

УДК 534.26

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ РАССЕЯНИЯ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ НА СТАТИСТИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ИЗОТРОПНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В РЭЛЕЕВСКОМ ПРЕДЕЛЕ

© 2024 г. В. Н. Чуков^{1, *}

¹Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт биохимической физики имени Н.М. Эмануэля Российской академии наук», Лаборатория акустической микроскопии, Москва, Россия

*E-mail: vchukov@mail.ru

Поступила в редакцию 25.09.2023

После доработки 16.10.2023

Принята к публикации 31.10.2023

Теоретически получены топологические законы рассеяния волны Рэлея на статистической неоднородности изотропного твердого тела в рэлеевском пределе. Они полностью определяются структурой неоднородности и содержат рэлеевский закон как частный случай. Нарушение ими рэлеевского закона для более общей, чем рэлеевская, топологии неоднородности впервые позволяет моделировать спектр рассеяния вплоть до его осцилляций и сильной угловой анизотропии.

DOI: 10.31857/S0367676524020206, EDN: RQWVIL

ВВЕДЕНИЕ

Рассеяние волн разной природы на неоднородностях среды их распространения, как хорошо известно из физической литературы [1–23], описывается рядом фундаментальных законов природы. Для длинноволнового, т.е., рэлеевского, рассеяния, когда длина волны много больше характерного размера неоднородной области, это рэлеевский закон рассеяния о монотонной пропорциональности сечения рассеяния четвертой степени частоты и об угловой изотропии спектра рассеяния, независимости индикатрисы рассеяния от угла рассеяния [1–15]. Рэлеевский закон рассеяния соответствует фундаментальной физической концепции, установленной лордом Рэлеем [1]: в длинноволновом пределе фаза волны в пределах рассеивающей неоднородности имеет примерно одно и то же значение, разные участки неоднородности формируют рассеянную волну синфазно, поскольку волна физически “не чувствует” структуру неоднородности [2–15].

Задача рассеяния поверхностной акустической волны Рэлея [2] на статистической приповерхностной неоднородности решена в [16,17]. Теоретически обнаружены топологические законы в рэлеевском пределе рассеяния, т.е., длинноволнового рассеяния, и диффузного, коротковолнового, рассеяния в противоположном пределе. Они определяются детерминированной структурой неоднородности перпендикулярно поверхности при гауссовой форме корреляционной функции

статистического фактора структуры неоднородности параллельно поверхности. Вызывает интерес вопрос, будут ли проявляться и каким образом указанные закономерности для статистического рассеяния, когда спектр рассеяния усредняется по статистическому ансамблю реализаций неоднородности [20–22]?

В настоящей работе [18,24] исследуются топологические законы рассеяния в рэлеевском пределе для произвольной формы корреляционной функции горизонтальной статистической структуры неоднородности параллельной поверхности. Коррелятор аппроксимируется суммой гауссовых экспонент. Для описания детерминированной структуры неоднородности перпендикулярно поверхности выбрана монотонно спадающая вглубь среды экспонента, монотонный нарушенный слой [13], в отличие от его произвольной формы, исследованной в [16,17].

ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ

Пусть полубесконечная изотропная упругая среда со свободной поверхностью занимает полупространство $x_3 \geq 0$, где $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ есть радиус-вектор в декартовой системе координат. Среда имеет неоднородность плотности массы, расположенную в прямоугольной области конечных размеров L_1, L_2 вдоль осей x_1, x_2 , соответственно: $|x_1| \leq L_1/2$; $|x_2| \leq L_2/2$, описываемую функцией координаты x_3 перпендикулярно поверхности, где

$0 \leq x_3 < \infty$. Зависимость плотности массы среды $\rho(\vec{x})$ от координат имеет следующий вид

$$\rho(\vec{x}) = \rho^{(0)} + \rho^{(\text{inh})}(\vec{x}), \quad (1)$$

где $\rho^{(0)}$ — постоянная плотность однородной среды, содержащей неоднородность $\rho^{(\text{inh})}(\vec{x})$, отличную от нуля только в пределах неоднородной области среды. Неоднородность является статистически однородной, т.е., описывается корреляционной функцией — средней по ансамблю реализаций случайной неоднородности величиной произведения ее значений в любых двух точках среды [8,9,11,12,15], которая зависит только от разности радиус-векторов двух точек неоднородности $\vec{\tau} = (\vec{x}_{\parallel} - \vec{x}'_{\parallel})$, где $\vec{x}_{\parallel} = (x_1, x_2, 0)$, в которых определяется корреляция значений неоднородности, и изотропной, т.е., указанный коррелятор зависит только от модуля данной разности $\tau = |\vec{x}_{\parallel} - \vec{x}'_{\parallel}|$, по координатам (x_1, x_2) и детерминированной по координате x_3 :

$$\rho^{(\text{inh})}(\vec{x}) = \rho_{\parallel}^{(\text{inh})}(\vec{x}_{\parallel}) F(x_3), \quad (2)$$

где $\rho_{\parallel}^{(\text{inh})}(\vec{x}_{\parallel})$ — случайная функция; $\langle \rho_{\parallel}^{(\text{inh})} \rangle = 0$, где $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по ансамблю реализаций случайной функции $\rho_{\parallel}^{(\text{inh})}$; $F(x_3)$ — произвольная детерминированная функция. Корреляционная функция неоднородности имеет следующую произвольную форму, аппроксимируемую суммой гауссовых экспонент, не рассмотренной в литературе до настоящего времени [1–15]:

$$\begin{aligned} W(\tau) &= \langle \rho_{\parallel}^{(\text{inh})}(\vec{x}_{\parallel}) \rho_{\parallel}^{(\text{inh})}(\vec{x}'_{\parallel}) \rangle = \rho_{\text{inh}}^2 \sum_{i=1}^m c_i e^{-\tau^2/a_i^2} = \\ &= \rho_{\text{inh}}^2 \sum_{i=1}^{N^{(r)}} \sum_{n=0}^{N_i} \sum_{j=1}^{n+1} D_{\text{inj}}^{(\text{gt})} e^{-\tau^2/a_{ij}^{(n)2}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где a_i , $a_{ij}^{(n)}$ — парциальные радиусы корреляции; ρ_{inh} — нормировочная среднеквадратичная амплитуда, т.е., среднеквадратичное значение, случайной стационарной [12] неоднородности $\rho^{(\text{inh})}(\vec{x})$ в плоскости параллельной поверхности с координатой x_3 , в которой $F(x_3) = 1$. Такая нормировка корреляционной функции (3), т.е., $W(0) = \rho_{\text{inh}}^2$, дает следующее нормировочное условие для констант c_i , $D_{\text{inj}}^{(\text{gt})}$

$$\sum_{i=1}^m c_i = \sum_{i=1}^{N^{(r)}} \sum_{n=0}^{N_i} \sum_{j=1}^{n+1} D_{\text{inj}}^{(\text{gt})} = 1. \quad (4)$$

Тройная сумма в (3) введена для удобства аппроксимации корреляционной функции, многомасштабной по парциальным радиусам корреляции. В частности, в [16,17] впервые обнаружено,

что законы рассеяния в рэлеевском пределе, определяемые первым членом рэлеевского ряда, т.е., разложения индикатрисы рассеяния по степеням отношения характерного размера неоднородности к длине волны — параметра Рэлея, существенным образом зависят от детерминированной формы неоднородности перпендикулярно поверхности. Это означает, что форма неоднородности позволяет определять главный член указанного ряда, и, тем самым, степенной закон рассеяния в рэлеевском пределе по указанному параметру Рэлея. В настоящей работе исследуется аналогичное влияние статистической структуры неоднородности, описываемой коррелятором (3), в плоскости поверхности. В соответствии с этим сумма по j в (3) формирует базис рэлеевского ряда. Каждый член этого базиса сам является рэлеевским рядом с главным членом, пропорциональным параметру Рэлея в степени $2n$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, как будет показано ниже. Следовательно, следующая сумма в (3) по n есть моделирование спектра рассеяния с помощью указанного базиса. Третья сумма по i от единицы до $N^{(r)}$ в (3) является наложением разных смоделированных спектров друг на друга, необходимым при конструировании сложных свойств результирующего спектра рассеяния. В литературе [5–15], кроме [16–22], не рассматривались законы рассеяния в рэлеевском пределе, отличные от рэлеевского закона [1], поэтому не рассматривалось моделирование рэлеевского ряда, т.е., спектра рассеяния, с помощью базиса, физически привязанного к новым законам рассеяния в рэлеевском пределе, но отмечалась возможность использования базиса из гауссовых экспонент для аппроксимации коррелятора ансамблей образцов, изготовленных по разным технологиям [11], чему соответствует одинарная сумма по i от единицы до произвольного натурального числа m во втором равенстве (3). Заметим, что использование разномасштабного по радиусам корреляции $a_{ij}^{(n)}$ коррелятора (3) по сравнению, например, с [8,9,11,12,15], а также с [20–22] и со вторым равенством в (3), позволяет более широко управлять моделируемым спектром рассеяния путем комбинирования разномасштабных парциальных корреляторов в (3), которые, например, задают положение пиков резонансного рассеяния по параметру Рэлея, с выбором базисных членов создаваемого рэлеевского ряда по параметру Рэлея, определяющих локализацию, т.е., ширину, этих пиков [24], и с выбором соответствующих им форм коррелятора (3) при заданных парциальных радиусах корреляции, отвечающих разным законам рассеяния в рэлеевском пределе, как включающим рэлеевский закон [1], так и отличным от него [16–22,24]. Но, в то же время, этот новый результат вписывается в признанную в литературе концепцию описания разных ансамблей неоднородностей, например, гауссовыми экспонентами [8,9,11,12], что подчеркивает второе (из трех) равенство в (3).

Фурье-преобразование коррелятора (3) имеет следующий вид

$$\begin{aligned}\tilde{W}(k_{\parallel}) &= \pi \rho_{\text{inh}}^2 \sum_{i=1}^m c_i a_i^2 e^{-a_i^2 k_{\parallel}^2 / 4} = \sum_{i=1}^m \tilde{W}_i(k_{\parallel}) = \\ &= \pi \rho_{\text{inh}}^2 \sum_{i=1}^{N^{(r)}} \sum_{n=0}^{N_i} \sum_{j=1}^{n+1} D_{\text{inj}}^{(\text{gt})} a_{ij}^{(n)^2} e^{-a_{ij}^{(n)^2} k_{\parallel}^2 / 4}.\end{aligned}\quad (5)$$

Достаточное условие того, что $W(\tau)$ является корреляционной функцией однородного и изотропного случайного поля $\rho_{\parallel}^{(\text{inh})}(\vec{x}_{\parallel})$, есть [11,12]

$$\tilde{W}(k_{\parallel}) \geq 0. \quad (6)$$

Предполагается, что модули упругости [1, 4, 7, 9, 15] всей полубесконечной среды вместе с неоднородностью имеют следующий вид, описывающий однородное изотропное твердое тело,

$$C_{\alpha\beta\mu\nu}(\vec{x}) = C_{\alpha\beta\mu\nu}^{(0)}; \quad (7)$$

$$\begin{aligned}C_{\alpha\beta\mu\nu}^{(0)} &= \lambda_0 \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} + \\ &+ \mu_0 (\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}); \\ \lambda_0 &= \rho^{(0)} (c_l^2 - 2c_t^2); \mu_0 = \rho^{(0)} c_t^2,\end{aligned}\quad (8)$$

где λ_0, μ_0 — постоянные коэффициенты Ламе; $c_{l,t}$ — скорости продольных и поперечных объемных волн, соответственно [4]; $\delta_{\alpha\beta}$ — дельта-символ Кронекера.

Пусть плоская поверхностная акустическая волна Рэлея [2,4], распространяющаяся вдоль положительного направления оси x_1 , падает на неоднородную область среды. Предполагается, что неоднородность является малой $|\rho^{(\text{inh})}| \ll \rho^{(0)}$. Необходимо решить задачу рассеяния в приближении Рэлея–Борна теории возмущений [1] по амплитуде неоднородности: найти вектор смещения, поток энергии в цилиндрической рассеянной рэлеевской волне на больших расстояниях от неоднородности по сравнению с размером неоднородной области и коэффициент рассеяния по энергии, физически являющийся обратной длиной затухания волны Рэлея [15]. В настоящей работе новые законы рассеяния исследуются только для рассеянной поверхностной волны Рэлея. Рассеянные объемные волны не рассматриваются.

УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И КОЭФФИЦИЕНТ РАССЕЯНИЯ

Поставленная задача решена из первых принципов динамической теории упругости [1,4,15] путем решения уравнений движения для однородного

изотропного твердого тела с неоднородностью (1), (2) и получения асимптотики вектора смещения в рассеянной волне Рэлея вдали от неоднородности. Граничные условия на свободной границе учтены с помощью метода функции Грина [9,16–19]. Используются асимптотические методы и функция Грина, полученные в работе [9] А.А. Марадуниным и Д.Л. Миллсом. Установлено [17,18], что угловое распределение рассеяния $G^{(R)}(\varphi_s)$ в цилиндрическую волну Рэлея имеет следующий вид

$$\begin{aligned}G^{(R)}(\varphi_s) &= \sum_{i=1}^m \frac{a_{\text{max}}}{a_i} G_i^{(R)}(\varphi_s) = \\ &= \frac{a_{\text{max}}}{\pi \rho_{\text{inh}}^2} \frac{\gamma^4 R_l}{4 P R_2^2} \frac{c_l^2}{c_t^2} k_R^3 \times \\ &\times [V(k_R) \cos \varphi_s + H(k_R)]^2 \tilde{W}(|\vec{k}_R - \vec{k}_{\parallel}^{(0)}|),\end{aligned}\quad (9)$$

где a_{max} — характерный радиус корреляции статистической неоднородности, например, среднее из a_i , $i = 1, \dots, m$ или один из них; φ_s — угол рассеяния между волновыми векторами падающей $\vec{k}_{\parallel}^{(0)} = (k_R, 0, 0)$ и рассеянной $\vec{k}_R = (k_R \cos \varphi_s, k_R \sin \varphi_s, 0)$ волнами Рэлея. Другие константы и функции в (9) совпадают с аналогичными величинами работы [17]. Формулы (33) и (34) работы [17] содержат опечатки из-за разных определений функций V и H в [16] и [17]. Числа “128” и “256” в знаменателях (33) и (34) в [17] должны быть заменены числами “2” и “4” соответственно. Коэффициент рассеяния [15] в поверхностную волну Рэлея имеет следующий вид

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho^{(R)}} &= \left[\frac{\rho_{\text{inh}}}{\rho^{(0)}} \right]^2 \frac{1}{a_{\text{max}}} \int_0^{2\pi} G^{(R)}(\varphi_s) d\varphi_s = \\ &= \left[\frac{\rho_{\text{inh}}}{\rho^{(0)}} \right]^2 \frac{1}{a_{\text{max}}} \frac{a_{\text{max}} \pi \gamma^4 R_l}{2 P R_2^2} \frac{c_l^2}{c_t^2} k_R^3 \times \\ &\times \sum_{i=1}^{N^{(r)}} \sum_{n=0}^{N_i} \sum_{j=1}^{n+1} D_{\text{inj}}^{(\text{gt})} a_{ij}^{(n)^2} e^{-z_{\text{inj}}} \times \\ &\times \left\{ I_0(z_{\text{inj}}) [V^2(k_R) + H^2(k_R)] + \right. \\ &\left. + \frac{I_1(z_{\text{inj}})}{z_{\text{inj}}} [2z_{\text{inj}} V(k_R) H(k_R) - V^2(k_R)] \right\},\end{aligned}\quad (10)$$

где $I_n(x)$ — модифицированная функция Бесселя порядка n [25,26];

$$\begin{aligned}p &= k_R a_{\text{max}}; \\ z_{\text{inj}} &= a_{ij}^{(n)^2} p^2 / (2a_{\text{max}}^2); k_R = \omega / c_R,\end{aligned}\quad (11)$$

k_R , ω , c_R — абсолютное значение волнового вектора, частота и скорость волны Рэлея, соответственно.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ РАССЕЯНИЯ В РЭЛЕЕВСКОМ ПРЕДЕЛЕ

Задача полиномиального моделирования спектра рассеяния

Длинноволновое разложение фурье-преобразования (5) корреляционной функции (3) в ряд Тейлора [26] по степеням параметра p (11) в рэлеевском пределе $p \ll 1$ имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \tilde{W} \left(\left| \vec{k}_R - \vec{k}_{\parallel}^{(0)} \right| \right) = \\ = 2\pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+1)!}{2^m (m!)^2} C^{(2m+2)} k_R^{2m} (1 - \cos \varphi_s)^m, \end{aligned}$$

где $C^{(n)}$ — топологическая характеристика первого рода коррелятора $W(\tau)$ как произвольной функции переменной τ (формулы (36), (37) в [17]), [16,18]

$$C^{(n)} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} W(\tau) \tau^{n-1} d\tau, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

Наложение следующих условий на константы $D_{inj}^{(gt)}$ (5)

$$D_{inj}^{(gt)} = D_i^{(r)} b_{in} c_{ij}^{(n)}, \quad (14)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij}^{(n)} a_{ij}^{(n)2m+2} &= 0; \quad m = 0, 1, \dots, n-1; \\ \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij}^{(n)} a_{ij}^{(n)2n+2} &= d_0^{(in)}; \quad n = 0, 1, \dots, N_i; \quad d_0^{(in)} \neq 0; \\ \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij}^{(n)} &= 1; \quad i = 1, 2, \dots, N^{(r)}; \end{aligned} \right. \quad (15)$$

где $d_0^{(in)}$ — некоторые константы, вместе с условием (6) дают следующее единственное решение системы $(n+1)$ линейных алгебраических неоднородных уравнений, состоящей из первых двух условий (15), относительно $(n+1)$ неизвестных $c_{ij}^{(n)}$, где $j = 1, 2, \dots, n+1$, при фиксированных индексах i и n (3), (15)

$$\begin{aligned} c_{ij}^{(n)} &= \frac{d_0^{(in)}}{a_{ij}^{(n)2} \prod_{m=1; m \neq j}^{n+1} (a_{ij}^{(n)2} - a_{im}^{(n)2})}; \\ 0 &< a_{i1}^{(n)} < a_{i2}^{(n)} < \dots < a_{i(n+1)}^{(n)}; \end{aligned}$$

$$d_0^{(in)} = (-1)^n \prod_{j=1}^{n+1} a_{ij}^{(n)2}; \quad j = 1, 2, \dots, n+1, \quad (16)$$

где неравенства для парциальных радиусов корреляции $a_{ij}^{(n)}$ (3) получены из условия (6), а значение константы $d_0^{(in)}$ из третьего условия (15).

Пусть далее некоторая пробная функция $F_i^{(0)}(p)$, которая может быть использована для моделирования углового и частотного спектра рассеяния волны Рэлея $G^{(R)}(\varphi_s)$ (9) в рэлеевском пределе $p \ll 1$, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} F_i^{(0)}(p) &= \prod_{k=1}^{N_i^{(p)}} \left(p^2 - p_{ik}^{(0)2} \right)^{2m_{ik}} + C_i^{(0)} = \\ &= \sum_{k=0}^{N_i^{(F)}} C_{ik}^{(F)} p^{2k} = F_i^{(00)}(p) + C_i^{(0)}; \end{aligned}$$

$$N_i^{(F)} = 2 \sum_{k=1}^{N_i^{(p)}} m_{ik},$$

где $m_{ik} = 0, 1, 2, \dots$, но, если $p_{ik}^{(0)} = 0$, то $2m_{ik} = 0, 1, 2, \dots$ из-за неотрицательности $F_i^{(0)}(p)$ (6). Поставленная впервые в литературе задача аппроксимации фурье-образа коррелятора, это значит, что и углового распределения рассеяния (9), пропорционального ряду (17) в рэлеевском пределе, с помощью суммы (3) дает следующие соотношения, вытекающие из (3), (12) — (17)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N_i} \tilde{b}_{in} \sum_{m=n}^{N_i} \tilde{W}_{nm}^{(i)} k_R^{2m} &\equiv \\ \equiv \sum_{m=0}^{N_i} p^{2m} \sum_{n=0}^m \frac{\tilde{b}_{in}}{a_{max}^{2m}} \tilde{W}_{nm}^{(i)} &\equiv \\ \equiv \sum_{m=0}^{N_i} B_m^{(i)}(\varphi_s) p^{2m} = F_i^{(0)}(p), \end{aligned} \quad (18)$$

где следующие выражения

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{nm}^{(i)} &= 2\pi \frac{(-1)^m (2m+1)!}{2^m (m!)^2} \tilde{C}_{in}^{(2m+2)} (1 - \cos \varphi_s)^m, \\ \tilde{C}_{in}^{(2m+2)} &= \frac{m!}{2(2m+1)!} \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij}^{(n)} a_{ij}^{(n)2m+2} \end{aligned} \quad (19)$$

есть с точностью до множителя ρ_{inh}^2 коэффициент разложения (12) и топологическая характеристика (13), удовлетворяющая условиям (15), для

парциального коррелятора (3), (5), (14) с фиксированными индексами i, n без множителя $D_i^{(r)} b_{in}$.

Соотношение аппроксимации (18) дает следующую систему $(N_i + 1)$ линейных алгебраических неоднородных уравнений относительно $(N_i + 1)$ неизвестных $\tilde{b}_{in}$, где $n = 0, 1, \dots, N_i$, путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях p^{2m} в (18), где $m = 0, 1, \dots, N_i^{(F)}$

$$\begin{cases} B_m^{(i)} \equiv \sum_{n=0}^m \frac{\tilde{b}_{in}}{a_{\max}^{2m}} \tilde{W}_{nm}^{(i)} = C_{im}^{(F)}, m = 0, 1, \dots, N_i^{(F)}; \\ B_m^{(i)} = 0, m = N_i^{(F)} + 1, N_i^{(F)} + 2, \dots, N_i. \end{cases} \quad (20)$$

Аппроксимирующий коррелятор (3) в своем разложении (12) содержит бесконечное число степеней параметра p , поэтому второе условие (20) зануляет дополнительно $(N_i - N_i^{(F)})$ членов этого ряда, следующих сразу за степенями пробной функции (17). Число N_i определяется путем численного эксперимента из условий наилучшего соответствия результата моделируемому спектру рассеяния. Единственное аналитическое решение (20) имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{i0} &= \frac{C_{i0}^{(F)}}{\tilde{W}_{00}^{(i)}}; \\ \tilde{b}_{im} &= \frac{a_{\max}^{2m}}{\tilde{W}_{mm}^{(i)}} \left\{ C_{im}^{(F)} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\tilde{b}_{ik}}{a_{\max}^{2m}} \tilde{W}_{km}^{(i)} \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $m = 1, 2, \dots, N_i^{(F)}$;

$$\tilde{b}_{im} = -\frac{a_{\max}^{2m}}{\tilde{W}_{mm}^{(i)}} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\tilde{b}_{ik}}{a_{\max}^{2m}} \tilde{W}_{km}^{(i)},$$

где $m = N_i^{(F)} + 1, \dots, N_i$; $N_i^{(m)} = N_i - N_i^{(F)}$.

Если получить искомые коэффициенты b_{im} , где $m = 0, 1, 2, \dots, N_i$, [18] аппроксимации (3), (17) – (21) путем следующей нормировки решения (21) и (17)

$$b_{im} = \tilde{b}_{im} / \sum_{m=0}^{N_i} \tilde{b}_{im}, i = 1, 2, \dots, N^{(r)}, \quad (22)$$

где $\varphi_s = \varphi_s^{(00)}$, то при наложении $N^{(r)}$ независимо смоделированных спектров по индексу i (3), (14), (17) для констант $D_i^{(r)}$, где $i = 1, 2, \dots, N^{(r)}$, из (3), (4), (14), (15), (22) получается следующее условие нормировки

$$\sum_{i=1}^{N^{(r)}} D_i^{(r)} = 1. \quad (23)$$

Значение угла рассеяния, для которого вычисляется аппроксимация (3), (17) – (22) есть $\varphi_s^{(00)}$ (22).

Топология неоднородности и законы рассеяния в рэлеевском пределе

Пусть детерминированная функция $F(x_3)$ (2), описывающая форму неоднородности в направлении, перпендикулярном свободной поверхности, имеет следующую форму

$$F(x_3) = q_1 e^{-x_3/d}, \quad (24)$$

где q_1 – безразмерная константа, d – глубина нарушенного слоя. Топологические законы рэлеевского предела рассеяния следуют из (9) – (12). Они имеют следующий вид (для сравнения: [16,17,19–22]):

$$\begin{aligned} G^{(R)} &\sim \omega^{2N_R+5}; \\ 1/I^{(R)} &\sim \omega^{2N_R+5}, \\ N_R &= 0, 1, 2, \dots, \\ p &\ll 1, d \ll \lambda, \end{aligned} \quad (25)$$

где $\lambda = 2\pi\lambda$ – длина волны Рэля при следующих условиях, наложенных на топологические характеристики неоднородности $C^{(n)}$ (13),

$$\begin{aligned} C^{(2k+2)} &= 0, \\ k &= 0, 1, 2, \dots, N_R - 1; \\ C^{(2N_R+2)} &\neq 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Если $N_R = 0$, то (25), (26) дают рэлеевский закон рассеяния [1–5,7,15] (рис. 1а и 1б). Если корреляционная функция (3) – (6), (13) – (16) имеет такую форму, что $N_R > 0$ (26), то происходит нарушение рэлеевского закона рассеяния в рэлеевском пределе (рис. 1в и 1г). Для корреляционной функции (3), имеющей следующие значения констант (14):

$$N^{(r)} = 1, N_1 = N_R, D_1^{(r)} = 1;$$

$$b_{1k} = 0, k = 0, 1, \dots, N_R - 1, b_{1N_R} = 1 \quad (27)$$

и $c_{1j}^{(N_R)}, j = 1, 2, \dots, N_R + 1$, определенных в (16), топологические характеристики (13) имеют следующий вид (19):

$$C^{(2m+2)} = \rho_{inh}^2 \tilde{C}_{1N_R}^{(2m+2)}. \quad (28)$$

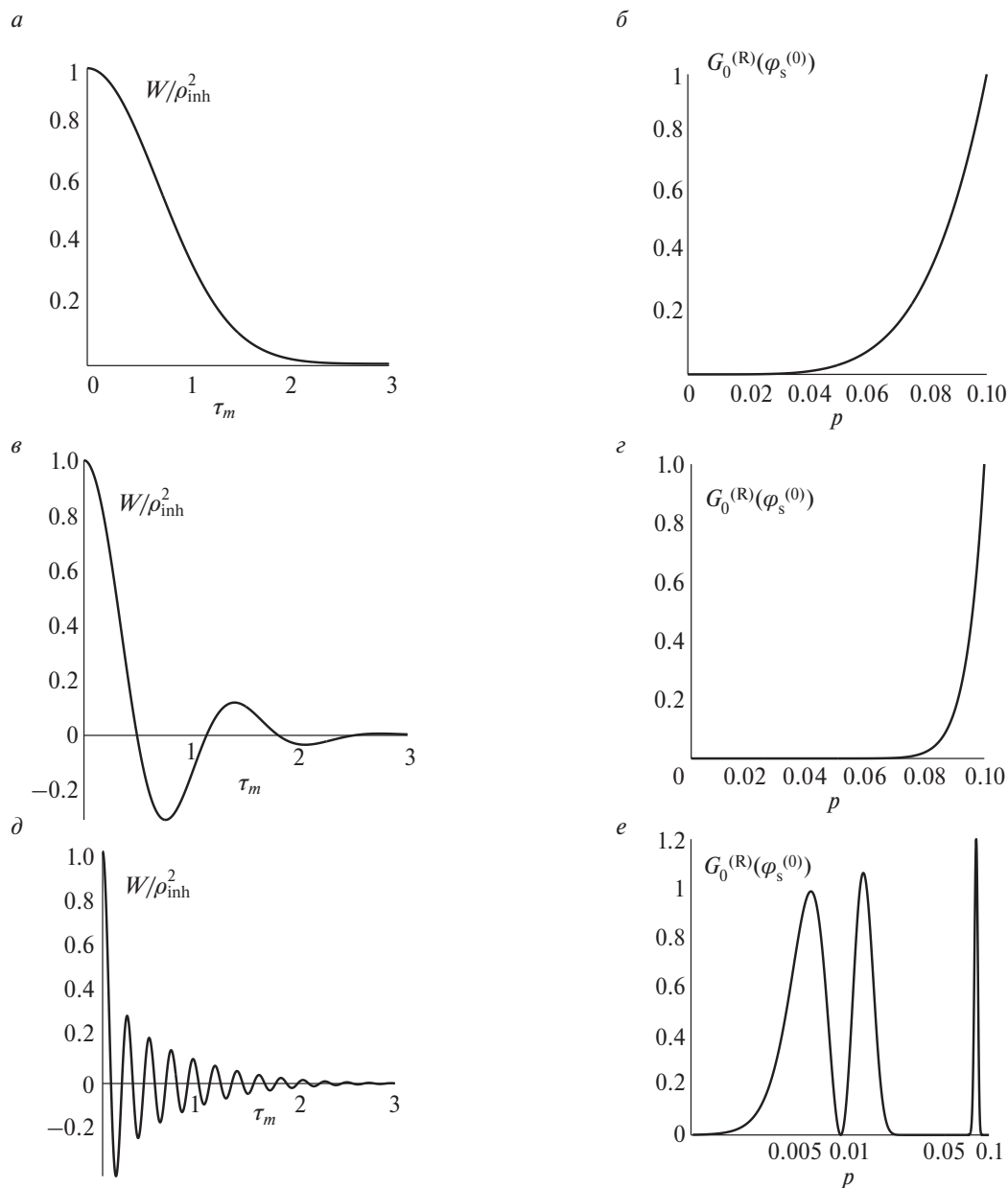


Рис. 1. Коррелятор (3), (14) – (23), (27), описывающий ансамбль реализаций статистической неоднородности (а), усреднение по которому дает угловое распределение (9) при детерминированной структуре нарушенного слоя $F(x_3)$ в виде (24) всюду, удовлетворяющее рэлеевскому закону рассеяния в соответствии с топологическими законами рассеяния в рэлеевском пределе (25), (26). $N_R = 0$ (25); $\tau_m = \tau/a_{\max}$; $N^{(r)} = 1$, $N_1^{(p)} = 1$ (17), $p_{11}^{(0)} = 0$, $m_{11} = 0$, $C_1^{(0)} = 0$ (17), $N_1^{(m)} = 0$. Коэффициент Пуассона $\sigma = 0.25$, $d/a_{\max} = 1$, $q_1 = 1$ (24) и $\varphi_s^{(00)} = \pi/2$ (22) всюду. Рэлеевский закон рассеяния для углового распределения рассеяния $G_0^{(R)} = G^{(R)}(p, \varphi_s) / G^{(R)}(p_0, \varphi_s^{(0)})$, где $\varphi_s^{(0)} = \pi/2$ всюду, если не оговорено иное, $p_0 = 0.1$, при корреляторе, представленном на рис. 1а (б). Коррелятор (3), (14) – (23), (27), который дает нарушение рэлеевского закона рассеяния в соответствии с топологическими законами (25), (26). $N_R = 6$; $N^{(r)} = 1$, $N_1^{(p)} = 1$, $p_{11}^{(0)} = 0$, $m_{11} = 3$, $C_1^{(0)} = 0$, $N_1^{(m)} = 0$ (в). Нарушение рэлеевского закона рассеяния. $G_0^{(R)}$ для коррелятора, представленного на рис. 1в; $p_0 = 0.1$ (г). Коррелятор (3), (14) – (23), (29), который дает осцилляции рассеяния в рэлеевском пределе. $N^{(r)} = 1$, $N_1^{(p)} = 3$, $p_{11}^{(0)} = 0.01$, $p_{12}^{(0)} = 0.05$, $p_{13}^{(0)} = 0.1$, $m_{11} = 1$, $m_{12} = 31$, $m_{13} = 25$, $C_1^{(0)} = 0$, $N_1^{(m)} = 100$ (д). Осцилляции рассеяния в рэлеевском пределе. Нарушение рэлеевского закона рассеяния, представленного на рис. 1б. $G_0^{(R)}$ для коррелятора, представленного на рис. 1д; $p_0 = 0.015$ (е).

Таким образом, при рассеянии волны Рэлея на статистической неоднородности (1) – (6), (14), (24), (27), (28) имеют место топологические законы рассеяния (25), (26) (рис. 1а – 1г).

Частотные осцилляции рассеяния в рэлеевском пределе

Пусть корреляционная функция статистической неоднородности (1), (2), (24) имеет форму (3) – (6), (12) – (23), (28) со следующими значениями парциальных радиусов корреляции $a_{ij}^{(n)}$ и констант $D_i^{(r)}$

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(n)} &= a_{i1}^{(n)} + (j-1)d_i^{(a)}; a_{i1}^{(n)} = a_{i1}^{(0)}; \\ d_i^{(a)} &= a_{i1}^{(0)} / (10(N_i + 1)); \\ a_{\max} &= a_{i1}^{(0)}; \\ D_i^{(r)} &= \tilde{D}_i^{(r)} / \sum_{i=1}^{N^{(r)}} \tilde{D}_i^{(r)}, \\ i &= 1, 2, \dots, N^{(r)}, \\ j &= 1, 2, \dots, n+1; n = 0, 1, \dots, N_i. \end{aligned} \quad (29)$$

На рис. 1д, е представлены коррелятор и осцилляции рассеяния, т.е., его углового распределения $G^{(R)}(\varphi_s)$ как функции параметра p (11) в рэлеевском пределе $p \ll 1$, соответственно. Эти осцилляции являются нарушением монотонного роста рассеяния как рэлеевского закона (рис. 1б), так и новых законов (25), (26) при $N_R > 0$ (рис. 1г), т.е., они нарушают топологическую симметрию (25), (26) в рэлеевском пределе.

Угловая анизотропия рэлеевского рассеяния, сохраняющая рэлеевский закон

На рис. 2а и 2б представлено угловое распределение рассеяния $G_a^{(R)}(p_a, \varphi_s)$ и функция $G_{a0}^{(R)}(p_a, \varphi_s)$ для коррелятора, изображенного на рис. 1а, для которого выполняются законы Рэлея в длинноволновом пределе $p \ll 1$. Указанные функции имеют следующий вид

$$\begin{aligned} G_a^{(R)}(p, \varphi_s) &= G^{(R)}(p, \varphi_s) / G^{(R)}(p_a, \varphi_s^{(0)}); \\ G_{a0}^{(R)}(p, \varphi_s) &= \\ &= G_a^{(R)}(p, \varphi_s) / [V(k_R) \cos \varphi_s + H(k_R)]^2. \end{aligned} \quad (30)$$

Функция

$$[V(k_R) \cos \varphi_s + H(k_R)], \quad (31)$$

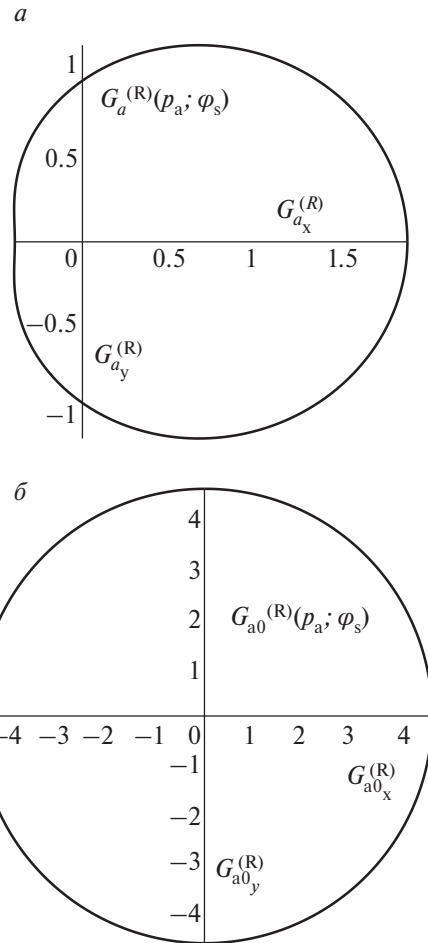


Рис. 2. Обнаруженная в настоящей работе характерная угловая анизотропия рэлеевского рассеяния (а), обусловленная граничными условиями на свободной неоднородной поверхности и структурой неоднородности (24) перпендикулярно поверхности, при сохранении частотного рэлеевского закона рассеяния для корреляционной функции, представленной на рис. 1а. Полностью изотропная по углу картина рэлеевского рассеяния (б), полученная путем исключения влияния граничных условий и вертикальной произвольной $F(x_3)$ (2) структуры неоднородности на угловое распределение рассеяния волны Рэлея (30), (31), при учете коррелятора, представленного на рис. 1а. $p_a = 1/(10\sqrt{2})$ всюду, если не оговорено иное.

входящая в (9), где функции $V(k_R)$ и $H(k_R)$ определены формулами (30) и (31) работы [17] (см. также (9) в [16]), определяется граничными условиями для рэлеевской волны на свободной поверхности, содержащей неоднородность, и структурой неоднородности (24) вдоль оси x_3 [15, 17]. Сравнение рисунков 2а и 2б показывает некоторую угловую анизотропию рассеяния в рэлеевском пределе даже в случае выполнения частотного закона рассеяния Рэлея, соответствующего новым законам (25), (26) при $N_R = 0$. Эта анизотропия выражается в сдвиге

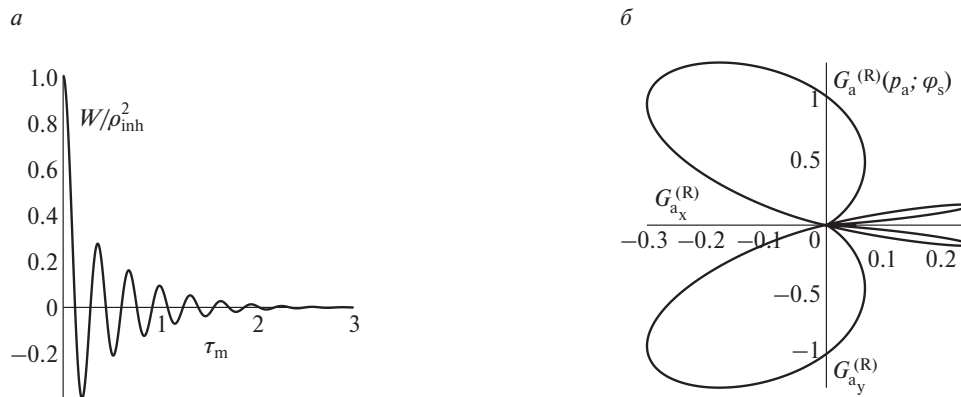


Рис. 3. Коррелятор (3), (14) – (23), (29), который дает сильную анизотропию и нули рассеяния в рэлеевском пределе $p \ll 1$, определяемые новыми топологическими законами (25), (26) с обязательным нарушением частотного рэлеевского закона для длинноволнового рассеяния (а). Значения параметров те же, что и для рис. 1д, но $m_{11} = 1, m_{12} = 2, m_{13} = 3$ (17). Сильная анизотропия и нули углового распределения рассеяния волны Рэлея в рэлеевском пределе (б). Нарушение как чисто рэлеевской [1, 5] изотропии углового распределения рассеяния, представленной на рис. 2б, и характерной анизотропии рэлеевского рассеяния в виде сдвинутой вперед изотропной окружности углового распределения в полярных координатах, представленной на рис. 2а, так и топологической симметрии законов (25), (26) в целом.

Необходимо заметить, что для лучшей прорисовки деталей углового распределения рассеяния на рис. 3б использованы разные масштабы вдоль декартовых осей $G_{ax}^{(R)}$ и $G_{ay}^{(R)}$ в отличие от общепринятых для полярных координат одинаковых масштабов обеих прямоугольных осей на рис. 2. Отношение масштабов вдоль горизонтальной и вертикальной осей на рис. 3б равно $m = 5$. Отношение цены деления равно $1/m$, соответственно. Пусть φ – линейный угол между полярной осью $G_a^{(R)}$ и горизонтальной осью $G_{ax}^{(R)}$, тогда масштаб по реальному углу рассеяния φ_s (30) полярной системы координат $(G_a^{(R)}, \varphi_s)$ из-за указанной разницы масштабов является нелинейным и выполняется следующее соотношение: $\tan \varphi_s = m \tan \varphi$. Для $m > 1$ справедливы следующие соотношения: $\varphi < \varphi_s < \pi/2$ при $0 < \varphi < \pi/2$; $\varphi_s = \varphi$ при $\varphi = \pi/2$ или $\varphi = \pi$; $\pi/2 < \varphi_s < \varphi < \pi$ при $\pi/2 < \varphi < \pi$. По этой же причине линейный масштаб вдоль полярной оси $G_a^{(R)}$ зависит от угла φ , и отношение цены деления его шкалы к цене деления шкалы вертикальной оси $G_{ay}^{(R)}$ равно $G_a^{(R)} / \tilde{G}_a^{(R)} = \cos \varphi / (m \cos \varphi_s) = (1 + m^2 \tan^2 \varphi)^{1/2} / (m(1 + \tan^2 \varphi)^{1/2})$, где $\tilde{G}_a^{(R)}$ – значение индикатрисы рассеяния для угла φ , измеренное с помощью шкалы оси $G_{ay}^{(R)}$, взятой как эталон измерения, а $G_a^{(R)}$ – реальное значение индикатрисы рассеяния (30), измеренное с помощью того же эталона, но изображенное на рис. 3б, по шкале с меняющейся в зависимости от угла φ ценой деления в единицах того же эталона. Другими словами, на линейной шкале оси $G_{ay}^{(R)}$, расположенной из начала координат вдоль первой полярной оси $G_a^{(R)}$ на рис. 3б вместо ее значений $\tilde{G}_a^{(R)}$ ставятся реальные значения индикатрисы рассеяния (30) $G_a^{(R)}$ по шкале с зависящей от угла φ ценой деления в единицах эталонной оси $G_{ay}^{(R)}$. Все указанные формулы следуют из следующих соотношений: $G_{ay}^{(R)} = m G_{ax}^{(R)} \tan \varphi = G_{ax}^{(R)} \tan \varphi_s$; $m G_{ax}^{(R)} = \tilde{G}_a^{(R)} \cos \varphi$; $G_{ax}^{(R)} = G_a^{(R)} \cos \varphi_s$; $G_{ax}^{(R)2} + G_{ay}^{(R)2} = G_a^{(R)2}$, следующих из общепринятого порядка построения полярной системы координат с одинаковыми масштабами вдоль декартовых осей (рис. 2).

изотропной окружности, описывающей угловое распределение, вперед вдоль оси x_1 . Она обусловлена функцией (31), а следовательно, граничными условиями, не зависящими от формы коррелятора (3), и структурой неоднородности вдоль оси x_3 . Данная анизотропия является новым результатом, нарушающим рэлеевскую изотропию [5] при выполнении частотного закона Рэлея, и может служить характеристикой рэлеевского рассеяния волны Рэлея на свободной приповерхностной неоднородности плотности массы твердого тела. Указанная анизотропия аналогична анизотропии

рэлеевского рассеяния волны Рэлея на шероховатости поверхности изотропного твердого тела, обусловленной наличием трех углов, открытых теоретически Бирюковым С.В. [6,7] (см. также [3]), запрещенных для рассеяния граничными условиями на свободной шероховатой поверхности независимо от формы шероховатости [15]. В отличие от анизотропии рэлеевского рассеяния, полученной в данной работе (рис. 2а), сохраняющей рэлеевский закон по частоте, с запрещенным нулевым углом рассеяния волны Рэлея на статистической шероховатости связана новая частотная зависимость

коэффициента рассеяния $1/l^{(R)} \sim \text{const}$ в высокочастотном пределе $p \gg 1$, полученная впервые Чуковым В.Н. в [15,20].

Сильная угловая анизотропия рассеяния, нарушающая рэлеевский закон

Пусть $p_{1k}^{(0)}$, где $k = 1, 2, \dots, N_1^{(p)}$, есть нули углового распределения рассеяния $G^{(R)}(p, \varphi_s^{(0)})$ (9) по переменной p при фиксированном угле рассеяния $\varphi_s^{(0)}$ (рис. 1е). Тогда, если выполняется следующее соотношение

$$\cos \varphi_{s0} = 1 - \frac{p_{1k}^{(0)^2}}{p^2} (1 - \cos \varphi_s^{(0)}), \quad (32)$$

то φ_{s0} есть нули этого же $G^{(R)}(p, \varphi_s)$ по углу рассеяния φ_s при фиксированном значении параметра p вследствие зависимости коррелятора $\tilde{W} \left(\left| \vec{k}_R - \vec{k}_{\parallel}^{(0)} \right| \right)$ (9) только от модуля переданного при рассеянии волнового вектора. Условие (32) является достаточным, но не необходимым, потому что есть еще структура неоднородности вдоль оси x_3 , обуславливающая фактор (31) в (9), рассмотренная в работе [17]. На рис. 3а и 3б представлен коррелятор (3) – (6), (12) – (24) и определяемая им сильная угловая анизотропия и нули углового распределения рассеяния (9). Это физическое явление есть нарушение как рэлеевской изотропии рассеяния [5], так и анизотропии рэлеевского рассеяния, обусловленной структурой (31). Она полностью определяется новыми законами (25), (26) рассеяния волны Рэлея в рэлеевском пределе, и, как их следствием, нарушением частотного закона рэлеевского рассеяния, когда $N_R = 0$ в (25), (26). Данная анизотропия (32) нарушает топологическую симметрию законов (25), (26) и при $N_R > 0$. Для этой симметрии, как следует из (12), (25), (26), характерно только одно запрещенное направление рассеяния вперед $\varphi_s = 0$ (12) и подавленное рассеяние в его окрестности, которая тем шире, чем больше N_R (25).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена теоретическая задача рассеяния поверхностной акустической волны Рэлея на приповерхностной статистической неоднородности изотропного твердого тела. Получены новые топологические законы рассеяния волны Рэлея в рэлеевском пределе, полностью определяемые топологическими характеристиками статистической структуры множеств ансамблей неоднородностей разной формы. Математически эти характеристики являются моментами разного порядка корреляционной

функции статистического фактора неоднородности. Новые законы включают в себя как частный случай физическую концепцию рэлеевского закона рассеяния. В настоящей работе получено, что даже в случае рэлеевского рассеяния изотропное [1,5] рэлеевское угловое распределение сдвинуто вперед вдоль оси x_1 , создавая характерную анизотропию, обусловленную граничными условиями и структурой неоднородности в направлении оси x_3 . Данная анизотропия рэлеевского рассеяния, как и новые полученные законы (25), (26), выходящие за рамки рэлеевского рассеяния, соответствуют главным членам рэлеевского ряда в отличие от обсуждаемой в [5] тонкой структуры рэлеевского спектра, являющейся поправкой высшего порядка по рэлеевскому параметру p (11) к основному члену рэлеевского ряда и закона.

Новые топологические законы рассеяния рэлеевского предела соответствуют структурам статистической неоднородности, т.е., коррелятора, которые могут занулять его топологические характеристики: как рэлеевскую, так и более высоких порядков; они нарушают рэлеевский закон: в длинноволновом пределе может происходить сильная модуляция рассеянной волны формой неоднородности. Низкочастотная волна может сильно “чувствовать” структуру неоднородности.

Полученные топологические законы формируют базис линейно независимых усредненных по ансамблю индикатрис рассеяния, квадратичных по амплитудам рассеяния. Сами амплитуды рассеяния зануляются при усреднении по ансамблю в силу своей линейности по форм-фактору неоднородности. Этот базис впервые в литературе даже для статистической неоднородности позволяет моделировать произвольный усредненный по ансамблю неоднородностей спектр рассеяния, т.е., усредненный рэлеевский ряд, соответствующий, например, частотным осцилляциям статистического рассеяния в рэлеевском пределе или сильной анизотропии углового распределения статистического рассеяния с произвольным количеством нулей по углу рассеяния. Тем самым возможно нарушение не только рэлеевского закона и его угловой изотропии, но и топологической симметрии новых законов, характерной для любого, определяемого ими, частотного закона в рэлеевском пределе рассеяния на статистической неоднородности. При выходе в область еще более малых значений рэлеевского параметра p за пределы области моделирования, также лежащей в рэлеевской зоне $p \ll 1$, топологическая симметрия законов (25), (26) восстанавливается.

Условия применимости результатов настоящей работы, полученных в рамках теории возмущений стационарной теории рассеяния и использования инфинитных гауссовых экспонент в качестве коррелятора финитной неоднородности, т.е.,

занимающей в плоскости поверхности строго конечную область, рассмотрены подробно в [15]. Полученные результаты могут быть использованы для теоретического и экспериментального исследования распространения волн в неоднородных средах, а также в сейсмологии, акустоэлектронике, акустической микроскопии, для исследования свойств технологических материалов [13] и в физике метаматериалов; в частности, для исследования и применения полученных закономерностей статистического рассеяния на сложных случайных комбинациях неоднородностей, когда усреднение по ансамблю неоднородностей заменяется усреднением по разным направлениям одного образца неоднородности или по ее отдельным участкам.

Работа выполнена в рамках темы государственного задания (НИОКТР № 122041400112-8, код темы FFZR-2022-0012).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лорд Рэлей. Теория звука. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1955. С. 153.
2. Lord Rayleigh // Proc. Lond. Math. Soc. 1885. V. 17. P. 4.
3. Lord Rayleigh // Proc. Royal. Soc. London. 1907. V. A 79. P. 399.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука: Физматгиз, 1987. Landau L.D., Lifshitz E.M. Theory of elasticity. Elsevier, 1986.
5. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир, 1969. С. 60; Newton R.G. Scattering theory of waves and particles. Springer, 1982. P. 54.
6. Biryukov S.V., Weihnacht M. // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. 2007. V. 54. P. 453.
7. Бирюков С.В., Гуляев Ю.В., Крылов В.В., Плесский В.П. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.: Наука, 1991; Biryukov S.V., Gulyaev Yu.V., Krylov V.V., Plesskii V.P. Surface acoustic waves in inhomogeneous media. Springer-Verlag, 1995.
8. Басс Ф.Г., Фуке И.М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972; Bass F.G., Fuks I.M. Wave scattering from statistically rough surfaces. New York, Pergamon Press, 1979.
9. Maradudin A.A., Mills D.L. // Ann. Physics. 1976. V. 100. P. 262.
10. Maradudin A.A. // In: Compendium on electromagnetic analysis. From electrostatics to photonics: fundamentals and applications for physicists and engineer V. 4. Optics and Photonics I. World Scientific, 2020.
11. Хусу А.П., Витенберг Ю.Р., Пальмов В.А. Шероховатость поверхностей. Теоретико-вероятностный подход. М.: Наука, 1975.
12. Яглом А.М. Корреляционная теория стационарных случайных функций Л.: Гидрометеиздат, 1981. С. 105; Yaglom A.M. Correlation theory of stationary and related random functions. V. I, II. Springer, 1987.
13. Алехин В.П. Физика прочности и пластичности поверхностных слоев материалов. М.: Наука, 1983.
14. Sarris G., Haslinger S.G., Huthwaite P. et al. // JASA. 2021. V. 149. P. 4298.
15. Чуков В.Н. К теории рассеяния поверхностных рэлеевских и объемных акустических волн различных поляризаций на трехмерной и двумерной статистической шероховатости свободной поверхности изотропного твердого тела. Дисс. ... канд. физ. – мат. наук. М.: МИФИ, 1994.
16. Чуков В.Н. О законах рэлеевского, резонансного и коротковолнового рассеяния волны Рэля. М.: Препринт ИБХФ РАН, 2002.
17. Chukov V.N. // Proc. Int. Conf. “Days on Diffraction 2012” (St. Petersburg, 2012) P. 47.
18. Chukov V.N. Connection between violation of the Rayleigh law of scattering and the resonance scattering. Moscow: Preprint IBCP RAS, 2014.
19. Chukov V.N. // Proc. “Days on Diffraction” International Seminar (St. Petersburg, 2011). P. 55.
20. Chukov V.N. // Solid State Commun. 2009. V. 149. P. 2219.
21. Chukov V.N. // Ultrasonics. 2012. V. 52. P. 5.
22. Chukov V.N. The Rayleigh law violation and its influence on the wave scattering. A theoretical physics study. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2017.
23. Чуков В.Н. // Науч. – техн. вед. СПбГПУ. Физ. – мат. 2023. Т. 16. № 1.2. С. 557.
24. Чуков В.Н. // Сб. тр. XXXIV Всеросс. школы-семина. “Волны 2023” (Москва, 2023). С. 27.
25. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974; Arsenin V. Ya. Basic equations and special functions of mathematical physics. London: Kings College, 1968.
26. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962; Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tables of Integrals, Series, and Products. Elsevier, 2007.

Topological laws of the Rayleigh wave scattering on a statistical inhomogeneity of isotropic solid in the Rayleigh limit

V. N. Chukov^{1, *}

¹*Emanuel Institute of Biochemical Physics of the Russian Academy of Sciences, Laboratory of Acoustic Microscopy, Moscow, 119334 Russia*

**e-mail: vchukov@mail.ru*

Topological laws of the Rayleigh wave scattering on a statistical inhomogeneity of isotropic solid are obtained theoretically in the Rayleigh limit. They are completely defined by the inhomogeneity structure and include the Rayleigh law of scattering as a particular case. They violate the Rayleigh law in the case of a more general inhomogeneity topology, then the Rayleigh one. It enables first to construct theoretically arbitrary spectrum of scattering up to its oscillations and a strong angular anisotropy.

Keywords: the Rayleigh wave, statistical inhomogeneity, the Rayleigh law.