

УДК 535.36

О ВЛИЯНИИ ВЫНУЖДЕННОГО КОМБИНАЦИОННОГО САМОРАССЕЯНИЯ НА ДИНАМИКУ ИМПУЛЬСОВ В ГРАДИЕНТНОМ ВОЛНОВОДЕ

© 2024 г. В. А. Халяпин^{1, 2, *}, А. Н. Бугай³

¹Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта”, Калининград, Россия

²Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего образования “Калининградский государственный технический университет”, Калининград, Россия

³Международная межправительственная научно-исследовательская организация “Объединенный институт ядерных исследований”, Дубна, Россия

*E-mail: slavasxi@gmail.com

Поступила в редакцию 29.08.2023 г.

После доработки 15.09.2023 г.

Принята к публикации 29.09.2023 г.

На основе метода моментов получена система уравнений на параметры продольно-поперечного импульса. Найден критерий устойчивости таких сигналов и характерная длина, на которой вынужденное комбинационное рассеяние делает импульс неустойчивым.

DOI: 10.31857/S0367676524010081, EDN: SAXQYH

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что решение нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) устойчиво только для одномерного случая $D = 1$, который отвечает чисто пространственным или временным сигналам. При размерности $D = 2$, что соответствует пучкам или планарным пространственно-временным импульсам, и при $D = 3$, соответствующей оптическим пучкам, решения не устойчивы [1]. Для стабилизации сигналов с $D > 1$ были предложены такие механизмы, как насыщающая нелинейность [2], конкурирующие нелинейности [3], дифракция или дисперсия более высокого порядка [4], градиентный волновод [5–7]. Стабилизация импульса для градиентного волновода обусловлена балансом между самофокусировкой, дифракцией и линейной рефракцией в неоднородной среде. В таком волноводе показатель преломления меняется от центра к периферии. В продольной динамике баланс осуществляется за счет дисперсии и кубической нелинейности. Известно, что явление вынужденного комбинационного саморассеяния (ВКС) [8–12] вызывает красный сдвиг спектра импульса. Этот сдвиг частоты в области аномальной дисперсии групповой скорости будет приводить к увеличению вклада дисперсии и выводу системы из квазиравновесия. Настоящая работа посвящена исследованию влияния ВКС на устойчивость

продольно-поперечных импульсов в градиентном волноводе.

МЕТОД МОМЕНТОВ

Процесс распространения продольно-поперечных импульсов в градиентном волноводе описывается уравнением [5–7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \tau^3} - \\ - i\gamma \psi |\psi|^2 + \frac{\gamma}{\omega} \frac{\partial}{\partial \tau} (\psi |\psi|^2) + \\ + i\gamma T_R \psi \frac{\partial |\psi|^2}{\partial \tau} + q\psi - \frac{i\mu}{2} \Delta_{\perp} \psi = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ω — центральная частота сигнала, k_0 — волновое число на центральной частоте, ω, z — координата, вдоль которой распространяется сигнал, $\Delta_{\perp}$ — поперечный лапласиан, $\tau = t - z/v_g$ — время в сопутствующей системе координат, v_g — групповая скорость на частоте ω , $\mu = c/n_0\omega = 1/n_0k_0$, c — скорость света в вакууме, n_0 — показатель преломления на центральной частоте, β_2 — коэффициент дисперсии групповой скорости (ДГС), β_3 — положительный параметр, определяющий дисперсию третьего порядка, $\gamma = k_0 n_0 n_2 c / 8\pi$ — коэффициент кубической

нелинейности, n_2 — нелинейный показатель преломления, T_R — характеризует вклад ВКС, $q(r)$ определяет линейную рефракцию волновода:

$$q(r) = \frac{\eta r^2}{a^2}, \quad (2)$$

где a — поперечный радиус волновода, r — поперечная координата, $\eta = \omega(n_0^2 - 1) / 2cn_0$.

Анализ динамики параметров импульса проводился на основе метода моментов [11]. Пробное решение выберем в виде:

$$\begin{aligned} \Psi = B \exp & \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\tau - T}{\tau_p} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \right. \\ & + i(\phi + \Omega(\tau - T) - \\ & \left. - C \frac{(\tau - T)^2}{2\tau_p^2} - \frac{\varepsilon r^2}{2R^2} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где B — амплитуда сигнала, τ_p — его длительность, C — параметр, определяющий частотную модуляцию, ϕ — фаза, R — параметр, пропорциональный радиусу сигнала, ε — описывает кривизну волновых поверхностей. Все параметры зависят от координаты z . Определим моменты импульса в виде:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |\Psi|^2 2\pi r dr d\tau, \quad (4)$$

$$T = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \tau |\Psi|^2 2\pi r dr d\tau, \quad (5)$$

$$\Omega = -\frac{i}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial \tau} \right) 2\pi r dr d\tau, \quad (6)$$

$$\tau_p^2 = \frac{2}{E} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (\tau - T)^2 |\Psi|^2 2\pi r dr d\tau, \quad (7)$$

$$C = \frac{i}{E} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (\tau - T) \times \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial \tau} \right) 2\pi r dr d\tau, \quad (8)$$

$$R^2 = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |\Psi|^2 2\pi r^3 dr d\tau, \quad (9)$$

$$\varepsilon = \frac{i}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (\Psi^* \nabla_{\perp} \Psi - \Psi \nabla_{\perp} \Psi^*) 2\pi r^2 dr d\tau. \quad (10)$$

Следуя методу моментов, получаем систему уравнений:

$$E = \pi^{3/2} B^2 \tau_p R^2 = \text{const}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\zeta} = L_d & \left[-\beta_2 \Omega + \frac{\beta_3}{2} \left(\Omega^2 + \frac{1+C^2}{2\tau_p^2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{3\gamma}{2\omega(2\pi)^{3/2} \tau_p R^2} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{d\Theta}{d\zeta} = \frac{L_d}{\omega \tau_0} \left(\frac{B_0^2 \gamma T_R}{2\sqrt{2} \tau_0 v^3 \rho^2} - \frac{C}{\omega \tau_0 L_N v^3 \rho^2} \right), \quad (13)$$

$$\frac{dv}{d\zeta} = -\frac{C}{v} (1 + l\Theta), \quad (14)$$

$$\frac{dC}{d\zeta} = -(1+C^2) \frac{(1+l\Theta)}{v^2} + \frac{L_d}{L_N v \rho^2} (1-\Theta), \quad (15)$$

$$\frac{d\rho}{d\zeta} = -\frac{L_d \varepsilon}{L_D \rho}, \quad (16)$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\zeta} = -\frac{L_d}{L_D \rho^2} (1 + \varepsilon^2) + \frac{L_d}{L_N v \rho^2} (1 - \Theta) - \frac{\rho^2 L_d}{L}. \quad (17)$$

В уравнениях (13)–(17) были введены безразмерные параметры $v = \tau_p / \tau_0$, $\rho = R / R_0$, где τ_0 , R_0 — начальные значения соответствующих параметров, $\Theta = \Omega / \omega$, $l = \beta_3 \omega / |\beta_2|$. Характерные дисперсионная, дифракционная, нелинейная и рефрактивная длины определяются следующими выражениями: $L_d = \tau_0^2 / |\beta_2|$, $L_D = R_0^2 / \mu$, $L_N = cn_0 \sqrt{2} / 4\pi \gamma I_0$, $L = a^2 / 2R_0^2 \eta$, где введены обозначения $I_0 = cn_0 B_0^2 / 8\pi$, I_0 , B_0 — начальные значения центральной интенсивности и амплитуды импульса.

КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ И ЕГО УСТОЙЧИВОСТЬ

Для того чтобы найти параметры квазистационарного состояния и условия его устойчивости, перепишем (14)–(17) в виде:

$$\frac{dv}{d\zeta} = \frac{P_v}{m_v}, \quad (18)$$

$$\frac{dP_v}{d\zeta} = \frac{1+l\Theta}{v^3} - \frac{L_d}{L_N v^2 \rho^2} (1-\Theta) = -\frac{\partial U}{\partial v}, \quad (19)$$

$$\frac{d\rho}{d\zeta} = \frac{P_\rho}{m_\rho}, \quad (20)$$

$$\frac{dP_\rho}{d\zeta} = \frac{2L_d}{L_D \rho^3} - \frac{2\rho L_d}{L} - \frac{2L_d}{L_N v \rho^3} (1-\Theta) = -\frac{\partial U}{\partial \rho}. \quad (21)$$

Здесь $P_v = m_v \partial v / \partial \xi = -C / v$, $P_\rho = m_\rho \partial \rho / \partial \xi = -\varepsilon / \rho$, $m_v = 1 / (1 + l\Theta)$, $m_\rho = 2L_D / L_d$, $\xi = z / L_d$. Систему (18)–(21) можно трактовать как механическую аналогию, описывающую движение частицы по поверхности $U(v, \rho)$ с координатными осями v и ρ :

$$U(v, \rho) = \frac{1 + l\Theta}{2v^2} + \frac{L_d}{L_D \rho^2} + \frac{\rho^2 L_d}{L} - \frac{L_d}{L_N v \rho^2} (1 - \Theta) - \left(\frac{1 + l\Theta}{2} + \frac{L_d}{L_D} + \frac{L_d}{L} - \frac{L_d}{L_N} (1 - \Theta) \right). \quad (22)$$

При этом масса частицы зависит от направления движения, а Θ играет роль адиабатического (медленного) параметра. Мы нормировали потенциальную функцию так, что в начальной точке $v, \rho = 1$ она равна нулю. Стационарное решение системы (18)–(21) на входе в среду ($\xi = 0$, $\Theta = 0$) можно записать как:

$$L_d = L_N, \quad (23)$$

$$\frac{1}{L_D} = \frac{1}{L_N} + \frac{1}{L}. \quad (24)$$

Выражения (23), (24) можно переписать в виде:

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}|\beta_2|}{k_0 n_2 I_0}}, \quad (25)$$

$$R_0 = \left(\frac{|\beta_2| a^2}{4\tau_0^2 \eta} \left(\sqrt{1 + \frac{8\tau_0^4 \mu \eta}{|\beta_2|^2 a^2}} - 1 \right) \right)^{1/2}. \quad (26)$$

В качестве среды выберем плавленый кварц. В ближнем инфракрасном диапазоне $\lambda = 1.55$ мкм имеем следующие параметры: $n_0 = 1.5$, $\beta_2 = -2.8 \cdot 10^{-28} \text{ с}^2/\text{см}$, $\beta_3 = 1.5 \cdot 10^{-42} \text{ с}^3/\text{см}$, $n_2 = 3.2 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2/\text{В}$, $T_R = 3$ фс. Параметр, характеризующий градиентный волновод, положим равным $a = 0.1$ см [6], а центральную интенсивность сигнала выберем $I_0 = 10^{11} \text{ Вт/см}^2$. При этих значениях находим $L_N = L_d = 2.2$ см, $L_D = 0.13$ см, $L = 0.14$ см, $l = 6.6$, $R_0 = 15$ мкм, $\tau_p = 25$ фс. С учетом того, что $L_D, L < L_N$ (26) можно записать в приближенной форме:

$$R_0 \approx \left(\frac{\mu a^2}{2\eta} \right)^{1/4}. \quad (27)$$

Найдем условие, при котором потенциальная поверхность (22) имеет минимум в стационарной точке (23), (24) на входе в среду ($\xi = 0$, $\Theta = 0$). Легко

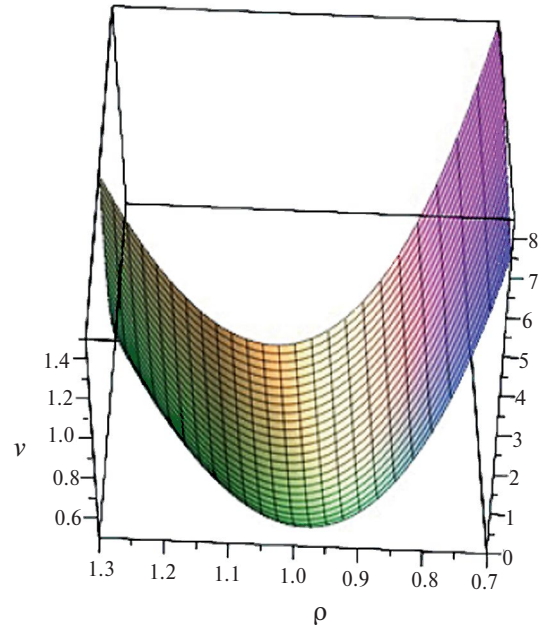


Рис. 1. Потенциальное поле $U(v, \rho)$, определяющее динамику относительной длительности v и радиуса ρ импульса.

получить, что $U_{,vv} = 1$, $U_{,\rho\rho} = 8L_d / L$, $U_{,v\rho} = -2$, где нижние индексы после запятой определяют производные по соответствующим переменным. Условие существования минимума для поверхности определяется неравенствами $U_{,vv} > 0$, $U_{,vv}U_{,\rho\rho} - (U_{,v\rho})^2 > 0$, которые можно переписать в виде:

$$2L_d > L. \quad (28)$$

Потенциальная функция (22) на входе импульса в среду представлена на рис. 1. В точке $v, \rho = 1$ имеется минимум потенциальной функции.

Рассмотрим теперь учет красного сдвига частоты за счет ВКС на устойчивость сигнала. Для этого заметим, что в формуле (21) смещение частоты приводит к медленному уменьшению нелинейного члена, вызывающего фокусировку. Поскольку для выбранных параметров выполняется условие $L < L_N$, то нелинейностью (и ВКС) можно пренебречь по сравнению с линейной рефракцией и положить $\rho = 1$. В свою очередь из (19) видно, что смещение частоты приводит к росту дисперсионного слагаемого, которое увеличивается быстрее, чем уменьшается нелинейное (т.к. $l = \beta_3 \omega / |\beta_2| = 6.6$). По этой причине изменением нелинейного слагаемого с частотой будем в дальнейшем пренебрегать. Из вышесказанного следует, что смещение частоты будет в основном влиять на продольную составляющую v , поэтому мы можем перейти от двумерной динамики к одномерной. Для рис. 1 это означает,

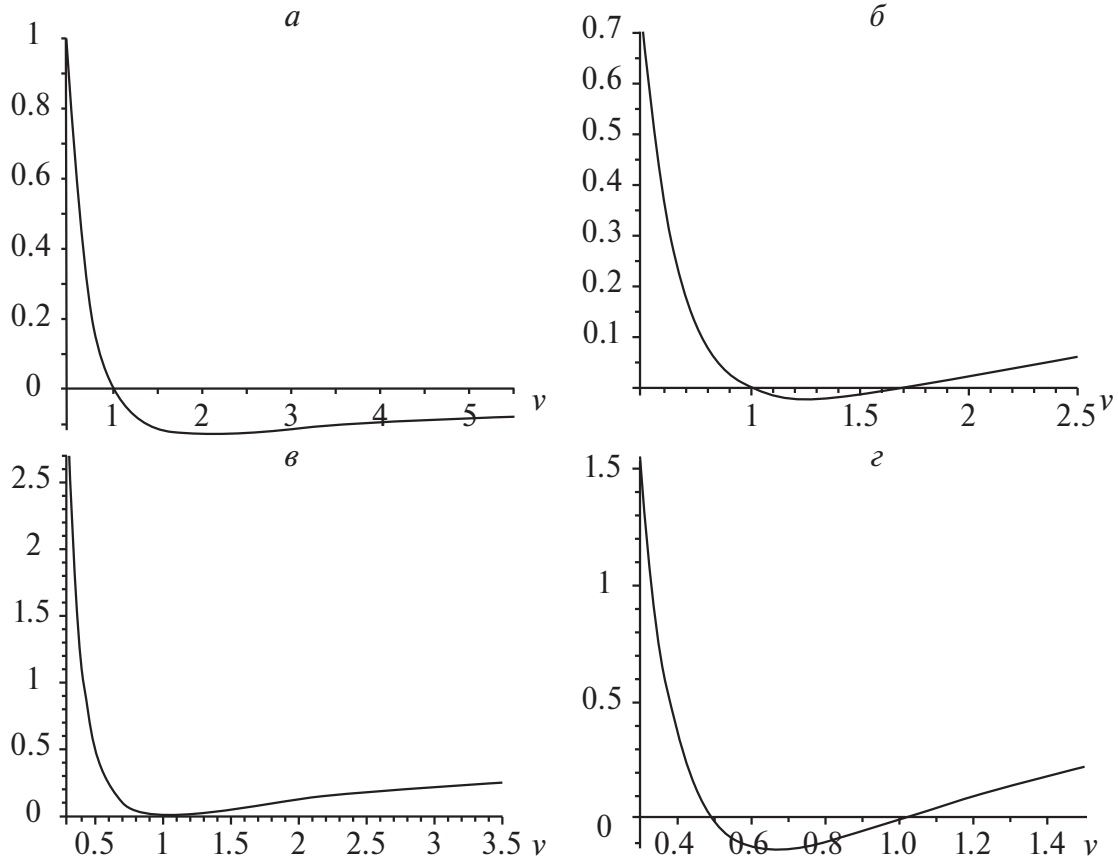


Рис. 2. Качественное изображение потенциальной функции (33) для четырех режимов (а) $0 < L_d / L_N (1 + I\Theta) < 0.5$, (б) $0.5 < L_d / L_N (1 + I\Theta) < 1$, (в) $L_d / L_N (1 + I\Theta) = 1$, (г) $1 < L_d / L_N (1 + I\Theta)$.

что мы будем рассматривать движение “частицы” вдоль сечения $\rho = 1$ потенциальной поверхности. Найдём квазистационарное решение (19), которое соответствует минимуму потенциальной функции при смещении частоты. Для этого приравняем правую часть (19) к нулю и получим зависимость относительной длительности от сдвига частоты:

$$v = 1 + I\Theta. \quad (29)$$

Будем считать, что на входе в среду модуляция сигнала равна нулю $C = 0$. Тогда из (15) с учетом (29) следует, что и в дальнейшем модуляция не будет давать существенного вклада в динамику. Тогда из (13) получаем:

$$\frac{d\Theta}{dz} = \frac{B_0^2 \gamma T_R}{2\sqrt{2}\omega\tau_0^2 v^3}. \quad (30)$$

Отсюда с учетом (29) и (25) находим явные выражения:

$$v = \left(\frac{4z}{L_R} + 1 \right)^{1/4}, \quad (31)$$

$$\Theta = \frac{1}{I} \left(\left(\frac{4z}{L_R} + 1 \right)^{1/4} - 1 \right), \quad (32)$$

где $L_R = \tau_0^4 / \beta_3 T_R$ — характерная длина ВКС. Для выбранных параметров составляет $L_R \approx 82 \text{ см}$. Из (32) в приближении $4z / L_R < 1$ вытекает формула Гордона для ВКС [13].

Рассмотрим теперь деформацию сечения ($\rho = 1$) потенциальной поверхности (22) вследствие ВКС и определим условия устойчивости сигнала. Профиль сечения (22) с учетом вышеизложенных приближений будет иметь вид:

$$U_1 = (1 + I\Theta) \left(\frac{1}{2v^2} - \frac{L_d}{L_N (1 + I\Theta)v} - \frac{1}{2} + \frac{L_d}{L_N (1 + I\Theta)} \right). \quad (33)$$

Как известно, в области аномальной дисперсии групповой скорости существуют следующие режимы [14]: область I ($0 < L_d / L_N (1 + I\Theta) < 0.5$),

область II ($0.5 < L_d / L_N (1 + I\Theta) < 1$), предельный случай III ($L_d / L_N (1 + I\Theta) = 1$) и область IV ($1 < L_d / L_N (1 + I\Theta)$). Качественная картина функции (33) для этих случаев представлена на рис. 2 а-г. В случаях рис. 2 б-г динамика импульса связанная, а в случае рис. 2а дисперсия доминирует над нелинейностью, и решение перестает быть устойчивым. Значение длительности импульса на входе ($z = 0$, $\Theta = 0$) (25) соответствует условию $L_d / L_N = 1$, а потенциальная функция имеет вид рис. 2в. По мере распространения сигнала происходит смещение частоты, и когда параметр $L_d / L_N (1 + I\Theta)$ становится равным 0.5, динамика сигнала становится неустойчивой. С учетом (32) отсюда получаем, что импульс будет квазиустойчивым вплоть до $z = 15L_R / 4$, что соответствует примерно трем метрам. При этом длительность импульса удваивается $\nu = 2$, а относительное смещение частоты достигает значения $\Theta = 1 / I \approx 0.15$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью метода моментов проведено аналитическое описание распространения продольно-поперечного импульса в градиентном волноводе с учетом ВКС. Получены аналитические выражения для квазистационарных длительности и поперечного радиуса. Найдены условия квазиустойчивого распространения. Показано, что учет смещения частоты в красную область спектра за счет явления ВКС будет приводить к медленному выходу системы из равновесия.

Работа Халяпина В. А. выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 075-02-2023-934).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kivshar Yu.S., Agrawal G.P. Optical solitons: from fibers to photonic crystals. N. Y.: Academic Press Inc., 2003. 540 p.
2. Edmundson D.E., Enns R.H. // Opt. Lett. 1992. V. 17. P. 586.
3. Mihalache D., Mazilu D., Crasovan L.-C. et al. // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88. Art. No. 073902.
4. Fibich G., Ilan B. // Opt. Lett. 2004. V. 29. P. 887.
5. Raghavan S., Agrawal G.P. // 2000. V. 180. P. 377.
6. Sazonov S.V. // Phys. Rev. A. 2019. V. 100. Art. No. 043828.
7. Сазонов С.В. // Опт. и спектроск. 2020. Т. 128. № 9. С. 1296; Sazonov S.V. // Opt. Spectrosc. 2020. V. 128. No. 9. P. 1407.
8. Дианов Е.М., Карасик А.Я., Мамышев П.В. // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 41. № 6. С. 242; Dianov E.M., Karasik A.Ya., Mamyshev P.V. et al. // JETP Lett. 1985. V. 41. No. 6. P. 294.
9. Mitschke F.M., Mollenauer L.F. // Opt. Lett. 1986. V. 11. P. 659.
10. Gordon J.P. // Opt. Lett. 1986. V. 11. P. 662.
11. Santhanam J., Agrawal G. // Opt. Commun. 2003. V. 222. P. 413.
12. Bugay A.N., Khalyapin V.A. // Phys. Lett. A. 2017. V. 381. P. 399.
13. Gordon J.P. // Opt. Lett. 1986. V. 11. P. 662.
14. Anderson D. // Opt. Commun. 1983. V. 48. No. 2. P. 107.

On the influence of intrapulse Raman scattering on the dynamics of pulses in a gradient waveguide

V. A. Khalyapin^{a, b, *}, A. N. Bugay^c

^aImmanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, 236016 Russia

^bKaliningrad State Technical University, Kaliningrad, 236001 Russia

^cJoint Institute for Nuclear Research, Dubna, 141980 Russia

*e-mail: slavasxi@gmail.com

Based on the method of moments, a system of equations for the parameters of a longitudinal-transverse pulse is obtained. A criterion for the stability of such signals and the characteristic length at which the intrapulse Raman scattering makes the pulse unstable are found.