

УДК 532.59

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В КОНЦЕНТРАЦИОННО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

© 2024 г. А. А. Очиров¹, *

¹Федеральное государственное бюджетное учреждение науки “Институт проблем механики имени
А. Ю. Ишлинского Российской академии наук”, Москва, Россия

*E-mail: otchirov@mail.ru

Поступила в редакцию 29.08.2023 г.

После доработки 15.09.2023 г.

Принята к публикации 29.09.2023 г.

Изучено распространение двумерных периодических капиллярно-гравитационных периодических возмущений свободной поверхности в вязкой равномерно стратифицированной жидкости, плотность которой зависит от солёности. Показано, что существуют дополнительные компоненты течения, отсутствующие в модели идеальной жидкости. Получены выражения, описывающие тонкую структуру течения. Полученные дисперсионные соотношения равномерно сходятся к известным выражениям в предельных случаях.

DOI: 10.31857/S0367676524010262, EDN: RYULMY

ВВЕДЕНИЕ

Исследование периодических течений на поверхности жидкости исследуется экспериментально и теоретически на протяжении более трех веков. Современные представления собраны в классических обобщающих работах [1–3]. Начиная с XX в., исследователи стали изучать движение вязкой жидкости. Периодическому движению в вязкой жидкости посвящено большое количество обзорных работ и оригинальных теоретических и экспериментальных исследований [4–7]. Периодические течения в однородных и стратифицированных жидкостях имеют большой академический и прикладной интерес. В недавних работах анализировались волны, которые сгенерированы подводными лодками [8], судами на подводных крыльях [9]. Исследование [10] посвящено экспериментальному анализу поведения илового слоя под воздействием поверхностных периодических возмущений жидкости.

В экспериментальных исследованиях импакта капли можно заметить сложную структуру течения, включающую в себя капиллярно-гравитационные волны, вихри, струи и тонкие волокна на всех этапах развития процесса [11–12]. В работах [13–14] были проанализированы волны, возникающие в идеальных стратифицированных однослойных и двуслойных средах. Дисперсионные уравнения и их анализ для разных компонентов, в том числе определяющих тонкую структуру течения в вязких однородных

и стратифицированных жидкостях без указания природы стратификации, проведены в [15–16]. В настоящей работе проведен анализ распространения поверхностных периодических возмущений в вязкой экспоненциально стратифицированной жидкости, в которой стратификация связана с неравномерным распределением концентрации примеси. Исследованы периодические течения солёности, возникающие при распространении периодических возмущений свободной поверхности жидкости.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим полубесконечную неограниченную вязкую жидкость с кинематической вязкостью ν и коэффициентом поверхностного натяжения σ , находящуюся в поле сил тяжести $\vec{g} = (0, 0, -g)$, занимающую нижнее полупространство $z < 0$ в декартовой системе координат $Oxyz$, в которой ось Oz направлена вертикально вверх, а плоскость Oxy совпадает с равновесным положением свободной поверхности жидкости. Рассмотрим плоские периодические возмущения свободной поверхности жидкости $z = \zeta(x, t)$, а движение жидкости при этом будем считать независимым от горизонтальной координаты y . В естественных условиях в жидкости присутствует стратификация по плотности, связанная с естественными процессами. В настоящей работе рассматривается модель, учитывающая стратификацию, связанную с неравномерностью

концентрации примеси, при этом плотность ρ определяется выражением:

$$\rho = \rho_0(z) \left(1 + \alpha_S (S(x, z, t) - S_0) \right). \quad (1)$$

Здесь $\rho_0(z) = \rho_{00} \exp(-z/\Lambda)$ – функция, задающая исходную стратификацию, $\Lambda = |\ln \rho / \ln z|^{-1}$ – масштаб стратификации, ρ_{00} – значение плотности на равновесном уровне $z = 0$, α_S – коэффициент солевого уплотнения, $S(x, z, t) = S_0 + \tilde{S}(x, z, t)$ – функция, определяющая соленость, S_0 – равновесное значение, а $\tilde{S}$ – периодическое возмущение солености. Математическая формулировка задачи базируется на упрощенной системе фундаментальных уравнений [1, 17], в которой пренебрегается эффектами, связанными с переносом тепла, и включает помимо выражения (1) уравнение Навье-Стокса, уравнение неразрывности и уравнение диффузии для функции солености:

$$z < \zeta: \begin{cases} \rho(\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}) = \rho \nu \Delta \vec{u} - \nabla P + \rho \vec{g} \\ \partial_t \rho + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0 \\ \partial_t S + \vec{u} \cdot \nabla S - \kappa_S \Delta S - Q_S = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Здесь символом $\vec{u}$ обозначается поле скоростей, которое в двумерном случае представляется в виде $\vec{u} = u \vec{e}_x + w \vec{e}_z$, κ_S – коэффициент диффузии, Q_S – функция источников, а функция $\zeta = \zeta(x, t)$

определяет отклонение свободной поверхности жидкости от равновесного положения $z = 0$. Давление жидкости P представляется в виде суммы атмосферного P_0 и гидростатического давления и поправки $\tilde{P}$, связанной с периодическим движением:

$$P = P_0 + \int_z^\zeta \rho(x, \xi, t) g d\xi + \tilde{P}(x, z, t) \quad (3)$$

Задача (2) характеризуется набором собственных параметров, которые определяют временные и пространственные масштабы наблюдаемых явлений. Набор собственных параметров задачи и их значения для жидкости с параметрами воды в моделях сильно- и слабо стратифицированных жидкостей, а также в моделях актуально- и потенциально однородных жидкостей представлен в таблице 1.

Задача (1)–(3) дополняется стандартными граничными условиями на свободной поверхности жидкости $z = \zeta$:

$$z = \zeta: \partial_t(z - \zeta) + \vec{u} \cdot \nabla(z - \zeta) = 0 \quad (4)$$

$$P - P_0 - \sigma \nabla \cdot \vec{n} - 2\rho \nu \vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot \nabla \vec{u}) = 0 \quad (5)$$

$$\vec{\tau} \cdot (\vec{n} \cdot \nabla \vec{u}) + \vec{n}(\vec{\tau} \cdot \nabla \vec{u}) = 0 \quad (6)$$

$$\vec{n} = \frac{\nabla(z - \zeta)}{|\nabla(z - \zeta)|} = \frac{-\partial_x \zeta \vec{e}_x + \vec{e}_z}{\sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2}} \quad \vec{\tau} = \frac{\vec{e}_x + \partial_x \zeta \vec{e}_z}{\sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2}}$$

Таблица 1. Характерные масштабы рассматриваемых сред

Параметр	Жидкость			
	Стратифицированная		Однородная	
	Сильно	Слабо	Потенциально	Актуально
Частота плавучести N, c^{-1}	1	0.01	0.00001	0.0
Период плавучести T_b	10 с	10 мин	10 дней	∞
Капиллярно-вязкий временной масштаб $\tau_{vg}^\gamma = \gamma(\nu g)^{-1}, c$	7	7	7	7
Капиллярно-диффузионный временной масштаб $\tau_{\kappa_S g}^\gamma = \gamma(\kappa_S g)^{-1}, c$	7000	7000	7000	7000
Масштаб стратификации Λ	10 м	100 км	10^8 км	∞
Вязкий волновой масштаб $\delta_N^{gv} = (g\nu)^{1/3} N^{-1}, \text{ см}$	2	200	$2 \cdot 10^6$	∞
Диффузионный волновой масштаб $\delta_N^{\kappa_S} = (g\kappa_S)^{1/3} N^{-1}, \text{ см}$	0.2	20	$2 \cdot 10^5$	∞
Микромасштаб Стокса $\delta_N^\nu = \sqrt{\nu/N}, \text{ см}$	0.1	1	30	∞
Диффузионный микромасштаб $\delta_N^{\kappa_S} = \sqrt{\kappa_S/N}, \text{ см}$	0.003	0.03	1	∞
Капиллярная постоянная $\delta_g^\gamma = \sqrt{\gamma/g}, \text{ см}$	0.3	0.3	0.3	0.3

Здесь символами $\vec{n}$ и $\vec{\tau}$ обозначены вектор нормали и касательной к свободной поверхности соответственно.

Рассмотрим задачу в приближении Буссинеска в отсутствие источников $Q_S = 0$. В этом случае жидкость считается несжимаемой и с учетом сделанных упрощений можно ввести функцию тока ψ , производные которой характеризуют компоненты скорости:

$$u = \partial_z \psi, \quad w = -\partial_x \psi. \quad (7)$$

В линейном приближении по малому параметру, имеющему смысл отношения амплитуды к длине волны после проведения процедуры снесения граничных условий на равновесную поверхность $z = 0$ задача запишется в виде:

$$z < 0 : \partial_{tt} \Delta \psi - \nu \partial_t \Delta \psi + N^2 \exp\left(-\frac{z}{\Lambda}\right) \partial_{xx} \psi = 0, \quad (8)$$

$$\partial_t \tilde{S} - \kappa_S \Delta \tilde{S} = 0, \quad (9)$$

$$z = 0 : \partial_t \zeta + \partial_x \psi = 0, \quad (10)$$

$$\nu \partial_{tz} \Delta \psi - \partial_{ttz} \psi + g \partial_{xx} \psi + 2\nu \partial_{txz} \psi - \gamma \partial_{xxxx} \psi = 0, \quad (11)$$

$$\partial_{zz} \psi - \partial_{xx} \psi = 0, \quad (12)$$

$$z \rightarrow -\infty : \partial_z \psi \rightarrow 0, \quad \partial_x \psi \rightarrow 0. \quad (13)$$

Здесь символом $N = \sqrt{g/\Lambda}$ обозначена частота плавучести, которая в настоящей модели не зависит от глубины, а символом $\gamma = \sigma/\rho_{00}$ обозначен нормированный на равновесную плотность коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Будем искать решение задачи (8)–(13) для функции тока и возмущения солёности в виде периодических возмущений:

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \tilde{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_m \exp(k_z z) \\ S_m \exp(k_z z) \end{pmatrix} \exp(ik_x x - i\omega t) + C.C. \quad (14)$$

Здесь Y_m, S_m – амплитуды соответствующих величин, а символом $C.C.$ обозначены комплексно-сопряженные слагаемые. Положительно определенная частота периодического движения обозначена символом $\omega > 0$, а символами $k_{x,z,S}$ обозначены компоненты волновых векторов, которые могут быть комплексными. Подставляя вид решения (14) в уравнения (8)–(9), получим дисперсионные соотношения, связывающие компоненты волновых векторов для функции тока и возмущений солёности:

$$\begin{aligned} \omega(k_x^2 - k_z^2) \left(i\nu(k_x^2 - k_z^2) + \omega \right) - \\ - N^2 \exp\left(-\frac{z}{\Lambda}\right) k_x^2 = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\kappa_S(k_x^2 - k_{zS}^2) - i\omega = 0. \quad (16)$$

Уравнения (15)–(16) удобно анализировать в безразмерном виде, в качестве параметров безразмеривания выбрав собственные масштабы задачи. В качестве временного масштаба – обратную частоту плавучести $\tau_N = N^{-1}$, а в качестве пространственного масштаба – вязкий волновой масштаб δ_N^v [16]. При выбранных параметрах безразмеривания естественным образом возникает малый параметр $\varepsilon = \delta_g^v / \delta_N^{gv} = N\nu^{1/3} / g^{2/3}$, определяющий отношение собственного вязкого масштаба к вязкому волновому. В безразмерном виде дисперсионные уравнения (15)–(16), определяющие связь между безразмерной частотой ω_* и безразмерными компонентами волновых векторов $k_{*,x,z,S}$, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega_* (k_{*,x}^2 - k_{*,z}^2) \left(i\varepsilon(k_{*,x}^2 - k_{*,z}^2) + \omega_* \right) - \\ - \exp\left(-\frac{z}{\Lambda}\right) k_{*,x}^2 = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

$$\frac{\varepsilon}{Sc} (k_{*,x}^2 - k_{*,zS}^2) - i\omega_* = 0. \quad (18)$$

Здесь $Sc = \nu/\kappa_S$ – число Шмидта. Для широкого класса жидкостей число Шмидта можно считать большим. Уравнения (17)–(18) решаются при помощи теории сингулярных возмущений [18]. Для различия вида корней сингулярных решения для волновых чисел, определяющих возмущения функции тока, переобозначены k_{*l} :

$$\begin{aligned} k_{*,z} &= \pm \sqrt{k_{*,x}^2 - \frac{i\omega_*}{2\varepsilon} + \frac{i\sqrt{4i\varepsilon k_{*,x}^2 \exp(-z/\Lambda) + \omega_*^3}}{2\varepsilon\sqrt{\omega_*}}} \approx \\ &\approx \pm k_{*,x} \frac{\sqrt{\omega_*^2 - \exp(-z/\Lambda)}}{\omega_*}, \\ k_{*,l} &= \pm \sqrt{k_{*,x}^2 - \frac{i\omega_*}{2\varepsilon} - \frac{i\sqrt{4i\varepsilon k_{*,x}^2 \exp(-z/\Lambda) + \omega_*^3}}{2\varepsilon\sqrt{\omega_*}}} \approx \\ &\approx \pm \frac{1-i}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{\omega_*}, \\ k_{*,zS} &= \pm \sqrt{k_{*,x}^2 - i\frac{Sc}{\varepsilon} \omega_*} \approx \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{Sc}{\varepsilon} \omega_*}. \end{aligned} \quad (19)$$

В решениях (19) регулярные компоненты при положительно определенной частоте имеют малую мнимую часть по сравнению с действительной. Такие компоненты течения описывают волны на поверхности жидкости. У сингулярных компонентов течения мнимая и действительная часть сравнимы по модулю. Такие компоненты течения определяют

лигаменты — тонкую структуру течения, проявляющуюся в виде тонких струй, присоединенных к волне. С учетом выражений (18) решение задачи необходимо искать в виде:

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \tilde{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_m (\exp(k_z z) + \beta \exp(k_l z)) \\ S_m \exp(k_z z) \end{pmatrix} \times \exp(ik_x x - i\omega t) + C.C. \quad (20)$$

Граничные условия (10)–(12) определяют связь между амплитудами и задают дисперсионное уравнение, связывающее компоненты волновых векторов с частотой и другими параметрами задачи. Подстановка (20) в граничные условия приводит к соотношению:

$$\beta = -\frac{k_x^2 + k_z^2}{k_x^2 + k_l^2} \quad (21)$$

и условию совместности:

$$\begin{aligned} & (k_x^2 + k_z^2) \left(k_l \omega^2 - g k_x^2 - \gamma k_x^4 + \right. \\ & \quad \left. + i\omega \nu k_l (3k_x^2 - k_l^2) \right) - \\ & - (k_x^2 + k_l^2) \left(k_z \omega^2 - g k_x^2 - \gamma k_x^4 + \right. \\ & \quad \left. + i\omega \nu k_z (3k_x^2 - k_z^2) \right) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

В безразмерном виде дисперсионное уравнение (22) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} & (k_{*l}^2 + k_{*x}^2) \left(\delta^2 \varepsilon k_{*x}^4 + i\varepsilon^2 \omega_* k_{*z} \times \right. \\ & \quad \left. \times (k_{*z}^2 - 3k_{*x}^2) + k_{*x}^2 - \varepsilon k_{*z} \omega_*^2 \right) - \\ & - (k_{*z}^2 + k_{*x}^2) \left(\delta^2 \varepsilon k_{*x}^4 + i\varepsilon^2 \omega_* k_{*l} \times \right. \\ & \quad \left. \times (k_{*l}^2 - 3k_{*x}^2) + k_{*x}^2 - \varepsilon k_{*l} \omega_*^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь символом $\delta = \delta_g^y / \delta_N^y = \sqrt{N\gamma/\nu g}$ обозначен безразмерный параметр, характеризующий отношение капиллярной постоянной к микромасштабу Стокса. Подставляя в (23) приближенные значения (19), получим дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} & k_{*x} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{\omega_*} - k_{*x} \frac{\sqrt{\omega_*^2 - 1}}{\omega_*} \right) \times \\ & \times \left[\frac{1-i}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{\omega_*} k_{*x} + \frac{\sqrt{\omega_*^2 - 1}}{\omega_*} k_{*x}^2 + \right. \\ & + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \delta^2 \sqrt{\omega_*} k_{*x}^3 - \frac{1-i}{\sqrt{2}} \omega_*^{3/2} \sqrt{\omega_*^2 - 1} \right) \sqrt{\varepsilon} + \\ & \left. + \left(k_{*x} (1 - \omega_*^2) + \frac{\delta^2 \sqrt{\omega_*^2 - 1}}{\omega_*} k_{*x}^4 \right) \varepsilon \right] = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Порядок дисперсионного уравнения (24) соответствует порядку исходной системы уравнений. Нетривиальные решения дисперсионного уравнения здесь не приводятся в силу своей громоздкости. Для физически реализуемых корней должно выполняться условие затухания движения с глубиной (13). Следовательно, решения дисперсионных уравнений (24) должны удовлетворять критериям отбора корней:

$$\text{Re}(k_{z,l}) > 0. \quad (25)$$

Решения уравнений (24) и (19) с учетом условия (25) определяют течение в вязкой стратифицированной жидкости, в том числе периодическое течение физических величин (солёности).

ДИСПЕРСИОННЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Рассмотрим зависимости пространственных масштабов компонентов, формирующих течение, от частоты периодического возмущения. Регулярный компонент течения описывается длиной волны, которую можно определить следующим образом:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{\text{Re}(k_x)^2 + \text{Im}(k_z)^2}}. \quad (26)$$

По аналогии определяется толщина лигамента, описывающего сингулярный компонент течения:

$$\delta_l = \frac{2\pi}{\sqrt{\text{Re}(k_x)^2 + \text{Im}(k_l)^2}}. \quad (27)$$

Примечательно, что периодическое движение солёности определяется только лигаментом (19) с толщиной:

$$\delta_S = \frac{2\pi}{\sqrt{\text{Re}(k_x)^2 + \text{Im}(k_{zS})^2}}. \quad (28)$$

Построим зависимости (26)–(28) от частоты периодического движения для жидкости с параметрами воды $\rho_{00} = 1 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$, $g = 981 \text{ см}\cdot\text{с}^{-2}$, $\sigma = 72 \text{ эрг}\cdot\text{см}^{-2}$, $\nu = 0.01 \text{ см}^2\cdot\text{с}^{-1}$ с растворенной в ней NaCl с концентрацией $n = 5 \text{ моль}\cdot\text{л}^{-1}$. Коэффициент диффузии при этом примет значение $\kappa_S = 1.49 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2\cdot\text{с}^{-1}$ [19]. При построении всех графиков будем считать, что частота плавучести принимает значение $N = 1 \text{ с}^{-1}$. На рис. 1 представлены зависимости линейных масштабов компонентов течения от частоты периодического движения.

Интересно рассмотреть зависимость скорости переноса энергии (групповой скорости) и фазы (фазовой скорости) для всех компонентов периодического поверхностного течения. На рис. 2 построены зависимости групповых c_{gr} (сплошные линии) и фазовых c_{ph} (пунктирные линии) скоростей для регулярных компонентов течения и их аналогов для лигаментов

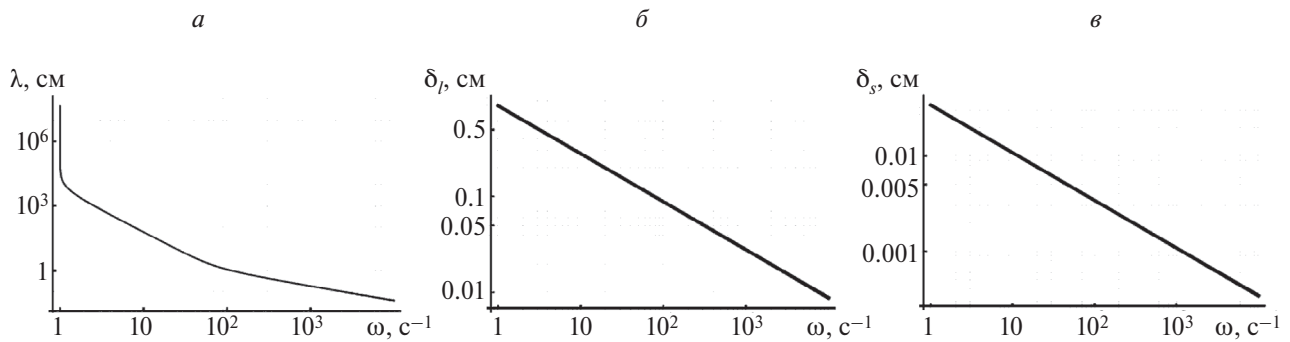


Рис. 1. Зависимость линейного масштаба компонентов течения от частоты периодического движения (а) длины волны, (б) лиганента поля скоростей, (в) лиганента солёности.

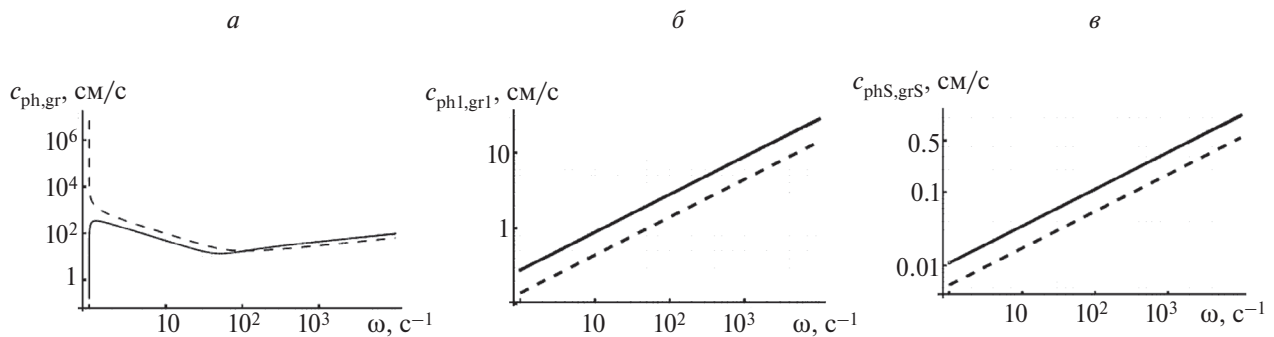


Рис. 2. Зависимость фазовой (пунктирные линии) и групповой (сплошные линии) скорости от частоты периодического движения (а) длины волны, (б) лиганента поля скоростей, (в) лиганента солёности.

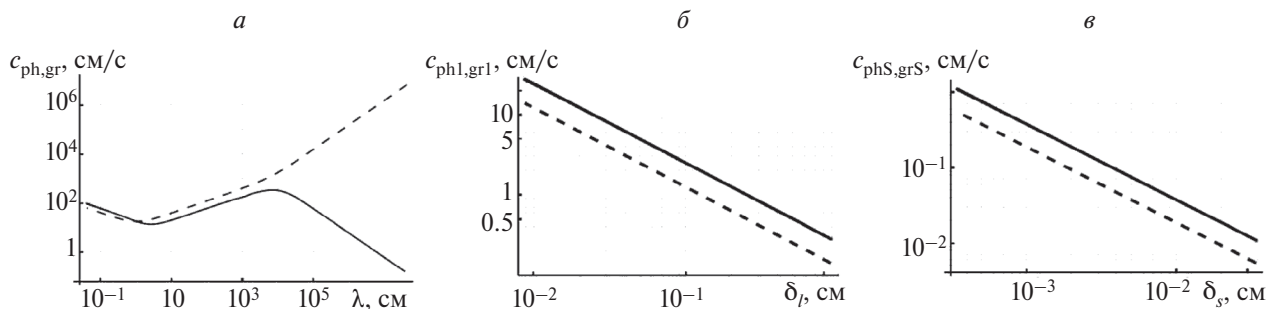


Рис. 3. Зависимость фазовой (пунктирные линии) и групповой (сплошные линии) скорости от (а) длины волны, (б) лиганента поля скоростей, (в) лиганента солёности.

поля скоростей c_{grl} и c_{phl} и лигментов солёности c_{grs} и c_{phs} от частоты. На рис. 3 представлены зависимости групповых (сплошные линии) и фазовых (пунктирные линии) скоростей для регулярных компонентов течения и их аналогов для лигментов поля скоростей и лигментов солёности от масштаба соответствующего компонента течения (длины волны или толщины лиганента).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проанализированы дисперсионные соотношения, определяющие поведение компонентов

поверхностных периодических течений в вязкой равномерно стратифицированной жидкости, плотность которой зависит от солёности. Полученные дисперсионные соотношения согласуются с порядком полной системы уравнений. Выполняются предельные переходы к известным случаям. Регулярные компоненты решения дисперсионных соотношений для поля скоростей описывают капиллярно-гравитационные волны. Сингулярные компоненты решения дисперсионных уравнений для поля скоростей описывают поведение лигментов – высокоградиентных компонентов течения, проявляющихся в виде тонких сопутствующих струй. Периодические движения

солёности определяются только сингулярными компонентами. Следовательно, лигаменты играют важную роль в переносе физически наблюдаемых величин. Характерные собственные масштабы задачи диктуют требования к экспериментальному наблюдению процессов на поверхности жидкости: временные и пространственные разрешения и области наблюдения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-19-00598-П “Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью”, <https://rscf.ru/project/19-19-00598/>).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 638 с; *Whitham G.B.* Linear and nonlinear waves. N. Y.: Wiley-Interscience, 1999.
3. Лэмб Г. Гидродинамика. М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. 928 с.
4. *Longuet-Higgins M.S.* // Phil. Trans. Royal. Soc. London. Ser. A. 1953. No. 245. P. 535.
5. Сретенский Л.Н. // Труды ЦАГИ. 1941. № 541. С. 1.
6. Калинин В.А. // Прикл. матем. и мех. 2022. Т. 86. № 3. С. 370.
7. *Chashechkin Yu.D., Il'nykh A.Yu.* // Axioms. 2023. V. 12. No. 4. P. 374.
8. *Huang F., Meng Q., Cao L. et al.* // Ocean Eng. 2022. V. 250. Art No. 111062.
9. *Zheng M.M., Liu Y.D., Tang Y.Y. et al.* // Ocean Eng. 2022. V. 263. Art No. 112366.
10. *Aleebrahim M.A., Jamali M.* // Phys. Fluids. 2022. V. 34. No. 3. Art. No. 036602.
11. Ильиных А.Ю., Чашечкин Ю.Д. // Изв. РАН. Мех. жидкости и газа. 2023. № 1. С. 54; *Il'nykh A.Yu., Chashechkin Yu.D.* // Fluid Dynamics. 2023. V. 58. No. 1. P. 31.
12. Ильиных А.Ю. // Прикл. матем. и мех. 2019. Т. 83. № 3. С. 413; *Il'nykh A.Yu.* // Fluid Dynam. 2019. V. 83. No. 3. P. 927.
13. Очиров А.А., Чашечкин Ю.Д. // Изв. РАН. Физ. атмосф. и океана. 2022. Т. 58. № 5. С. 524; *Ochirov A.A., Chashechkin Yu.D.* // Izv. Atmosph. Oceanic Phys. 2022. V. 58. No. 5. P. 450.
14. Чашечкин Ю.Д., Очиров А.А., Лапина К.Ю. // Физ-хим. кинетика в газовой динамике. 2022. Т. 23. № 6. DOI: 10.33257/PhChGD.23.6.1028.
15. Очиров А.А. // Изв. РАН. Сер. физ. 2023. Т. 87. № 1. С. 94; *Ochirov A.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2023. V. 87. No. 1. P. 79.
16. *Chashechkin Yu.D., Ochirov A.A.* // Axioms. 2022. V. 11. No. 8. P. 1.
17. *Chashechkin Yu.D.* // Axioms. 2021. V. 10. No. 4. P. 286.
18. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.; *Nayfeh A.H.* Introduction to perturbation technique. N. Y.: John Wiley & Sons, 1993.
19. Кикоин И.К. Таблицы физических величин. Справочник. М.: Атомиздат, 1976. 1008 с.

Periodic surface disturbances in the concentration-stratified viscous fluid

A. A. Ochirov^a, *

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia*
*e-mail: otchirov@mail.ru

The propagation of two-dimensional periodic capillary-gravitational periodic disturbances of a free surface in a viscous uniformly stratified liquid is investigated. Dispersion relations describing periodic surface flows of physical quantities are obtained. It is shown that there are additional flow components that are absent in the model of an ideal fluid. The obtained dispersion relations uniformly converge to the known expressions in the limit transitions.