацион-

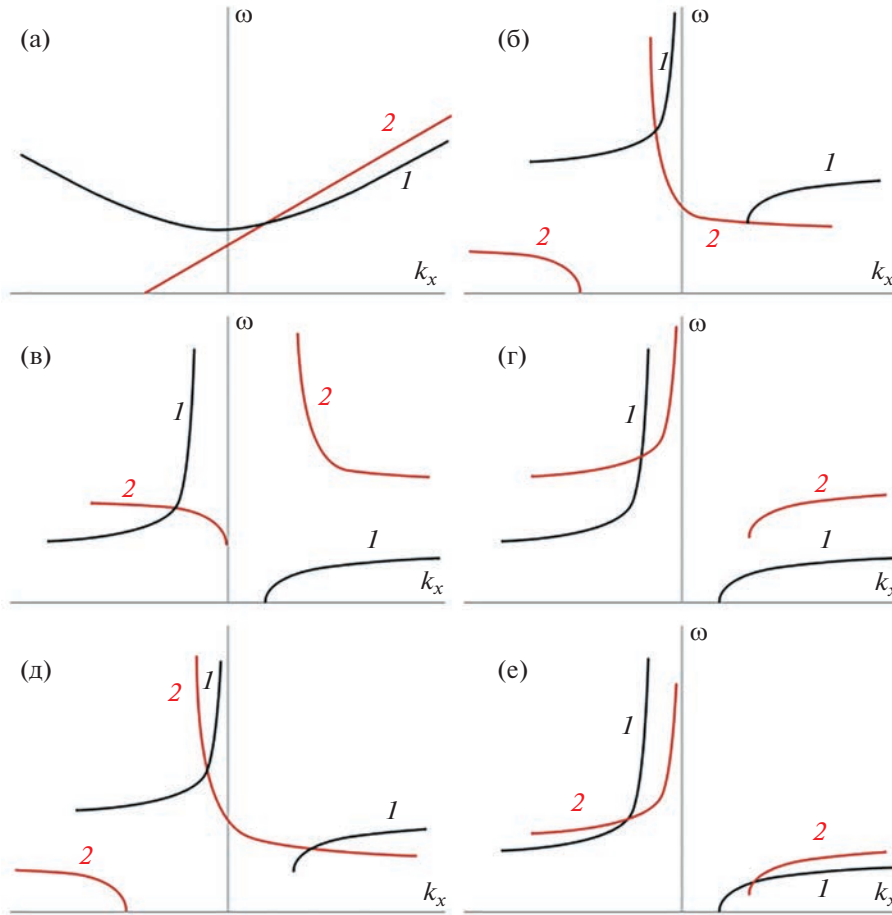


Рис. 18. Условие синхронизма для трех волн на стандартной f -плоскости: две магнитогравитационные волны и волна Альфвена (а): $1 - \omega = \omega_{mgr}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_A(k_x - k_{xc}) + \omega_{mgr}(k_{xc})$; две магнитострофические волны и магнитная инерционно-гравитационная волна (б): $1 - \omega = \omega_{mstr_{B_z}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mig_{B_z}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mstr_{B_z}}(k_{xc})$; магнитострофическая волна и две магнитные инерционно-гравитационные волны (в): $1 - \omega = \omega_{mstr_{B_z}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mig_{B_z}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mig_{B_z}}(k_{xc})$; две магнитострофические волны и магнитная инерционно-гравитационная волна (г): $1 - \omega = \omega_{mstr_{B_z}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mstr_{B_z}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mig_{B_z}}(k_{xc})$; магнитная инерционно-гравитационная волна и две магнитострофические волны (д): $1 - \omega = \omega_{mig_{B_z}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mstr_{B_z}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mstr_{B_z}}(k_{xc})$; три магнитострофические волны (е): $1 - \omega = \omega_{mstr_{B_z}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mstr_{B_z}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mstr_{B_z}}(k_{xc})$.

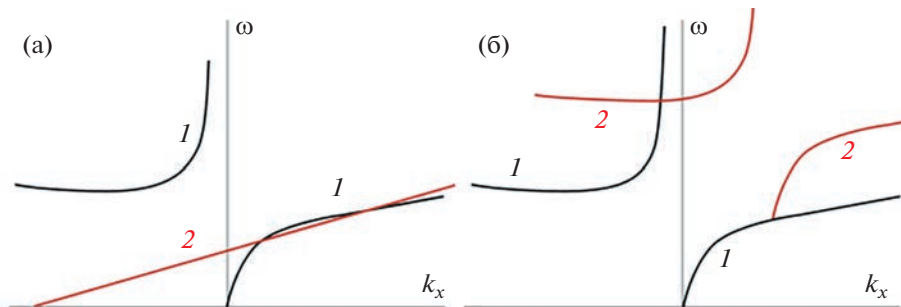


Рис. 19. Условие синхронизма для трех волн на нестандартной f -плоскости: две магнитные инерционно-гравитационные волны и волна Альфвена (а): $1 - \omega = \omega_{mig_{x_1}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_A(k_x - k_{xc}) + \omega_{mig_{x_1}}(k_{xc})$; три магнитные инерционно-гравитационные волны (б): $1 - \omega = \omega_{mig_{x_1}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mig_{x_1}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mig_{x_1}}(k_{xc})$.

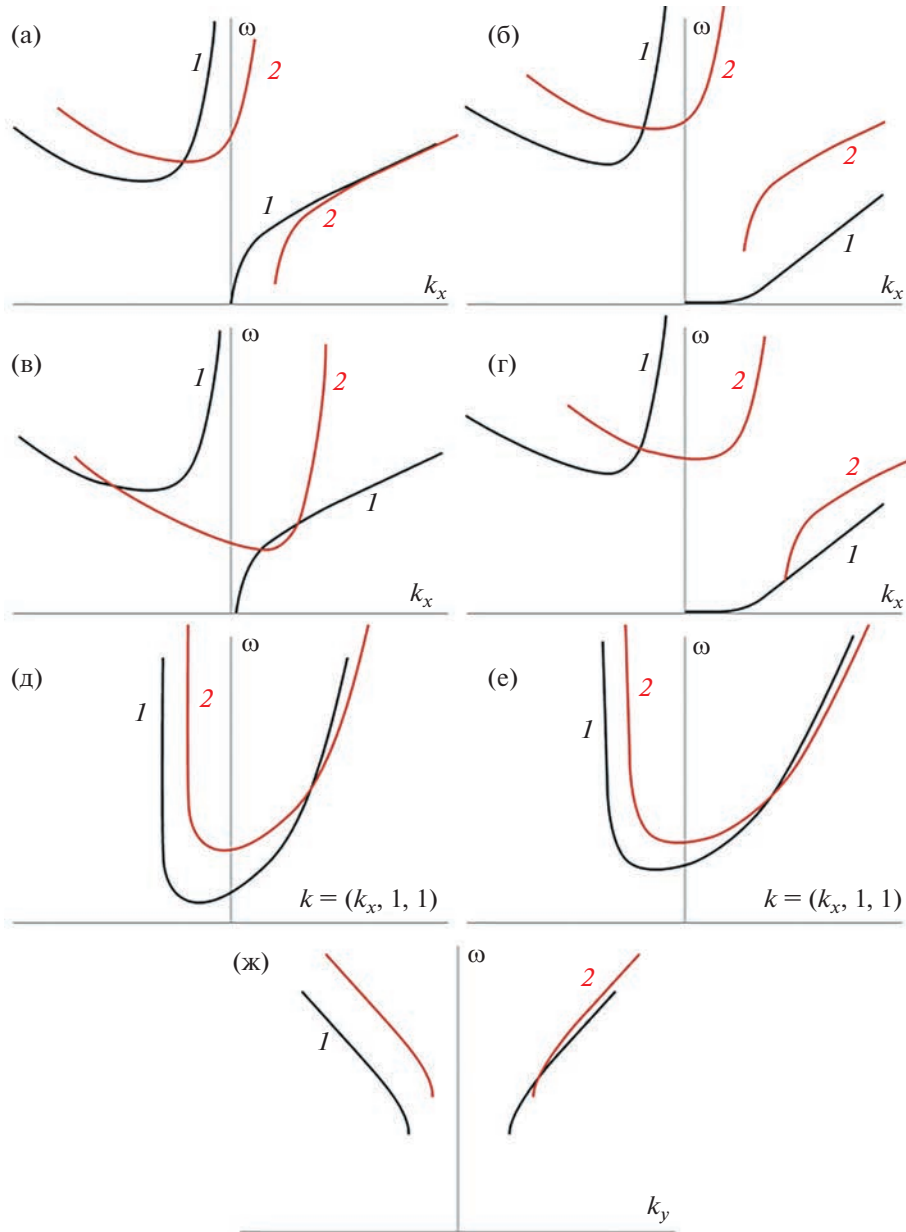


Рис. 20. Условие синхронизма для трех волн: две сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны и волна магнито-Россби на нестандартной β -плоскости: $1 - \omega = \omega_{mig_1}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mig_1}(k_x - k_{xc}) + \omega_{MR_1}(k_{xc})$ (а); $1 - \omega = \omega_{MR_1}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mig_1}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mig_1}(k_{xc})$ (б); две волны магнито-Россби и сжимаемая магнитная инерционно-гравитационная волна на нестандартной β -плоскости: $1 - \omega = \omega_{mig_1}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{MR_1}(k_x - k_{xc}) + \omega_{MR_1}(k_{xc})$ (в); $1 - \omega = \omega_{MR_1}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mig_1}(k_x - k_{xc}) + \omega_{MR_1}(k_{xc})$ (г); три сжимаемые низкочастотные волны магнито-Россби на стандартной β -плоскости (д): $1 - \omega = \omega_{MR_{3D}}(\mathbf{k})$, $2 - \omega = \omega_{MR_{3D}}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_c) + \omega = \omega_{MR_{3D}}(\mathbf{k}_c)$; на нестандартной β -плоскости (е): $1 - \omega = \omega_{MR_{3D}}(\mathbf{k})$, $2 - \omega = \omega_{MR_{3D}}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_c) + \omega = \omega_{MR_{3D}}(\mathbf{k}_c)$; две сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны и сжимаемая магнитострофическая волна с параметром β на нестандартной β -плоскости (ж): $1 - \omega = \omega_{mig_\beta}(k_y)$, $2 - \omega = \omega_{mig_\beta}(k_y - k_{yc}) + \omega_{mstr_\beta}(k_{yc})$.

ной волны на волну Альфвена и магнитную инерционно-гравитационную волну или на две магнитные инерционно-гравитационные волны.

Проанализируем дисперсионные соотношения волн в приближении Буссинеска на стандартной и нестандартной β -плоскости. Для най-

денных в разделе 3.2 новых типов волн в сжимаемой вращающейся стратифицированной плазме условие синхронизма выполняется для следующих конфигураций трех волн:

- две магнитные инерционно-гравитационные волны и волна магнито-Россби на нестандартной β -плоскости (рис. 20а, б);
- две волны магнито-Россби и магнитная инерционно-гравитационная волна на нестандартной β -плоскости (рис. 20в, г);
- три низкочастотные волны магнито-Россби на стандартной β -плоскости (рис. 20д) и на нестандартной β -плоскости (рис. 20е);
- две магнитные инерционно-гравитационные и магнитострофическая волны с параметром β на нестандартной β -плоскости (рис. 20ж).

Таким образом, при взаимодействии трех низкочастотных волн магнито-Россби в стратифицированных течениях сжимаемой вращающейся плазмы в неупругом приближении на стандартной β -плоскости возможно возникновение следующей неустойчивости: распад низкочастотной волны магнито-Россби на две низкочастотные волны магнито-Россби.

При взаимодействии магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби в стратифицированных течениях сжимаемой вращающейся плазмы в неупругом приближении на нестандартной β -плоскости возможно возникновение следующих неустойчивостей:

- распад магнитной инерционно-гравитационной волны на магнитную инерционно-гравитационную волну и волну магнито-Россби или две волны магнито-Россби;
- распад волны магнито-Россби на магнитную инерционно-гравитационную волну и волну магнито-Россби или две магнитные инерционно-гравитационные волны;
- распад низкочастотной волны магнито-Россби на две низкочастотные волны магнито-Россби.

При взаимодействии магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн с параметром β в стратифицированных течениях сжимаемой вращающейся плазмы в неупругом приближении на нестандартной β -плоскости возможно возникновение следующей неустойчивости: распад магнитной инерционно-гравитационной волны на магнитную инерционно-гравитационную и магнитострофическую волны.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приведен обзор современных исследований волновых процессов в астрофизической плазме. Отметим наиболее важные результаты в этом направлении.

Магнитогидродинамические уравнения мелкой воды используются для описания космической и астрофизической плазмы и являются аналогом уравнений мелкой воды в геофизической

гидродинамике. При выводе магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды из полной системы уравнений магнитной гидродинамики несжимаемой плазмы усреднением по высоте слоя предполагается, что распределение давлений удовлетворяет условию гидростатики, а толщина рассматриваемого слоя плазмы мала по отношению к характерному горизонтальному линейному размеру задачи. Важным достижением является развитие теории мелкой воды для астрофизической плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле с корректным учетом условия бездивергентности магнитного поля. В развитой теории поле скоростей содержит только горизонтальные компоненты, в то время как магнитное поле остается трехкомпонентным. Магнитогидродинамическая теория мелкой воды обобщена на случай сжимаемых течений, а также на случай стратифицированных магнитогидродинамических течений плазмы, с учетом внешнего магнитного поля.

Магнитогидродинамические уравнения в приближении мелкой воды во внешнем магнитном поле могут быть использованы для описания течений плазмы на Солнце, течений атмосфер нейтронных звезд, для изучения растекания материи в аккреционных дисках нейтронных звезд, магнитоактивных атмосфер экзопланет, захваченных приливами несущей звезды. Выявленная трехкомпонентность магнитного поля в таких течениях, а также учет крупномасштабной сжимаемости представляются важными для анализа недавних экспериментальных наблюдений волн Россби, а также для понимания наблюдательных данных о солнечной активности и в развитии моделей и идей долговременной изменчивости Солнца. Теория волн Россби может быть использована для анализа данных об R -модах солнечных и звездных осцилляций. Магнитогидродинамические уравнения двуслойной мелкой воды представляют собой единственную возможность самосогласованного учета внешнего магнитного поля и стратификации. Учет стратификации в магнитогидродинамических моделях мелкой воды для вращающейся плазмы важен для анализа осцилляций R -моды во вращающихся звездах и на Солнце и позволяет существенно расширить возможности для интерпретации имеющихся данных наблюдений крупномасштабных волн Россби на Солнце. Также резонансные взаимодействия магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби на β -плоскости могут оказаться принципиально важными для интерпретации различных явлений в плазменной астрофизике, в особенности солнечных сезонов.

Развиты линейная и нелинейная теории магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн во внешнем вертикальном и в горизонтальном магнитных полях. Показано, что магнитные инерционно-гравитационные и магнитострофические волны во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном поле ис-

пытаются трехволновые взаимодействия. Показано существование распадных неустойчивостей: распад магнитной инерционно-гравитационной волны на магнитострофическую и магнитную инерционно-гравитационную волну; распад магнитострофической волны на магнитную инерционно-гравитационную и магнитострофическую волны, распад магнитной инерционно-гравитационной волны на магнитострофическую и магнитную инерционно-гравитационную волну, распад магнитострофической волны на магнитную инерционно-гравитационную и магнитострофическую волны. Обнаружен эффект линейного нарастания амплитуды одной из взаимодействующих волн в поле двух других волн: усиление магнитной инерционно-гравитационной волны в поле либо двух магнитных инерционно-гравитационных волн, либо магнитострофической и магнитной инерционно-гравитационной волн, усиление магнитострофической волны в поле магнитной инерционно-гравитационной и магнитострофической волн, усиление магнитной инерционно-гравитационной волны в поле либо двух магнитных инерционно-гравитационных волн, либо магнитострофической и магнитной инерционно-гравитационной волн, усиление магнитострофической волны в поле магнитной инерционно-гравитационной и магнитострофической волн. Учет крупномасштабной сжимаемости приводит к изменениям в групповой и фазовой скоростях магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн, а также к изменениям в выражениях для коэффициентов трехволновых взаимодействий и инкрементов параметрических неустойчивостей.

Развиты линейная и нелинейная теории волн магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле, показано, что волны магнито-Россби в магнитогидродинамическом приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном магнитном поле испытывают трехволновые взаимодействия в слабонелинейном приближении. Показано существование распадных неустойчивостей: распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби или магнитную инерционно-гравитационную волну и волну магнито-Россби, распад магнитной инерционно-гравитационной волны на волну магнито-Россби и магнитную инерционно-гравитационную волну, распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби или магнитную инерционно-гравитационную волну и волну магнито-Россби, распад магнитной инерционно-гравитационной волны на волну магнито-Россби и магнитную инерционно-гравитационную волну. Обнаружен эффект линейного нарастания амплитуды одной из взаимодействующих волн в поле двух других волн: усиление волны магнито-Россби в поле либо двух волн магнито-Россби, либо магнитной инерционно-гравитационной волны и волны магнито-Россби, усиление магнитной инерционно-гравитационной волны в поле волны магнито-Россби и магнитной инерционно-гравитационной волны, усиление волны магнито-Россби в поле либо двух волн магнито-Россби, либо магнитной инерционно-гравитационной волны и волны магнито-Россби, усиление магнитной инерционно-гравитационной волны в поле волны магнито-Россби и магнитной инерционно-гравитационной волны. Найдены инкременты распадных неустойчивостей.

инерционно-гравитационной волны в поле волны магнито-Россби и магнитной инерционно-гравитационной волны, усиление волны магнито-Россби в поле либо двух волн магнито-Россби, либо магнитной инерционно-гравитационной волны и волны магнито-Россби, усиление магнитной инерционно-гравитационной волны в поле волны магнито-Россби и магнитной инерционно-гравитационной волны. Найдены коэффициенты взаимодействия, инкременты неустойчивостей. Учет сжимаемости приводит к изменениям в групповой и фазовой скоростях волн магнито-Россби, а также к изменениям в выражениях для коэффициентов трехволновых взаимодействий и инкрементов неустойчивостей.

Развиты линейная и нелинейная теории волновых процессов во вращающейся стратифицированной плазме в приближении двуслойной мелкой воды. Найдены дисперсионные соотношения для магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби на β -плоскости и поправки к ним, описывающие влияние стратификации во внешнем вертикальном и в горизонтальном магнитных полях. Показано, что учет стратификации влияет на групповые и фазовые скорости волн. Выявлены трехволновые взаимодействия магнитных инерционно-гравитационных волн и волн магнито-Россби. Показано существование распадных неустойчивостей для волн во вращающихся стратифицированных течениях в приближении мелкой воды: распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби или на магнитную инерционно-гравитационную волну и волну магнито-Россби, распад магнитной инерционно-гравитационной волны на волну магнито-Россби и магнитную инерционно-гравитационную волну, распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби или на магнитную инерционно-гравитационную волну и волну магнито-Россби, распад магнитной инерционно-гравитационной волны на волну магнито-Россби и магнитную инерционно-гравитационную волну. Обнаружен эффект линейного нарастания амплитуды одной из взаимодействующих волн в поле двух других волн: усиление волны магнито-Россби в поле либо двух волн магнито-Россби, либо магнитной инерционно-гравитационной волны и волны магнито-Россби, усиление магнитной инерционно-гравитационной волны в поле волны магнито-Россби и магнитной инерционно-гравитационной волны, усиление волны магнито-Россби в поле либо двух волн магнито-Россби, либо магнитной инерционно-гравитационной волны и волны магнито-Россби, усиление магнитной инерционно-гравитационной волны в поле волны магнито-Россби и магнитной инерционно-гравитационной волны. Найдены инкременты распадных неустойчивостей.

Магнитогидродинамические уравнения в приближении Буссинеска учитывают трехмерные эффекты и позволяют детально исследовать волновые процессы в магнитной гидродинамике

стратифицированной плазмы. Учет горизонтальной составляющей силы Кориолиса является особенно принципиальным при изучении экваториальных течений. Отметим, что волны Россби обнаружены именно в экваториальной зоне Солнца. Развита линейная и нелинейная теории волновых процессов во вращающейся стратифицированной плазме в приближении Буссинеска. Найдены дисперсионные соотношения для магнитных инерционно-гравитационных волн, магнитострофических волн и волн магнито-Россби. Показано влияние стратификации и учета горизонтальной составляющей силы Кориолиса на динамику найденных волн. Выявлены все возможные типы трехволновых взаимодействий в четырех различных приближениях силы Кориолиса. Найдены следующие распадные неустойчивости для волн в приближении Буссинеска для различных приближений силы Кориолиса: распад магнитной инерционной волны на магнитную инерционную волну и магнитную инерционную волну, распад магнитной инерционной волны на две магнитные инерционные волны на стандартной f -плоскости; распад магнитной инерционно-гравитационной волны на две магнитострофические волны на нестандартной f -плоскости при малом f_H , распад магнитной инерционно-гравитационной волны на две магнитострофические волны или на магнитострофическую и магнитную инерционно-гравитационную волны на нестандартной f -плоскости при большом f_H ; распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби или магнитогравитационную волну и волну магнито-Россби, распад магнитогравитационной волны на волну магнито-Россби и магнитогравитационную волну, распад низкочастотной волны магнито-Россби на две низкочастотные волны магнито-Россби на стандартной β -плоскости; распад низкочастотной волны магнито-Россби на две низкочастотные волны магнито-Россби на нестандартной β -плоскости. Обнаружен эффект линейного нарастания амплитуды одной из взаимодействующих волн в поле двух других волн в аналогичных конфигурациях. Найдены инкременты распадных неустойчивостей.

Магнитогидродинамические уравнения сжимаемой вращающейся плазмы в неупругом приближении важны для анализа процессов в солнечном тахоклине, устойчиво стратифицированных областях в недрах звезд (излучающей зоны) и планет (внешний жидкий слой ядра), астрофизических дисках, экзоплантах, а также для анализа осцилляций вращающихся звезд и Солнца. Отметим, что первые экспериментальные наблюдения крупномасштабных течений астрофизической плазмы выполнены на основе изучения магнитных полей или методами астросейсмологии, что естественным образом мотивирует развитие магнитогидродинамической теории с учетом как эффектов сжимаемости, так и эффектов магнитных полей.

Развита теория магнитогидродинамических течений сжимаемой вращающейся плазмы с устойчивой стратификацией в неупругом приближении. Получены магнитогидродинамические уравнения в неупругом приближении для сжимаемых вращающихся течений с устойчивой стратификацией в приближении стандартных и нестандартных f - и β -плоскостей для силы Кориолиса. Развита линейная и нелинейная теории магнитных инерционно-гравитационных волн, магнитострофических волн и волн магнито-Россби, найдены их дисперсионные соотношения. Показано отличие в динамике найденных волн в неупругом приближении от волн в приближении Буссинеска. Показано влияние сжимаемости, стратификации и учета горизонтальной составляющей силы Кориолиса на динамику найденных волн. Выявлены все возможные типы трехволновых взаимодействий в четырех различных приближениях силы Кориолиса. Найдены следующие распадные неустойчивости для волн в приближении Буссинеска для различных приближений силы Кориолиса: распад магнитострофической волны на магнитную инерционно-гравитационную и магнитострофическую волны, или две магнитные инерционно-гравитационные волны, или магнитострофическую и магнитную инерционно-гравитационную волны, или две магнитострофические волны, распад магнитной инерционно-гравитационной волны на две магнитострофические волны на стандартной f -плоскости; распад магнитной инерционно-гравитационной волны на волну Альфвена и магнитную инерционно-гравитационную волну или на две магнитные инерционно-гравитационные волны на нестандартной f -плоскости; распад низкочастотной волны магнито-Россби на две низкочастотные волны магнито-Россби на стандартной β -плоскости; распад магнитной инерционно-гравитационной волны на магнитную инерционно-гравитационную волну и волну магнито-Россби или две волны магнито-Россби, распад волны магнито-Россби на магнитную инерционно-гравитационную волну и волну магнито-Россби или две магнитные инерционно-гравитационные волны, распад низкочастотной волны магнито-Россби на две низкочастотные волны магнито-Россби, распад магнитной инерционно-гравитационной волны на магнитную инерционно-гравитационную и магнитострофическую волны на нестандартной β -плоскости. Обнаружен эффект линейного нарастания амплитуды одной из взаимодействующих волн в поле двух других волн в аналогичных трехволновых конфигурациях. Найдены инкременты распадных неустойчивостей.

Работа поддержана Фондом развития теоретической физики и математики “Базис”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Miesch M.S., Gilman P.A. // Solar Phys. 2004. V. 220. P. 287.

2. Gilman P.A. // *Astrophys. J. Lett.* 2000. V. 544. P. L79.
3. Zaqarashvili T.V., Oliver R., Ballester J.L., Shergelashvili B.M. // *Astron. Astrophys.* 2007. V. 470. P. 815.
4. Heng K., Spitkovsky A. // *Astrophys. J.* 2009. V. 703. P. 1819.
5. Spitkovsky A., Levin Y., Ushomirsky G. // *Astrophys. J.* 2002. V. 566. P. 1018.
6. Inogamov N.A., Sunyaev R.A. // *Astron. Lett.* 1999. V. 25. P. 269.
7. Inogamov N.A., Sunyaev R.A. // *Astron. Lett.* 2010. V. 36. P. 848.
8. Cho J.Y.K. // *Philosophical Transac. Royal Soc. A: Mathematical, Phys. Engineering Sci.* 2008. V. 366. P. 4477.
9. Heng K., Workman J. // *Astrophys. J. Supplement Ser.* 2014. V. 213. P. 27.
10. Heng K., Showman A.P. // *Ann. Rev. Earth Planetary Sci.* 2015. V. 43. P. 509.
11. Tobias S.M., Diamond P.H., Hughes D.W. // *Astrophys. J. Lett.* 2007. V. 667. P. L113.
12. Balk A.M. // *Astrophys. J.* 2014. V. 796. P. 143.
13. Карельский К.В., Петросян А.С., Тарасевич С.В. // *ЖЭТФ.* 2011. Т. 140. С. 606.
14. Karelsky K.V., Petrosyan A.S., Tarasevich S.V. // *Physica Scripta.* 2013. V. T155. P. 014024.
15. De Sterck H. // *Phys. Plasmas.* 2001. V. 8. P. 3293.
16. Dellar P.J. // *Phys. Plasmas.* 2003. V. 10. P. 581.
17. Zeitlin V. // *Nonlinear Processes Geophys.* 2013. V. 20. P. 893.
18. Aristov S.N., Frik P.G. // *J. Appl. Mechanics Technical Phys.* 1991. V. 32. P. 189.
19. Карельский К.В., Петросян А.С., Черняк А.В. // *ЖЭТФ.* 2012. Т. 141. С. 1206.
20. Карельский К.В., Петросян А.С., Черняк А.В. // *ЖЭТФ.* 2013. Т. 143. С. 779.
21. Зельдович Б., Райзер Ю. *Физика ударных волн и высокотемпературных явлений.* М.: Наука, 1966.
22. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.* М.: Наука, 1968.
23. Годунов С.К. // *Математич. сборник.* 1959. Т. 47. С. 271.
24. Karelsky K.V., Petrosyan A.S., Slavin A.G. // *Russian J. Numerical Analysis Mathematical Modelling.* 2009. V. 24. № 3. P. 229.
25. The solar tachocline // Eds. Hughes D.W., Rosner R., Weiss N.O. Cambridge University Press, 2007.
26. Dikpati M., Gilman P.A. // *Astrophys. J.* 2001. V. 551. P. 536.
27. Zaqarashvili T.V., Oliver R., Ballester J.L., Carbonell M., Khodachenko M.L., Lammer H., Leitzinger M., Odert P. // *Astron. Astrophys.* 2011. V. 532. P. A139.
28. Braithwaite J., Spruit H.C. // *Royal Soc. Open Sci.* 2017. V. 4. P. 160271.
29. Philidet J., Gissinger C., Lignières F., Petitdemange L. // *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics.* 2020. V. 114. P. 336.
30. Stone J.M., Hawley J.F., Gammie C.F., Balbus S.A. // *Astrophys. J.* 1996. V. 463. P. 656.
31. Batygin K., Stanley S., Stevenson D.J. // *Astrophys. J.* 2013. V. 776. P. 53.
32. Löptien B., Gizon L., Birch A.C., Schou J., Proxauf B., Duvall Jr. T.L., Bogart R.S., Christensen U.R. // *Nature Astron.* 2018. V. 2. P. 568.
33. Dikpati M., Belucz B., Gilman P.A., McIntosh S.W. // *Astrophys. J.* 2018. V. 862. P. 159.
34. Böning V.G.A., Hu H., Gizon L. // *Astron. Astrophys.* 2019. V. 629. P. A26.
35. Saio H. // *Astrophys. J.* 1982. V. 256. P. 717.
36. Sturrock P.A., Bush R., Gough D.O., Scargle J.D. // *Astrophys. J.* 2015. V. 804. P. 47.
37. Wolff C.L. // *Astrophys. J.* 1998. V. 502. P. 961.
38. McIntosh S.W., Cramer W.J., Marcano M.P., Leamon R.J. // *Nature Astron.* 2017. V. 1. P. 0086.
39. Zaqarashvili T.V., Gurgenshvili E. // *Frontiers Astron. Space Sci.* 2018. V. 5. P. 7.
40. Gizon L., Fournier D., Albekioni M. // *Astron. Astrophys.* 2020. V. 642. P. A178.
41. Dikpati M., Cally P.S., McIntosh S.W., Heifetz E. // *Sci. Reps.* 2017. V. 7. P. 14750.
42. Hunter S. *Waves in shallow water magnetohydrodynamics:* дис. University of Leeds, 2015.
43. Федотова М.А., Климачков Д.А., Петросян А.С. // *Физика плазмы.* 2020. Т. 46. С. 57.
44. Petrosyan A.S., Klimachkov D.A., Fedotova M.A., Zinyakov T.A. // *Atmosphere.* 2020. V. 11. P. 314.
45. Karelsky K.V., Petrosyan A.S., Tarasevich S.V. // *J. Experimental Theoretical Phys.* 2014. V. 119. P. 311.
46. Климачков Д.А., Петросян А.С. // *ЖЭТФ.* 2016. Т. 149. С. 965.
47. Климачков Д.А., Петросян А.С. // *ЖЭТФ.* 2016. Т. 150. С. 602.
48. Климачков Д.А., Петросян А.С. // *ЖЭТФ.* 2017. Т. 152. С. 705.
49. Klimachkov D.A., Petrosyan A.S. // *Phys. Lett. A.* 2017. V. 381. P. 106.
50. Zaqarashvili T.V., Oliver R., Ballester J.L. // *Astrophys. J. Lett.* 2009. V. 691. P. L41.
51. Márquez-Artavia X., Jones C.A., Tobias S.M. // *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics.* 2017. V. 111. P. 282.
52. Zaqarashvili T. // *Astrophys. J.* 2018. V. 856. P. 32.
53. Петвиашвили В.И., Похотелов О.А. *Уединенные волны в плазме и атмосфере.* М.: Энергоатомиздат, 1989.
54. Vallis G.K. *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation.* Cambridge Univ. Press, 2006.
55. Zeitlin V. *Geophysical fluid dynamics: understanding (almost) everything with rotating shallow water models.* Oxford Univ. Press, 2018.
56. Kaladze T.D., Horton W., Kahlon L.Z., Pokhotelov O., Onishchenko O. // *J. Geophys. Res.: Space Phys.* 2013. V. 118. P. 7822.
57. Онищенко О.Г., Похотелов О.А., Астафьева Н.М. // *УФН.* 2008. Т. 178. С. 605.
58. Onishchenko O.G., Pokhotelov O.A., Sagdeev R.Z., Shukla P.K., Stenflo L. // *Nonlinear Processes Geophys.* 2004. V. 11. P. 241.
59. Dikpati M., Charbonneau P. // *Astrophys. J.* 1999. V. 518. P. 508.
60. Dikpati M., Gilman P.A., Chatterjee S., McIntosh S.W., Zaqarashvili T.V. // *Astrophys. J.* 2020. V. 896. P. 141.
61. Mandal K., Hanasoge S. // *Astrophys. J.* 2020. V. 891. P. 125.
62. Raphaldini B., Raupp C.F.M. // *Astrophys. J.* 2015. V. 799. P. 78.
63. Raphaldini B., Medeiros E., Raupp C.F.M., Teruya A.S. // *Astrophys. J. Lett.* 2020. V. 890. P. L13.
64. Andersson N., Kokkotas K., Schutz B.F. // *Astrophys. J.* 1999. V. 510. P. 846.
65. Lou Y.Q. // *Astrophys. J. Lett.* 2001. V. 563. P. L147.

66. Lou Y.Q., Lian B. // Monthly Notices Royal Astron. Soc. 2012. V. 420. P. 2147.
67. Liang Z.C., Gizon L., Birch A.C., Duvall Jr. T.L. // Astron. Astrophys. 2019. V. 626. P. A3.
68. Dikpati M., McIntosh S.W., Bothun G., Cally P.S., Ghosh S.S., Gilman P.A., Umurhan O.M. // Astrophys. J. 2018. V. 853. P. 144.
69. Lou Y.Q. // Astrophys. J. 2000. V. 540. P. 1102.
70. Dikpati M., McIntosh S.W. // Space Weather. 2020. V. 18. P. e2018SW002109.
71. Dikpati M., McIntosh S.W., Wing S. // Frontiers Astron. Space Sci. 2021. V. 8. P. 71.
72. Kuhn J.R., Armstrong J.D., Bush R.I., Scherrer P. // Nature. 2000. V. 405. P. 544.
73. Gibson S.E., Vourlidas A., Hassler D.M., Rachmeler L.A., Thompson M.J., Newmark J., Velli M., Title A., McIntosh S.W. // Frontiers Astron. Space Sci. 2018. V. 5. P. 32.
74. Zaqarashvili T.V., Carbonell M., Oliver R., Ballester J.L. // Astrophys. J. 2010. V. 709. P. 749.
75. Zaqarashvili T.V., Oliver R., Hanslmeier A., Carbonell M., Ballester J.L., Gachechiladze T., Usoskin I.G. // Astrophys. J. Lett. 2015. V. 805. P. L14.
76. McIntosh S.W., Leamon R.J., Krista L.D., Title A.M., Hudson H.S., Riley P., Harder J.W., Kopp G., Snow M., Woods T.N., Kasper J.C., Stevens M.L., Ulrich R.K. // Nature Commun. 2015. V. 6. P. 6491.
77. Климачков Д.А., Петросян А.С. // ЖЭТФ. 2018. Т. 154. С. 1239.
78. Федотова М.А., Петросян А.С. // ЖЭТФ. 2020. Т. 158. С. 374.
79. Yano J.I. // J. Fluid Mechanics. 2017. V. 810. P. 475.
80. Billant P., Chomaz J.M. // Phys. Fluid. 2001. V. 13. P. 1645.
81. Lee S., Takada R. // Indiana University Mathematics J. 2017. P. 2037.
82. Takehiro S. // Phys. the Earth and Planetary Interiors. 2015. V. 241. P. 37.
83. Takehiro S., Sasaki Y. // Phys. the Earth and Planetary Interiors. 2018. V. 276. P. 258.
84. Nakagawa T. // Phys. the Earth and Planetary Interiors. 2011. V. 187. P. 342–352.
85. Berkoff N.A. The Anelastic Approximation: Magnetic Buoyancy and Magnetoconvection: дис. University of Leeds, 2011.
86. Spiegel E.A., Veronis G. // Astrophys. J. 1960. V. 131. P. 442.
87. Spiegel E.A., Weiss N.O. // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. 1982. V. 22. P. 219.
88. Федотова М.А., Петросян А.С. // ЖЭТФ. 2020. Т. 158. С. 1188.
89. Fedotova M., Klimachkov D., Petrosyan A. // Universe. 2021. V. 7. P. 87.
90. Brown B.P., Vasil G.M., Zweibel E.G. // Astrophys. J. 2012. V. 756. P. 109.
91. Almgren A.S., Bell J.B., Nonaka A., Zingale M. // Computing Sci. Engineering. 2009. V. 11. P. 24.
92. Batchelor G.K. // Quarterly J. Royal Meteorological Soc. 1953. V. 79. P. 224.
93. Charney J.G., Ogura Y. // J. Meteorological Soc. Japan. Ser. II. 1960. V. 38. P. 19a.
94. Gough D.O. // J. Atmospheric Sci. 1969. V. 26. P. 448.
95. Bannon P.R. // J. Atmospheric Sci. 1996. V. 53. P. 3618.
96. Calkins M.A., Julien K., Marti P. // Proceed. Royal Soc. A: Mathematical, Phys. Engineering Sci. 2015. V. 471. P. 20140689.
97. Paolucci S. // NASA STI/Recon Technical Report N. 1982. V. 83. P. 26036.
98. Botta N., Klein R., Almgren A. Dry atmosphere asymptotics. Potsdam Inst. for Climate Impact Research, 1999.
99. Klein R. et al. // J. Engineering Mathemat. 2001. V. 39. P. 261.
100. Braginsky S.I., Roberts P.H. // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 1995. V. 79. P. 1.
101. Glatzmaier G.A., Roberts P.H. // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1996. V. 97. P. 81.
102. Olson P., Christensen U.R. // Earth Planetary Sci. Lett. 2006. V. 250. P. 561.
103. Jones C.A., Kuzanyan K.M., Mitchell R.H. // J. Fluid Mechanics. 2009. V. 634. P. 291.
104. Gilman P.A., Glatzmaier G.A. // Astrophys. J. Supplement Ser. 1981. V. 45. P. 335.
105. Yadav R.K., Bloxham J. // Proceed. National Academy Sci. 2020. V. 117. P. 13991.
106. Glatzmaier G.A. // J. Computational Phys. 1984. V. 55. P. 461.
107. Lantz S.R., Fan Y. // Astrophys. J. Supplement Ser. 1999. V. 121. P. 247.
108. Miesch M.S., Elliott J.R., Toomre J., Clune T.L., Glatzmaier G.A., Gilman P.A. // Astrophys. J. 2000. V. 532. P. 593.
109. Brun A.S., Miesch M.S., Toomre J. // Astrophys. J. 2004. V. 614. P. 1073.
110. Brown B.P., Browning M.K., Brun A.S., Miesch M.S., Toomre J. // Astrophys. J. 2008. V. 689. P. 1354.
111. Brown B.P., Miesch M.S., Browning M.K., Brun A.S., Toomre J. // Astrophys. J. 2011. V. 731. P. 69.
112. Smolarkiewicz P.K., Charbonneau P. // J. Computational Phys. 2013. V. 236. P. 608.
113. Fedotova M., Klimachkov D., Petrosyan A. // Monthly Notices Royal Astronom. Soc. 2022. V. 509. P. 314326.
114. Должанский Ф. Основы геофизической гидродинамики. Litres, 2018.
115. Showman A.P., Tan X., Parmentier V. // Space Sci. Rev. 2020. V. 216. P. 1.
116. Онищенко О.Г., Похотелов О.А., Астафьева Н.М., Хортон В., Федун В.Н. // УФН. 2020. Т. 190. С. 732.
117. Zaqarashvili T.V., Albekioni M., Ballester J.L., Bekki Y., Biancofiore L., Birch A.C., Dikpati M., Gizon L., Gurgenchvili E., Heifetz E., Lanza A.F., McIntosh S. W., Ofman L., Oliver R., Proxauf B., Umurhan O.M., Yellin-Bergovoy R. // Space Sci. Rev. 2021. Т. 217. С. 1.
118. Незлин М.В. Вихри Россби и спиральные структуры: Астрофизика и физика плазмы в опытах на мелкой воде. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.
119. Raymond D.J. Physics 589 – Geophysical Fluid Dynamics. Wave modes of a resting atmosphere. Chapter 3: Sound, Inertia-Gravity Waves, and Lamb Waves // Physics Internal Website. <http://kestrel.nmt.edu/raymond/classes/ph589/notes/ss-modes/ssmodes.pdf>.
120. Goldstein J., Townsend R.H.D., Zweibel E.G. // Astrophys. J. 2019. V. 881. P. 66.
121. Newell A.C. // J. Fluid Mechanics. 1969. V. 35. P. 255.
122. Ostrovsky L. Asymptotic perturbation theory of waves. World Scientific, 2014.
123. D. Craik Wave interactions and fluid flows. Cambridge: Univ. Press, 1988.

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ

УДК 537.525.99

СВЧ ГАЗОВЫЙ РАЗРЯД НИЗКОГО ДАВЛЕНИЯ, ПОДДЕРЖИВАЕМЫЙ ПОЛЕМ СТОЯЧЕЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ ДИПОЛЬНОЙ МОДЫ

© 2023 г. В. И. Жуков^{а,*}, Д. М. Карфидов^а

^а Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, Москва, Россия

*e-mail: zhukov.vsevolod@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 15.07.2022 г.

После доработки 10.10.2022 г.

Принята к публикации 20.10.2022 г.

Исследовано поддержание СВЧ газового разряда стоячей поверхностной электромагнитной волны (ПЭВ) дипольной моды. Стоячая волна формировалась между двумя плоскими зеркалами, образующими структуру типа открытого резонатора на поверхностной волне. Измеренная добротность открытого резонатора составляет несколько десятков. Определена структура электрического поля свободного разряда и разряда, поддерживаемого полем стоячей поверхностной волны. Показано, что в этой системе возбуждение резонанса происходит на чисто поверхностной волне. При возрастании энергии поля между зеркалами на 8–10 дБ, концентрация электронов возрастает на ~50%. Оценено отношение энергии поля поверхностной волны в плазме и в окружающем разряд пространстве, как в случае свободного разряда, так и при резонансе. Эксперимент и численное моделирование показали, что структура разряда зависит от возбуждаемой моды стоячей ПЭВ.

Ключевые слова: поверхностная электромагнитная волна, низкотемпературная плазма, СВЧ-разряд низкого давления, стоячая поверхностная волна, резонанс, дисперсия поверхностной волны

DOI: 10.31857/S0367292122600820, **EDN:** NWJVZM

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе исследуются “медленные” поверхностные электромагнитные волны (ПЭВ) сантиметрового диапазона, фазовая скорость которых меньше скорости света. ПЭВ представляет особый класс электромагнитных волн, распространяющихся по поверхности раздела двух сред, одна из которых является неидеальным проводником, а другая диэлектриком [1–3]. Благодаря конечной проводимости энергия ПЭВ концентрируется вблизи поверхности проводника. Поле ПЭВ экспоненциально затухает при удалении по обе стороны от волноведущей поверхности. Это свойство волны и является отличительным признаком для ее идентификации в качестве поверхностной. Такие волны находят свое применение в замедляющих системах, использующихся в различных радиотехнических устройствах. Фундаментальные свойства поверхностной волны, распространяющейся на металлических структурах, были подробно изучены в ряде экспериментальных работ [4–6]. В [7] показана возможность получить резонанс ПЭВ Зоммерфельда в резонаторе открытого типа.

В настоящее время актуальными являются исследования поверхностных волн СВЧ/ВЧ диапа-

зона, где в качестве направляющих структур используется газоразрядная плазма в диэлектрических трубках [8]. Возбуждение поверхностной волны возможно в “пассивном” режиме, когда ПЭВ распространяется по независимо созданной плазме и не влияет на свойства плазмы, и в самосогласованном режиме, когда плазма создается и поддерживается самой ПЭВ [9, 10]. Разряды на поверхностных волнах используются во многих приложениях [11, 12], среди которых плазменная обработка поверхностей, осаждение тонких алмазных пленок, стерилизация/дезинфекция материалов, удаление двуокиси углерода (CO_2) из смеси газов. Одним из перспективных направлений для применения разрядов на ПЭВ в радио-прозрачных трубках является разработка плазменных антенн [13–16].

В большинстве опубликованных работ исследуются разряды в поле бегущей поверхностной волны со значением КСВН не более нескольких единиц. При этом фундаментальный интерес представляет исследование самосогласованного разряда, поддерживаемого полем стоячей поверхностной волны. Возбуждение стоячей волны позволяет подробно исследовать компоненты электрического поля ПЭВ, находящиеся в противо-

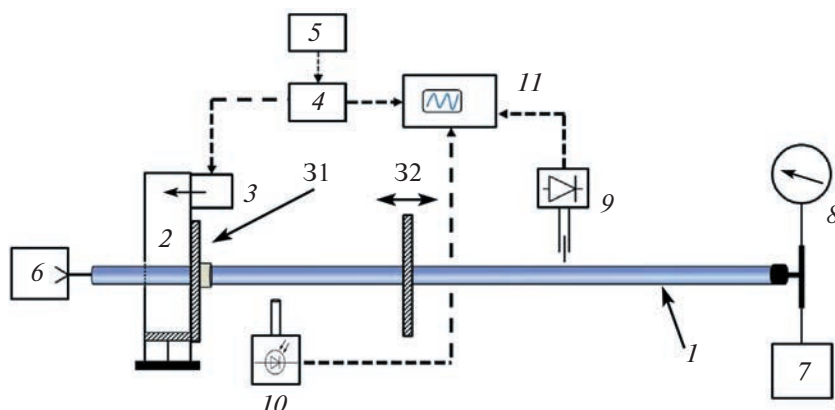


Рис. 1. Схема экспериментальной установки. 1 – кварцевая трубка; 2 – волноводный аппликатор; 3 – магнетрон; 4 – модулятор; 5 – генератор задержанных импульсов; 6 – форвакуумный насос; 7 – натекатель; 8 – вакуумметр; 9 – СВЧ-зонд; 10 – коллимированный фотодетектор; 11 – осциллограф; 31 – неподвижное зеркало; 32 – подвижное зеркало.

фазе друг относительно друга [17]. В работах [17–19] был исследован разряд, поддерживаемый стоячей ПЭВ. Стоячая ПЭВ реализовывалась либо путем отражения бегущей ПЭВ от металлического отражателя (зеркала) [19], либо при сложении распространяющихся на встречу друг другу поверхностных волн [17]. В этих работах было показано, что в аргоне в широком диапазоне давлений от 0.1 до 20 Торр возбуждение резонанса поверхностной волны приводит к заметной продольной модуляции плотности плазмы. Возбуждение стоячей ПЭВ, поддерживающей плазменный столб, дает возможность создавать структуры с различными профилями плотности как сильно модулированными, так и близкими к однородному.

В настоящей работе исследуется разряд, поддерживаемый как бегущей, так и стоячей поверхностной волной дипольной $m = 1$ моды [20]. Проведены детальные измерения компонент напряженности электрического поля ПЭВ. Исследование проводилось в воздухе при соотношении характерных частот $\nu_{en}/\omega \ll 1$ (ν_{en} – частота столкновения электронов с нейтральными атомами, ω – круговая частота СВЧ-волны). Свободный разряд не ограничивался длиной трубки. Стоячая волна формировалась между двумя плоскими зеркалами, образующими структуру типа открытого резонатора на поверхностной волне. Накопление энергии поверхностной волны в резонаторе приводило к изменению плотности плазмы. Часть энергии поверхностной волны расходуется на создание и поддержание плазмы с концентрацией $n_e > (1 + \epsilon_d)n_c$, где ϵ_d – диэлектрическая проницаемость кварца, а n_c – критическая концентрация плазмы [2], остальная часть энергии локализуется вне плазмы, экспоненциально затухая в радиальном направлении. Соотноше-

ние между энергией ПЭВ, поглощаемой в плазме, и энергией, находящейся вне плазмы определяется плотностью плазмы и величиной скин-эффекта [21].

2. СХЕМА ЭКСПЕРИМЕНТА

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 1. Разряд осуществлялся в кварцевой трубке 1 длиной 2 м, с внутренним диаметром 21 мм, внешним – 27 мм. ПЭВ возбуждалась волноводным аппликатором [10] – 2, подключенным к магнетрону 3, мощностью 800 Вт, генерирующему СВЧ-импульсы на частоте 2.45 ГГц. Напряжение на магнетрон поступало с модулятора 4. Режим работы магнетрона регулировался генератором задержанных импульсов – 5. Магнетрон работал в режиме генерации одиночных прямоугольных СВЧ-импульсов длительностью 50 мс. Для откачки воздуха из трубки использовался форвакуумный насос 6. Подача газа регулировалась натекателем 7, давление измерялось цифровым вакуумметром – 8. Эксперименты проводились в воздухе в диапазоне давлений от 0.02 до 3 Торр.

Система генерации стоячей волны состоит из двух плоскопараллельных зеркал, установленных на разрядную трубку: экрана, совмещенного с волноводным аппликатором 31 и подвижного зеркала 32, свободно перемещаемого вдоль трубки. Зеркала представляют собой плоские медные диски диаметром 15 см, с центральным отверстием, диаметр которого равен диаметру трубки. При подаче СВЧ-энергии из аппликатора распространяется столб плазмы, поддерживаемый поверхностной волной. Начальный этап представляет собой процесс распространения разряда по направлению к зеркалу 32, при достижении которо-

го между зеркалами формируется плазменный столб, поддерживаемый стоячей ПЭВ. При удалении зеркала 32 происходит свободное распространение разряда.

Настройка резонатора проводилась путем изменения расстояния L между зеркалами. При этом находились такие положения L , при которых между зеркалами укладывалось целое число полуволн ПЭВ. Грубая настройка производилась по “хвосту” разряда, проникающему через подвижное зеркало. При настройке на резонанс хвост разряда вытягивался до некоторой максимальной длины (до 15 см). Более тонкая настройка производилась по измерению компонент электрического поля стоячей ПЭВ.

Измерения компонент напряженности электрического поля проводились с помощью СВЧ-зондов, сконструированных для приема радиальной E_r и продольной E_z компонент поля. Сигнал с зондов регистрировался супергетеродинным приемником с квадратичным детектированием.

Относительные значения средней по сечению плотности плазмы в столбе измерялись по интенсивности светового излучения плазмы, при этом считается, что при постоянной температуре электронов T_e интенсивность света пропорциональна плотности плазмы [22, 23]. Для измерения интегральной светимости плазмы в поперечном сечении использовался коллимированный фотодетектор (спектральный диапазон 700–1100 нм, временное разрешение 7 нс), обеспечивающий пространственное разрешение 0.5 см.

Абсолютные значения средней по сечению концентрации электронов измерялись по методу проходящих СВЧ-волн [24]. С помощью рупорной системы измерялся коэффициент прохождения диагностического излучения [23] в диапазоне частот 5.5–7.5 ГГц. Пространственное разрешение метода ~4 см. Прохождение диагностического СВЧ-излучения (5.5–7.5 ГГц) через разрядную плазму было смоделировано [23, 25] в программе CST Microwave Studio, предназначенной для моделирования электромагнитных полей и основанной на методе конечных элементов. Моделирование автоматически учитывало особенности используемой диагностической рупорной системы (каустика, рефракция и отражение), а также позволяло задавать плазму как с докритической, так и сверхкритической концентрацией. Усредненная по диаметру плазмы концентрация электронов вычислялась путем совмещения экспериментальных данных прохождения диагностического сигнала с численным моделированием. Замена кварцевой трубки металлической трубкой аналогичного диаметра приводила к ослаблению сигнала в приемном рупоре более чем на 20 Дб, что было также подтверждено результатами моде-

лирования. Точность приведенного метода составляет около 50%.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе проведены измерения параметров разряда, таких как профиль плотности плазмы и характеристики электрического поля поверхностной волны для случая свободного разряда и для разряда между зеркалами, поддерживаемого стоячей волной. Рабочее давление в экспериментах составляет 0.1 Торр, что соответствует минимуму электронных потерь в разряде [23]. Свободный разряд при этом давлении достигает максимальной длины 70–75 см. Для определения возбуждаемой на столбе свободного разряда моды ПЭВ было проведено измерение азимутального распределения квадрата радиальной электрической компоненты $E_r^2(\phi)$. Результаты измерения представлены на рис. 2.

Азимутальное распределение сильно неоднородно и характеризуется высокой модуляцией поля с отношением $E_{r\max}^2/E_{r\min}^2 \approx 100$ (рис. 2, кривая 1). Данное распределение свидетельствует о возбуждении квазисимметричной дипольной $m = 1$ моды поверхностной волны. Условия возбуждения на плазменном столбе различных мод ПЭВ были подробно исследованы в работе [20], где было экспериментально показано, что при $f \times r > 2$ ГГц $\times$ см, где f – частота поля, а r – радиус трубки, наряду с аксиально-симметричной $m = 0$ модой может возбуждаться дипольная $m = 1$ мода. В условиях нашего эксперимента произведение $f \times r = 2.6$ ГГц $\times$ см. В качестве иллю-

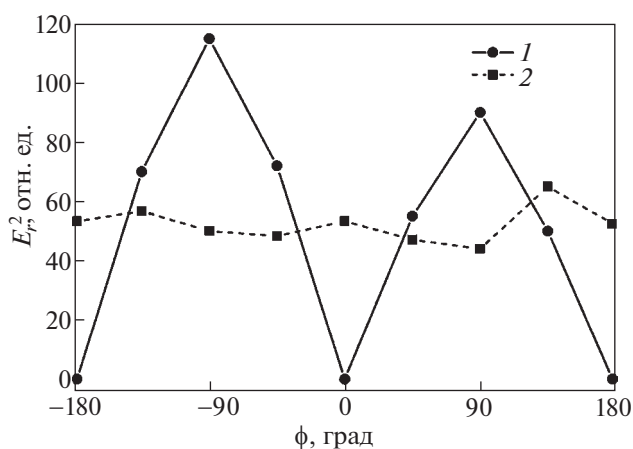


Рис. 2. Азимутальное распределение квадрата радиальной компоненты напряженности электрического поля $E_r^2(\phi)$ при фиксированном расстоянии между СВЧ-зондом и трубкой $r = 1$ см: внутренний диаметр трубки 2.1 см — 1, 1.4 см — 2.

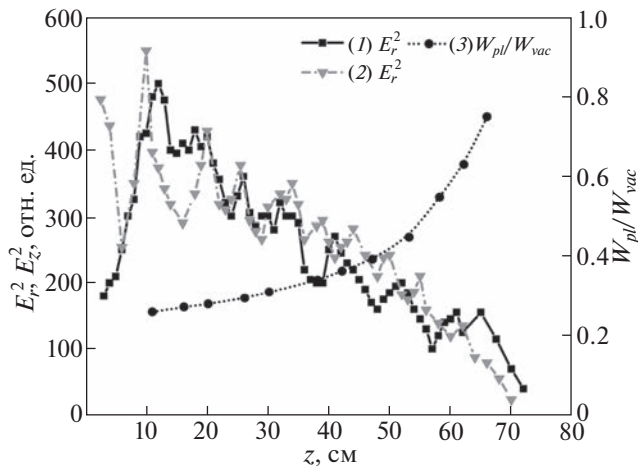


Рис. 3. Распределения квадрата радиальной $E_r^2(z)$ — 1 и квадрата продольной $E_z^2(z)$ — 2 компонент напряженности электрического поля ПЭВ, измеренные вдоль свободного плазменного столба. Расстояние между СВЧ-зондом и трубкой $r = 1.5$ см. Изменение отношения СВЧ-энергии поля ПЭВ в плазме и вакууме W_{pl}/W_{vac} вдоль плазменного столба — 3.

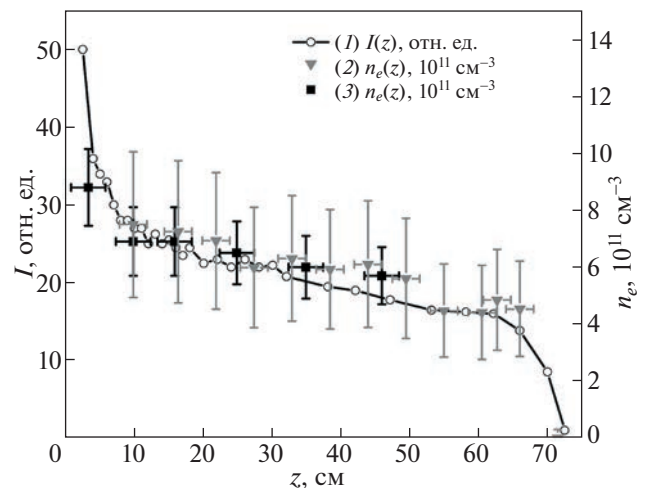


Рис. 4. Усредненный по сечению трубки продольный профиль плотности плазмы. 1 — Распределение интегральной светимости плазмы $I(z) \sim n_e(z)$ (сигнал с фотодетектора); 2 — распределение плотности плазмы $n_e(z)$, измеренное методом проходящих СВЧ-волн; 3 — распределение плотности плазмы $n_e(z)$, определенное по дисперсии ПЭВ на основании измерений длины волны.

страции на рис. 2 (кривая 2) приведено азимутальное распределение величины $E_r^2(\phi)$ при возбуждении разряда в люминесцентной лампе диаметром 14 мм ($f \times r = 1.7$ ГГц $\times$ см), имеющее симметричный характер, соответствующий $m = 0$ моде.

Аксиальные распределения квадратов продольной $E_z^2(z)$ и радиальной $E_r^2(z)$ электрических компонент СВЧ-поля ПЭВ свободного разряда представлены на рис. 3.

СВЧ-поле ПЭВ спадает по длине столба с некоторой модуляцией, связанной с отражением ПЭВ от конца столба. Нерегулярный характер модуляции связан с флуктуациями длины разряда в пределах 2–3 см, что приводит к сбою фазы отраженного сигнала. Особенность распределения поля в зоне вблизи аппликатора ($z < 12$ см) связана с объемным излучением, которое всегда сопровождает возбуждение поверхностной волны [4]. Для стабилизации разряда и измерения длины волны в импульсном режиме, на расстоянии $z = 50$ см от аппликатора было установлено металлическое зеркало. Длина волны измерялась как интерферометрическим методом, так и по распределению поля стоячей волны. Измеренная длина ПЭВ в основной части столба составляет ≈ 11 см и падает до ≈ 10 см в “хвосте” разряда перед зеркалом. На рис. 4 (кривая 1) приведено экспериментальное распределение интегральной интенсивности свечения разряда, пропорциональной плотности плазмы [22, 23], по длине столба. Абсолютные значения средней по сечению плот-

ности плазмы в столбе определялись как методом зондирования плазмы проходящим диагностическим СВЧ-излучением, так и методом расчета по дисперсии ПЭВ [26] на основании измерения длины волны. Дисперсионная зависимость ПЭВ для $m = 1$ моды с учетом кварцевого стекла представлена на рис. 5, откуда видно, что дисперсионная кривая асимптотически стремится к значению $\omega/\omega_p = 0.45$, соответствующему условию распространения поверхностной волны $n_e > (1 + \epsilon_d)n_c$ [2].

Основная часть свободного разряда характеризуется линейным профилем плотности $n(z)$ вплоть до хвостовой части разряда, где нарушается условие распространения ПЭВ. При сопоставлении распределений плотности (рис. 4) и поля (рис. 3) для свободного разряда при z от 15 см до 65 см видно, что падение поля ПЭВ вдоль столба происходит быстрее, чем падение плотности. При падении энергии поля на этом участке в ≈ 4 раза, плотность плазмы спадает на $\approx 50\%$. Данный факт может быть объяснен особенностями распределения энергии ПЭВ в плазме и вакууме. Соотношение между долями энергии ПЭВ в вакууме W_{vac} и внутри плазмы W_{pl} преимущественно определяется глубиной проникновения поля в плазму, зависящей от профиля плотности. Энергия волны, поглощаемая в плазме, идет на ее поддержание и пропорциональна концентрации электронов n_e при постоянной температуре электронов. Мощность, расходуемая на поддер-

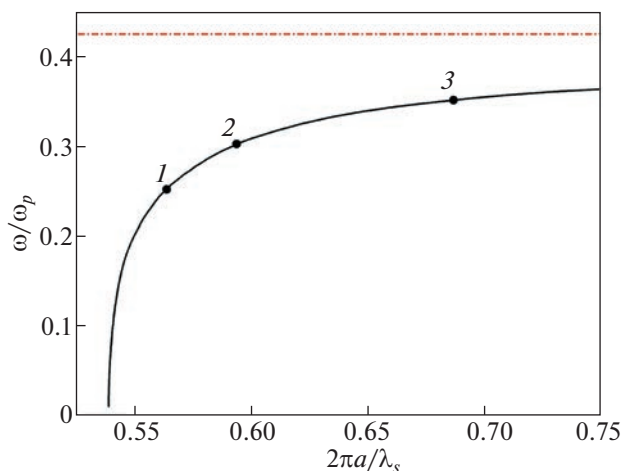


Рис. 5. 1 — Дисперсионная кривая в безразмерных координатах для ПЭВ дипольной моды с учетом толщины стенок трубки; 2 — асимптотическое значение, соответствующее минимальной концентрации электронов $n_{\min}$ необходимой для распространения поверхностной волны.

жание плазмы, может быть рассчитана как в [23]:

$P_{pl} = \pi r^2 n_e \theta \approx 160$ Вт, где θ — энергия, затрачиваемая на создание пары электрон-ион, при мощности источника $P_0 = 800$ Вт. Уровень потерь, связанный с отражением внутри аппликатора и излучением с конца разряда [27] не превышает 25%. Расходуемая мощность источника $P_0 = P_{pl} + P_{vac} + P_{loss}$, где P_{pl} и P_{vac} мощность поверхностной волны в плазме и вакууме соответственно. Видно, что большая часть мощности ПЭВ содержится вне плазмы. Расчет соотношения W_{pl}/W_{vac} проведен на основе экспериментальных распределений $n(z)$ (рис. 4) и $E_r^2(z)$ (рис. 3), характеризующих энергию поля ПЭВ внутри и вне плазмы, соответственно. Рассчитанное пространственное распределение СВЧ-энергии в плазме и вакууме W_{pl}/W_{vac} вдоль плазменного столба представлено на рис. 3 (кривая 3). В хвостовой части разряда, где концентрация электронов близка к $n_{\min} = (1 + \epsilon_d)n_c$, соотношение W_{pl}/W_{vac} стремится к единице, а эффективность преобразования энергии ПЭВ в плазму максимальна [21]. В начальной части разряда, где плотность плазмы выше на 50% соотношение $W_{pl}/W_{vac} \approx 0.25$, т.е. преобладающая часть энергии ПЭВ сосредоточена вне плазмы. В настоящем эксперименте данная закономерность выполняется до участка $z = 12$ см на котором линейный профиль плотности сменяется квадратичным. В отличие от линейного профиля плотности, где разряд самосогласованно поддерживается поверхностной волной, квадратичная часть может быть связана с выносом плазмы из аппликатора

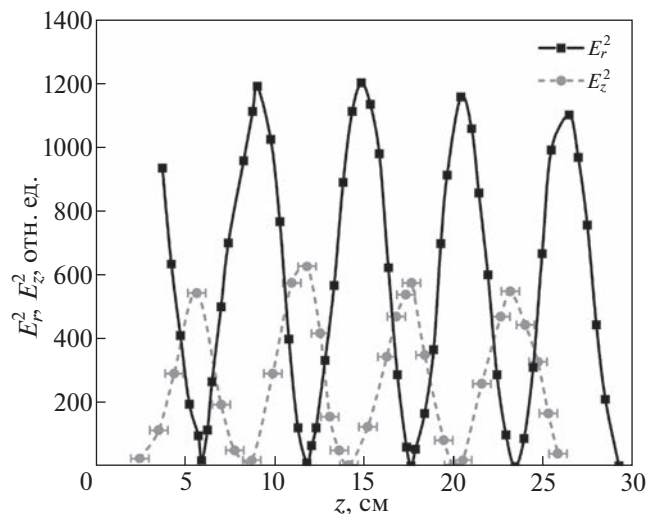


Рис. 6. Экспериментальные распределения квадратов радиальной $E_r^2(z)$ и продольной $E_z^2(z)$ компонент напряженности электрического поля ПЭВ вдоль плазменного столба, ограниченного зеркалами. Расстояние между СВЧ-зондом и трубкой $r = 1.5$ см.

под действием пондеромоторной силы и диффузии [28] с последующим формированием поверхностной волны. При этом плотность внутри аппликатора достигает $\approx 20n_c$. Вследствие этого увеличение плотности плазмы вблизи аппликатора не сопровождается значительным увеличением поля, как в случае поддержания разряда только поверхностной волной.

Резонанс поверхностной волны возбуждался между двумя зеркалами, разнесенными на $L = 5/2\lambda_s = 29$ см. Зависимости величин полей $E_z(z)$ и $E_r(z)$, измеренные между зеркалами приведены на рис. 6. Данные распределения измерены с помощью $E_z(z)$ и $E_r(z)$ зондов, имеющих разную чувствительность. Для определения отношения амплитуд была проведена калибровка относительной чувствительности зондов по полю. Возбуждение резонанса позволяет увидеть особенность поверхностной волны, обусловленную наличием продольной компоненты E_z [17], которая распространяется в противофазе с радиальной компонентой. В отличие от случая свободного разряда, распределение поля ПЭВ имеет синусоидальный характер с постоянной амплитудой. Измеренное значение КСВН составляет ≈ 25 . Средняя длина волны ПЭВ в резонаторе равна ≈ 11.6 см. При резонансе происходит накопление энергии между зеркалами, уровень которой превышает уровень энергии в свободном разряде в 6 раз. Изменение расстояния между зеркалами приводит к расстройке резонанса и, соответственно, уменьшению уровня поля и запасенной энергии, а также к укорочению длины волны

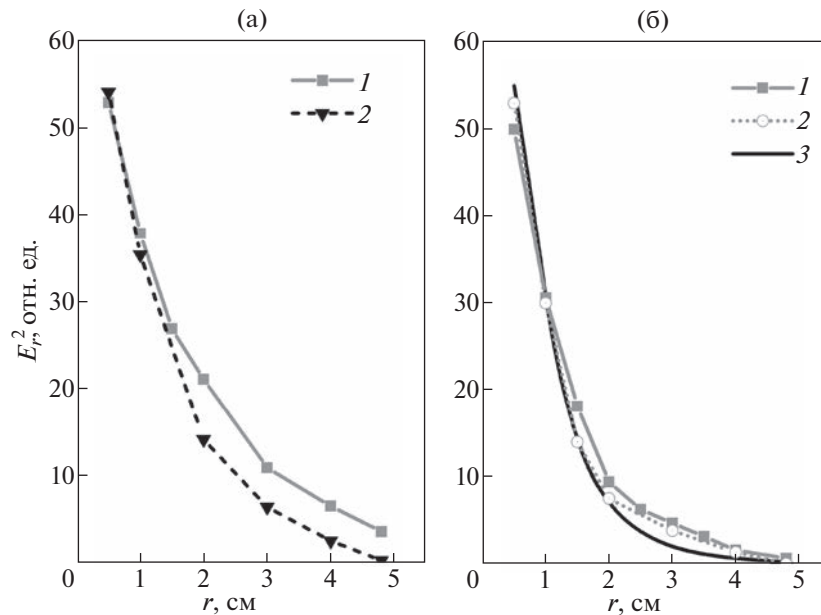


Рис. 7. Радиальные распределения компонент электрического поля ПЭВ. а) Распределение квадрата радиальной компоненты $E_r^2(r)$ в резонаторе – 1 и в случае свободного разряда (2). б) Распределение квадрата продольной компоненты $E_z^2(r)$ в резонаторе (1), в случае свободного разряда (2) и теоретическое распределение (3).

вплоть до значений близких к свободному разряду при $L = \lambda_s(2n + 1)/2$, где n – целое число.

Измеренные на разных расстояниях (от 0.5 см до 6 см) от разрядной трубки распределения полей $E_r(z)$ и $E_z(z)$ имеют вид, идентичный распределению на рис. 6, что свидетельствует о пренебрежимо малом вкладе объемного излучения. Радиальные распределения компонент квадрата электрического поля в резонаторе и свободном разряде представлены на рис. 7. Измеренные в свободном разряде и в резонаторе распределения продольной компоненты $E_z(r)$ (рис. 4б, кривые 1 и 2) хорошо согласуются с теоретическим распределением [26] $E_z^2(r) = A \left[K_1 \left(r \sqrt{\beta^2 - k_0^2} \right) \right]^2$, где A – константа, $\beta = 2\pi/\lambda_s$, а $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ (кривая 3) для дипольной моды. Некоторое отклонение распределения в резонаторе вызвано возмущением СВЧ-зондом поля в резонаторе. Азимутальное распределение $E_r(\varphi)$ идентично распределению $E_z(\varphi)$ для свободного разряда, что подтверждает сохранение дипольной моды и в случае стоячей волны.

Высокое значение КСВН при резонансе поверхностной волны и накопление энергии между зеркалами позволяет рассматривать эту систему как открытый резонатор ПЭВ с некоторой добротностью. Так как в работе в качестве источника СВЧ-энергии использовался магнетрон, работающий на фиксированной частоте 2.45 ГГц, оцен-

ка добротности, полученная посредством перестройки собственной частоты резонатора при изменении его длины, составило величину $Q \approx 20$. В случае слабостолкновительной плазмы величина добротности ограничивается затуханием на электрон-нейтральных столкновениях, а предельная добротность резонатора ПЭВ может быть оценена, как $Q_{\max} \approx \omega/v_{en} \approx 30$ [29]. Для открытого резонатора на объемной волне [30] значению КСВН = 25 соответствует добротность $Q = 2\pi L/\lambda(1 - R) \approx 65$, здесь R – коэффициент отражения.

Рост энергии поля поверхностной волны в резонаторе приводит к увеличению концентрации электронов в плазменном столбе. Продольные профили плотности плазмы, измеренные в границах резонатора, представлены на рис. 8.

Несмотря на высокое значение КСВН, значительной модуляции плотности плазмы вдоль столба не зарегистрировано. При уменьшении давления до 0.02 Торр или при увеличении до 3 Торр модуляция плотности плазмы также не наблюдалась. При этом при отклонении давления от оптимального значения $p = 0.1$ Торр происходило ухудшение резонансных свойств. При $p > 1$ Торр отношение $v_{en}/\omega \rightarrow 1$ и разряд не выходит из аппликатора.

Распределение плотности плазмы в ненастроенном резонаторе близко к распределению в свободном разряде. При настройке на резонанс

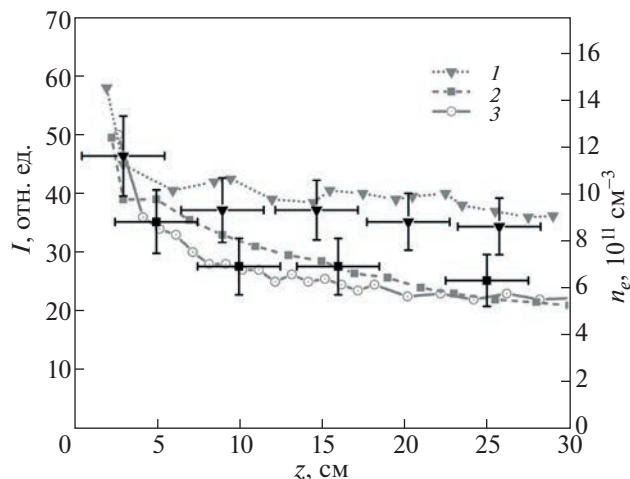


Рис. 8. Усредненный по сечению трубки продольный профиль плотности плазмы в границах резонатора: 1 — при настройке на резонанс; 2 — при расстройке системы; 3 — приведенный для сравнения профиль плотности свободного разряда из рис. 4. Сплошные линии — распределения интегральной светимости плазмы $I(z) \sim n_e(z)$ (сигнал с фотодетектора); точки — расчет по дисперсии ПЭВ, на основании измерений длины волны.

плотность возрастает на 40–50% при увеличении энергии поля в 6 раз. При этом следует отметить, что рост плотности плазмы обусловлен ростом поля внутри плазмы. Как отмечалось ранее при описании свободного разряда, с ростом плотности плазмы происходит перераспределение энергии поля, вызванное уменьшением скин-глубины. На рис. 9 (кривая 1) показано изменение отношения W_{pl}/W_{vac} при резонансе. Построенная на основе экспериментальных данных n_e и E зависимость отношения W_{pl}/W_{vac} демонстрирует его изменение с $W_{pl}/W_{vac} = 0.25$ для свободного разряда до $W_{pl}/W_{vac} = 0.07$ при резонансе.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЯ СТОЯЧЕЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ

Для исследования характеристик электромагнитного поля стоячей поверхностной волны в программе CST Microwave Studio была создана численная модель аппликатора ПЭВ, аналогичная используемому в эксперименте. В численной модели не рассматривались процессы образования плазмы. Использовалась модель Друде холодной плазмы с заранее заданными параметрами n_e и ν_{ne} , которые не изменялись в процессе симуляции. В программе была воссоздана модель возбуждения стоячей ПЭВ аналогичная экспериментальной, полностью воспроизводящая параметры установки: размеры аппликатора, рабочая

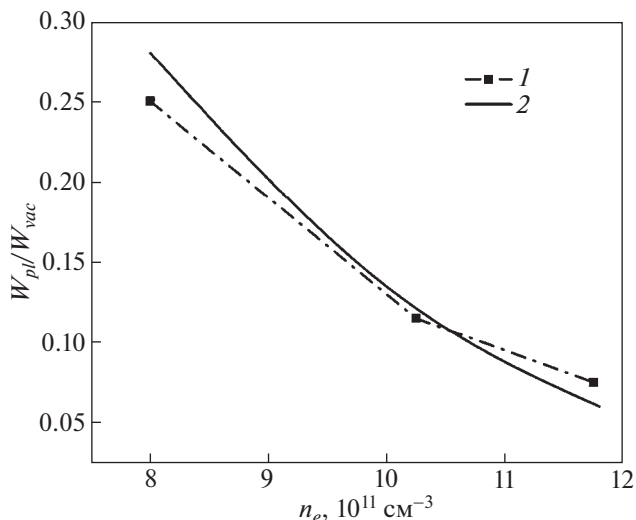


Рис. 9. Зависимость отношения энергии поверхностной волны внутри и вне плазмы W_{pl}/W_{vac} от величины средней по сечению плотности плазмы. Точки 1 соответствуют экспериментальным результатам; сплошной линией — 2 обозначен результат численного моделирования.

частота, радиус трубки, расстояние между зеркалами. Плотность плазмы задавалась исходя из данных, полученных в эксперименте. Результаты симуляции проиллюстрированы рис. 10а, б, где изображены распределения электрического поля в сечениях, соответствующих максимуму E_r (а) и E_z (б). Видно, что распределения имеют вид, характерный для дипольной моды ПЭВ. Полученные в результате симуляции распределения продольной и радиальной компонент электрического СВЧ-поля ПЭВ вдоль столба представлены на рис. 11 совместно с экспериментальными результатами рис. 6. Приведенные экспериментальные и расчетные распределения достаточно хорошо согласуются и имеют близкие значения длины волны и КСВН. Расчетные распределения электрического поля по радиусу r' (направление r' указано на рис. 10), соответствующие максимуму E_z и E_r , приведены на рис. 12, который демонстрирует характер распределения поля поверхностной волны в плазме и вне плазмы. Спад поля вне плазмы в радиальном направлении близок к экспериментальному распределению (рис. 7). Численная модель позволяет произвести количественное сравнение компонент E_r и E_z , что затруднительно в эксперименте. Так, из приведенных результатов моделирования видно, что вне плазмы отношение величин полей $E_r/E_z \approx 2$, внутри плазмы (рис. 12) $E_r/E_z = 1.26$. Моделирование позволяет на основании измеренных концентраций электронов оценить перераспределение энергии W_{pl}/W_{vac} при установлении резонанса (рис. 9, кри-

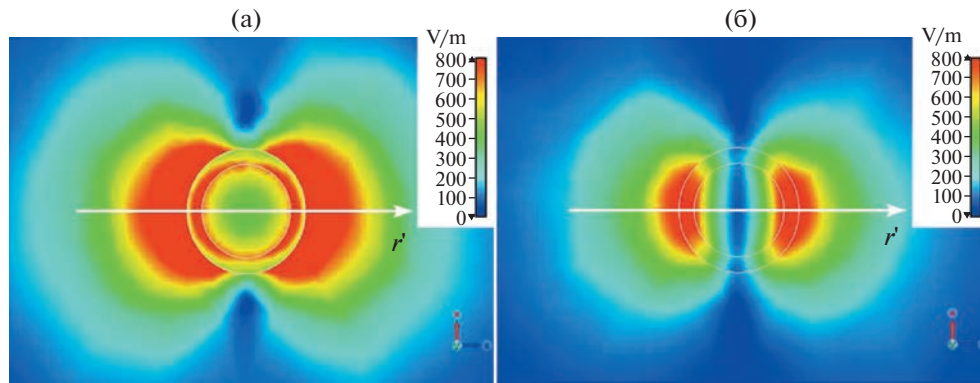


Рис. 10. Распределения интенсивности электромагнитного поля стоячей ПЭВ в поперечных сечениях разряда (результат моделирования в CST Microwave Studio), соответствующих; а) — максимуму E_r ; б) — максимуму E_z .

вая 2). Продольное распределение интегрированного по сечению плазменного столба электрического поля ПЭВ представлено на рис. 13 (кривая 1). Как видно из рисунка, проникающее внутрь плазмы суммарное поле поверхностной волны не претерпевает значительных изменений по длине столба. Данный результат свидетельствует о примерно равном вкладе электрических компонент E_r и E_z ПЭВ в поддержание разряда, что объясняет отсутствие модуляции плотности плазмы в эксперименте. Следует также учитывать, что диффузионное расплывание приводит к сглаживанию профиля плотности плазмы.

Следует отметить, что в аналогичных экспериментах [17–19] по поддержанию плазменного

столба стоячей поверхностной волной, в широком диапазоне давлений, наблюдалась заметная модуляция плотности плазмы вдоль столба с отношением $n_{\text{emax}}/n_{\text{emin}}$ достигающим двух. Этот феномен авторы объясняют наличием характерной для поверхностной волны продольной компоненты E_z , сдвинутой по фазе на 90° относительно E_r , и являющейся основным вкладчиком энергии в поддержание разряда. Наличие выраженной модуляции плотности плазмы в этих экспериментах связано с возбуждением $m = 0$ моды, структура поля которой отличается от структуры $m = 1$ моды. Полученные нами в результате моделирования распределения суммарного электрического поля стоячей ПЭВ $m = 0$ моды приведены на рис. 13 совместно с распределением поля для $m = 1$ моды. Кривая 2 построена в условиях эксперимента [19]. Аналогичный характер поля $m = 0$ моды сохраняется и в произвольных условиях. Построенное в качестве примера распределение (кривая 3) соответствует следующим параметрам: $n_e = 2.5 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$, $r = 0.5 \text{ см}$, $f = 2.45 \text{ ГГц}$. Результаты моделирования подтверждают определяющий вклад компоненты E_z в поддержание разряда в случае аксиально-симметричной моды ПЭВ.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Экспериментально показано, что стоячая СВЧ-поверхностная волна дипольной моды возбуждается на плазменном столбе между двумя металлическими зеркалами. Отличительная особенность данного эксперимента заключается в самосогласованном режиме: возбуждается стоячая поверхностная волна, которая сама создает и поддерживает плазму. При выполнении условия резонанса происходит рост плотности плазмы на 50%, тогда как энергия поля ПЭВ возрастает в 6 раз по сравнению со свободным разрядом. Та-

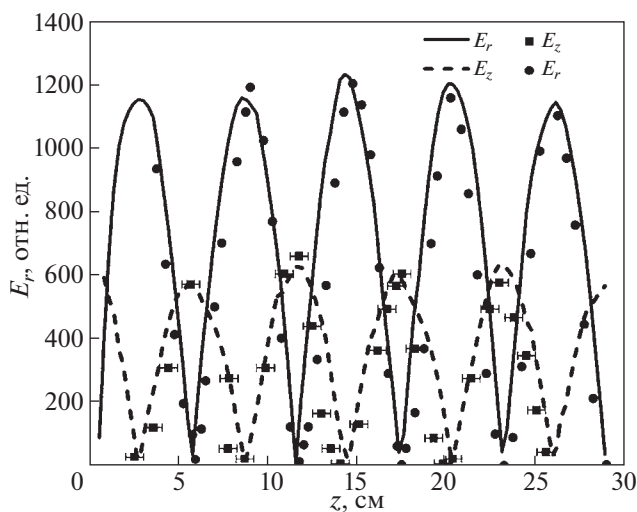


Рис. 11. Распределения радиальной E_r и продольной E_z компонент напряженности электрического поля вдоль плазменного столба. Сплошные кривые — результат моделирования. Точки — экспериментальные данные (рис. 6), нормированные на результат моделирования.

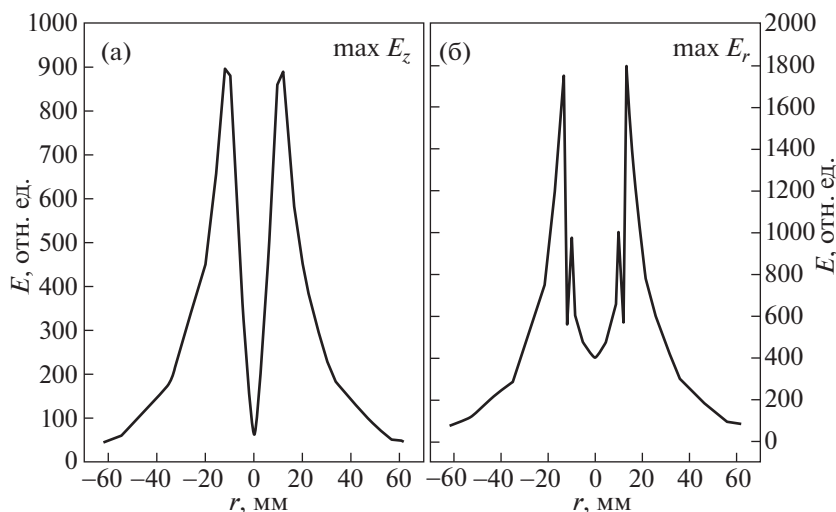


Рис. 12. Радиальные распределения напряженности электрического поля ПЭВ, полученные в результате моделирования в программе CST Microwave Studio, где а) соответствует максимуму E_z , а б) — максимуму E_r .

кой незначительный рост плотности связан с уменьшением доли энергии поверхностной волны, проникающей в плазму. Отношение энергии поля ПЭВ внутри и вне плазменного столба W_{pl}/W_{vac} изменяется с 0.25 в свободном разряде до 0.07 при резонансе. Высокое значение КСВН поверхностной волны и накопление энергии между зеркалами позволяет рассматривать эту систему как открытый резонатор ПЭВ на плазменном столбе с добротностью, лежащей в пределах $Q =$

$= 15\text{--}20$. Поле поверхностной волны сильно привязано к плазменному столбу, экспоненциально затухая в поперечном направлении, что позволяет использовать зеркала с размерами, не превышающими $\lambda/2$. Средний уровень поля стоячей волны в резонаторе постоянен по его длине, в то время как средний уровень поля в свободном разряде затухает на этой длине в два раза. В связи со значительным ростом поля поверхностной волны при резонансе, влияние объемного излучения вблизи аппликатора пренебрежимо мало.

Как известно, поверхностная волна характеризуется наличием компонент поля E_r и E_z , сдвинутыми по фазе на 90° по отношению к оси трубки [17]. В результате численного моделирования показано, что при возбуждении стоячей ПЭВ $m = 1$ моды радиальная и продольная компоненты электрического поля ПЭВ E_r и E_z вносят примерно равный вклад в поддержание разряда, и вследствие этого в эксперименте не было зарегистрировано заметной модуляции плотности плазмы. При возбуждении стоячей волны $m = 0$ моды вклад продольной электрической компоненты E_z в плазму значительно превышает вклад радиальной компоненты E_r ПЭВ, что приводит к модуляции плотности плазмы.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-32-90162.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sommerfeld A. // Ann. der Physik und Chem. 1899. V. 67. № 2. P. 233.
2. Trivelpiece A.W. // The DP degree Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, 1958.

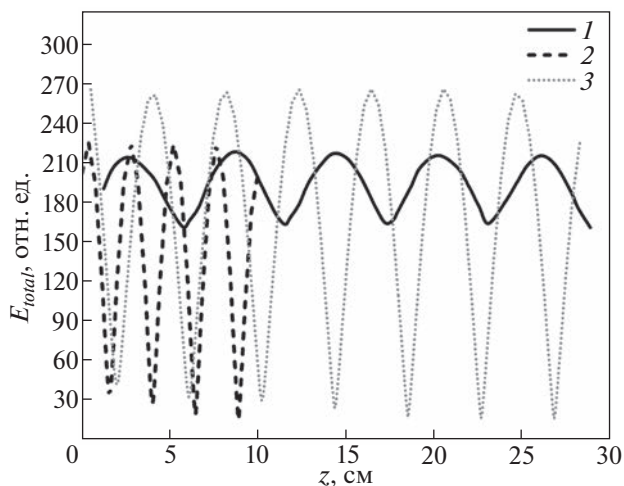


Рис. 13. Продольное распределение электрического поля поверхностной волны, интегрированного по сечению плазменного столба. Распределения построены по расчету численной модели. Кривая 1 соответствует $m = 1$ моде в условиях нашего эксперимента; 2 — $m = 0$ моде в условиях эксперимента [19]; 3 — $m = 0$ моде, возбужденной в произвольных условиях.

3. *Trivelpiece A.W., Gould R.W.* // J. Appl. Phys. 1959. V. 30. № 11. P. 1784.
<https://doi.org/10.1063/1.1735056>
4. *Сергейчев К.Ф., Карфидов Д.М., Андреев С.Е., Сизов Ю.Е., Жуков В.И.* // Радиотехника и электроника. 2018. Т. 63. № 4. С. 314–322.
5. *Oruganti S.K., Liu F.F., Paul D., Liu J., Malik J., Feng K., Kim H., Liang Y.M., Thundat T., Bien F.* // Scientific Reports. 2020. V. 10. № 1. P. 925.
<https://doi.org/10.1038/s41598-020-57554-1>
6. *Sergeichev K.F., Karfidov D.M., Zhukov V.I.* // Phys. of Wave Phenom. 2019. V. 27. № 1. P. 37–41.
<https://doi.org/10.3103/S1541308X19010072>
7. *Гусейн-заде Н.Г., Жуков В.И., Карфидов Д.М., Сергейчев К.Ф.* // Инженерная физика. 2017. № 12. С. 56.
8. *Moisan M., Nowakowska H.* // Plasma Sources Sci. Technol. 2018. V. 27. № 7. 073001.
<https://doi.org/10.1088/1361-6595/aac528>
9. *Moisan M., Shivarova A., Trivelpiece A.W.* // Plasma Phys. 1982. V. 24. № 11. P. 1331.
10. *Moisan M., Zakrzewski Z.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 1991. V. 24. P. 1025.
11. *Borges C.F.M., Airoidi V.T., Corat E.J., Moisan M., Schelz S., Guay D.* // Journal of Applied Physics. 1996. V. 80. № 10. P. 6013.
<https://doi.org/10.1063/1.363600>
12. *Girka V., Girka I., Thumm M.* // Surface Flute Waves in Plasmas, Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics 79. 2014. P. 129.
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-02027-36>
13. *Abbasi M.M., Shahrooz A.* // Microwave and Optical Technology Letters. 2016. V. 59. № 4. P. 806.
<https://doi.org/10.1002/mop.30395>
14. *Zhao J., Sun Z., Ren Yu., Song Lu, Wang S., Liu W., Yu Z., Wei Yu.* // Journal of Physics D: Applied Physics. 2019. V. 52. № 29. P. 295202.
<https://doi.org/10.1088/1361-6463/ab1b0a>
15. *Истомин Е.Н., Карфидов Д.М., Минаев И.М., Рухадзе А.А., Тараканов В.П., Сергейчев К.Ф., Трефилов А.Ю.* // Физика плазмы. 2006. Т. 32. С. 423.
<https://doi.org/10.1134/S1063780X06050047>
16. *Богачев Н.Н., Гусейн-заде Н.Г., Нефедов В.И.* // Физика плазмы. 2019. Т. 45. № 4. С. 365.
17. *Rogers J., Asmussen J.* // IEEE Trans. Plasma Sci. 1982. V. PS–10. № 1. P. 11.
[https://doi.org/0093-3813/82/0300-0011\\$00.75](https://doi.org/0093-3813/82/0300-0011$00.75)
18. *Wolinska-Szatowska J.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 1988. V. 21. № 6. P. 937.
<https://doi.org/10.1088/0022-3727/21/6/012>
19. *Rakem Z., Leprince P., Marec J.* // Rev. Phys. Appl. (Paris). 1990. V. 25. № 1. P. 125.
<https://doi.org/10.1051/rphysap:01990002501012500>
20. *Margot-Chaker J., Moisan M., Chaker M., Glaude V.M.M., Lauque P., Paraszczak J., and Sauve G.* // J. Appl. Phys. 1982. V. 66. № 9. P. 4134.
<https://doi.org/10.1063/1.343998>
21. *Солнцев Г.С., Булкин П.С., Мокеев М.В., Цветкова Л.И.* // Вестник Московского университета. 1997. Серия 3. № 6. С. 36.
22. *Moisan M., Beaudry C., Leprince P.* // Physics Letters A. 1974. V. 50. № 2. P. 125.
[https://doi.org/10.1016/0375-9601\(74\)90903-7](https://doi.org/10.1016/0375-9601(74)90903-7)
23. *Жуков В.И., Карфидов Д.М., Сергейчев К.Ф.* // Физика плазмы. 2020. Т. 46. № 8. С. 1.
<https://doi.org/10.31857/S0367292120080120>
24. *Голант В.Е.* Сверхвысокочастотные методы исследования плазмы. М.: Наука, 1968.
25. *Chen Z.S., Ma L.F., Wang J.C.* // Int. J. Antennas Propag. 2015. 736090 (2015).
<https://doi.org/10.1155/2015/736090>
26. *Zhelyazkov I., Atanassov V.* // Physics Reports. 1995. V. 255. № 2–3. P. 79.
[https://doi.org/10.1016/0370-1573\(94\)00092-H](https://doi.org/10.1016/0370-1573(94)00092-H)
27. *Nowakowska H., Lackowski M., Moisan M.* // IEEE Trans. Plasma Sci. 2020. V. 48. № 6. P. 2106.
<https://doi.org/10.1109/TPS.2020.2995475>
28. *Vikharev A., Böhle A., Ivanov O., Kolisko A., Kortshagen U., and Schlüter H.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 1996. V. 29. P. 369.
29. *Ida Y., Hayashi K.* // Journal of Applied Physics. 1971. V. 42. № 6. P. 2423.
30. *Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В.* Электромагнитные волны и поля. М.: Советское радио, 1971. С. 554.

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ

УДК 533.9

ОБ ОДНОЙ РАСПРОСТРАНЕННОЙ НЕТОЧНОСТИ И ЕЕ УСТРАНЕНИИ В ТЕОРИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ, БАЗИРУЮЩИХСЯ НА МЕТОДЕ ПСЕВДОПОТЕНЦИАЛА САГДЕЕВА

© 2023 г. А. Е. Дубинов^{a, b, *}

^a Российский федеральный ядерный центр — Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, Саров, Россия

^b Саровский физико-технический институт — филиал Национального исследовательского Ядерного университета “Московский инженерно-физический институт”, Саров, Россия

*e-mail: dubinov-ae@yandex.ru

Поступила в редакцию 26.09.2022 г.

После доработки 25.10.2022 г.

Принята к публикации 10.11.2022 г.

Сообщается об обнаружении противоречия, возникающего в решениях задач о профилях нелинейных продольных электростатических волн в плазме методом псевдопотенциала Сагдеева. Противоречие проявляется в неравенстве среднего за период значения концентрации частиц и заданной концентрации невозмущенной плазмы. Показано, что причина возникновения противоречия связана с весьма распространенной неточностью в постановке таких задач. Предложено корректировать постановку подобных задач и изменить интерпретацию получаемых этим методом решений, применив иные начальные условия: необходимо задавать вместо концентрации невозмущенной плазмы концентрацию частиц в точках, в которых потенциал ϕ принят равным нулю. С такими начальными условиями противоречие полностью снимается.

Ключевые слова: плазма, нелинейные волны, солитон, псевдопотенциал

DOI: 10.31857/S0367292122601187, **EDN:** MZUBBD

1. ВВЕДЕНИЕ

При анализе нелинейных волн большой амплитуды в плазме, особенно для определения условий существования периодических, солитонных и ударно-волновых решений, широко применимы методы механической аналогии. Наиболее известен из них — метод псевдопотенциала Сагдеева. Это метод носит имя Роальда З. Сагдеева, который вместе с коллегами применил его для анализа нелинейных ионно-звуковых волн в бесстолкновительной плазме с холодными ионами и безынерционными распределенными по Больцману электронами, [1–3]. В результате им была показана возможность нелинейных дозвуковых периодических и сверхзвуковых уединенных ионно-звуковых волн (солитонов), а также определена предельная скорость солитонов (критическое число Маха).

Справедливо указать на более ранние работы А.И. Ахиезера и Р.В. Половина [4, 5], применивших другой вариант метода механической аналогии для анализа нелинейных электронных волн в плазме.

Техника и многочисленные примеры применения метода псевдопотенциала Сагдеева описа-

ны в многочисленных оригинальных работах, общее число которых перевалило за несколько тысяч, и во многих книгах по теории волн и физике плазмы [6–11]. Укажем также работы [12, 13], в которых был представлен новый вариант метода механической аналогии — метод псевдопотенциала Бернулли.

Однако при детальном анализе решений, получаемых с помощью методов псевдопотенциала, а также в самом решении Сагдеева нами были обнаружены некоторые противоречивые моменты, на которые ранее нигде не обращалось внимание. В данных методических заметках описаны эти противоречия, а также представлена новая интерпретация полученного в [1–3] решения, которая устраняет указанные противоречия.

2. ПОДРОБНОЕ ОПИСАНИЕ РЕШЕНИЯ САГДЕЕВА НАХОЖДЕНИЯ ПРОФИЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ИОННО-ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ

Здесь дается детализированное решение задачи о профиле нелинейной ионно-звуковой волны в холодной плазме, нежели в оригинальных рабо-

тах Сагдеева и др. [1–3], в которых решение представлено весьма кратко. Обращается внимание на некоторые нюансы, которые полезны для исследователей и которые обычно опускают, считая их тривиальными. Некоторые из нюансов, которые важны при устранении возникающего противоречия, выделены шрифтом.

Следуя [3], рассмотрим одномерное волновое движение нерелятивистской бесстолкновительной плазмы, содержащей квазинейтральную смесь электронного и ионного газов с концентрациями n_{0e} и n_{0i} в невозмущенном волной состоянии при условии $n_{0e} = n_{0i} = n_0$. При этом будем считать, что ионный газ — холодный.

Обозначим $e < 0$ — заряд электрона и $-e$ положительный заряд однократно заряженного иона. Тогда, имеет место соотношение квазинейтральности невозмущенной плазмы $en_{0e} - en_{0i} = 0$. Так как обычно масса иона m велика по сравнению с массой электрона, пренебрежем электронной массой, т.е. будем считать электронный газ безынерционным.

Запишем следующую общую систему одномерных уравнений, описывающую динамику ионного газа в плазме:

— уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial (v_i n_i)}{\partial x} = 0; \quad (1)$$

— уравнение движения

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} = \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad (2)$$

— электростатическое уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -4\pi e (n_e - n_i), \quad (3)$$

в которых обозначено v_i — скорость ионов в волне, ϕ — электростатический потенциал.

Будем считать, что электронный газ подчинен распределению Больцмана

$$n_e = n_0 \exp\left(-\frac{e\phi}{kT_e}\right). \quad (4)$$

Найдем решение уравнений (1)–(4) в форме стационарной продольной ионно-звуковой волны, распространяющейся в положительном направлении оси $0x$, т.е. вправо, с фазовой скоростью V . Для этого введем волновую переменную

$$\xi = x - Vt, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -V \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi}. \quad (5)$$

Эта подстановка преобразует систему уравнений в частных производных в систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рекомендуем перейти из лабораторной системы отсчета (ЛСО) в систему отсчета, связанную с волной (ВСО). Для этого воспользуемся правилом Галилея

$$u_i = v_i - V. \quad (6)$$

В этой системе невозмущенная волной плазма движется с отрицательной скоростью $-V$, т.е. влево.

Здесь следует обратить внимание на следующий нюанс. Во многих работах, следуя [3, 6], обычно делают замену (5), оставаясь при этом в ЛСО, т.е. записывая уравнения (1) и (2) для переменной v_i . В книге [14], делая замену (5), предложено переходить к переменной u_i в ВСО в соответствии с (6), что является более естественным и существенно упрощает вид решения. Так поступим и мы. Тогда исходные уравнения (1)–(3) перепишутся в виде

$$\frac{d(n_i u_i)}{d\xi} = 0; \quad (7)$$

$$u_i \frac{du_i}{d\xi} = \frac{e}{m} \frac{d\phi}{d\xi}; \quad (8)$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\xi^2} = -4\pi e (n_e - n_i). \quad (9)$$

Проинтегрируем уравнения (7) и (8) при условиях $\lim_{u_i \rightarrow -V} n_i = n_0$ и $\lim_{u_i \rightarrow -V} \phi = 0$, получив при этом

$$n_i u_i = -n_0 V; \quad (10)$$

$$\frac{u_i^2}{2} - \frac{V^2}{2} = \frac{e}{m} \phi. \quad (11)$$

Обратим внимание на то, что в (10) скорость ионов в ВСО отрицательна, т.е. направлена влево. Это замечание важно, если необходимо, например, вычислять ионный поток в ионно-звуковой волне [15].

Комбинируя (10) и (11), получим зависимость n_i от ϕ

$$n_i = \frac{n_0}{\sqrt{1 + \frac{2e\phi}{mV^2}}}, \quad (12)$$

при подстановки (12) вместе с зависимостью n_e от ϕ (4) в уравнение Пуассона (9), оно примет вид

$$\frac{d^2 \phi}{d\xi^2} = -4\pi e n_0 \left[\exp\left(-\frac{e\phi}{kT_e}\right) - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2e\phi}{mV^2}}} \right] \equiv F_s(\phi). \quad (13)$$

Уравнение (13) имеет вид уравнения движения некой псевдочастицы единичной массы в неоднородном силовом поле $F_s(\phi)$ в отсутствии тре-

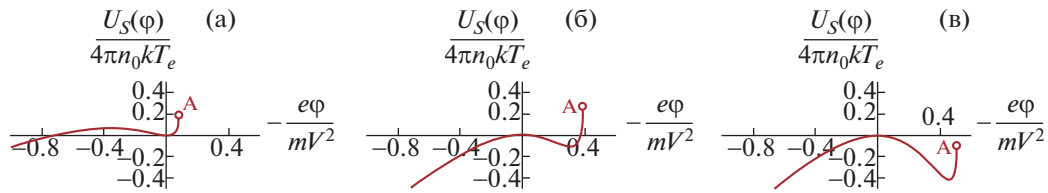


Рис. 1. Графики нормированного псевдопотенциала Сагдеева $\frac{U_s(\varphi)}{4\pi n_0 k T_e}$ (14) в зависимости от параметра $-\frac{e\varphi}{mV^2}$: а) — при $\sqrt{\frac{mV^2}{kT_e}} = 0.6$; б) — при $\sqrt{\frac{mV^2}{kT_e}} = 1.4$; в) — при $\sqrt{\frac{mV^2}{kT_e}} = 1.6$.

ния, в котором φ играет роль псевдокоординаты, а ξ — псевдоременн.

Умножим обе части уравнения (13) на $d\varphi/d\xi$ и проинтегрируем его с условием $U_s(\varphi)_{\varphi=0} = 0$, дающем точку равновесия. В результате получим выражение для псевдопотенциала Сагдеева

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{d\xi} \right)^2 = 4\pi n_0 \times \left\{ kT_e \left[1 - \exp \left(-\frac{e\varphi}{kT_e} \right) \right] + mV^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2e\varphi}{mV^2}} \right) \right\} \equiv U_s(\varphi), \quad (14)$$

полученное в [1–3].

Повторное интегрирование (14) методом разделения переменных дает точное выражение профиля волны $\varphi(\xi)$ в неявной форме. Получаемое при этом выражение громоздко и неудобно для анализа, поэтому оно здесь опущено.

Квадратное решение уравнения (14) не будет полным без анализа того, какие типы волн в ней возможны и при каких условиях. Проще всего это сделать, анализируя псевдопотенциал (14).

На рис. 1а–в показаны три возможных варианта графиков псевдопотенциала $U_s(\varphi)$ при различных значениях скорости волны V . Все кривые на них ограничены справа точкой А, в которой подкоренное выражение в (12) обращается в нуль. При больших значениях потенциала φ корень становится мнимым, что соответствует отражению ионов от потенциального барьера в волне и появлению многозначности в профиле ионной плотности, т.е. опрокидыванию волны назад.

При малых значениях скорости волны V , меньших скорости ионного звука $V_s = \sqrt{kT_e/m}$ (это выражение можно вывести из дисперсионного уравнения для ионно-звуковых волн малой амплитуды — см., напр., [9, 13]) псевдопотенциал имеет локальный минимум в нуле (рис. 1а). Колебания псевдочастицы в потенциальной яме вблизи этого минимума соответствуют периодической ион-

но-звуковой волне, а наибольший отрицательный размах колебаний происходит до точки локального максимума потенциала, где псевдосила обращается в нуль ($F_s(\varphi) = 0$).

Точное решение этого трансцендентного уравнения можно выразить через отрицательную ветвь W-функции Ламберта $W_{-1}(x)$ [13, 16], которая есть функция, обратная к функции $y = x \exp x$, при этом выражение для $\varphi_{\max}$ имеет вид:

$$\varphi_{\max} = -\frac{mV^2}{2e} \left\{ 1 + \frac{2kT_e}{mV^2} W_{-1} \left[-\frac{mV^2}{2kT_e} \exp \left(-\frac{mV^2}{2kT_e} \right) \right] \right\}. \quad (15)$$

Колебания псевдочастицы максимального размаха, начинающиеся из положения локального максимума, определяют сепаратрису на фазовом портрете, и могли бы соответствовать уединенной волне. Однако такое решение не удовлетворяет условию $\varphi \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$ и должно быть отброшено. Поэтому дозвуковые уединенные ионно-звуковые волны (солитоны) не существуют.

Для сверхзвуковой волны существуют две формы кривых псевдопотенциала: обе с локальным максимумом в нуле и с локальным минимумом при некотором $\varphi > 0$. Кривые отличаются только тем, что точка А на рис. 1 может находиться или выше (рис. 1б), или ниже (рис. 1в) горизонтальной оси $U_s(\varphi)_{\varphi=0} = 0$.

Колебания псевдочастицы в потенциальной яме вблизи локального минимума не удовлетворяют условию $\int_0^\Lambda \varphi(\xi) d\xi = 0$ для периодической волны с периодом Λ , являющемуся следствием квазинейтральности невозмущенной плазмы. Следовательно, сверхзвуковые периодические ионно-звуковые волны не существуют.

Что касается солитонов, то они существуют только для случая рис. 1б, когда нулевой уровень псевдоэнергии, касательный к точке локального максимума в нуле, пересекает кривую при $\varphi > 0$, т.е. когда существует замкнутая сепаратриса на

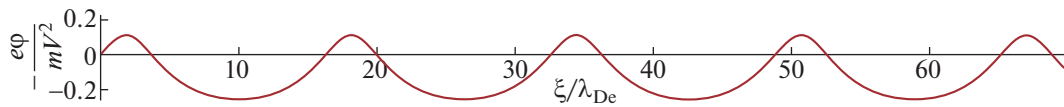


Рис. 2. Профиль потенциала в нелинейной периодической ионно-звуковой волне при $\sqrt{\frac{mV^2}{kT_e}} = 0.6$.

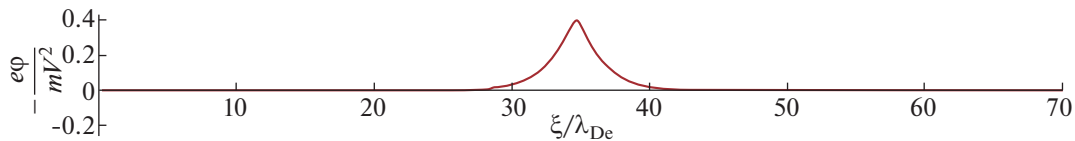


Рис. 3. Профиль потенциала в ионно-звуковом солитоне при $\sqrt{\frac{mV^2}{kT_e}} = 1.4$.

фазовом портрете псевдоосциллятора. Критическая (максимально возможная) скорость солитона $V_{\max}$ определяется из условия нахождения точки А на оси 0ϕ , т.е. когда $U_s(\phi)_{\phi=-mV^2/2e} = 0$:

$$\exp\left(\frac{mV_{\max}^2}{2kT_e}\right) = \frac{mV_{\max}^2}{2kT_e} + 1. \quad (16)$$

В [2] было дано приближенное решение трансцендентного уравнения (16) в виде $V_{\max} \approx 1.6V_s$, а максимальная амплитуда солитона при этой скорости волны — $\phi_{\max} \approx -1.3kT_e/e$. Точное решение этого уравнения удается получить опять же с помощью W-функции Ламберта [16]

$$V_{\max} = V_s \sqrt{-2W_{-1}\left[-\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{2}\right)\right] - 1} \approx (1.585201065\dots)V_s. \quad (17)$$

Укажем, что для некоторых других моделей плазмы критические числа Маха были найдены в [17].

Таким образом, скорость солитона лежит в диапазоне $V_s > V > V_{\max}$, причем при максимальной скорости его амплитуда максимальна и равна $\phi_{\max} = -mV_{\max}^2/e \approx -(1.2566431208\dots)kT_e/e$. Заметим, что амплитуда ионно-звукового солитона положительна, т.к. заряд электрона $e < 0$.

В итоге, в результате анализа псевдопотенциала Сагдеева $U_s(\phi)$ получено, что дозвуковой периодической волной и сверхзвуковым солитоном исчерпывается набор стационарных нелинейных ионно-звуковых волн. Их профили, вычисленные методом Рунге—Кутты из уравнения (13), показаны на рис. 2 и 3 соответственно. Другие типы волн при анализе задачи при этом не проявились.

Важно отметить, что профиль потенциала в периодической волне на рис. 2 не симметричен относительно нуля, что является следствием не-

симметричности потенциальной ямы на рис. 1а относительно точки равновесия n_0 на дне этой ямы.

Этими выводами исчерпывается анализ нелинейных ионно-звуковых волн произвольной амплитуды в плазме в [1–3]. Подобными выводами обычно ограничиваются и многие другие исследователи, рассматривая другие типы электростатических волн (например, электронно-акустические, пыле-акустические волны) в плазмах различного состава и с разными законами распределения частиц, отличающихся от бальцовского.

А каковы профили концентраций плазменных компонентов в волне? Следующий раздел посвящен ответу на этот вопрос.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОФИЛЯ КОНЦЕНТРАЦИИ ИОНОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ ИОННО-ЗВУКОВОЙ ВОЛНЕ И ОБНАРУЖЕНИЕ ПРОТИВОРЕЧИЯ

Далее рассматриваются только нелинейные периодические ионно-звуковые волны.

Для вычисления профиля концентрации ионов в волне проще всего воспользоваться уже посчитанным профилем потенциала $\phi(\xi)$ из рис. 2 и формулой (12). На рис. 4 представлен профиль ионной концентрации $n_i(\phi)$, вычисленный при тех же параметрах, что и $\phi(\xi)$ на рис. 2. Видно, что $n_i(\phi)$ осциллирует относительно значения n_0 , формируя фазы сжатия и разрежения в волне. Видно, что эти колебания несимметричны, фазы сжатия и разрежения в них имеют сильно различающиеся друг от друга профили. Эта асимметрия является следствием отмеченной выше асимметрии профиля $\phi(\xi)$ на рис. 2.

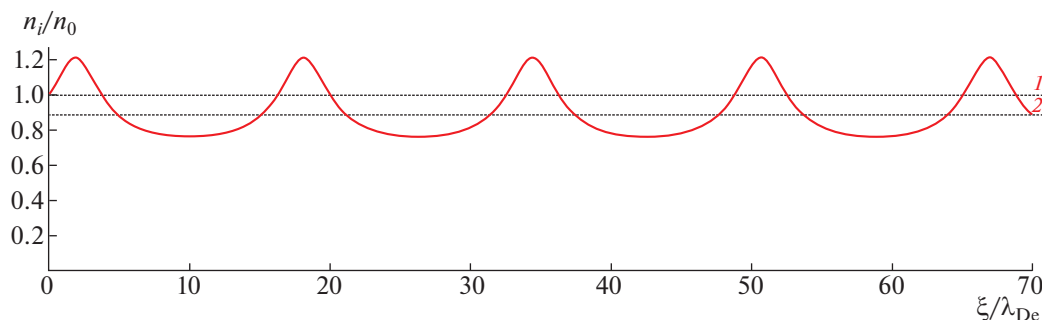


Рис. 4. Профиль относительной концентрации ионов $\frac{n_i}{n_0}$ в периодической ионно-звуковой волне при $\sqrt{\frac{mV^2}{kT_e}} = 0.6$; 1 – уровень плотности квазинейтральной плазмы, 2 – средний уровень возмущенной плотности ионов в волне.

Легко вычислить среднее за период волны значение концентрации $\langle n_i(\varphi) \rangle_\Lambda$. Это среднее показано на рис. 4 горизонтальной прямой 2. Здесь мы приходим к серьезному противоречию: оказывается $\langle n_i(\varphi) \rangle_\Lambda < n_0$, т.е. не выполнен закон сохранения числа ионов в плазме! Для параметров, при которых вычислялся профиль рис. 4, расчеты дают, что $\langle n_i(\varphi) \rangle_\Lambda \approx 0.8923n_0$. Куда делись недостающие 10% ионов? Ответа на этот вопрос до недавнего времени не было.

Нами была исследована величина расхождения между $\langle n_i(\varphi) \rangle_\Lambda$ и n_0 . Было найдено, что это расхождение растет с ростом амплитуды волны и максимально при $\varphi_{\max}$ (15).

Надо сказать, что аналогичные расхождения между средней за период и невозмущенной концентрациями ионов обнаруживались и в других моделях плазмы при вычислении потоков частиц, генерирующих ионно-звуковой волной [15, 18], и ранее – в других задачах [19–21]. Но поскольку объяснений им не было, внимание на них не заострялось.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПСЕВДОПОТЕНЦИАЛА БЕРНУЛЛИ: ПРОТИВОРЕЧИЕ УСИЛИВАЕТСЯ

Для устранения ряда математических трудностей при выводе псевдопотенциала Сагдеева для электростатических волн в плазме сложного состава был разработан метод псевдопотенциала Бернулли $U_B(n_i)$ [12, 13, 22–24]. В нем роль псевдокоординаты играет концентрация, например, ионов, а в квантовой плазме – химический потенциал [25, 26]. Псевдопотенциал Бернулли в отличие от псевдопотенциала Сагдеева оказался более универсальным и более удобным для анализа эволюции концентрации компонентов плазмы и пространственного заряда в волне. Подробно этот метод описан в [12, 13].

В различных моделях плазмы получение псевдопотенциала Бернулли осуществляется путем сведения исходных уравнений к дифференциальному уравнению 1-го порядка Бернулли относительно концентрации ионов, интеграл которого и дает псевдопотенциал. Если же известно явное выражение для псевдопотенциала Сагдеева, то получить псевдопотенциал Бернулли можно путем замены переменных и последующей перенормировки. Например, в рассматриваемой в п. 2 задаче следует подставить (4) и (12) в (14), а затем умножить его на функциональный коэффициент, пропорциональный n_i^{-6} . Это было проделано в [12], в результате чего было получен псевдопотенциал Бернулли в виде

$$U_B(n_i) = \frac{4\pi e^2 n_0}{m} \left(\frac{n_0}{V} \right)^2 \left(\frac{n_0}{n_i} \right)^6 \times \left\{ \left(1 - \frac{n_0}{n_i} \right) + \frac{kT_e}{mV^2} \left[1 - \exp \left(-\frac{mV^2}{2kT_e} \left(\frac{n_0^2}{n_i^2} - 1 \right) \right) \right] \right\}, \quad (18)$$

для которого должно выполняться $U_B(n_i)_{n_i=n_0} = 0$.

На рис. 5 представлен график псевдопотенциала Бернулли для периодической ионно-звуковой волны при $V < V_s$ и при тех же параметрах, что и для псевдопотенциала Сагдеева на рис. 1а. Прокомментируем его.

Видно, что псевдопотенциал Бернулли имеет локальный минимум в точке $n = n_0$. Колебания псевдочастицы в потенциальной яме вблизи этого минимума соответствуют периодической ионно-звуковой волне, а наибольший отрицательный размах колебаний происходит до точки локального максимума потенциала, где псевдосила Бернулли обращается в нуль.

Принципиально, что потенциальная яма не симметрична. В ней склон, соответствующий фазе сжатия везде круче, чем склон, соответствующий фазе разрежения. Это свидетельствует о том, что псевдочастица при любой амплитуде колеба-

ний будет дольше находиться в фазе разрежения, чем в фазе сжатия. Следовательно, среднее положение псевдочастицы всегда меньше равновесного: $\langle n_i(\varphi) \rangle_A < n_0$. При этом, чем больше амплитуда колебаний, тем больше и расхождение. Этот факт усиливает противоречие, отмеченное в разд. 3.

Отметим, что асимметрия псевдопотенциала Бернулли относительно n_0 для периодических электростатических волн возникала и в других исследованных моделях плазмы и типов волн в [13, 19, 20, 27].

Таким образом, обнаруженное и подтвержденное противоречие, которое заключается в неравенстве средней за период волны концентрации ионнов и заданного в задаче значения концентрации плазмы, требует скорейшего разрешения.

5. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ, ОБЪЯСНЕНИЕ ПРОТИВОРЕЧИЯ И РЕЦЕПТ ЕГО УСТРАНЕНИЯ

Объяснение описанному выше противоречию основано на выборе начальных условий. Особенно важно, какой смысл придается величине n_0 .

Рассмотрим сначала, каков смысл величине n_0 придавали авторы [1–3]. Работы [1, 2] являются обзорными, в них рассмотрены много разнообразных плазменных задач, но каков смысл n_0 дается именно в задаче о нелинейных ионно-звуковых волнах в них не сказано. Однако в [3] (см. С. 127) в уравнениях (1)–(4) предлагается выбирать следующие начальные условия для невозмущенной плазмы: $\varphi = 0$, $v = 0$, $n_i = n_e = n_0$, т.е. n_0 — концентрация невозмущенной плазмы. Таким образом, можно утверждать, что и в [1, 2] n_0 — концентрация невозмущенной плазмы.

В целом ряде книг рассмотрена задача о нелинейных ионно-звуковых волнах, в которых не указан физический смысл n_0 , но везде в них дается ссылка на оригинальные работы [1–3]. Например, в книгах [10, 28–31]. Следовательно, можно считать, что и в них полагается, что n_0 — концентрация невозмущенной плазмы. В других книгах таких, как [6, 8, 9, 32, 33], это прямо указано.

Такой выбор начальных условий, когда за n_0 принималась концентрация невозмущенной плазмы, был сделан в огромном количестве оригинальных исследований нелинейных электростатических волн в плазме, базирующихся на методе псевдопотенциала Сагдеева (например, в [34–45]). В большой группе работ выбирались начальные условия для плазмы, находящейся в динамическом равновесии (например, [46–53]). Но легко видеть на рис. 5, что условие невозмущенности и условие равновесия для этой задачи эквивалентны.

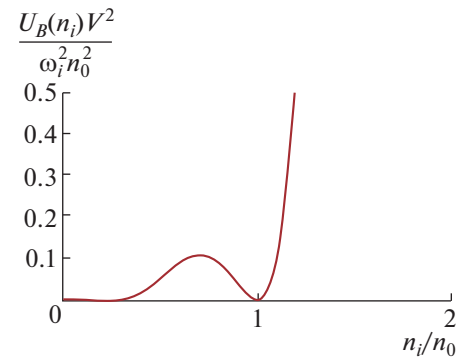


Рис. 5. Графики псевдопотенциала Бернулли (18) при

$$\sqrt{\frac{mV^2}{kT_e}} = 0.6.$$

В указанных оригинальных работах профили концентраций частиц не исследовались, поэтому противоречие не было выявлено.

Справедливо также заметить, что автор данной заметки и его соавторы до недавнего времени также использовали начальные условия для невозмущенной плазмы.

В [14] (см. С. 406) предложены иные начальные условия для задачи Сагдеева: $n_i = n_e = n_0$ — значения концентрации в точках, в которых потенциал φ принят равным нулю. Т.е. n_0 не является здесь концентрацией невозмущенной плазмы!

Для иллюстрации правильности такого выбора начальных условий представим вычисленные синхронизированные профили $n_e(\xi)$ и $n_i(\xi)$ (рис. 6). Эти вычисления были осуществлены с помощью уже посчитанного профиля потенциала $\varphi(\xi)$ из рис. 2, а также формул (4) и (12). Видно, что кривые $n_e(\xi)$ и $n_i(\xi)$ пересекаются в точках квазинейтральности $n_i = n_e = n_0$, однако средние их значения, во-первых, лежат на другом уровне и, во-вторых, совпадают друг с другом! В итоге, решения для $n_e(\xi)$ и $n_i(\xi)$ полностью удовлетворяют уравнениям (1)–(4) и начальным условиям из [14].

Возникает закономерный вопрос: а какова же тогда концентрация невозмущенной плазмы для этих профилей? Ответ оказывается весьма прост: невозмущенная плазма имеет концентрации частиц, совпадающие со средним значением $n_i = n_e = n_{\text{средн.}}$, причем среднее значение всегда меньше n_0 .

При такой интерпретации все возникшие противоречия снимаются полностью.

Таким образом, задача о нелинейных ионно-звуковых волнах, решенная Сагдеевым и др. [1–3], и другие подобные задачи математически представляют собой своеобразную обратную задачу, в

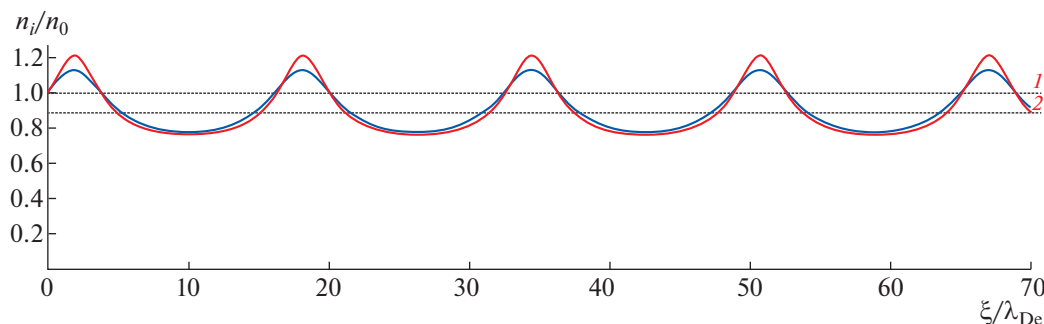


Рис. 6. Синхронизированные профили концентраций ионов и электронов в периодической ионно-звуковой волне

при $\sqrt{\frac{mV^2}{kT_e}} = 0.6$; 1 – уровень квазинейтральности, 2 – средний уровень для обеих кривых.

которой сначала не задается концентрация невозмущенной плазмы. Эту концентрацию можно и нужно определить при анализе решений уравнений (1)–(4) с начальными условиями из [14].

5. ВЫВОДЫ

Сообщается об обнаружении серьезного противоречия, возникающего в решениях задач о профилях нелинейных продольных электростатических волн в плазме методом псевдопотенциала Сагдеева. Противоречие проявляется в неравенстве среднего за период значения концентрации частиц и заданной концентрации невозмущенной плазмы.

Предложено корректировать постановку подобных задач и изменить интерпретацию получаемых этим методом решений, применив иные начальные условия: необходимо задавать вместо концентрации невозмущенной плазмы концентрацию частиц в точках, в которых потенциал ϕ принят равным нулю. Концентрацию же невозмущенной плазмы следует определять методом усреднения получаемых профилей волн. С такими начальными условиями противоречие полностью снимается. Ранее эти условия были предложены в [14], но широкого распространения не получили.

Представленный здесь вариант метода псевдопотенциала Сагдеева легко переносится на более сложные модели плазмы, например, электрон-позитронной плазмы [54, 55] или пылевой плазмы [56, 57], и другие типы электростатических волн: электронно-акустические, пыле-акустические и др.

Таким образом, многочисленные ранее опубликованные результаты исследований нелинейных волн методом Сагдеева следует пересмотреть на предмет правильного указания величины концентраций невозмущенной плазмы.

Автор благодарен своим соавторам, и особенно Колоткову Д.Ю., Китаеву И.Н. и Лебедевой К.И., в работах с которыми обнаруживалось рассмотренное здесь противоречие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ведынов А.А., Велихов Е.П., Сагдеев Р.З. // Ядерн. синтез. 1961. Т. 1. № 2. С. 82.
2. Сагдеев Р.З. // Вопросы теории плазмы. Т. 4. М.: Атомиздат, 1979.
3. Арцимович Л.А., Сагдеев Р.З. Физика плазмы для физиков. М.: Атомиздат, 1979.
4. Ахиезер А.И., Половин Р.В. // Докл. АН СССР. 1955. Т. 102. № 5. С. 919.
5. Ахиезер А.И., Половин Р.В. // ЖЭТФ. 1956. Т. 30. № 5. С. 915.
6. Davidson R.C. Methods in nonlinear plasma theory. NY & Lond.: Academic Press, 1972.
7. Shukla P.K., Mamun A.A. Introduction to dusty plasma physics. Lond.: IoP, 2002.
8. Чен Ф. Введение в физику плазмы. М.: Мир, 1987.
9. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. М.: Наука, 2000.
10. Kono M., Škorić M.M. Nonlinear physics of plasmas. Heidelberg, Dordrecht, Lond. & NY: Springer, 2010.
11. Livadiotis G. Kappa distributions. Theory and applications in plasmas. Amsterdam, Oxford & Cambridge: Elsevier, 2017.
12. Dubinov A.E., Sazonkin M.A. // Handbook of solitons: research, technology, and applications. NY: Nova Science, 2009.
13. Dubinov A.E. // Phys. Plasmas. 2022. V. 29. № 2. P. 020901.
14. Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В., Ситенко А.Г., Степанов К.Н. Электродинамика плазмы. М.: Наука, 1974.
15. Dubinov A.E., Kitayev I.N., Kolotkov D.Y. // Phys. Plasmas. 2021. V. 28. № 8. P. 083702.
16. Dubinov A.E., Dubinova I.D. // J. Plasma Phys. 2005. V. 71. № 5. P. 715.

17. Дубинов А.Е., Суслова О.А. // ЖЭТФ. 2020. Т. 158. С. 968.
18. Dubinov A.E., Lebedeva X.I. // Chaos, Solitons & Fractals. 2021. V. 152. № 1. P. 111391.
19. Дубинов А.Е., Сазонкин М.А. // Физика плазмы. 2009. Т. 35. № 1. С. 18.
20. Дубинов А.Е., Колотков Д.Ю., Сазонкин М.А. // ЖТФ. 2012. Т. 82. № 5. С. 7.
21. Dubinov A.E., Sazonkin M.A. // Phys. Wave Phenom. 2013. V. 21. № 2. P. 118.
22. Дубинов А.Е. // Физика плазмы. 2007. Т. 33. № 3. С. 239.
23. Дубинов А.Е. // ПМТФ. 2007. Т. 48. № 5. С. 3.
24. Дубинов А.Е., Дубинова А.А. // Физика плазмы. 2007. Т. 33. № 10. С. 935.
25. Дубинов А.Е., Дубинова А.А., Сазонкин М.А. // Радиотехника и электроника. 2010. Т. 55. № 8. С. 968.
26. Дубинов А.Е., Сазонкин М.А. // ЖЭТФ. 2010. Т. 138. № 5(11). С. 979.
27. Дубинов А.Е., Сазонкин М.А. // ЖТФ. 2008. Т. 78. № 9. С. 29.
28. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
29. Кингсен А.С. Введение в нелинейную физику плазмы. М.: МФТИ, 1996.
30. Swanson D.G. Plasma waves. Lond.: IoP, 2003.
31. Pécseli H.L. Waves and oscillations in plasmas. Boca Raton: Taylor & Francis Group, 2013.
32. Shivamoggi B.K. Introduction to nonlinear fluid-plasma waves. Dordrecht, Boston & Lond.: Kluwer, 1988.
33. Saha A., Banerjee S. Dynamical systems and nonlinear waves in plasmas. Boca Raton: Taylor & Francis Group, 2021.
34. Srinivas J., Popel S.I., Shukla P.K. // J. Plasma Phys. 1996. V. 55. № 2. P. 209.
35. Matun A.A. // Astrophys. Space Sci. 1999. V. 268. № 4. P. 443.
36. Abdelsalam U.M., Moslem W.M., Shukla P.K. // Phys. Lett. A. 2008. V. 372. № 22. P. 4057.
37. Pakzad H.R. // Phys. Lett. A. 2009. V. 373. № 8–9. P. 847.
38. Saha A., Chatterjee P. // Phys. Plasmas. 2014. V. 21. № 2. P. 022111.
39. Sayed F.S.H., Turkey A.A., Koramy R.A., Moslem W.M. // Adv. Space Res. 2020. V. 66. № 6. P. 1276.
40. Kumar K., Mishra M.K. // Plasma Res. Express. 2021. V. 3. № 1. P. 015001.
41. Al-Yousef H.A., Alotaibi B.M., Tolba R.E., Moslem W.M. // Results in Phys. 2021. V. 21. № 1. P. 103792.
42. Копнин С.И., Шохрин Д.В., Попель С.И. // Физика плазмы. 2022. Т. 48. № 2. С. 163.
43. Трухачев Ф.М., Васильев М.М., Петров О.Ф. // Физика плазмы. 2022. Т. 48. № 10. С. 967.
44. Alinejad H. // Contrib. Plasma Phys. 2022. V. 62. № 9. С. 202200082.
45. Kumar K., Mishra M.K. // Phys. Plasmas. 2022. V. 29. № 9. P. 092101.
46. Saini N.S., Kourakis I., Hellberg M.A. // Phys. Plasmas. 2009. V. 16. № 6. P. 062903.
47. Tribeche M., Djebarni L., Amour R. // Phys. Plasmas. 2010. V. 17. № 4. P. 042114.
48. Baluku T.K., Hellberg M.A., Kourakis I., Saini N.S. // Phys. Plasmas. 2010. V. 17. № 5. P. 053702.
49. Bora M.P., Choudhury B., Das G.C. // Astrophys. Space Sci. 2012. V. 341. № 2. P. 515.
50. Shahmansouri M. // Pramana – J. Phys. 2013. V. 80. № 2. P. 295.
51. Ghosh B., Banerjee S. // Indian J. Phys. 2015. V. 89. № 12. P. 1307.
52. Rubia R., Singh S.V., Lakhina G.S. // J. Geophys. Res. 2017. V. 122. № 9. P. 9134.
53. Alyousef H.A., Khalid M., Ata-ur-Rahman, El-Tantawy S.A. // Brazil. J. Phys. 2022. V. 52. № 6. P. 202.
54. Lu G., Liu Y., Wang Y., Stenflo L., Popel S.I., Yu M.Y. // J. Plasma Phys. 2010. V. 76. № 3&4. P. 267.
55. Гордиенко В.А., Дубинова И.Д., Дубинов А.Е. // Физика плазмы. 2006. Т. 32. № 11. С. 987.
56. Лосева Т.В., Попель С.И., Голубь А.П. // Физика плазмы. 2012. Т. 38. № 9. С. 792.
57. Dubinov A.E., Kitayev I.N. // Planet. Space Sci. 2021. V. 195. P. 105142.

НИЗКОТЕМПЕРАТУРНАЯ ПЛАЗМА

УДК 533.9

О КОНЦЕПЦИИ ПЛАЗМЕННОЙ МАСС-СЕПАРАЦИИ В СКРЕЩЕННЫХ $E \times B$ -ПОЛЯХ С ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМОЙ (ОБЗОР)

© 2023 г. Г. Д. Лизякин^a, Н. Н. Антонов^a, Н. А. Ворона^a, А. В. Гавриков^a,
С. А. Кисленко^a, С. Д. Кузьмичев^{a, b}, А. Д. Мельников^{a, b}, А. П. Ойлер^{a, b},
В. П. Смирнов^a, Р. А. Тимирханов^a, Р. А. Усманов^a

^a Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия

^b Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
Долгопрудный, Россия

*e-mail: glizyakin@gmail.com

Поступила в редакцию 15.07.2022 г.

После доработки 13.11.2022 г.

Принята к публикации 15.11.2022 г.

Одной из актуальных задач атомной энергетики является переработка отработавшего ядерного топлива. Такая переработка подразумевает отделение актиноидов от продуктов деления урана. Одним из методов переработки может стать плазменная масс-сепарация. В ОИВТ РАН в последние 10 лет активно велись исследования, направленные на развитие различных аспектов, связанных с плазменной масс-сепарацией. В статье приведен обзор основных результатов этих исследований по четырем направлениям: численные расчеты и анализ схем сепарации; генерация плазмы буферного газа и создание потенциала в ней; источник плазмы для инжекции смеси разделяемых веществ; сепарация модельных веществ.

Ключевые слова: плазменная масс-сепарация, отражательный разряд, ВЧ-разряд, вакуумная дуга

DOI: 10.31857/S0367292122600832, **EDN:** MYQMFH

1. ВВЕДЕНИЕ

Сегодня в России развивается концепция двухкомпонентной ядерной энергетической системы с тепловыми и быстрыми реакторами в замкнутом ядерном топливном цикле (ЗЯТЦ) [1]. Накапливается опыт использования “быстрого” реактора БН-800, проектируется реактор БН-1200 [2], строится опытно-демонстрационный энергетический комплекс с реактором БРЕСТ-ОД-300 [3], проектируется промышленный энергокомплекс [4].

Технология ЗЯТЦ, подразумевает максимально эффективное использование природных ресурсов для создания ядерного топлива, и сведение к минимуму количества высокоактивных ядерных отходов [5].

Одно из звеньев разрабатываемой технологии ЗЯТЦ — переработка отработавшего ядерного топлива (ОЯТ), которая позволит повторно использовать более 95% топлива, извлекаемого из реакторов. Существуют разные подходы к решению данной задачи, находящиеся на разных стадиях разработки — от НИР до усовершенствования существующих технологий — это газотермические, пирохимические, гидрометаллургические, комбинированные и плазменные методы [6–8].

В основе плазменных подходов к переработке ОЯТ лежит метод плазменной сепарации по массам [7, 8], предполагающий преобразование твердого вещества в плазменное состояние. Плазменный поток в заданной конфигурации электрического и магнитного полей разделяется на два (или более [9]) потока, различающихся величиной отношений заряда к массе его частиц. Первый поток — это тяжелые ионы актиноидов (от 227 а.е.м.), которые можно повторно использовать при изготовлении тепловыделяющих элементов. Второй поток — это легкие ионы продуктов деления (до 174 а.е.м.) [10]. Разделенные потоки ионов осаждаются на коллекторы и извлекаются для дальнейшей работы.

Плазменная сепарация ОЯТ в масштабе, пригодном для промышленного применения, потенциально привлекательна по ряду причин. В силу грубости метода оказывается невозможным выделение оружейного плутония. Метод плазменной сепарации адаптивен к разным типам отработавшего ядерного топлива.

Плазменная сепарация ОЯТ в масштабе, пригодном для промышленного применения, потенциально привлекательна по ряду причин. В силу грубости метода оказывается невозможным выделение оружейного плутония. Метод плазменной сепарации адаптивен к разным типам отработавшего ядерного топлива.

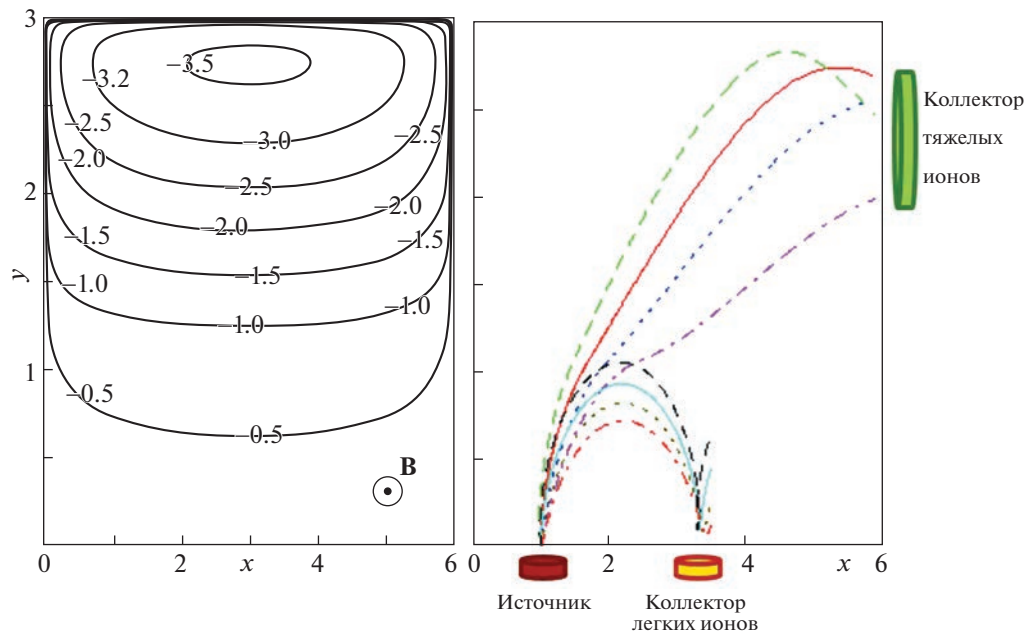


Рис. 1. Эквипотенциальные линии электрического поля и расчет траекторий “тяжелых” ионов $m_1 = 240$ а.е.м. и “легких” ионов $m_2 = 150$ а.е.м. Начальная энергия 0.2–2 эВ, угол $\pm 45^\circ$, магнитное поле 1 кГс. Значение единицы потенциала составляет 110 В, координаты 15 см [30].

ботавшего ядерного топлива. При этом снижается стоимость обращения с радиоактивными отходами (РАО) за счет малого количества вторичных РАО, поскольку в методе отсутствует рециклируемая технологическая среда.

На сегодняшний день предложено большое количество различных схем разделения. В частности, предложены системы на основе криволинейного магнитного поля [11, 12], его комбинации с поперечным электрическим полем [13–15], ионно-циклотронный резонанс [16–21], сепарация во вращающемся магнитном поле [22], центрифуга с противотоком, вызванным неоднородным распределением температуры [23] и др. Полный список схем с их описанием можно найти в обзорных работах [7, 8, 24, 25]. Отдельно существует класс устройств, использующий скрещенные электрическое и однородное магнитное поле [26]. Внутри этого класса встречаются устройства, работающие как в столкновительном [27], так и в бесстолкновительном [28–31] режиме.

В ОИВТ РАН ведутся исследования метода плазменной сепарации на неактивных веществах, моделирующих ОЯТ. Основанный на идеях академика РАН В.П. Смирнова метод позволяет повысить эффективность разделения элементов за счет создания в замагниченной низкотемпературной плазме электрического поля, формирующего потенциальную яму [30]. Форма ямы может выбираться таким образом, чтобы область повышенного электрического поля пересекала траектории тяжелых ионов и практически не пересекала траектории легких. На рис. 1 представлена

конфигурация электрических и магнитных полей, а также расчет траекторий заряженных частиц в ней. По периметру прямоугольной области задано нулевое значение электрического потенциала. Магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости рисунка. В такой конфигурации электрическое поле всюду перпендикулярно магнитному. Здесь важно отметить, что электрические и магнитные поля, в которых происходит транспортировка сепарируемого пучка, реализованы в плазме. Поэтому собственный объемный заряд пучка тяжелых ионов может быть компенсирован электронами буферной плазмы. Тогда ионы движутся в условиях компенсированного объемного заряда, что обеспечивает значительную производительность данного метода.

В таком подходе стационарное электрическое поле в плазме предполагается поддерживать за счет электродов, расположенных на торцах вакуумной камеры. Возможность формирования стационарных электрических полей в замагниченной плазме обусловлена ограничением транспорта тяжелых заряженных частиц поперек магнитного поля и, как следствие, различием в продольной и поперечной проводимостях плазмы [32, 33].

2. НАПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для реализации описанного метода ведутся исследования сразу по нескольким направлениям: численные расчеты и анализ различных схем

сепарации [9, 30, 34–38], генерация плазмы буферного газа и создание градиента потенциала плазмы в ней [39–47], создание источника плазмы для инъекции смеси веществ [48–58], сепарация модельных веществ [59–63].

2.1. Численные расчеты и анализ схем сепарации

Как уже отмечалось ранее, работа [30] стала основополагающей для данного цикла исследований. В ней проведен анализ конфигураций электрических и магнитных полей, позволяющих эффективно разделять заряженные частицы по массам на две группы. В частности, рассмотрены случаи азимутального магнитного поля, создающегося проводником с током в сочетании с радиально-аксиальным электрическим полем (см. также [34]), и случай однородного аксиального магнитного поля в сочетании с поперечным электрическим полем (см. также [35]). Эти исследования продемонстрировали теоретическое обоснование возможности эффективного пространственного разделения потоков со следующими начальными условиями: энергия ионов от 0.2 до 2 эВ, разброс скоростей ионов по углам — от 0 до 45°. Установлено, что необходимый для этого характерный объем области сепарации может составлять порядка 1 м³ при магнитном поле 1–2 кГс и электрических потенциалах порядка 1 кВ. Для экспериментального обоснования предложенного метода используется конфигурация с продольным магнитным полем [47].

Следующими важными шагами в части моделирования и теоретического анализа возможностей метода плазменной сепарации стало рассмотрение схем, развивающих базовые идеи, заложенные в [30]. Так, в частности, изначально инъекция сепарируемой смеси предполагалась поперек магнитного поля, однако позднее стало понятно, что в таком случае магнитное поле сепаратора будет затруднять функционирование источника плазмы, что приведет к повышению разрядного напряжения и, как следствие, к ухудшению эффективности разделения за счет образования дву- и более кратных ионов. В расчетных работах [36, 37] показано, что при инъекции частиц вдоль магнитного поля также возможно эффективное разделение компонентов смеси на расстояние около 10 см.

В работе [38] все многообразие конфигураций было ограничено рассмотрением аксиально симметричного пространственного распределения потенциала. Такая схема сепарации похожа на представленную на рис. 1, только в данном случае расчетная область является окружностью, а не прямоугольником, и величина потенциала является лишь функцией радиальной координаты. В первой части работы потенциал плазмы считался линейно зависящим от координаты, т.е.

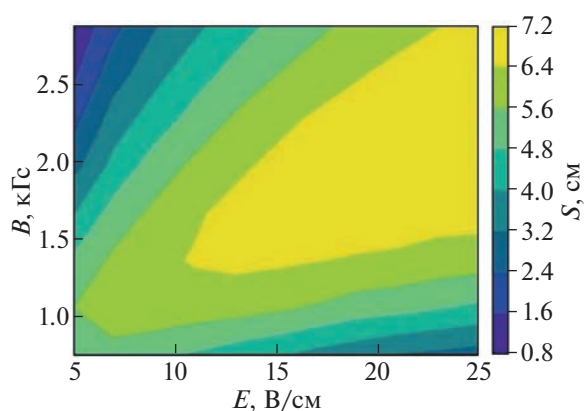


Рис. 2. Зависимость расстояния между пятнами осаждения разделенных элементов Ag + Pb смеси.

радиальное электрическое поле считалось постоянным. В такой постановке можно перейти к более системному перебору параметров, с целью достижения наилучшего разделения. На рис. 2 представлена найденная зависимость расстояния S между пятнами осаждения разделенных элементов смеси от величин электрического и магнитного полей [61]. Из рисунка видно, что есть минимальные значения электрического поля — 10 В/см и магнитной индукции — 1.4 кГс для области с $S > 6.4$ см.

Также в работе [38] рассмотрен вариант сепарации в двуградиентном потенциале (рис. 3). Такой потенциал представляет из себя кусочно-заданную функцию, состоящую из двух линейных функций с соответствующим электрическим полем E_2 на отрезке $r \in [0, r^*]$ и с электрическим полем E_1 на отрезке $r \in [r^*, r_g]$. Здесь r_g — это внешняя заземленная граница расчетной области, а r^* — место соединения областей с разными градиентами потенциала. Поскольку инъекция разделяемых веществ осуществляется с периферии (из области больших r), поэтому можно подобрать положение r^* изменения градиента потенциала таким образом, чтобы до участка второго градиента долетали лишь тяжелые частицы. Результат анализа показывает, что в таком потенциале может достигаться существенное увеличение расстояния между областями сбора компонентов смеси, однако эта конфигурация более требовательна к начальным условиям.

2.2. Генерация плазмы буферного газа и создание потенциала в ней

Для экспериментального исследования была создана установка Лаплас. Ее схема представлена на рис. 4. Цилиндрическая вакуумная камера имеет длину 2.3 м и внутренний диаметр 86 см. Снаружи камеры располагаются катушки магнитного поля. Система питания катушек позво-

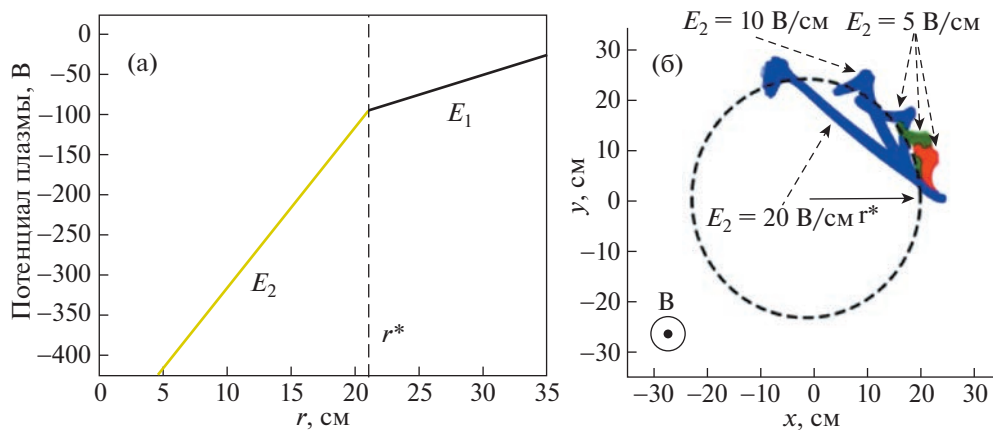


Рис. 3. Двугradientный потенциал (а) и траектории заряженных частиц в нем (б). Красным и зеленым цветом обозначены траектории продуктов деления урана в диапазоне масс 80–110 и 130–160 а.е.м. соответственно. Синим цветом обозначены траектории актинидов при разных градиентах потенциала плазмы на отрезке $r \in [0, r^*]$. Во всех случаях gradient потенциала на отрезке $r \in [r^*, r_0]$ составлял 5 В/см.

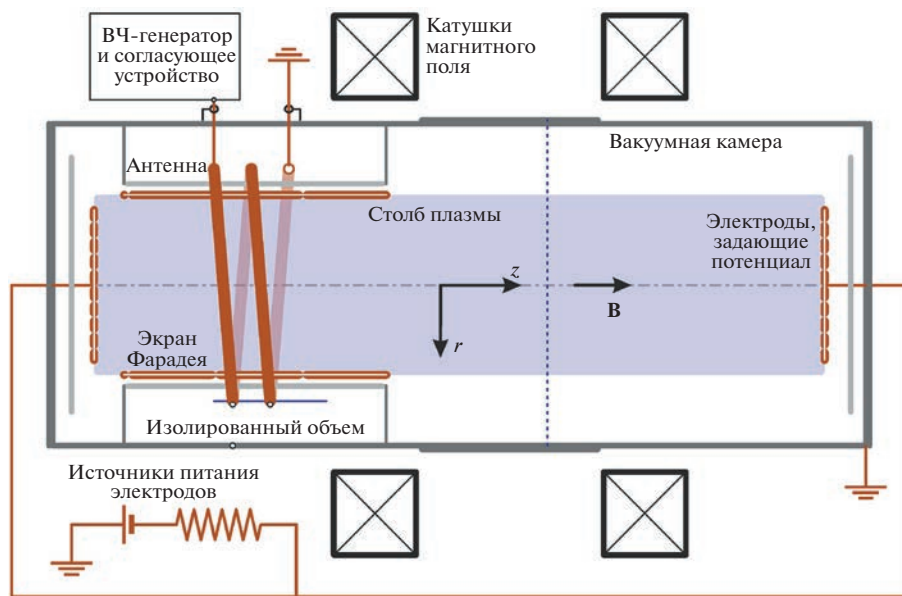


Рис. 4. Схема экспериментальной установки с ВЧИ-разрядом.

ляет получать поля с величиной магнитной индукции до 2 кГс на оси вакуумной камеры. На этой установке исследовались генерация буферной плазмы и создание заданного распределения электрического потенциала в плазме.

Буферная плазма заполняет весь объем сепаратора. Она необходима для компенсации объемного заряда пучка сепарируемых ионов и формирования стационарного электрического поля. В качестве источника энергии для такой плазмы, по-видимому, наилучшим образом подходит высокочастотный индукционный (ВЧИ) разряд. Это связано с тем, что при расположении антенны такого разряда вокруг диэлектрического цилиндра появляется возможность использовать электроды с обоих торцов цилиндрической каме-

ры (рис. 4). В работе [39] представлено экспериментальное исследование ВЧИ-разряда в камере с диаметром плазменного столба 50 см и длиной 2 м. Получены пространственные распределения концентрации и температуры электронов в зависимости от магнитного поля и поглощенной ВЧ-мощности. При поглощенной ВЧ-мощности на уровне 6 кВт и магнитном поле 200 Гс концентрация плазмы в максимуме составляет $2 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$, а температура электронов около 4 эВ [40, 41]. В работе [42] представлен анализ устойчивости такого разряда. Показано, что неустойчивость ВЧ-разряда возникает в следствии немонотонной зависимости сопротивления плазмы от ее концентрации. Там, где сопротивление плазмы растет с ростом концентрации, реализуется не-

устойчивое равновесие между поглощенной и теряемой ВЧ-мощностью. В этом случае небольшое отклонение концентрации плазмы от положения равновесия приводит к неконтролируемому росту или снижению концентрации плазмы.

Как отмечалось во введении, стационарное электрическое поле в плазме предполагается поддерживать за счет электродов, расположенных на торцах вакуумной камеры. Торцевые электроды с отрицательным смещением потенциала в совокупности с заземленной цилиндрической поверхностью вакуумной камеры образуют геометрию отражательного разряда (разряд Пеннинга). Поэтому буферную плазму можно создать и без внешнего ВЧИ-источника ионизации, то есть за счет самостоятельного отражательного разряда. Однако, даже если буферная плазма создается индукционным разрядом, то получается, что одновременно реализуются два механизма ионизации, первый за счет высокочастотного поля, второй за счет осцилляции электронов между торцевыми электродами вдоль магнитного поля. В связи с этим было проведено исследование отражательного разряда в описанной геометрии.

В работе [43] представлено изучение влияния параметров отражательного разряда на потенциал плазмы на оси, а также на его радиальное распределение. Среди рассмотренных параметров — магнитное поле, давление газа, напряжение разряда, материал и геометрические параметры торцевых электродов (форма, расположение). Так, в частности, было показано, что ключевым параметром, влияющим на потенциал плазмы, является кратчайшее расстояние между катодом и анодом поперек магнитного поля, а также площадь катода. Кроме того, продемонстрировано наличие “гистерезиса” потенциала плазмы при изменении давления газа. Для получения более отрицательного потенциала плазмы необходимо было выходить на оптимальный режим разряда из области малых давлений.

В работе [44] выполнены исследования влияния торцевых электродов на потенциал плазмы для случая, когда плазма создается высокочастотным разрядом. Зависимость потенциала плазмы от радиуса представлена на рис. 5. Эта зависимость получена при давлении аргона 5 мТорр и магнитном поле 650 Гс. Напряжение на электродах составляло -75 В, и дальнейшее увеличение напряжения на электродах не приводило к изменению потенциала плазмы.

В работах [45, 46] была создана аналитическая модель системы, в которой плазма погружена в продольное магнитное поле, а на торцах установлены электроды. С помощью этой модели были объяснены результаты работы [44] и ряда других экспериментальных работ. В основе модели лежит представление плазменного столба в виде эквива-

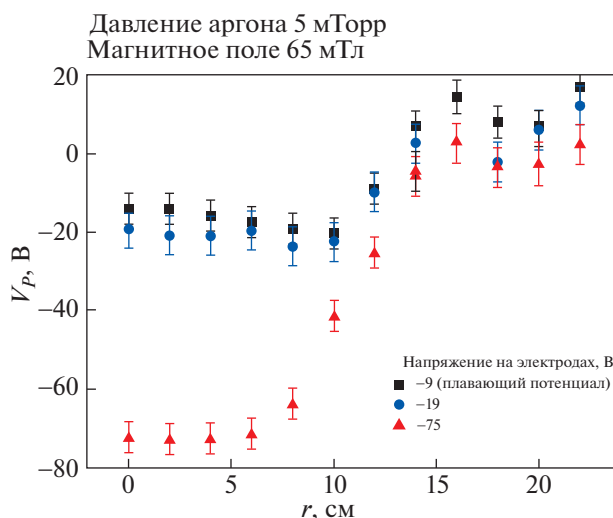


Рис. 5. Радиальное распределение потенциала плазмы в высокочастотном разряде.

лентной электрической цепи с распределенными в пространстве параметрами (рис. 6). При этом модель является полумпирической, то есть часть параметров необходимо брать из эксперимента. Основная новизна приведенного расчета состояла в том, что была рассмотрена замкнутая система токов. Такой подход позволил получить аналитическую зависимость потенциала на оси разряда от таких параметров как геометрические размеры столба и электродов, атомарная масса ионов, величина магнитного поля, концентрация нейтралов, температура электронов, концентрация плазмы. С помощью предложенного подхода были проанализированы наиболее распространенные конфигурации подключения торцевых электродов. Так в случае, когда весь торец представляет собой один сильно отрицательный электрод (с точки зрения геометрии электрода — это предельный случай, позволяющий получить самое большое падение потенциала плазмы вдоль радиуса), то при давлении около 1 мТорр (другие параметры приведены на рис. 7) в такой системе не получится создать потенциал плазмы более отрицательный чем -100 В на оси. Было отмечено, что дальнейшее понижение потенциала плазмы возможно при применении термоэмиссионных катодов.

2.3. Источник плазмы для инжекции смеси разделяемых веществ

Метод плазменного разделения предполагает ввод разделяемых компонентов в область сепарации. Необходимый для этого инжектор должен представлять собой источник плазмы, который конвертирует конденсированное вещество, моделирующее ОЯТ, в плазменное состояние. К такому источнику применяются следующие требова-

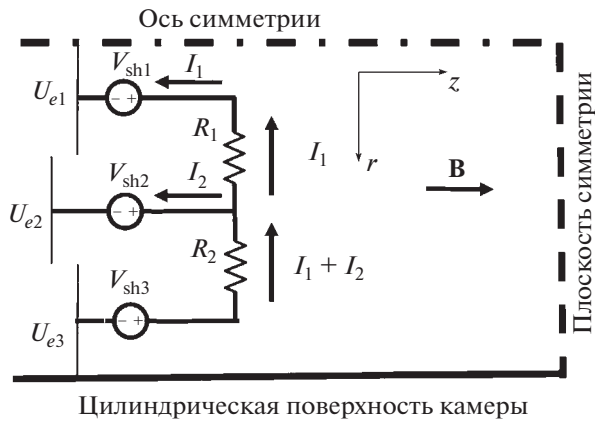


Рис. 6. Эквивалентная электрическая схема аксиально-симметричного плазменного столба в магнитном поле с торцевыми электродами.

ния: степень ионизации плазмы должна быть близка к 100%, кратность ионизации атомов 1, производительность — до 100 г/час. Работы по изучению возможности создания такого источника шли по направлению, которое условно можно разделить на две части. Одна часть — это исследование вакуумно-дугового разряда с диффузной катодной привязкой на подогреваемом расходуемом катоде (рис. 8). К преимуществам рассматриваемого разряда относится высокая степень ионизации, производительность и отсутствие капельной фракции.

Одним из основных рассматриваемых вариантов ОЯТ является смесь на базе оксида урана, поэтому в качестве модельного оксида был выбран и исследован диоксид церия (CeO_2) [54] и смесь диоксида церия с хромом [55]. В качестве вещества, отдельно моделирующего уран с точки зрения катодных процессов, исследовался гадолиний (Gd). Для расходуемого оксидного катода стоял принципиальный вопрос о существовании стабильно-

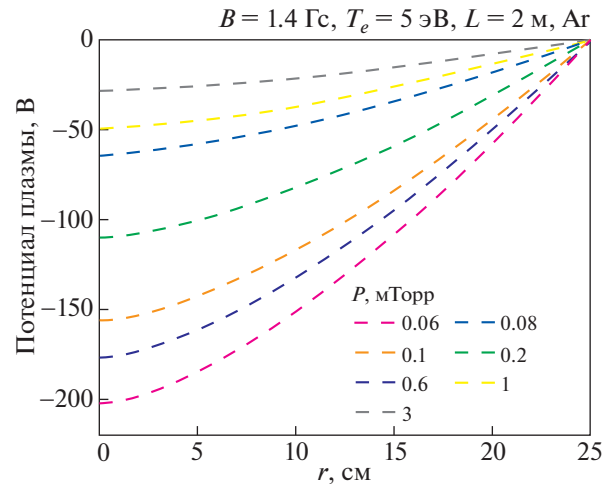


Рис. 7. Радиальное распределение потенциала плазмы для конфигурации с отрицательно смещенными электродами.

го разряда, т.к. при комнатной температуре CeO_2 является веществом, практически непроводящим ток. Положительно ответить на него помогла конструкция катодного узла с внешним подогревателем — в бескислородной среде при температуре $T > 1$ кК CeO_2 приобретает заметную проводимость [64]. В результате проведенных работ были найдены условия, при которых реализуется диффузная вакуумная дуга на таком катоде в диапазоне токов 15–150 А, при напряжении 9–14 В и рабочих температурах катода 2.1–2.35 кК. В этих условиях были изучены основные характеристики дугового разряда на двуокиси церия. Была измерена скорость испарения катода и величина теплового потока, поступающего на него из разряда, определены параметры потока плазмы, проникающего в пространство за анодом. В дуге на оксидном катоде удалось получить средний заряд потока плазмы около 0.9 элементарного заря-

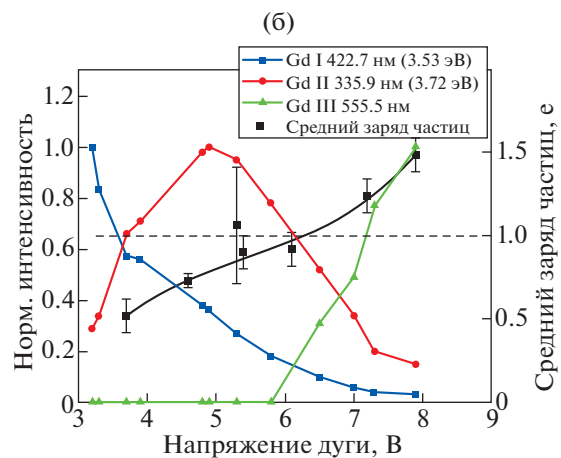
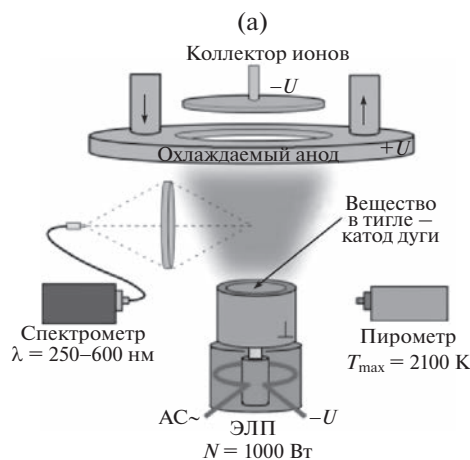


Рис. 8. а) — Схема дугового разряда с подогреваемым расходуемым катодом; б) — зависимость интенсивности спектральных линий атомов и ионов гадолиния, а также средний заряд частиц за анодом как функция напряжения разряда [51].

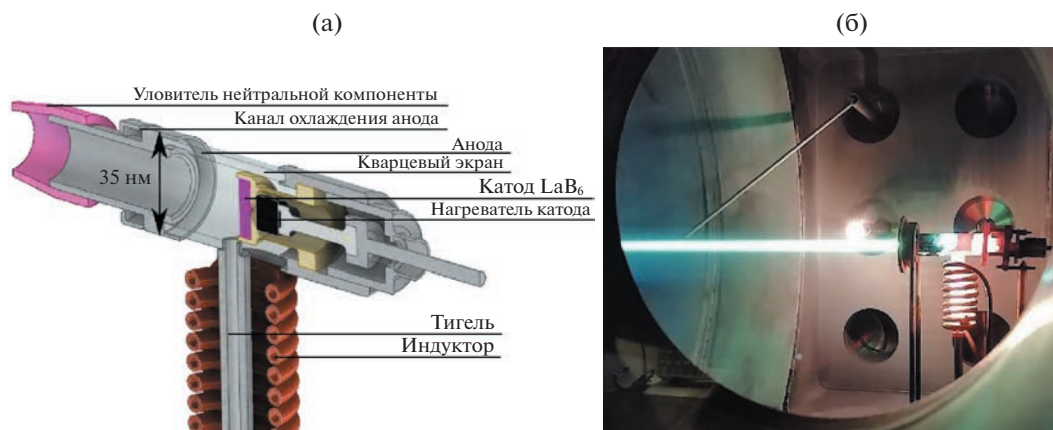


Рис. 9. Принципиальная схема (а) и фотография (б) источника плазмы на установке Лаплас.

да. На катоде из смеси оксида церия с хромом ($\text{CeO}_2 + \text{Cr}$) было показано, что на нагреваемом извне катоде наблюдается эффект его эмиссионного охлаждения при контакте с плазмой. Этот эффект может быть получен только на некоторых типах веществ: так он присутствует, например, на катодах из Gd, и отсутствует в разрядах с катодами, состоящими только из диоксида церия, либо только из хрома [48]. На катоде из Gd была показана возможность управления зарядовым составом плазмы и найдены условия, при которых образуется плазменный поток со степенью ионизации более 90% и минимальной долей многозарядных ионов [51–53] (рис. 8б).

Рассмотренный вакуумно-дуговой разряд на подогреваемом расходуемом катоде представляется перспективным для применения в рамках метода плазменного разделения веществ, однако в настоящее время существует вопрос о том, как источник на его основе может быть совмещен с областью сепарации. Эта проблема связана с ориентацией магнитного поля и катода, который может содержать расплавленное вещество.

Для поиска решения параллельно с исследованием вакуумной дуги была выполнена вторая часть работ, посвященная источнику плазмы, непосредственно устанавливаемому в объем, где происходит плазменное разделение веществ. Этот источник плазмы имеет вертикально ориентированный тигель, который подает пары рабочего вещества в катод-анодный промежуток (рис. 9). Катодом в таком разряде является термоэмиттер из гексаборида лантана LaB_6 .

В данном цикле исследований в качестве рабочих веществ были использованы свинец Pb (207 а.е.м.) и серебро Ag (108 а.е.м.), сначала по отдельности, а затем в виде смеси. Эта пара веществ способна моделировать динамику движения актиноидов и продуктов распада урана в камере сепаратора за счет схожего отношения масс. Их испарение реализовывалось тигельным индукционным нагревом (рис. 9). Преимуществом разряда

с нерасходуемым термоэмиссионным катодом является инъекция паров рабочего вещества, не зависящая от тока разряда, и величины тока электронов термоэмиссии. Такое решение позволило управлять напряжением разряда, изменяя отношение количества инжектированных атомов рабочего вещества к числу электронов термоэмиссии. Были получены вольтамперные характеристики разряда, определен спектральный состав оптического излучения плазмы в области за анодом. Независимое управление термоэмиссией и концентрацией испаряемого вещества позволило подобрать режим горения разряда, при котором в потоке плазмы отсутствуют ионы кратности 2. На смеси Pb и Ag были экспериментально подобраны режимы испарения, которые позволили поддерживать стабильное горение разряда при постоянной разности потенциалов между катодом и анодом для веществ с существенной разницей в давлении насыщенных паров [50, 56–58].

2.4. Сепарация модельных веществ

Использование результатов, описанных в предыдущих разделах данной статьи, позволило перейти к экспериментальному исследованию непосредственно самого эффекта плазменного разделения веществ. Так как в процессе плазменной сепарации одновременно функционирует буферный разряд и источник сепарируемой плазмы, то очень важно учесть их влияние друг на друга. В работе [59] было показано, что даже маломощного буферного разряда на основе отражательного разряда с холодными катодами и током 0.1–0.3 А достаточно, чтобы отклонить сепарируемые ионы от первоначального направления распространения. Это было показано следующим образом. До включения буферного разряда струя плазмы разделяемой смеси покидала источник плазмы и распространялась вдоль линий магнитного поля. На пути струи плазмы устанавливался коллектор с отрицательным смещением. Этот коллектор измерял

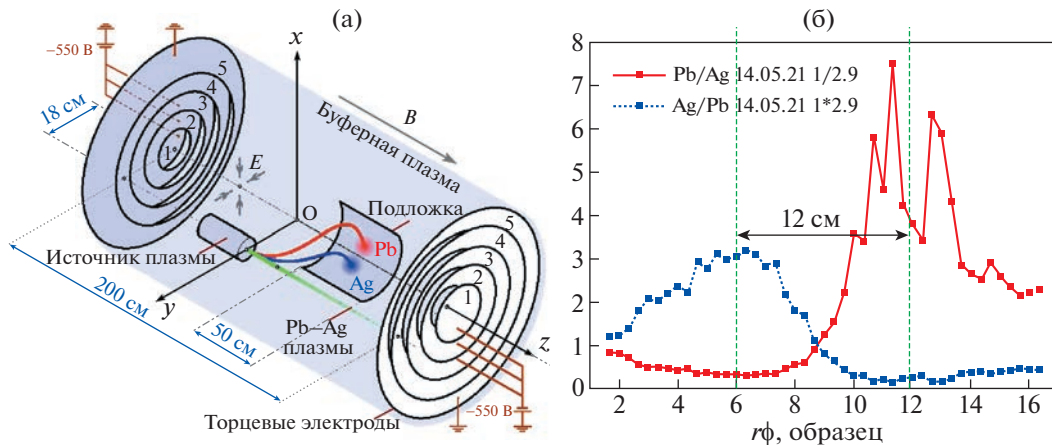


Рис. 10. а) — Схема масс-сепарации; б) — распределение атомов свинца и серебра на подложке.

ионный ток насыщения. При включении буферного разряда ионный ток пропал с коллектора, что свидетельствовало о том, что плазменная струя отклоняется под действием электрического поля буферного разряда. Однако при инжекции плазменного потока разделяемой смеси существенно изменялось и распределение потенциала плазмы в буферном разряде. Поэтому сепарировать частицы в таком разряде было невозможно.

Более устойчивым к воздействию инжектируемой струи оказался отражательный разряд с термокатодом [60]. Ток такого разряда на два порядка выше, чем для разряда с холодным катодом, и в обсуждаемой в настоящем обзоре геометрии (диаметр плазменного столба 50 см и длина около 2 м) составляет около 10 А.

На рисунке 10а представлена схема сепарации [61]. Эффект разделения массовых групп диагностировался по осаждению потоков на подложке. Анализ результатов осаждения проведен с помощью энергодисперсионной рентгеновской спектроскопии напыленных пленок. Он показал, что концентрация элементов неоднородна по поверхности, и наблюдается разделение максимумов концентраций Pb и Ag в пространстве. На рис. 10б представлено распределение компонентов смеси на подложке [62]. Из рисунка видно, что характерный масштаб сепарации составляет 10 см. Обогащение легкого компонента смеси составило величину 3 ± 1 , а тяжелого компонента — 5 ± 2 . Также проведен анализ неионизованных потерь вещества [63]. По всей видимости в будущем эти потери можно будет снизить, используя холодный полый анод. В этом случае неионизированные пары будут оседать на нем.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разделение химических элементов по массам является актуальной задачей для атомной отрасли. Один из возможных вариантов ее решения это плазменные методы. В последнее время был вы-

полнен ряд исследований сразу по нескольким направлениям, связанным с развитием плазменной масс сепарации. В результате этих исследований на модельных веществах (серебро и свинец) экспериментально продемонстрирована работоспособность схемы Смирнова В.П.

В процессе решения сопутствующих задач были получены важные физические результаты. Проведен анализ большого числа схем сепарации. Экспериментально продемонстрирована возможность воспроизведения пространственного распределения электрического потенциала в плазменном объеме. Построена численная модель, с помощью которой можно оценить необходимые параметры разряда для воспроизведения распределения потенциала торцевых электродов в аксиально симметричной замагниченной плазме. Изучено влияние параметров разряда на потенциал плазмы в отражательном и высокочастотном разрядах. Экспериментально исследованы свойства вакуумного дугового разряда с подогреваемым катодом на ряде тяжелых металлов (Ag, Pb, Gd, Cr), оксиде церия (CeO_2) и их смесях. Результаты этих исследований применимы и в смежных областях, например, для создания и совершенствования плазменных источников и веществ сложного состава, диэлектриков, полупроводников в технологиях нанесения мультикомпонентных покрытий и модификации поверхностей различных материалов.

Дальнейшее развитие этих исследований связано с несколькими направлениями. Во-первых, необходимо улучшение качества сепарации. Его можно добиться за счет создания в плазме профиля потенциала специальной формы, например, реализовав селективную потенциальную яму, в которую будут попадать преимущественно тяжелые частицы [65]. Принципиальным ограничением здесь, как и раньше, могут оказаться флуктуации потенциала плазмы, увеличивающие дисперсию фракционированных потоков. Во-вторых, требуется повышение производительности всей схемы в целом

и источника сепарируемых веществ в частности. В-третьих, востребованы исследования, посвященные вопросам испарения и ионизации смесей химических элементов более сложного состава.

Данный обзор выполнен частично за счет гранта Российского научного фонда № 2119-00716, <https://rscf.ru/en/project/21-19-00716/> разделы, посвященные численным расчетам и анализу схем сепарации, а также сепарации модельных веществ, частично за счет поддержки Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-01056-22-00) разделы посвященные источнику плазмы для инъекции смеси разделяемых веществ и раздел посвященный генерации плазмы буферного газа и создание потенциала в ней.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев П.Н., Алексеев С.В., Андрианова Е.А., Асмолов В.Г., Декусар В.М., Зродников А.В., Каграманян В.С., Колтун О.В., Павлов А.С., Пономарев-Степной Н.Н., Субботин С.А., Темишев Р.Р., Теплов П.С., Усанов В.И., Цибульский В.Ф. Двухкомпонентная ядерная энергетическая система с тепловыми и быстрыми реакторами в замкнутом ядерном топливном цикле. М.: Техносфера, 2016.
2. Рачков В.И., Поплавский В.М., Цибуля А.М., Багдасаров Ю.Е., Васильев Б.А., Каманин Ю.Л., Осипов С.Л., Кузавков Н.Г., Еришов В.Н., Аширметов М.Р. // Атомная энергия. 2010. Т. 108. С. 201. <https://doi.org/10.1007/s10512-010-9286-z>
3. Драгунов Ю.Г., Лемехов В.В., Смирнов В.С., Чернецов Н.Г. // Атомная энергия. 2012. Т. 113. С. 58. <https://doi.org/10.1007/s10512-012-9597-3>
4. Воронцова О.В., Гольцов А.Е., Молоканов Н.А., Оценка стоимости оборудования зданий реактора, машинного зала и АСУ ТП АЭС ПЭК с РУ БР-1200 Научно-технический годовой отчет Научно-исследовательский и конструкторский институт энерготехники им. Н.А. Доллежала. 2017. Москва. С. 262.
5. Адамов Е.О., Лопаткин А.В., Муравьев Е.В., Рачков В.И., Хомяков Ю.С. // Известия Российской академии наук. Энергетика. 2019. Т. 1. С. 3. <https://doi.org/10.1134/S0002331019010035>
6. Шадрин А.Ю., Двоеглазов К.Н., Иванов В.Б., Волк В.И., Шаталов В.В. // ВАНТ. Серия: Материаловедение и новые материалы. 2014. Т. 76. С. 69.
7. Долголенко Д.А., Муромкин Ю.А. // УФН. 2017. Т. 187. С. 1071. <https://doi.org/10.3367/UFNr.2016.12.038016>
8. Zweben S.J., Gueroult R., Fisch N.J. // Phys. Plasmas. 2018. Т. 25. С. 090901. <https://doi.org/10.1063/1.5042845>
9. Смирнов В.П., Самохин А.А., Гавриков А.В., Кузьмичев С.Д., Усманов Р.А., Ворона Н.А. // Физика плазмы. 2019. Т. 45. С. 452. <https://doi.org/10.1134/S0367292119050123>
10. Koning A., Forrest R., Kellett M., Mills R., Henriksson H., Rugama Y., JEFF Report 21, Nuclear energy agency organisation for economic co-operation and development, Paris, France, 2006, ISBN 92-64-02314-3.
11. Paperny V.L., Krasov V.I., Lebedev N.V., Astrakchantsev N.V. // Plasma Sources Sci. Technol. 2011. Т. 20. С. 35005. <https://doi.org/10.1088/0963-0252/20/3/035005>
12. Timofeev A.V. // Plasma Phys. Rep. 2000. Т. 26. С. 626. <https://doi.org/10.1134/1.952900>
13. Fetterman A.J., Fisch N.J. // Phys. Plasmas. 2011. Т. 18. С. 94503. <https://doi.org/10.1063/1.3631793>
14. Gueroult R., Fisch N.J. // Phys. Plasmas. 2012. Т. 19. С. 122503. <https://doi.org/10.1063/1.4771674>
15. Gueroult R., Fisch N.J. // Plasma Sources Sci. Technol. 2014. Т. 23. С. 35002. <https://doi.org/10.1088/0963-0252/23/3/035002>
16. Жильцов В.А., Кулыгин В.М., Семашко Н.Н., Сковорода А.А., Смирнов В.П., Тимофеев А.В., Кудрявцев Е.Г., Рачков В.И., Орлов В.В. // Атомная энергия. 2006. Т. 104. С. 302.
17. Тимофеев А.В. // УФН. 2014. Т. 184. С. 1101. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0184.201410g.1101>
18. Тимофеев А.В. // Физика плазмы. 2007. Т. 33. С. 971. <https://doi.org/10.1134/S1063780X07110025>
19. Muromkin Y.A. // J. Energy Power Eng. 2013. Т. 7. С. 306.
20. La Fontaine A.C., Louvet P., Le Gourrierrec P., Pailoux A. // J. Phys. D. Appl. Phys. 1998. Т. 31. С. 847. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/31/7/014>
21. Ковтун Ю.В., Скибенко Е.И., Скибенко А.И., Ларин Ю.В., Юферов В.Б. // ЖТФ. 2011. Т. 81 (5). С. 35. <https://doi.org/10.1134/S1063784211050197>
22. Borisevich V.D., Potanin E.P. // Phys. Scr. 2017. Т. 92. С. 75601. <https://doi.org/10.1088/1402-4896/aa71d2>
23. Borisevich V., Potanin E., Whichello J.V. // IEEE Trans. Plasma Sci. 2020. Т. 48. С. 3472. <https://doi.org/10.1109/TPS.2020.3023799>
24. Долголенко Д.А., Муромкин Ю.А. // УФН. 2009. Т. 179. С. 369. <https://doi.org/10.3367/UFNe.0179.200904c.0369>
25. Grossman M.W., Shepp T.A. // IEEE Trans. Plasma Sci. 1991. Т. 19. С. 1114. <https://doi.org/10.1109/27.125034>
26. Gueroult R., Zweben S.J., Fisch N.J., Rax J.-M. // Phys. Plasmas. 2019. Т. 26. С. 43511. <https://doi.org/10.1063/1.5083229>
27. Gueroult R., Rax J.-M., Fisch N.J. // Phys. Plasmas. 2014. Т. 21. С. 20701. <https://doi.org/10.1063/1.4864325>
28. Ohkawa T. and Miller R.L. // Phys. Plasmas. 2002. Т. 9. С. 5116. <https://doi.org/10.1063/1.1523930>
29. Gilleland J., Agnew S., Cluggish B., Freeman R., Miller R., Putvinski S., Sevier L., Umstadter K. // Proc. to Waste Management Conference, Tucson, USA, 2002.
30. Смирнов В.П., Самохин А.А., Ворона Н.А., Гавриков А.В. // Физика плазмы. 2013. Т. 39. С. 523. <https://doi.org/10.7868/S0367292113050107>
31. Строкун Н.А., Бардаков В.М. // Физика плазмы. 2019. Т. 45. С. 51. <https://doi.org/10.1134/S0367292119010141>
32. Morozov A.I. Introduction to Plasma Dynamics. Boca Raton, USA: CRC Press, 2012.
33. Gueroult R., Rax J.-M., Fisch N.J. // Phys. Plasmas. 2019. Т. 26. С. 122106. <https://doi.org/10.1063/1.5126083>

34. Самохин А.А., Смирнов В.П., Гавриков А.В., Ворона Н.А. // ЖТФ. 2016. Т. 86. С. 127.
<https://doi.org/10.1134/S1063784216020298>
35. Samokhin A., Gavrikov A., Kuzmichev S., Timirkhanov R., Vorona N., Smirnov V., Usmanov R. // IEEE Trans. Plasma Sci. 2019. Т. 47. С. 1546.
<https://doi.org/10.1109/TPS.2019.2897146>
36. Смирнов В.П., Гавриков А.В., Сидоров В.С., Тараканов В.П., Тимирханов Р.А., Кузьмичев С.Д., Усманов Р.А., Ворона Н.А. // Физика плазмы. 2018. Т. 55. С. 961.
<https://doi.org/10.1134/S0367292118120120>
37. Gavrikov A.V., Sidorov V.S., Smirnov V.P., Tarakanov V.P. // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. Т. 1147. С. 012132.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1147/1/012132>
38. Smirnov V.S., Egorov R.O., Kislenko S.A., Antonov N.N., Smirnov V.P., Gavrikov A.V. // Phys. Plasmas. 2020. Т. 27. С. 113503.
<https://doi.org/10.1063/5.0020001>
39. Vorona N.A., Gavrikov A.V., Kuzmichev S.D., Liziakin G.D., Melnikov A.D., Murzaev Y.A., Smirnov V.P., Timirkhanov R.A., Usmanov R.A. // IEEE Trans. Plasma Sci. 2019. Т. 47. С. 1223.
<https://doi.org/10.1109/TPS.2018.2890341>
40. Мельников А.Д., Усманов Р.А., Ворона Н.А., Гавриков А.В., Лизякин Г.Д., Смирнов В.П., Тимирханов Р.А. // Ядерная физика и инжиниринг. 2018. Т. 9. С. 117.
<https://doi.org/10.1134/S2079562917060185>
41. Melnikov A.D., Usmanov R.A., Gavrikov A.V., Liziakin G.D., Smirnov V.P., Timirkhanov R.A., Vorona N.A. // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. Т. 1147. С. 012131.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1147/1/012131>
42. Гавриков А.В., Ворона Н.А., Кузьмичев С.Д., Лизякин Г.Д., Тимирханов Р.А. // Вестник ОИВТ РАН. 2019. Т. 3. С. 10.
<https://doi.org/10.33849/2019202>
43. Liziakin G.D., Gavrikov A.V., Murzaev Y.A., Usmanov R.A., Smirnov V.P. // Phys. Plasmas. 2016. Т. 23. С. 123502.
44. Liziakin G., Gavrikov A., Usmanov R., Timirkhanov R., Smirnov V. // AIP Adv. 2017. Т. 7. С. 125108.
<https://doi.org/10.1063/1.4998806>
45. Liziakin G., Gavrikov A., Smirnov V. // Plasma Sources Sci. Technol. 2020. Т. 29. С. 15008.
<https://doi.org/10.1088/1361-6595/ab5ad5>
46. Liziakin G., Oiler A., Gavrikov A., Antonov N., Smirnov V. // J. Plasma Phys. 2021. Т. 87. С. 905870414.
<https://doi.org/10.1017/S0022377821000829>
47. Ворона Н.А., Гавриков А.В., Самохин А.А., Смирнов В.П., Хомяков Ю.С. // Ядерная физика и инжиниринг. 2014. Т. 5. С. 944.
<https://doi.org/10.1134/S2079562914090176>
48. Полищук В.П., Усманов Р.А., Мельников А.Д., Ворона Н.А., Ярцев И.М., Амиров Р.Х., Гавриков А.В., Лизякин Г.Д., Самойлов И.С., Смирнов В.П., Антонов Н.Н. // ТВТ. 2020. Т. 58. С. 515.
<https://doi.org/10.31857/S0040364420040122>
49. Amirov R.K., Gavrikov A.V., Liziakin G.D., Polishchuk V.P., Samoylov I.S., Smirnov V.P., Usmanov R.A., Vorona N.A., Yartsev I.M. // IEEE Trans. Plasma Sci. 2017. Т. 45. С. 140.
<https://doi.org/10.1109/TPS.2016.2634627>
50. Volkov L.S., Babaeva N.Y., Antonov N.N. // J. Phys. D. Appl. Phys. 2021. Т. 54. С. 105202.
<https://doi.org/10.1088/1361-6463/abc715>
51. Амиров Р.Х., Ворона Н.А., Гавриков А.В., Лизякин Г.Д., Полищук В.П., Самойлов И.С., Смирнов В.П., Усманов Р.А., Ярцев И.М. // Ядерная физика и инжиниринг. 2014. Т. 5. С. 952.
<https://doi.org/10.1134/S2079562914090024>
52. Амиров Р.Х., Ворона Н.А., Гавриков А.В., Лизякин Г.Д., Полищук В.П., Самойлов И.С., Смирнов В.П., Усманов Р.А., Ярцев И.М. // Физика плазмы. 2015. Т. 41. С. 877.
<https://doi.org/10.7868/S0367292115100017>
53. Мельников А.Д., Усманов Р.А., Амиров Р.Х., Антонов Н.Н., Гавриков А.В., Лизякин Г.Д., Полищук В.П., Смирнов В.П. // Физика плазмы. 2020. Т. 46. С. 510.
<https://doi.org/10.31857/S0367292120060050>
54. Usmanov R.A., Amirov R.K., Gavrikov A.V., Liziakin G.D., Polistchook V.P., Samoylov I.S., Smirnov V.P., Vorona N.A., Yartsev I.M. // Phys. Plasmas. 2018. Т. 25. С. 063524.
<https://doi.org/10.1063/1.5037674>
55. Usmanov R.A., Amirov R. K., Gavrikov A.V., Liziakin G.D., Melnikov A.D., Polistchook V.P., Samoylov I.S., Smirnov V.P., Vorona N.A., Yartsev I.M. // Plasma Sources Sci. Technol. 2020. Т. 29. С. 015004.
<https://doi.org/10.1088/1361-6595/ab5f33>
56. Антонов Н.Н., Ворона Н.А., Гавриков А.В., Самохин А.А., Смирнов В.П. // ЖТФ. 2016. Т. 86 (2). С. 23.
<https://doi.org/10.1134/S1063784216020031>
57. Антонов Н.Н., Гавриков А.В., Самохин А.А., Смирнов В.П. // Ядерная физика и инжиниринг. 2015. Т. 6. С. 601.
<https://doi.org/10.1134/S2079562915060020>
58. Antonov N.N., Usmanov R.A., Gavrikov A.V., Smirnov V.P. // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. Т. 1147. С. 12133.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1147/1/012133>
59. Antonov N., Liziakin G., Usmanov R., Gavrikov A., Vorona N., Smirnov V. // Phys. Plasmas. 2018. Т. 25. С. 123506.
<https://doi.org/10.1063/1.5050883>
60. Liziakin G., Antonov N., Usmanov R., Melnikov A., Timirkhanov R., Vorona N., Smirnov V.S., Oiler A., Kislenko S., Gavrikov A., Smirnov V.P. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2021. Т. 63. С. 032002.
<https://doi.org/10.1088/1361-6587/abd25e>
61. Liziakin G., Antonov N., Smirnov V.S., Timirkhanov R., Oiler A., Usmanov R., Melnikov A., Vorona N., Kislenko S., Gavrikov A., Smirnov V.P. // J. Phys. D. Appl. Phys. 2021. Т. 54. С. 414005.
<https://doi.org/10.1088/1361-6463/ac128e>
62. Liziakin G., Antonov N., Gavrikov A., Oiler A., Melnikov A., Smirnov V., Timirkhanov R., Usmanov R., Volkov L., Vorona N. // Proc. Plasma Processing and Technology, Barcelona, Spain, 2022. С. 142.
63. Usmanov R., Antonov N., Gavrikov A., Liziakin G., Melnikov A., Oiler A., Smirnov V., Timirkhanov R., Volkov L., Vorona N. // Plasma Sci. Technol. 2022. Т. 24. С. 085504.
<https://doi.org/10.1088/2058-6272/ac62a8>
64. Акопов Ф.А., Боровкова Л.Б. // ТВТ. 2011. Т. 49. С. 893.
<https://doi.org/10.1134/S0018151X11060022>
65. Oiler A.P., Liziakin G.D., Gavrikov A.V., Smirnov V.P. // Molecules. 2022. Т. 27. С. 6824.
<https://doi.org/10.3390/molecules27206824>

НИЗКОТЕМПЕРАТУРНАЯ
ПЛАЗМА

УДК 533.9

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОГО РАЗРЯДА
В СВЕРХЗВУКОВОМ ВОЗДУШНОМ ПОТОКЕ
В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ© 2023 г. К. Н. Корнев^{a,*}, А. А. Логунов^{a,**}, В. М. Шибков^{a,***}^a МГУ им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, Москва, Россия*e-mail: singuliarnost@yandex.ru**e-mail: logunov_aa@physics.msu.ru***e-mail: valshibmsu@gmail.com

Поступила в редакцию 06.12.2022 г.

После доработки 24.12.2022 г.

Принята к публикации 26.12.2022 г.

Получены трехмерные распределения скорости, температуры и давления в сверхзвуковом воздушном потоке при $M = 2$, а также плотности тока в инициируемом в нем разряде. Газовый разряд постоянного тока величиной 10 А рассматривался в гидродинамическом приближении в рамках канальной модели. Рассмотрена эволюция продольно-поперечного разряда в диапазоне времени t до 20 мкс. Показано, что разряд движется практически со скоростью основного сверхзвукового воздушного потока, достаточно слабо его возмущая. По полученным в расчетах характерным значениям плотности тока и температуры газа 8000–10000 К в разрядном канале сделаны оценки концентрации электронов $n_e \sim 10^{16} \text{ см}^{-3}$. Оценена напряженность поля $E \sim 125 \text{ В/см}$ и приведенная напряженность поля в канале разряда E/N около 30 Тд. В конфигурации аэродинамической модели с укороченными электродами показан переход к закрепленной на их концах фазе разряда.

Ключевые слова: CFD-моделирование, сверхзвуковой воздушный поток, поперечно-продольный разряд, канальная модель, гидродинамическое приближение

DOI: 10.31857/S0367292122601527, EDN: NAKIGF

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время низкотемпературная газоразрядная плазма в потоке газа широко используется в научных исследованиях и различных технологических приложениях. Существует огромное число разновидностей газовых разрядов, которые возможно использовать для целей плазменной аэродинамики [1]. Например, изучается возможность применения для воспламенения высокоскоростных топливовоздушных потоков высоковольтных разрядов с длительностью импульсов в наносекундном диапазоне [2], неравновесных ВЧ-разрядов [3], а также других разрядов, таких как диэлектрический барьерный разряд (DBD), на основе которого также конструируются различные плазменные актуаторы [4]. В [5, 6] исследуются скользящие по диэлектрической поверхности электродные разряды типа “плазменный лист”. Исследуются нетепловые эффекты плазменного усиления горения в противоточной горелке со стабилизированной магнитным полем скользящей дугой [7]. Для зажигания и стабилизации горения топливно-воздушных смесей в

сверхзвуковом потоке предлагается использовать, например, продольно-поперечный разряд [8–12] или свободно-локализованный СВЧ-разряд [13]. Был также изучен уникальный по своим свойствам поверхностный СВЧ-разряд [14, 15], который создается поверхностной волной на диэлектрической антенне, обтекаемой сверхзвуковым потоком воздуха. Воспламенение с помощью СВЧ-разряда происходит эффективно, но оборудование для его генерации достаточно громоздко, необходима защита экипажа летательного аппарата и бортовой электроники от воздействия СВЧ-излучения. В работах [16, 17] представлены экспериментально полученные основные характеристики продольно-поперечного разряда.

В отличие от эксперимента, с помощью компьютерного моделирования можно получить полное трехмерное распределение скорости, давления и температуры газового потока. Именно поэтому моделирование в области плазменно-стимулированного горения является крайне востребованной задачей. Моделирование электрических разрядов в газовом потоке уже проводилось ранее с использованием различных электродина-

мических моделей. В работе [18] исследуются характеристики разряда постоянного тока в поперечном потоке газа. При определенных условиях разряд переходит в импульсно-периодическую форму, когда формирование структуры из катодного и анодного плазменных следов прерывается новым пробоем газа. В исследовании [19] представлена двухмерная модель слаботокового (около 30 мА) скользящего дугового разряда в аргоне. Моделируется полный цикл дуги от начального зажигания разряда до его затухания. Для моделирования разряда постоянного тока с учетом внешнего магнитного поля, в [20] анализируется дрейфово-диффузионная модель. Изучены три различные конфигурации электродов разряда постоянного тока. В [21] моделируется скрещенный импульсно поддерживаемый разряд в азоте в поперечном магнитном поле. Ионизация в разряде производится повторяющимися высоковольтными импульсами наносекундной длительности, в то время как низковольтный постоянный поддерживающий разряд подает энергию в плазму между импульсами. Работа [22] посвящена моделированию продольного дугового разряда постоянного тока в сверхзвуковом потоке при числе Маха $M = 2$ с использованием пакетов FlowVision и PlasmaGo. В результате были получены двумерные распределения, включающие температуру, плотность тока, химический состав и другие параметры разряда и потока были получены для дуговых разрядов постоянного тока 0.5–7 А в сверхзвуковом потоке ($P_{st} = 22$ кПа, $T = 170$ К, $V \sim 500$ м/с).

Основными целями данной работы являются моделирование влияния гидродинамической модели продольно-поперечного разряда постоянного тока и создающих его электродов на сверхзвуковой воздушный поток в типичных условиях эксперимента, исследование развития во времени разряда и его параметров.

2. ПАРАМЕТРЫ РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ

Расчеты проводились в ПО ANSYS Fluent, позволяющем выполнять решение уравнений Навье–Стокса, усреднённых по числу Рейнольдса (RANS) для 2D, 3D-осесимметричных и 3D стационарных и нестационарных моделей.

Расчетная область (см. рис. 1) состояла из сопла Лавалья длиной 120 мм и расширяющегося аэродинамического канала длиной 500 мм прямоугольного сечения, соответствующим экспериментам [16, 17]. Профиль сопла был рассчитан на число Маха $M = 2$ [23]. На входном сечении сопла площадью 23×23 мм² ставилось граничное условие фиксированной статической температуры 300 К и фиксированного статического давления $p_{in} = 400$ кПа, так как это значение измерялось в эксперименте и задавало массовый расход

воздуха через сопло. На выходном сечении аэродинамического канала (60×60 мм²) ставилось граничное условие фиксированного давления $p_{out} = 10$ кПа, соответствующего давлению в откачиваемой барокамере, служащей в эксперименте откачиваемой буферной емкостью и приемником отработанных газов. Остальные поверхности модели (в том числе поверхности электродов) были заданы как стенки с условием без проскальзывания. Форма электродов также соответствовала проведенным ранее экспериментам (длина 70 мм, минимальное межэлектродное расстояние 2 мм, расстояния между кончиками электродов 20 мм, ромбическое сечение). Электроды отстоят на 110 мм от выходного сечения сопла Лавалья. В некоторых численных экспериментах длина электродов была уменьшена до 10 мм с сохранением угла между ними и осью модели для уменьшения периода времени между инициацией разряда и его закреплением на концах электродов. Концы электродов так же при этом были заострены, чтобы облегчить условия моделирования в области аэродинамической тени.

В расчетах использовалась модель вязкости *standart k–ε*. Это стандартная модель с двумя уравнениями, которая дает общее описание турбулентности с помощью двух уравнений переноса для турбулентной кинетической энергии (k) и для скорости диссипации турбулентной кинетической энергии (ϵ).

Небольшая зона между электродами объемом $4 \times 2 \times 1$ мм³ использовалась для инициации продольно-поперечного разряда без нужды в моделировании процесса пробоя. В начальный момент времени в этой зоне вручную выставлялась температура $T \sim 10000$ К, достаточная для протекания в воздухе электрического тока. Скорость газа при этом не изменялась. Начальное распределение температуры по поперечному сечению иницирующей зоны было выбрано гладким для более мягких условий симуляции: максимальная температура в центре сечения $T = 10000$ К плавно убывает до температуры холодного окружающего потока $T = 150$ К (см. рис. 2). Поперечное распределение плотности электрического тока в начальный момент времени имело тот же вид, но с условием равенства полного тока через поперечное сечение разряда 10 А. На рис. 2 также показана укороченная конфигурация электродов.

В уравнение баланса энергии включен вклад от джоулева нагрева. На поверхности одного из электродов задавалось условие нулевого потенциала. На втором электроде ставилось граничное условие равенства полного тока через электрод 10 А. На всех остальных поверхностях выставлялось условие нулевой плотности тока через них. Таким образом, условия в модели соответствовали подключенному источнику постоянного тока,

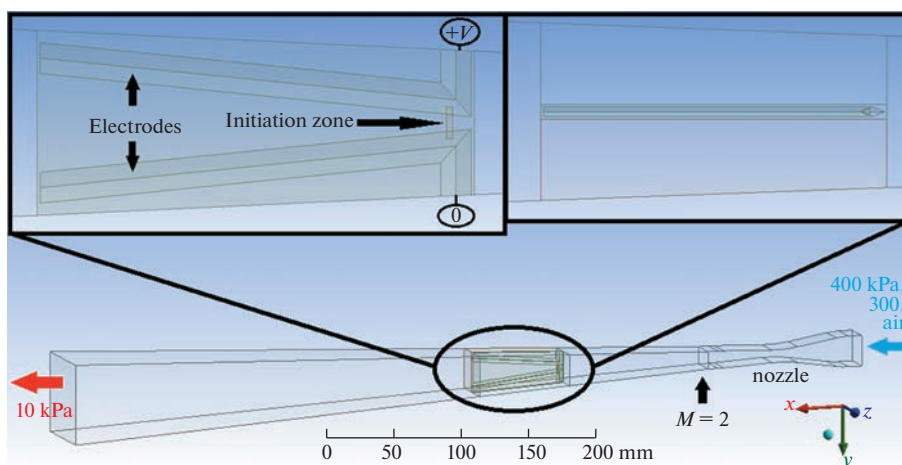


Рис. 1. Геометрия расчетной области.

а потенциал на электроде изменялся во времени и отслеживался.

Был выбран нестационарный (временной) режим. В качестве начального условия использовались аэродинамические распределения в стационарном случае без протекания токов в системе. Выбран адаптивный шаг по времени, величина которого определяется автоматически согласно критерию Куранта—Фридрихса—Леви (критерию CFL). При расчете шаг изменялся в диапазоне 10^{-14} – 10^{-8} с. Большую часть расчета шаг был порядка 1 нс.

Термодинамические, транспортные и электрические свойства воздуха (электропроводность σ , теплоемкость при постоянном давлении c_p , коэффициенты теплопроводности k и динамической вязкости η) в широком диапазоне температур до 24000 К были взяты из [24] и [25]. Их зависимости в этом диапазоне имеют крайне нелинейный характер, обусловленный, например, такими процессами как однократная и многократная ионизация, диссоциация азота, кисло-

рода воздуха и других составляющих его газов. Электропроводность σ в диапазоне температур 1500–6000 К изменяется экспоненциально и приводит в описанных условиях по существу к канальной модели разряда [25].

В уравнении баланса нет учета радиационных потерь, так как известно, что для разрядов в воздухе и азоте при давлениях порядка 1 атм в исследуемом диапазоне токов разряда их величина не превышает нескольких процентов [25]. Таким образом, вкладываемая в разряд мощность тратится только на нагрев новых масс газа, теплопроводность и ускорение газа в расширяющемся аэродинамическом канале.

Расчетная область была разбита на несколько доменов с размером ячейки от 0.05 мм в зоне инициации разряда до 5 мм у входного и выходного сечений модели. Такое разбиение расчетной области позволило обеспечить не менее 10 узлов на каждом ребре геометрической модели канала, в том числе на сечениях электрода миллиметровых размеров. Общее число ячеек в сетке составило 2 млн, характерное число узлов в поперечном потоку сечении канала 10000, характерное число узлов вдоль оси канала 1000. Примененные при построении сетки методы *Multizone*, *Face Meshing* и *Inflation* позволили создать ориентированную сетку со сгущением у пограничных слоев на стенке.

Размер ячейки расчетной сетки (0.05–5 мм) даже с учетом ее сгущения методом *Inflation* на неподвижных поверхностях, к сожалению, не обеспечивает достаточно хорошего разрешения пограничного слоя потока. Оценка его толщины

$\delta \approx 5 \sqrt{\frac{\mu l}{\rho U}}$, где μ – динамическая вязкость газа, l – характерный размер обтекаемого тела, ρ – плотность газа, а U – скорость газового потока, дает

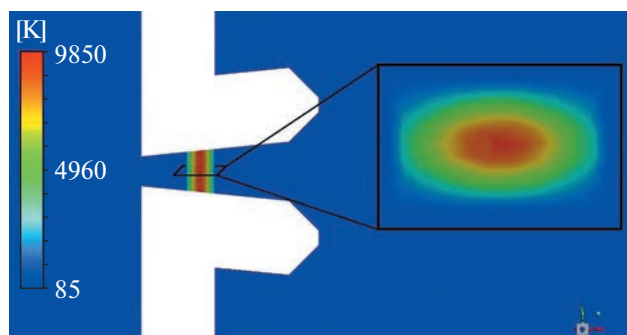


Рис. 2. Распределение статической температуры в начальный момент времени.

величину около (0.05–0.3 мм), соизмеримую с размером ячейки.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗРЯДА В ПОТОКЕ

Проведены численные эксперименты по моделированию нестационарного воздушного потока с протекающими в нем токами в диапазоне времени t до 20 мкс.

Большая часть тока протекает по узкому нагретому каналу (рис. 3) диаметром около 1 мм с характерной плотностью тока $j = 2 \times 10^3$ А/см² согласно канальной модели разряда. С течением времени диаметр канала растет, так как выделяемая тепловая мощность нагревает окружающие слои газа, и сечение разряда с достаточно высокой электропроводностью растет. Изначально прямой разряд со временем искривляется и принимает характерную форму, так как участки газа у поверхностей электродов движутся медленнее.

Максимальная температура газа T достигается в центре плазменного канала (рис. 4) и составляет 8000–10000 К. Большая часть тока протекает именно по сильно нагретой центральной части диаметром около 1 мм. В токопроводящем центре канала выделяется тепловая мощность, которая выносятся на его периферию за счет теплопроводности. При высоких температурах коэффициент теплопроводности k существенно выше, чем при комнатной температуре.

Скорость центральной области разряда составляет 670 м/с, то есть разряд движется вместе с потоком. Скорости переднего и заднего фронтов больше и меньше соответственно на 60 м/с и составляют 730 и 610 м/с, что говорит о расширении плазменного канала со временем. Минимальная скорость перемещения участков дуги наблюдается у поверхностей электродов и составляет 500 м/с. Разряд слабо возмущает поток, однако резкий нагрев или охлаждение разряда приводит к локальным возмущениям скорости потока, цилиндрически расходящимся от плазменного канала и накладывающимся на систему ударных волн окружающего стационарного потока.

Проведем оценку ролей конвективного переноса и теплопроводности. Конвективный вынос тепла из разрядного канала происходит при движении газового потока относительно него. Однако в расчете свободный дуговой разряд в среднем движется вместе с потоком и относительная их скорость мала. В качестве ее оценки можно взять величину v около 50 м/с (зафиксированная в этом численном эксперименте характерная скорость движения переднего и заднего фронтов разряда относительно оси разрядного канала). Тогда при $c_p \approx 10000$ Дж/(кг · К), $\rho \approx 0.01$ кг/м³, $k \approx 2.5$ Вт/(м · К) в условиях разряда величина числа Пекле для характерного диаметра канала 1 мм

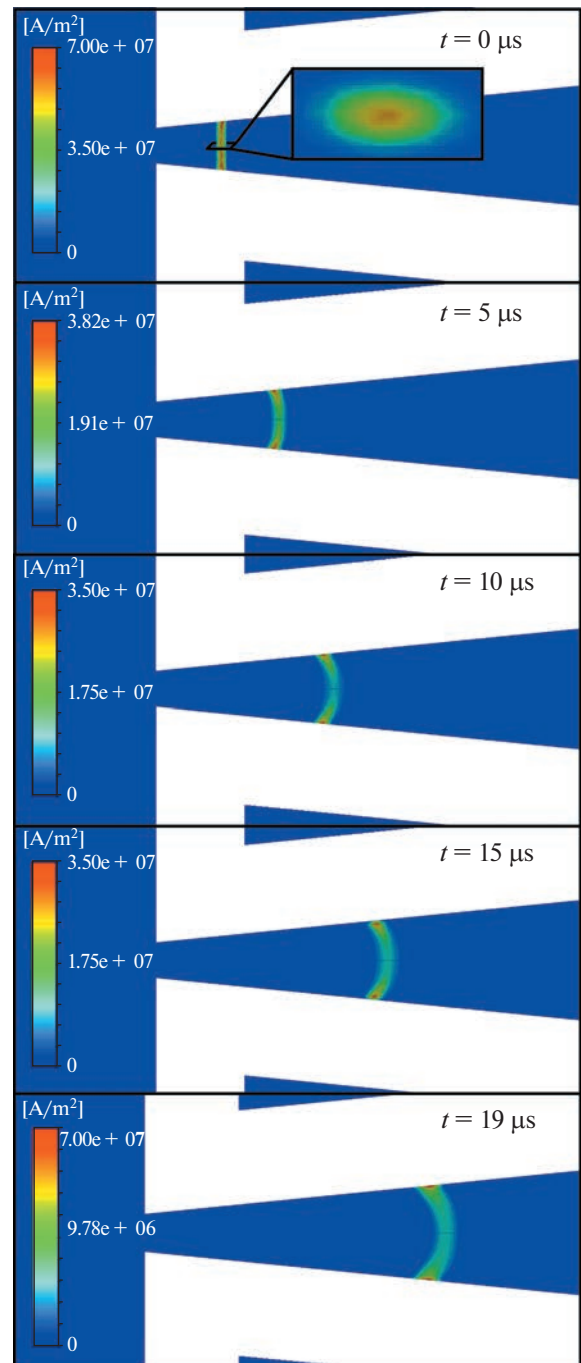


Рис. 3. Контуры плотности тока в моменты времени $t = 0; 5; 10; 15; 19$ мкс.

составит $Pe = \frac{c_p \rho v L}{k} \approx 2$. Такое промежуточное значение не позволяет не учитывать теплопроводность. Для некоторых участков разряда относительная скорость может быть и больше, но не более 500 м/с, что приведет к увеличению числа Пекле не более чем на порядок.

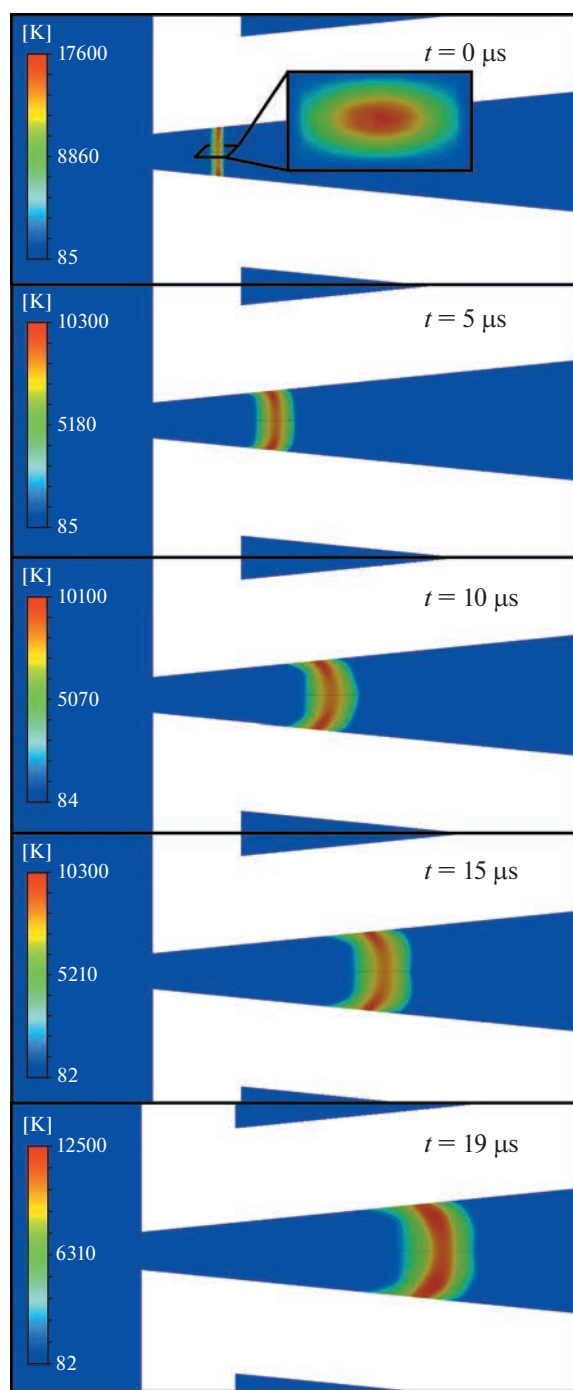


Рис. 4. Контуры статической температуры в моменты времени $t = 0; 5; 10; 15; 19$ мкс.

По значению температуры воздуха T в разряде 8000–10000 К и диапазону давлений p в потоке 0.2–0.3 атм можно сделать оценку концентрации электронов n_e . Используя табличные значения термодинамических функций для воздуха (молярной массы μ_m , плотности ρ , мольной доли электронов в газе χ_e) из [26] была рассчитана рав-

новесная концентрация электронов в воздухе при условиях разряда, которая составила 9.4×10^{14} – $9.0 \times 10^{15} \text{ см}^{-3}$.

По характерному значению плотности тока $j = 1\text{--}5 \times 10^3 \text{ А/см}^2$ в плазменном канале также можно провести оценку концентрации электронов n_e , согласно формуле $j = en_e v_{dr}$, где v_{dr} – дрейфовая скорость электронов в воздухе. Как известно, $v_{dr} = \mu E$, где μ – подвижность электронов в воздухе и в диапазоне приведенных полей 10–100 Тд характерных для разряда составляет величину около $2000 \text{ см}^2/(\text{с} \times \text{В})$ [25]. Оценка n_e в таком случае дает 2.5×10^{16} – $1.3 \times 10^{17} \text{ см}^{-3}$. Стоит отметить, что ранее проведенные экспериментальные измерения n_e по штарковскому уширению линии H_α бальмеровской серии водорода дали значения $\sim 10^{16} \text{ см}^{-3}$.

В случае укороченных до длины 10 мм электродов продольно-поперечный разряд быстрее сносится к их концам и закрепляется на них. Длина разряда продолжает увеличиваться, а форма существенно меняется, становясь петлеобразной. Поскольку использована одножидкостная модель (нет отдельно ионов и электронов), то нет разницы в скоростях движения по электродам анодного и катодного пятен, наблюдаемой в эксперименте [16, 17], и разряд все время остается симметричным относительно центральной плоскости. На рис. 5 и 6 представлены контуры плотности тока и статической температуры соответственно в симуляции с укороченными электродами.

Напряжение на разряде увеличивается с его длиной (рис. 7). Первые 5 мкс происходит выход на стационарные характеристики разряда: его диаметра, распределений температуры и плотности тока. После 10 мкс времени в потоке разряд закрепляется на концах электродов, начиная быстро увеличивать свою длину. Скорость линейного роста напряжения на разряде с учетом поперечного диаметра токового канала около 1 мм и характерной его электропроводности $\sigma \sim 1000 \text{ См/м}$ при температуре $T \sim 8000\text{--}10000 \text{ К}$ соответствует удлинению плазменного канала со скоростью около 650 м/с. Напряженность поля $E \sim 125 \text{ В/см}$, что больше чем 25 В/см – характерного значения для дугового разряда постоянного тока атмосферного давления [25]. В данной модели нет учета эмиссионных поверхностных явлений, а такие явления в плазме как ионизация и различные переносы энергии между колебательными и возбужденными состояниями молекул воздуха усреднены в виде термодинамических и электрических свойств материала модели. Поэтому в использованной модели нет механизмов понижения напряженности поля кроме снижения сопротивления плазменного канала при его

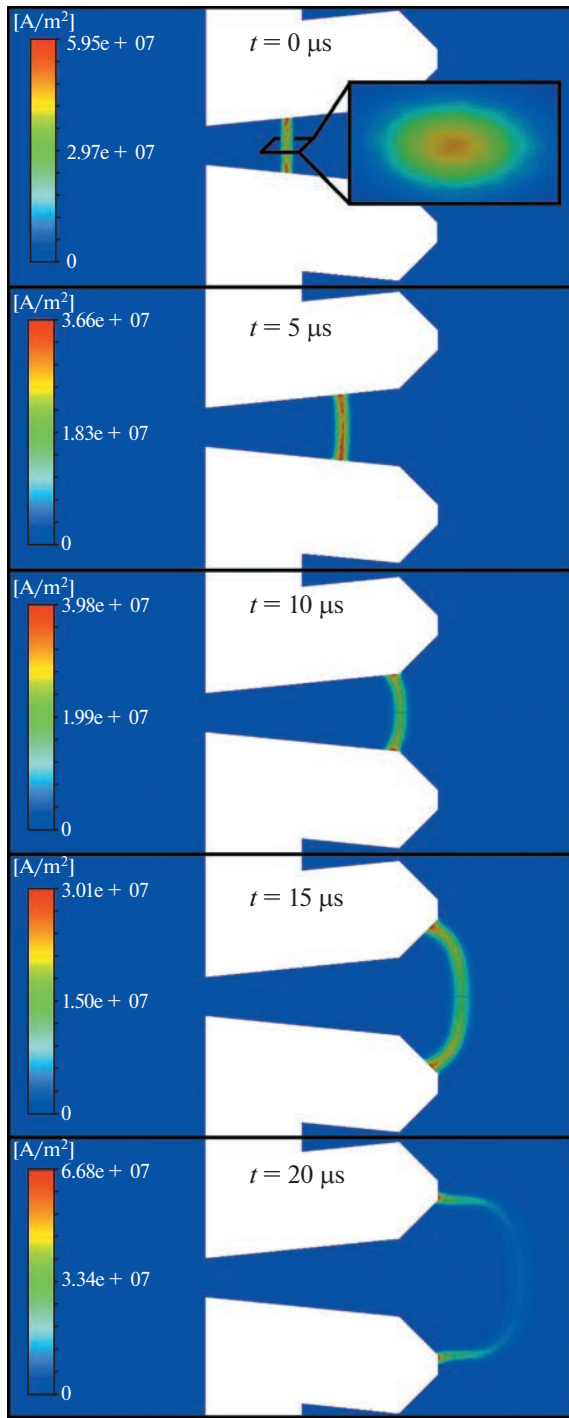


Рис. 5. Контуры плотности тока в моменты времени $t = 0; 5; 10; 15; 20$ мкс. Укороченные электроды.

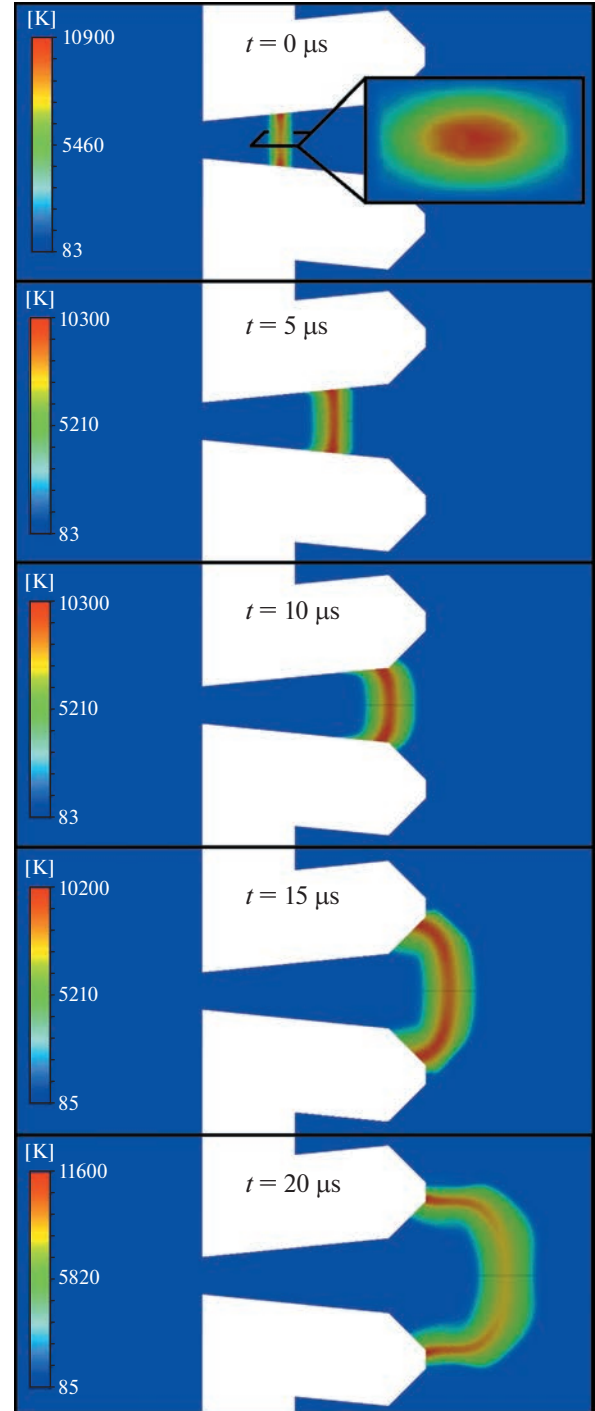


Рис. 6. Контуры статической температуры в моменты времени $t = 0; 5; 10; 15; 20$ мкс. Укороченные электроды.

нагреве. В отличие от быстрых процессов энергообмена в электронной и ионных подсистемах плазмы, происходящих за характерные времена, меньшие чем у термализации атомов $\tau_{ea} \approx (m_a/2m_e)v_{ea}^{-1} \approx 10^{-7}$ с, ионизация происходит

медленнее. По порядку величины время установления равновесной ионизации составляет $\tau_{ion} \sim (k_i N)^{-1}$, где k_i — константа скорости ионизации, $k_i \approx 10^{-15} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$ для азота при $kTe = 1$ эВ. В этом случае $\tau_{ion} \approx 2$ мс, что может объяснять большие

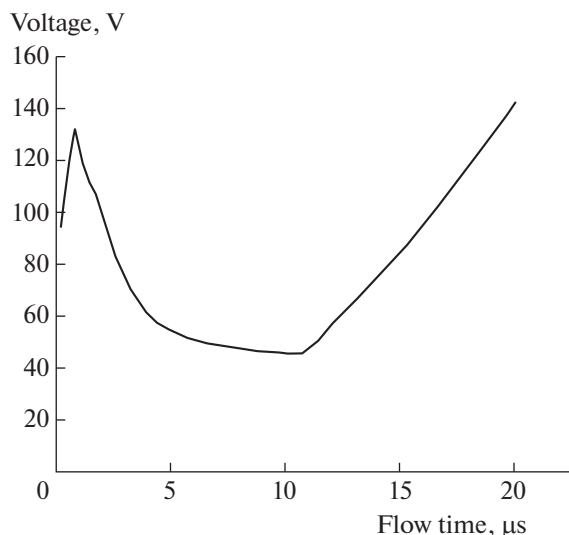


Рис. 7. Напряжение на разряде. Укороченные электроды.

напряженности поля E , поскольку в условиях расчетов разряд не успевает выйти на квазистационарное состояние ионизации.

При постоянном разрядном токе 10 А выделяемая в разряде тепловая мощность составляет около 1250 Вт на 1 см его длины. При температуре плазмы в канале около 9000 К и давлении 0.25 атм концентрация нейтралов приблизительно $4.5 \times 10^{17} \text{ см}^{-3}$, из чего получается оценка приведенного поля E/N около 30 Тд.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе были получены трехмерные распределения скорости, температуры и давления в сверхзвуковом воздушном потоке, а также плотности тока в иницируемом в нем разряде. Газовый разряд постоянного тока величиной 10 А рассматривался в гидродинамическом приближении в рамках канальной модели. Разряд инициировался с помощью ручной установки между электродами электропроводящей зоны газа с температурой $T \sim 10000 \text{ К}$ без необходимости в моделировании процесса пробоя. Рассмотрена эволюция продольно-поперечного разряда в диапазоне времени t до 20 мкс. Показано, что разряд движется практически со скоростью основного сверхзвукового воздушного потока около 670 м/с, достаточно слабо его возмущая. По полученным в расчетах характерным значениям плотности тока и температуры газа в разрядном канале сделаны оценки концентрации электронов $n_e = (0.9\text{--}5.1) \times 10^{16} \text{ см}^{-3}$, что согласуется со значениями $\sim 10^{16} \text{ см}^{-3}$, полученными ранее экспериментально оптическими методами. Показано, что с уве-

личением длины разрядного канала также растет и напряженность на нем. Оценена напряженность поля $E \sim 125 \text{ В/см}$ и приведенная напряженность поля в канале разряда E/N около 30 Тд, а тепловая мощность, выделяемая разрядом, составила 1250 Вт/см. В конфигурации аэродинамической модели с укороченными электродами показан переход к закрепленной на их концах фазе разряда.

Рассмотренный в работе продольно-поперечный разряд может быть использован, например, с целью быстрого объемного воспламенения топлива в камерах сгорания прямоточных двигателей благодаря достигаемой в нем высокой температуре газа.

Корнев К.Н. является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” и благодарит его за финансовую поддержку.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-22-00233, <https://rscf.ru/project/23-22-00233/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Leonov S.B. // *Energies*. 2018. V. 11. P. 1733. <https://doi.org/10.3390/en11071733>
2. Lin Bing-xuan, Wu Yun, Zhang Zhi-bo, Chen Zheng // *Combustion and flame*. 2017. V. 182. P. 102–113. <https://doi.org/10.1016/j.combustflame.2017.04.022>
3. Chintala N., Meyer R., Hicks A., Bao A., Rich J.W., Lempert W.R., Adamovich I.V. // *Journal of Propulsion and Power*. 2005. T. 21. № 4. С. 583. <https://doi.org/10.2514/1.10865>
4. Enloe C.L., McLaughlin T.E., VanDyken R.D., Kachner K.D., Jumper E.J., Corke T.C. // *AIAA JOURNAL*. 2004. V. 42. № 3. P. 589. <https://doi.org/10.2514/1.2305>
5. Знаменская И.А., Луцкий А.Е., Мурсенкова И.В. // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. № 24. С. 38. http://elibrary.lt/resursai/Uzsienio%20leidiniai/ioffe/pztf/2004/24/pztf_t30v24_07.pdf
6. Знаменская И.А., Латфуллин Д.Ф., Луцкий А.Е., Мурсенкова И.В., Сысоев Н.Н. // ЖТФ. 2007. Т. 77. № 5. С. 10. http://elibrary.lt/resursai/Uzsienio%20leidiniai/ioffe/ztf/2007/05/ztf7705_02.pdf
7. Fridman A., Gutsol A., Gangoli S., Ju Y., Ombrello T. // *Journal of Propulsion and Power*. 2008. T. 24. № 6. С. 1216. <https://doi.org/10.2514/1.24795>
8. Шибков В.М., Шибкова Л.В., Логунов А.А. // Физика плазмы. 2018. Т. 44. № 8. С. 661. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=35642593>
9. Шибков В.М., Шибкова Л.В., Логунов А.А. // Физика плазмы. 2017. Т. 43. № 3. С. 314. <https://doi.org/10.7868/S0367292117030118>
10. Шибков В.М., Шибкова Л.В., Логунов А.А. // Вестник Московского университета. Сер. 3. Физика. Астрономия. 2018. № 5. С. 44.

11. Шибков В.М., Шибкова Л.В., Логунов А.А. // Вестник Московского университета. Сер. 3. Физика. Астрономия. 2017. № 3. С. 76.
12. Копыл П.В., Сурконт О.С., Шибков В.М., Шибкова Л.В. // Физика плазмы. 2012. Т. 38. № 6. С. 551.
13. Зарин А.С., Кузовников А.А., Шибков В.М. Свободно локализованный СВЧ-разряд в воздухе. М.: Нефть и газ., 1996.
14. Шибков В.М., Двинин С.А., Ершов А.П., Константиновский Р.С., Сурконт О.С., Черников В.А., Шибкова Л.В. // Физика плазмы. 2007. Т. 33. № 1. С. 77.
15. Шибков В.М., Шибкова Л.В., Громов В.Г., Карачев А.А., Константиновский Р.С. // Теплофизика высоких температур. 2011. 49. № 2. С. 163.
16. Logunov A.A., Kornev K.N., Shibkova L.V., Shibkov V.M. // High Temperature. 2021. Vol. 59. № 1. P. 19–26.
17. Шибкова Л.В., Шибков В.М., Логунов А.А., Долбня Д.С., Корнев К.Н. // Теплофизика высоких температур. 2020. Т. 58. № 6. С. 1–8.
18. Двинин С.А., Ершов А.П., Тимофеев И.Б., Черников В.А., Шибков В.М. // Теплофизика высоких температур. 2004. Т. 42. № 2. С. 181–191.
19. Kolev S., Bogaerts A. // Plasma Sources Science and Technology. 2014. Т. 24. № 1. С. 015025.
20. Shang J.S., Huang P.G., Yan H., Surzhikov S.T. // Journal of Applied Physics. 2009. Т. 105. № 2. С. 023303.
21. Nishihara M., Adamovich I.V. // IEEE transactions on plasma science. 2007. Т. 35. № 5. С. 1312–1324.
22. Firsov A., Bityurin V., Tarasov D., Dobrovolskaya A., Troshkin R., Bocharov A. // Energies. 2022. Т. 15. № 19. С. 7015.
23. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1976.
24. Boulos M.I., Fauchais P., Pfender E. Thermal Plasmas: Fundamentals and Applications, Plenum Press, Springer, 1994.
25. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. С. 511.
26. Предводителев А.С. Таблицы термодинамических функций воздуха (для температур от 6000 до 12000 К и давлений от 0.001 до 1 000 атмосфер). М.: Изд-во АН СССР. 1957.

НИЗКОТЕМПЕРАТУРНАЯ ПЛАЗМА

УДК 533.9

ДЕГРАДАЦИОННЫЙ СПЕКТР ЭЛЕКТРОНОВ В МЕТАНЕ

© 2023 г. В. П. Коновалов^{a, b, *}

^a Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия

^b Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

*e-mail: konovalov.vp@mipt.ru

Поступила в редакцию 26.09.2022 г.

После доработки 14.11.2022 г.

Принята к публикации 01.12.2022 г.

Выполнены численные расчеты нестационарной неравновесной функции распределения электронов в газе метане CH_4 , возбуждаемом источником высокоэнергичных электронов с начальной энергией 1 кэВ. Были учтены основные элементарные процессы взаимодействия электронов с молекулами метана. Вычислены доли потерь энергии электронов на ионизацию, диссоциацию и возбуждение различных уровней молекул, позволяющие определять скорости неупругих процессов взаимодействия электронов с молекулами метана CH_4 .

Ключевые слова: функция распределения электронов, метан

DOI: 10.31857/S0367292122601175, **EDN:** MYUWKM

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из важных задач неравновесной плазмохимии является теоретическое моделирование взаимодействия высокоэнергичных электронов с газом, которое ведет к эффективной ионизации, диссоциации и возбуждению различных дискретных уровней молекул. В возбужденном подобным способом газе скорости химических реакций могут существенно возрасти, что является весьма важным эффектом для плазмохимической технологии [1] и экологии [2].

Корректный расчет скоростей этих процессов является сложной и трудоемкой задачей, требующей численных методов исследования. Обусловлено это тем, что в результате взаимодействия первичных электронов с молекулами газа формируется сильно неравновесное распределение электронов по энергиям (называемое деградационным спектром электронов), которое определяет величины скоростей различных процессов и зависит как от различных сечений столкновения электронов с частицами газа, так и от состава газа. Специальный интерес в настоящее время представляет плазмохимическая обработка углеводородных газов, в особенности метана, в холодной электронно-пучковой плазме [3, 4]. В исследовании [5] предложен расчет кинетики образования конечных продуктов многочисленных химических реакций в метане на основе начальных распределений по составу первичных радикалов и ионов, образующихся под действием электронного пучка.

Целью настоящей работы является проведение численных расчетов деградационного спектра электронов в газе метане CH_4 для того, чтобы непосредственно вычислить доли потерь энергии электронов на ионизацию, диссоциацию и возбуждение различных уровней молекулы, а также определить скорости начальных процессов в этом газообразном углеводороде при воздействии внешнего ионизатора.

2. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ

В реальных технологических условиях внешний источник ионизации является неоднородным и неизотропным. Однако распределение по кинетическим энергиям образующихся вторичных электронов может быть приблизительно рассмотрено отдельно от пространственного распределения внешнего энерговклада, если полагать рассеяние вторичных электронов изотропным во всех процессах взаимодействия с молекулами, и если длина свободного пробега вторичных электронов значительно меньше размера неоднородности газовой плотности. В подобных условиях распространяющиеся от внешнего источника первичные высокоэнергичные электроны задают пространственное распределение энергии в газе, а функция распределения вторичных электронов с небольшой энергией в каждой точке пространства оказывается локальной.

Деградационный спектр электронов и скорости электронных процессов в газе могут быть найдены на основе численного решения кинетического уравнения Больцмана для функции распределения электронов по энергиям. Распределение электронов по энергиям предполагается локальным, такое предположение обычно приемлемо в условиях, когда длина свободного пробега электронов в пороговой области энергий меньше характерного размера неоднородности газовой плотности. Подобные условия обычно реализуются в не слишком разреженных газах, типичных для плазмохимических технологий.

Кинетическое уравнение для функции распределения электронов по энергиям $f(\epsilon, t)$ в пространственно-однородной газовой среде учитывает разнообразные процессы с участием электронов, и представляет собой сложное интегродифференциальное уравнение со сдвинутыми аргументами. Уравнение имеет следующий общий вид [6, 7]

$$\rho \frac{\partial f}{\partial t} = St_m f + \sum_{(r,v,j)} St_k f + \sum_i St_i f + s - a,$$

где члены правой части описывают: s — скорость образования первичных электронов вследствие воздействия внешнего источника ионизации газа; a — скорость исчезновения свободных электронов в реакциях их прилипания к молекулам газа; $St_k f$ — интегралы столкновений электронов с молекулами газа.

В уравнении использована нормировка

$$\int_0^\infty f(\epsilon, t) \rho(\epsilon) d\epsilon = n(t), \quad \rho(\epsilon) = \epsilon^{1/2},$$

где ϵ — кинетическая энергия электронов, t — время, n — концентрация электронов. Распределение Максвелла с температурой электронов T_e выражается в этом случае формулой $f_M(\epsilon) = 2n \exp(-\epsilon/T_e) / (\pi T_e)^{3/2}$.

Кинетическое уравнение учитывает процессы взаимодействия электронов с молекулами — упругие столкновения (m), неупругое возбуждение (k) и ионизацию (i) молекул. Суммируются интегралы возбуждений вращательных (r), колебательных (v) и электронных (j) состояний молекул. Интегралы столкновений выражаются через соответствующие частоты столкновений электронов с молекулами ν , характеризующие скорость данного электронного элементарного процесса и равные $\nu(\epsilon) = N\nu(\epsilon)\sigma(\epsilon)$, где N — концентрация частиц, с которыми сталкивается электрон, масса m , и скорость электрона $\nu(\epsilon) = (2/m)^{1/2} \epsilon^{1/2}$, а также $\sigma(\epsilon)$ — сечение данного процесса.

В кинетическом уравнении не учитывались электрон-электронные и электрон-ионные столкновения, включая электрон-ионную рекомбинацию, а также удары второго рода, что оправдано для характерного случая начала ионизации в нейтральном газе. Если не принимать во внимание столкновения электронов с возбужденными молекулами (удары второго рода), то интегралы неупругих столкновений, связанные с возбуждением молекул, можно представить в форме, одинаковой для вращательных, колебательных и электронных уровней

$$St_k f = f(\epsilon + \epsilon_k, t) \rho(\epsilon + \epsilon_k) \nu_k(\epsilon + \epsilon_k) - f(\epsilon, t) \rho(\epsilon) \nu_k(\epsilon),$$

$$\nu_k(\epsilon) = N\nu(\epsilon) \sigma_k(\epsilon),$$

где ϵ_k , σ_k — порог и сечение k -го процесса неупругого возбуждения.

Сумма ионизационных интегралов учитывает образование ионов в различных возбужденных состояниях, каждый ионизационный интеграл столкновений имеет вид

$$St_i f = \int_0^\infty f(\epsilon_p, t) \rho(\epsilon_p) \nu_{ii}(\epsilon_p, \min(\epsilon, \epsilon_p - \epsilon_i - \epsilon)) d\epsilon_p - f(\epsilon, t) \rho(\epsilon) \nu_i(\epsilon),$$

$$\nu_{ii}(\epsilon_p, \epsilon_s) = N\nu(\epsilon_p) \sigma_{ii}(\epsilon_p, \epsilon_s), \quad \nu_i(\epsilon) = N\nu(\epsilon) \sigma_i(\epsilon),$$

$$\sigma_i(\epsilon_p) = \int_0^{(\epsilon_p - \epsilon_i)/2} \sigma_{ii}(\epsilon_p, \epsilon_s) d\epsilon_s,$$

где ϵ_i и σ_i — потенциал и сечение ионизации; $\sigma_{ii}(\epsilon_p, \epsilon_s)$ — дифференциальное сечение ионизации, ϵ_p , ϵ_s — соответственно энергии первичного и вторичного электронов. Особенностью элементарного акта ионизации является образование двух электронов в различных областях энергии, при этом вторичным считается электрон с меньшей энергией, поэтому $\epsilon_p \geq \epsilon_i + 2\epsilon_s$, и диапазон энергий вторичных электронов $0 \leq \epsilon_s \leq (\epsilon_p - \epsilon_i)/2$.

Важным свойством кинетического уравнения для функции распределения электронов по кинетическим энергиям $f(\epsilon, t)$ с приведенными выше интегралами является его линейность, — функция распределения электронов пропорциональна интенсивности внешнего источника ионизации и обратно пропорциональна суммарной концентрации молекул. При этом естественным физическим параметром, описывающим воздействие на газ стационарного источника высокоэнергичных электронов, является величина мощности источника, приходящаяся на одну молекулу газа.

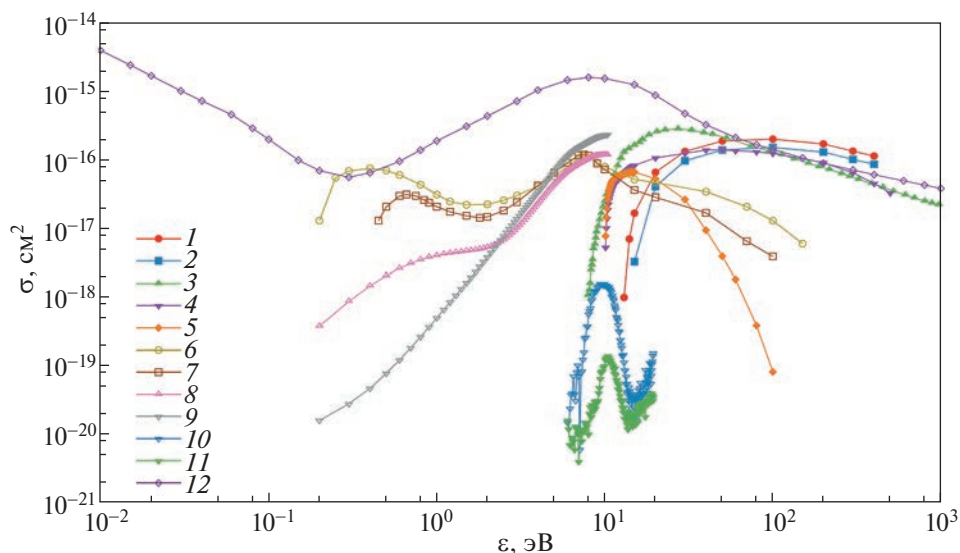


Рис. 1. Сечения элементарных процессов взаимодействия электронов с молекулами метана CH_4 (нумерация процессов по табл. 1).

3. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ ДЕГРАДАЦИОННОГО СПЕКТРА ЭЛЕКТРОНОВ

Для решения кинетического уравнения необходим корректный подбор сечений многочисленных элементарных процессов столкновений электронов с молекулами газа. При проведении компьютерных расчетов в настоящей работе были отобраны как наиболее существенные для кинетики электронов и отдельно учитывались следующие элементарные процессы взаимодействия электронов с молекулами метана CH_4

- упругие столкновения;
- возбуждение двух групп вращательных уровней молекулы;
- возбуждение двух групп колебательных уровней молекулы;
- возбуждение трех групп электронных уровней, включая последующую диссоциацию молекулы по различным каналам;
- ионизация и диссоциативная ионизация молекулы;
- два процесса диссоциативного прилипания электрона к молекуле.

Подбор сечений был выполнен, в основном, по обновляемой сводной базе экспериментальных данных LXCAT [8], собирающей результаты различных исследований. Учитываемые в расчетах элементарные процессы взаимодействия электронов с молекулами метана CH_4 представлены в табл. 1, где указаны исходные ссылки на данные по сечениям элементарных процессов. Для сравнительного анализа эти сечения показаны

в совокупности на рис. 1 (нумерация процессов по табл. 1). Экспериментальные данные для дифференциального сечения ионизации в метане [15] были аппроксимированы аналитической формулой Брейта–Вигнера

$$\sigma_{ii}(\epsilon_p, \epsilon_s) = \frac{\sigma_i(\epsilon_p)}{\arctg\left(\frac{\epsilon_p - \epsilon_s - 2\epsilon_*}{2\Gamma}\right) + \arctg\left(\frac{2\epsilon_*}{\Gamma}\right)} \times \left[\frac{\Gamma}{(\epsilon_s - 2\epsilon_*)^2 + \Gamma^2} \right],$$

где ϵ_* — точка резонанса, а Γ — его ширина.

Достоверность экспериментальных данных по сечениям элементарных процессов ограничена, и неточность некоторых сечений может составлять десятки процентов. Кроме того, экспериментальные данные могут отсутствовать в области больших энергий. Для проведения компьютерных расчетов недостаточные данные по сечениям были восполнены в области энергий до 1 кэВ как численные аппроксимации — при отсутствии экспериментальных данных зависимость конкретного сечения от энергии представлялась кусочно-непрерывной степенной функцией с эмпирически заданными значениями в нескольких характерных точках энергии электрона. Экспериментальные данные сечений ионизации (процессы 1, 2), диссоциации (процессы 4, 5) и колебательного возбуждения (процессы 6, 7) были продолжены асимптотически до энергии 1 кэВ по рис. 1. Сечения возбуждения вращательных уровней (процессы 8, 9) были аппроксимированы как

Таблица 1. Распределение энерговклада деградационного спектра электронов по процессам столкновений электронов с молекулами метана CH_4

П.п.	Электронный процесс	Сечение, ссылка	Потенциал ϵ_k [эВ]	Доля p_k [%]	Энергетическая цена, U_k [эВ]
1	Ионизация молекулы: недиссоциативная $e^- + \text{CH}_4 \Rightarrow e^- + e^- + \text{CH}_4^+$	[9]	12.9	28.9	44.6
2	диссоциативная $e^- + \text{CH}_4 \Rightarrow e^- + e^- + \text{H} + \text{CH}_3^+$	[9]	14.3	21.5	66.5
3	Возбуждение уровней молекулы: электронных уровней $e^- + \text{CH}_4 \Rightarrow e^- + \text{CH}_4^* (\text{elec})$	[10]	7.9	17.3	45.7
4	с последующей диссоциацией $e^- + \text{CH}_4 \Rightarrow e^- + \text{CH}_3 + \text{H}$	[11, 12]	10.0	13.0	76.9
5	с последующей диссоциацией $e^- + \text{CH}_4 \Rightarrow e^- + \text{CH}_2 + \text{H} + \text{H}$	[11, 12]	10.0	3.83	261
6	колебательных уровней $e^- + \text{CH}_4 \Rightarrow e^- + \text{CH}_4^* (v = 2, 4)$	[9, 13]	0.162	3.43	4.72
7	колебательных уровней $e^- + \text{CH}_4 \Rightarrow e^- + \text{CH}_4^* (v = 1, 3)$	[9, 13]	0.362	8.41	4.30
8	вращательных уровней $e^- + \text{CH}_4 \Rightarrow e^- + \text{CH}_4^* (j = 3)$	[14]	0.10	1.38	7.24
9	вращательных уровней $e^- + \text{CH}_4 \Rightarrow e^- + \text{CH}_4^* (j = 4)$	[14]	0.10	2.03	4.93
10	Прилипание к молекуле: диссоциативное $e^- + \text{CH}_4 \Rightarrow \text{CH}_3 + \text{H}^-$	[14]	6.0	0.08	7.5×10^3
11	диссоциативное $e^- + \text{CH}_4 \Rightarrow \text{H}_2 (\text{H} + \text{H}) + \text{CH}_2^-$	[14]	6.0	0.02	3.0×10^4
12	Упругое столкновение $e^- + \text{CH}_4 \Rightarrow e^- + \text{CH}_4$	[9]	0.0	0.155	

функции, ниспадающие до значения 10^{-18} см^2 при энергии 100 эВ и практически исчезающие при энергии 1 кэВ. Сечения диссоциативного прилипания (процессы 10, 11) считались пренебрежимо малыми при энергиях выше 20 эВ. Следует отметить, что используемый набор сечений столкновений электрона с молекулой метана не был верифицирован путем сравнения расчетных и имеющихся экспериментальных данных по транспортным и кинетическим коэффициентам электронов в постоянном электрическом поле.

При формировании деградационного спектра в разных диапазонах энергии электронов доминируют разные элементарные процессы столкнове-

ния электронов с молекулами. В области энергий от порогов ионизации до первоначальной энергии электронов источника главными являются процессы ионизации и возбуждения электронных уровней молекул. В области пороговых энергий возбуждения внутренних уровней молекул существенны, в первую очередь, возбуждения электронных и колебательных уровней, возбуждение же вращательных уровней не столь важно из-за относительной малости вращательного кванта. Процессы диссоциативного прилипания электронов к молекулам, которые важны для определения концентрации электронов, практически не влияют на расчет деградационного спек-

тра электронов вследствие относительной малости сечения прилипания. Поэтому полуэмпирическое продление сечения конкретного элементарного процесса в область энергий, где экспериментальные данные отсутствуют, может быть оправдано, если этот элементарный процесс не является основным в этой области энергий и подавляется другими элементарными процессами при формировании функции распределения электронов.

Конкретный расчет неравновесной функции распределения электронов (деградационного спектра) проведен для газа метана CH_4 при нормальных условиях — давлении 1 атм и температуре 290 К. В качестве характерного источника первичных высокоэнергичных электронов $s(\epsilon, t)$ для расчетов выбран стационарный источник гауссовской формы с начальной энергией 1 кэВ и незначительной дисперсией, т.е. практически моноэнергичный источник. Его интенсивность соответствовала одному первичному электрону с энергией один килоэлектрон-вольт, возникающему в одном кубическом сантиметре объема газа в одну секунду.

Если энергия первичного электрона достаточно велика и превосходит несколько сотен электрон-вольт, то процесс дифференциальной ионизации молекулы электронным ударом имеет ярко выраженный резонансный характер, и с большей вероятностью рождается вторичный электрон, обладающий сравнительно малой энергией. При этом оказываются важными два обстоятельства: во-первых, образующийся вторичный электрон, как правило, обладает небольшой энергией — порядка энергии электронного возбуждения молекулы; во-вторых, энергия образующегося вторичного электрона слабо зависит от энергии первичного. Вследствие этого процесс передачи энергии от источника ионизации в газ можно качественно представить следующим образом: первичные высокоэнергичные электроны производят, главным образом, ионизацию и рожают низкоэнергичные вторичные электроны, которые, в свою очередь, расходуют ее в основном на возбуждение молекул и не способны к их ионизации. Поэтому форма деградационного спектра электронов в пороговой области энергий, которая наиболее важна для формирования скоростей неупругих электронных процессов, оказывается практически не зависящей от энергии источника первичных электронов, если она превосходит приблизительно 300 эВ [6]. Это важное обстоятельство подтверждается непосредственными численными расчетами деградационного спектра электронов в различных газах. При меньших энергиях источника деградационный спектр электронов, вообще говоря, теряет универсальность и будет определяться конкретным видом источника первичных электронов.

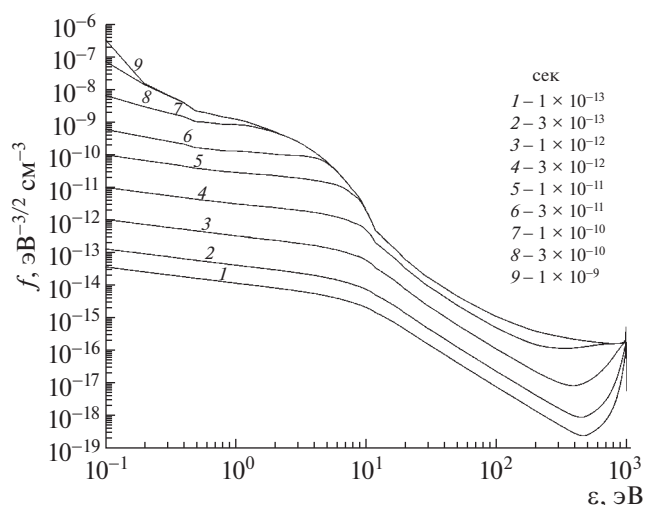


Рис. 2. Нестационарная функция распределения электронов по энергиям $f(\epsilon, t)$ в метане CH_4 в последовательные моменты времени (в секундах, снизу вверх): 1 — 10^{-13} ; 2 — 3×10^{-13} ; 3 — 10^{-12} ; 4 — 3×10^{-12} ; 5 — 10^{-11} ; 6 — 3×10^{-11} ; 7 — 10^{-10} ; 8 — 3×10^{-10} ; 9 — 10^{-9} .

Область энергий электронов, в которой рассчитывался деградационный спектр, простирается от энергии первичных высокоэнергичных электронов порядка 1 кэВ до подпороговой энергии 0.1 эВ, и содержит четыре порядка величины. В компьютерном расчете использовалась линейная шкала по энергии и линейная шкала по времени, причем шаг по времени должен быть меньше времени релаксации функции распределения в газе заданного давления. Достоверность расчета контролировалась сохранением баланса энергии электронов, который выполнялся с точностью около 1%.

Результаты расчета функции распределения электронов по энергии $f(\epsilon, t)$ (деградационного спектра) в различные моменты времени по мере ее установления, представлены на рис. 2. Деградационный спектр электронов в наиболее важной пороговой области энергий (1–10 эВ) устанавливается заметно медленнее, чем в области высоких энергий (100–1000 эВ). Образно говоря, установление деградационного спектра электронов во времени начинается с его энергетического “хвоста”. Характерное время полного установления деградационного спектра электронов в газе атмосферного давления — одна наносекунда. Начальная динамика энерговклада деградационного спектра электронов в основные неупругие процессы взаимодействия электронов с молекулами метана CH_4 представлена на рис. 3, 4 (нумерация процессов по табл. 1). По мере установления деградационного спектра возрастает значение неупругих электронных процессов возбуждения мо-

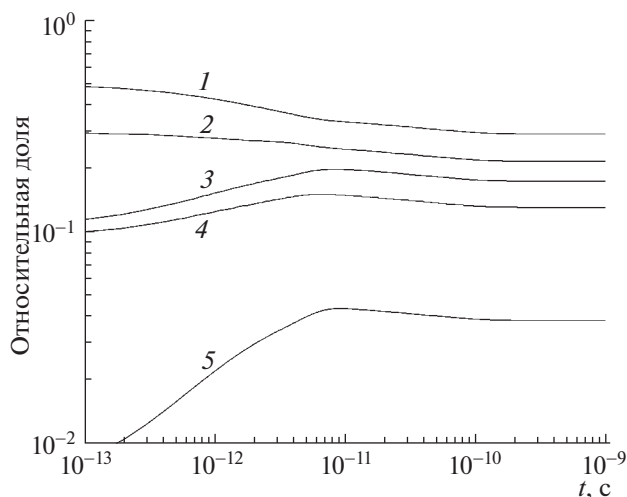


Рис. 3. Относительные доли энерговклада деградационного спектра электронов в процессы ионизации и возбуждения электронных уровней молекул метана CH_4 : 1 — недиссоциативная ионизация; 2 — диссоциативная ионизация; 3 — возбуждение электронных уровней; 4, 5 — диссоциация через возбуждение электронных уровней.

лекул с невысокими порогами, и, таким образом, постепенно формируется распределение электронов в пороговой области энергий.

Следует отметить, что при возбуждении газа высокоэнергичным источником ионизации установление во времени концентрации электронов плазмы осуществляется сначала вследствие процессов прилипания электронов к молекулам, и затем процессов электрон-ионной рекомбинации, которые происходят на временах, значительно превосходящих время установления деградационного спектра электронов.

Относительная доля энерговклада p_k , приходящаяся на k -й неупругий процесс столкновения электронов с молекулами, явно выражается через деградационный спектр следующим интегралом

$$p_k = (2/m)^{1/2} \epsilon_k \int_{\epsilon_k}^{\infty} f(\epsilon) \sigma_k(\epsilon) d\epsilon,$$

где $f(\epsilon, t)$ — деградационный спектр электронов при мощности ионизатора в расчете на одну молекулу $q = 1 \text{ эВ с}^{-1}$, $\sigma_k(\epsilon)$ — сечение процесса, значение коэффициента $(2/m)^{1/2} = 5.931 \times 10^7 \text{ см с}^{-1} \text{ эВ}^{-1/2}$.

При торможении в газе высокоэнергичных электронов скорость k -го процесса взаимодействия электронов с молекулами удобно характеризовать такими величинами как доля мощности p_k внешнего ионизатора, расходуемая на k -й процесс, а также энергетической ценой U_k , определяющей среднюю энергию, затрачиваемую элект-

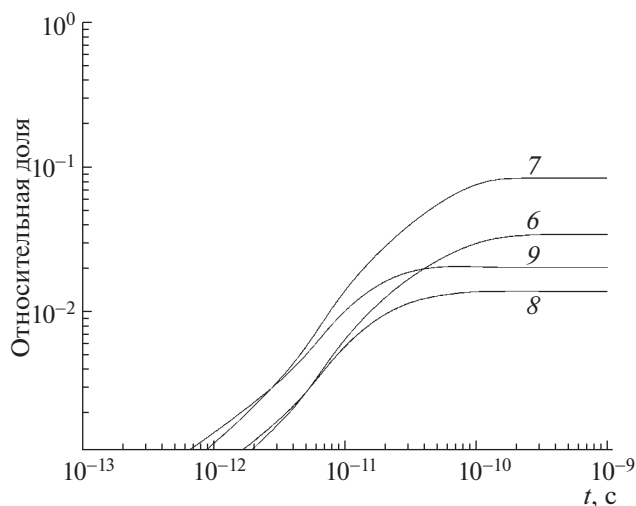


Рис. 4. Относительные доли энерговклада деградационного спектра электронов в процессы возбуждения колебательных и вращательных уровней молекул метана CH_4 : 6, 7 — возбуждение колебательных уровней; 8, 9 — возбуждение вращательных уровней.

тронным каскадом на совершение единичного акта k -го процесса. В радиационной химии для характеристики скорости элементарного процесса принято использовать безразмерную величину G_k , определяющую число актов данного процесса на 100 эВ вложенной ионизатором энергии. Для неупругого электронного процесса возбуждения или ионизации молекулы, обладающего пороговой энергией ϵ_k , величины U_k и G_k связаны с соответствующей долей мощности p_k простыми соотношениями (в скобках указаны единицы измерения)

$$U_k = \epsilon_k / p_k, \quad G_k = 100 / U_k [\text{эВ}], \\ p_k [\%] = G_k \epsilon_k [\text{эВ}]$$

Найденное по рассчитанной функции распределения электронов по энергиям установившееся распределение энерговклада внешнего источника по различным неупругим процессам взаимодействия электронов с молекулами CH_4 приведено в табл. 1.

Практически весь вклад в баланс энергии электронов деградационного спектра вносят неупругие процессы ионизации молекул и возбуждения их внутренних уровней электронными ударами. Согласно проведенным расчетам в установившемся распределении полная доля ионизации молекул метана CH_4 составляет 50%, возбуждение всех электронных уровней молекулы — 34%, колебательных уровней — 12% и вращательных уровней — 3.5%. При этом общая доля второстепенных процессов — упругих столкновений и

прилипания электронов к молекулам — не существенна и составляет менее 1%.

Важная характеристика вещества, находящегося под воздействием внешнего ионизатора, — это энергетическая цена (энергия образования) электрон-ионной пары U_{ion} . При этом общая энергетическая цена образования электрон-ионной пары определяется соотношением $U_{ion}^{-1} = \sum U_i^{-1} = \sum p_i/\varepsilon_i$, где суммируются все ионизационные процессы в веществе. Энергетическая цена образования электрон-ионной пары в метане CH_4 по результатам численного расчета в настоящей работе оказывается равной $U_{ion} = 26.7$ эВ.

Воздействующее на газ внешнее интенсивное излучение любой природы (ультрафиолетовое, рентгеновское или гамма-излучение, продукты ядерных реакций, пучки быстрых частиц) является начальным источником рождающихся первичных высокоэнергичных электронов, которые затем в результате последующих многократных процессов ионизации молекул электронными ударами образуют электронный каскад, формируя таким образом деградационный спектр электронов. Можно разумно предположить, что характер начального источника ионизирующего излучения не существен для сформировавшегося деградационного спектра электронов, и, в частности, энергетическая цена образования электрон-ионной пары должна быть примерно одинаковой для различных типов внешнего ионизирующего излучения. Имеющиеся экспериментальные данные для энергии образования электрон-ионной пары в дейтеро-метане CD_4 и метане CH_4 под радиационным воздействием альфа-частиц дают практически одинаковое значение энергии образования электрон-ионной пары $U_{ion} = 29$ эВ [16, 17]. Полученное в настоящем расчете несколько меньшее значение цены образования электрон-ионной пары можно объяснить имеющейся неопределенностью в используемых значениях сечений электронных процессов, а также их пороговых энергий.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате численных расчетов нестационарной неравновесной функции распределения электронов по энергии в газе метане CH_4 , возбуждаемом источником высокоэнергичных электронов с начальной энергией 1 кэВ показано, что деградационный спектр электронов в наиболее важной области энергий порогов возбуждения и ионизации молекул метана устанавливается медленнее, чем в области высоких энергий. Основной энерговклад деградационного спектра электронов в газе приходится на процессы ионизации молекул и возбуждение их внутренних уровней —

электронных, колебательных и вращательных. Проведенный расчет энергетической цены образования электрон-ионной пары в метане CH_4 удовлетворительно согласуется с имеющимися экспериментальными данными.

Результаты расчета деградационного спектра электронов в метане могут быть использованы при анализе плазмохимических процессов под воздействием на газ разнообразных источников высокоэнергичных электронов.

Автор выражает благодарность коллегам Л.М. Василяку, В.А. Панову и Д.В. Терешонку за интерес к работе и постоянные консультации. Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 21-79-30062).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пикаев А.К. Современная радиационная химия. М.: Наука, 1986.
2. Мак-Ивен М., Филипс Л. Химия атмосферы. М.: Мир, 1978.
3. Шарафутдинов Р.Г., Константинов В.О., Федосеев В.И., Шукин В.Г. // Прикладная физика. 2017. Р. 13.
4. Kuznetsov D.L., Uvarin V.V., Filatov I.E. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2021. V. 54. P. 435203.
5. Gu W., Dibble T.S. // Int. J. Chem. Kinet. 2022. V. 54. P. 256.
<https://doi.org/10.1002/kin.21555>
6. Александров Н.Л., Коновалов В.П., Сон Э.Е. Энциклопедия низкотемпературной плазмы / Под ред. В.Е. Фортова. М.: Наука, 2000. Т. 1. С. 557.
7. Коновалов В.П. // Физика плазмы. 1992. № 11. С. 1461.
8. LXCAT database, www.lxcat.net, 2022.
9. Davies D.K., Kline L.E., Bies W.E. // J. Appl. Phys. 1989. V. 65. P. 3311.
10. Hayashi M. / Swarm Studies and Inelastic Electron-Molecule Collisions / Ed. by L.C. Pitchford, B.V. McKoy, A. Chutjian, and S. Trajmar. New York: Springer-Verlag, 1987.
11. Ohmori Y., Kitamori K., Shimoizuma M., Tagashira H. // J. Phys. D: Appl. Phys. 1986. V. 19. P. 437.
12. Nakano T., Toyoda H., Sugai H. // Japan J. Appl. Phys. 1991. V. 30. P. 2912.
13. Morgan W.L. // Plasma Chem. & Plasma Process. 1992. V. 12. P. 477.
14. Song M.Y., Yoon J.S., Cho H., Itikawa Y., Grzegorz P., Karwasz G.P., Kokoouline V., Nakamura Y., and Tennyson J. // J. Phys. & Chem. Ref. 2015. Data 44(2), 023101
15. Opal C.B., Beaty E.C., Peterson W.K. // Atom. Data. 1972. V. 4. № 1. P. 209.
16. Barabash A.S., Golubev A.A., Kazachenko O.V., Lobashev V.M., Ovchinnikov B.M., Stern B.E. // Nucl. Instr. Meth. 1983. A 206. P. 497.
17. Белогуров С.Г. Диссертация. М.: ИТЭФ, 2004.