

УДК 535.8

СВОЙСТВА ФРАКТАЛЬНЫХ СПЕКЛОПОДОБНЫХ СТРУКТУР

© 2024 г. О. М. Вохник^{1, *}, П. В. Короленко¹, В. И. Мохов¹

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
“Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова”, Москва, Россия

*E-mail: vokhnik@rambler.ru

Поступила в редакцию 29.08.2023 г.

После доработки 15.09.2023 г.

Принята к публикации 29.09.2023 г.

Применительно к использованию в арт-терапии и офтальмологии рассмотрены свойства фрактальных спеклоподобных изображений. Для их построения использован как традиционный подход, основанный на применении двумерных фрактальных функций, так и новый прием, базирующийся на представлениях динамического хаоса. Раскрыта важная роль скейлинговых характеристик фурье-образов фрактальных световых структур.

DOI: 10.31857/S0367676524010034, EDN: SBKUMF

ВВЕДЕНИЕ

Методы фрактальной физики нашли применение при анализе и построении разнообразных пространственно-временных структур (см., например [1]). Большое внимание уделяется разработке и исследованию фрактальных световых полей, которые широко используются в устройствах различного предназначения. Например, волновые пучки, сформированные при прохождении плоской волны через пластину с канторовским профилем пропускания, обеспечивают многократную фокусировку излучения в процессе распространения [2]. Фрактальные вихревые пучки в силу их высокой степени устойчивости к влиянию турбулентных неоднородностей нашли использование в атмосферных линиях связи [3].

В последнее время усилился интерес к изучению фрактальных спеклоподобных структур. Появился целый ряд свидетельств, указывающих на положительные примеры их использования в арт-терапии [4, 5] (терапии искусством), медико-биологических исследованиях [6], светотерапии [7] и офтальмологии [8–10]. Анализ литературных данных указывает на то, что эффективность использования световых структур в арт-терапии, светотерапии и офтальмологии независимо от общей фактуры их амплитудно-фазового распределения существенно зависит от присутствия в них фрактальных признаков. Обращает на себя внимание впервые отмеченный в работе [8] факт улучшения психологического состояния пациента в ходе устранения глазной патологии. В [7] данные о снижении уровня беспокойства, разгрузке систем восприятия и положительной

динамике влияния фрактальных лазерных визуальных динамических изображений на функциональное состояние человека получены методами электроэнцефалографии. Указанная связь между методами фрактальной терапии в офтальмологии и арт-терапии может быть объяснена особенностями обработки оптических сигналов в коре головного мозга. Ключевой момент, определяющий эту связь, состоит в том, что фурье-образы фрактальных световых полей, формируемые при обработке оптических сигналов в коре головного мозга, также обладают фрактальной структурой [11]. Благодаря этому низкие и высокие пространственные частоты обрабатываются в нейронной сети коры по одному алгоритму, что улучшает восприятие оптических изображений и усиливает связь между задействованными группами нейронов. В таких условиях у пациента возникает чувство комфорта, связанное с более легким восприятием особенностей изображения.

Способы генерации таких световых полей чаще всего используют алгоритмы, основанные на свойствах детерминированных и случайных функций [11] с фрактальными свойствами. В последнее время появились также сообщения о возможности использования моделей, базирующихся на представлениях о динамическом хаосе [12]. Цель данной работы состоит в том, чтобы установить, в какой степени различие подходов к формированию оптических фрактальных изображений и разброс используемых параметров может повлиять на проявление и связь скейлинговых свойств изображений и их пространственных спектров.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИИ ВЕЙЕРШТРАССА

На первом этапе исследований поставленная задача решалась путем моделирования световых распределений с помощью двумерной функции Вейерштрасса [11]. Она имеет вид:

$$W_{k,m} = \sigma \left[\sum_{v=0}^V \sum_{i=0}^N b^{(D-2)i} \cdot \sin \left[2\pi s b^i \left(\left[k - \frac{K+1}{2} \sin(\alpha v) + \left(m - \frac{K+1}{2} \right) \cos(\alpha v) \right] + \Psi_i + \Psi_v \right) \right] \right] + A. \quad (1)$$

Здесь $W_{k,m}$ — амплитуда поля, k, m — дискретные поперечные координаты ($0 \leq k, m \leq K$), K — размер рабочего поля, обеспечивающий удовлетворительное разрешение деталей распределения амплитуды, σ — стандартное отклонение амплитуды от среднего значения, N — количество гармоник, V — количество азимутальных парциальных волн, i — номер гармоники, v — индекс азимутальной волны, α — элементарный азимутальный угол поворота, D — фрактальная размерность, b — параметр скейлинга, s — масштабирующий параметр, Ψ_i, Ψ_v — фазы компонент поля, A — компонента с однородным распределением амплитуды поля.

При случайных значениях фаз Ψ_i, Ψ_v поле приобретало спеклоподобный вид.

Для оптимального применения в различных целях двумерных фрактальных оптических структур важно знание возможностей и способов управления их фрактальными, а также статистическими свойствами: функцией плотности вероятности интенсивности спекл-паттернов; средним характерным размером спеклов, их распределением по размерам. Такое управление можно осуществлять, варьируя параметры двумерной функции Вейерштрасса.

Характерное для генерируемых спекловых полей распределение интенсивности, соответствующее ему фурье (пространственный) спектр и гистограмма показаны на рис. 1 при следующих значениях параметров: $\sigma = 0.15$, $V = 24$, $N = 6$, $b = 2.0$, $D = 1.3$, $s = 0.03$, Ψ_i, Ψ_v — распределены случайным образом от 0 до 2π .

Гистограмма зависит от величины дополнительного однородного поля A , количества v азимутальных компонент и фрактальной размерности D функции Вейерштрасса. Статистика распределения интенсивности (см. рис. 1в) приближается к релеевской при стремлении A к нулю, увеличении числа v азимутальных компонент и фрактальной размерности D функции Вейерштрасса.

В процессе моделирования спекловых структур для различных наборов параметров было установлено, что распределения интенсивности независимо от ее статистики и их пространственных спектров обладают фрактальными свойствами. Их фрактальная размерность определялась на основе анализа поведения структурной функции [13]. Для нее использовалось следующее выражение:

$$C_j = \frac{1}{(K-2^j)} \sum_{k=0}^{K-2^j} \sum_{m=0}^{K-2^j} \left| I_{k+2^j,m} - I_{k,m+2^j} \right|. \quad (2)$$

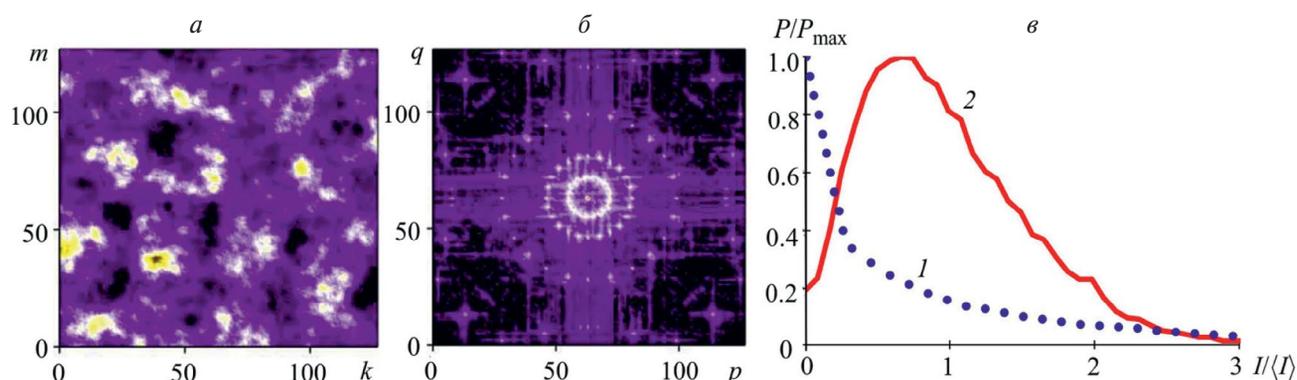


Рис. 1. Характеристики спеклоподобного поля (расчет): распределение интенсивности (а), структура пространственного спектра (б) (p, q — пространственные частоты), гистограммы распределения интенсивности (в) (1 — релеевская ($A = 0$) и 2 — нерелеевская ($A = 2$) статистика).

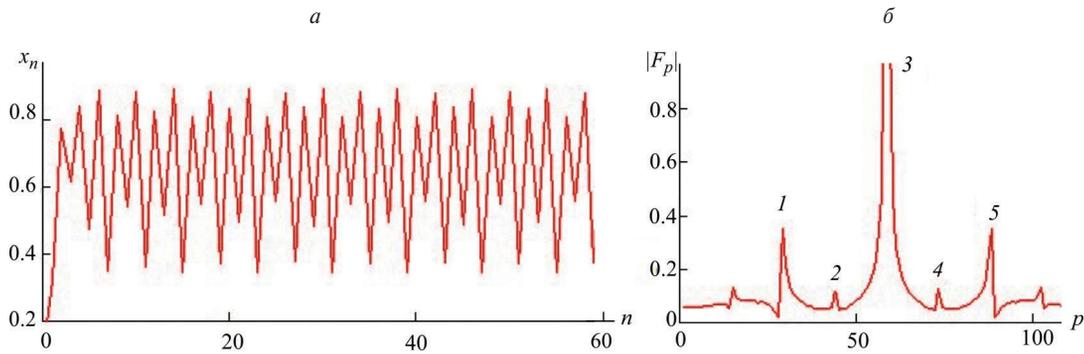


Рис. 2. Динамическая зависимость x_n от n (а), ее фурье-образ (б) (p – пространственная частота, $|F_p|$ – амплитуда спектральных компонент).

Здесь I – интенсивность ($I = |W|^2$), K – размер рабочего поля, $j = 0 - 3$. По углу наклона графика этой функции, построенного в двойном логарифмическом масштабе, определяется сначала параметр Херста H , а затем из соотношения $D = 2 - H$ – фрактальная размерность D_f двумерной спекловой структуры.

Величина D_f уступала величине фрактальной размерности функции Вейерштрасса D , задаваемой в (1), оставаясь меньше ее на 10–20%. Такое расхождение становится понятным, если учесть, что размерность D соответствует предельно возможному пространственному разрешению исследуемой структуры, а размерность D_f характеризует фрактальные свойства реального сгенерированного изображения. Величина D_f уступала также (на 35–20%) фрактальной размерности пространственных спектров, которая практически не зависела от величины D . Этот факт является важным свидетельством высокой степени структурной устойчивости спектров Фурье.

Распределение спеклов интенсивности двумерной спекловой структуры по размерам было исследовано методами вейвлет-анализа. Установлено, что средний размер спеклов интенсивности уменьшается по мере увеличения фрактальной размерности D , количества азимутальных компонент V , образующих двумерную структуру, и уменьшения амплитуды A дополнительной плоской волны. При этом доля мелких спеклов в распределении интенсивности возрастает.

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА

Во второй части работы рассматривается возможность получения фрактальных спеклоподобных изображений путем использования моделей динамического хаоса. В расчетах используются характеристики логистического квадратичного отображения [12],

которое демонстрирует хаотическую динамику. Его можно описать простым выражением:

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n), \quad (3)$$

определяющим связь между множеством x_n и x_{n+1} . Управляющий параметр λ меняется в диапазоне от 0 до 4.

Логистическое отображение обладает фрактальными свойствами. Обычно их наличие демонстрируют на основе анализа фрактальной структуры так называемой бифуркационной диаграммы, описывающей связь возможных значений x с управляющим параметром λ . Изменение управляющего параметра влечет самоподобный каскад бифуркаций удвоения периода, обуславливающий переход к хаосу.

В данной работе для определения фрактальных характеристик логистического отображения был выбран другой путь. Он был основан на обнаруженной в ходе проводимого анализа фрактальности зависимости x_n от n на границе перехода к хаосу. Эта граница лежит вблизи значения $\lambda = 3.565$. На рис. 2а для указанного значения управляющего параметра показана зависимость x_n от n , а на рис. 2б представлен ее фурье-образ F_p (он рассчитывался на основе быстрого преобразования Фурье).

Фурье-образ обладает определенным самоподобием. Расположение максимумов амплитуды, помеченных цифрами 1, 3, 5, имеет схожий характер с расположением максимумов 2, 3, 4. Коэффициент подобия (скейлинга) для указанных конфигураций максимумов оказывается равным $b = 2$.

С использованием спектрального представления (рис. 2б) может быть построено двумерное фрактальное изображение (см. рис. 3а). Для него использовалось выражение:

$$M_{p,q} = |F_p| |F_q|. \quad (4)$$

Красным цветом на рисунке обозначены спеклоподобные выбросы интенсивности

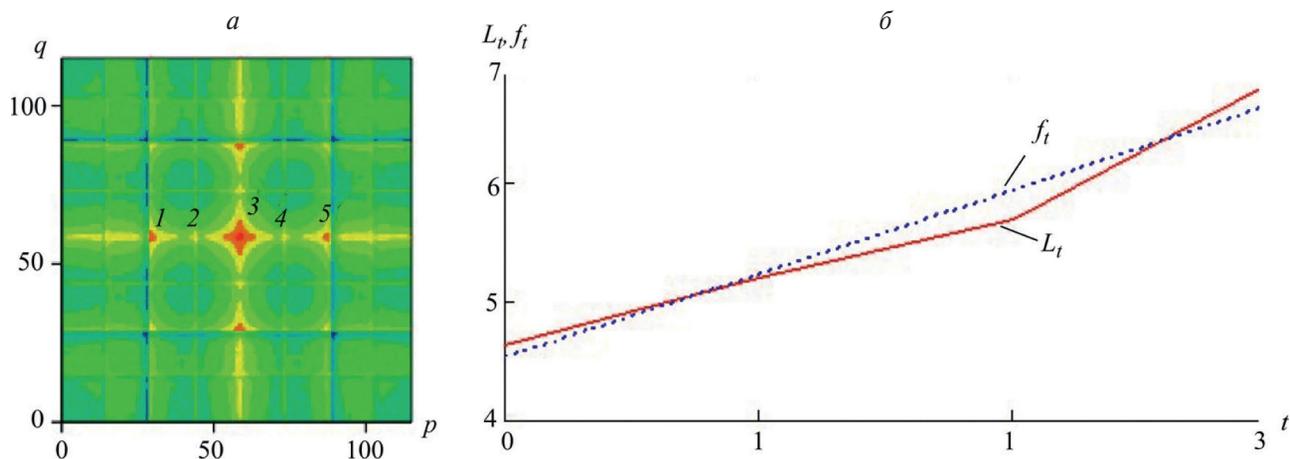


Рис. 3. Фрактальное изображение $M_{p,q}$ (а). График структурной функции (б) (сплошная линия L_t), линейная аппроксимация (пунктир f_t).

(некоторые из них обозначены цифрами 1–5). С точки зрения расположения они формируют самоподобные структуры с геометрией, отражающей структуру фурье-образа на рис. 2б.

Рядом на рис. 3б показан график L_t соответствующей структурной функции, построенный в двойном логарифмическом масштабе. Здесь же для сравнения показан близкий к нему график линейной функции f_t . Высокий коэффициент корреляции между этими графиками $r = 0.98$ доказывает фрактальность изображения на рис. 3а. Исходя из наклона линейной аппроксимации графика структурной функции находились параметр Херста и фрактальная размерность D_M [13]. В нашем случае величина D_M оказывается равной $D_M = 1.3$. По литературным данным [9], световые структуры с такой фрактальной размерностью характеризуются высокой эффективностью при использовании в медицинских технологиях. С точки зрения практического использования описанный способ генерации фрактальных структур удобен также в том отношении, что позволяет путем изменения количества итераций n менять эффективный размер спекловых образований.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполненное моделирование свойств фрактальных световых структур показало, что, несмотря на принципиально отличающиеся способы их получения и разнообразие задаваемых параметров, соответствующие им пространственные спектры также обладают фрактальными свойствами. При этом несущественно, имеет ли структура регулярный или случайный (спеклоподобный) вид. Наличие скейлинга в спектрах позволяет объяснить высокую эффективность использования пространственно-временных световых структур

с фрактальными свойствами при решении задач в области офтальмологии и арт-терапии [4, 7]. Возможность генерировать световые поля с фрактальной размерностью в диапазоне 1.2–1.5, близкой к размерности многих природных объектов, позволяет с учетом предыстории развития когнитивных процессов у человека заметно повысить эффективность фотостимуляции.

Помимо важных приложений фрактальные спеклоподобные структуры являются ценным объектом для физических исследований общего характера. В частности, представляют интерес их статистические характеристики. Одним из результатов данной работы является указание на возможность при сохранении фрактальных свойств принципиально изменять статистику распределения интенсивности путем перехода от релевской к нерелевской статистике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ружицкая Д.Д., Рыжикова Ю.В. // Изв. РАН Сер. физ. 2022. Т. 86. № 6. С. 902; Ruzhitskaya D.D., Ryzhikova Yu.V. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2022. V. 86. No. 6. P. 756.
2. Muzichenko Ya.B., Zinchik A.A., Stafeev S.K. // Sci. Tech. J. Inf. Technol. Mech. Opt. 2010. V. 6. No. 70. P. 22.
3. Korolenko P.V. // Phys. Wave Phenom. 2020. V. 28. No. 4. P. 313.
4. Пьянкова С.Д. // Психол. иссл. 2016. Т. 9. № 46. С. 12.
5. Malchiodi C.A. Handbook of art therapy. N. Y.; L.: The Guilford Press, 2003.
6. Ульянов А.С. // Изв. Самар. НЦ РАН. 2010. Т. 12. № 4. С. 117.

7. Прокопенко В.Т., Матвеев Н.В., Олейник Р.В. и др. // Светотехника. 2021. № 4. С. 50.
8. Каданер Г.И., Овчинников Б.В., Рубинштейн М.М. // Оптич. журн. 2007. Т. 74. № 12. С. 19.
9. Зуева М.В., Ковалевская М.А., Донкарева О.В. и др. // Офтальмология. 2019. Т. 16. № 3. С. 317.
10. Матросова Ю.В., Фабрикантов О.Л. // Офтальмология. 2018. Т. 15. № 2S. С. 52.
11. Зотов А.М., Короленко П.В., Мишин А.Ю., Рыжикова Ю.В. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2019. № 6. С. 52; Zotov A.M., Korolenko P.V., Mishin A.Yu., Ryzhikova Yu.V. // Moscow Univer. Phys. Bull. 2019. V. 74. No. 6. P. 625.
12. Прошин Ю.Н., Шакиров М.А. Моделирование и визуализация нелинейных динамических систем. Учебно-методическое пособие. Казань: Казанский университет, 2017. 36 с.
13. Короленко П.В., Маганова М.С., Меснянкин А.В. Новационные методы анализа стохастических сигналов и структур в оптике. М.: НИИЯФ МГУ, 2004. 81 с.

Properties of fractal speckle-like structures

O. M. Vokhnik^{a, *}, P. V. Korolenko^a, V. I. Mokhov^a

^aLomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia

*e-mail: vokhnik@rambler.ru

Regarding the use in art therapy and ophthalmology, the properties of fractal speckle-like images are considered. For their construction, both the traditional approach based on the use of two-dimensional fractal functions and a new technique based on the representations of dynamic chaos were used. The important role of the scaling characteristics of the Fourier transforms of fractal light structures is revealed.

Keywords: speckle structure, fractality, dynamic chaos, Fourier transform, spatial spectrum.