

УДК 535.4

ОПТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА ПРИ НОРМАЛЬНОМ ПАДЕНИИ С ПОМОЩЬЮ МЕТАЛЛОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЛОИСТОЙ СТРУКТУРЫ

© 2025 г. А. И. Кашапов*, Е. А. Безус, Д. А. Быков, Л. Л. Досколович

Отделение «Институт систем обработки изображений – Самара» Курчатовского комплекса кристаллографии и фотоники федерального государственного бюджетного учреждения «Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Самара, Россия

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королёва», Самара, Россия

*e-mail: ar.kashapov@gmail.com

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

Теоретически и численно исследована оптическая реализация операции пространственного дифференцирования второго порядка с помощью слоистой металлодиэлектрической структуры при нормальном падении светового пучка. Результаты численного моделирования подтверждают теоретические результаты и показывают возможность оптического вычисления оператора Лапласа с высоким качеством.

Ключевые слова: оптическое дифференцирование, вторая производная, оператор Лапласа, слоистая структура, нормальное падение, резонанс

DOI: 10.31857/S0367676525010026, **EDN:** DCJWJG

ВВЕДЕНИЕ

Возможность оптического вычисления оператора Лапласа представляет большой интерес для задач оптической обработки информации, в особенности, задач аналоговых оптических вычислений и обработки изображений [1–7]. Оператор Лапласа может быть применен для выявления изменений яркости или контраста на изображениях, поскольку он позволяет выделить контуры объектов, точки пересечения линий и другие важные детали, что, в частности, может повысить точность классификации изображений [8].

Для оптической реализации оператора Лапласа требуются дифракционные структуры, обладающие нулем второго порядка по пространственным частотам в спектре отражения или пропускания. Это условие легче всего выполнить в геометрии нормального падения, поскольку в этом случае вследствие симметрии задачи дифракции нули отражения (пропускания) будут являться нулями второго порядка [1]. В работах [1, 3, 9, 10] для оптической реализации операторов дифференцирования второго порядка успешно использовались слоистые дифракционные структуры (в отражении) [1, 9] и дифракционные решетки с двумерной периодичностью (в пропускании) [3, 5, 10].

Отметим, что рассмотренные ранее слоистые диэлектрические структуры (брэгговские решетки с дефектом периода) для оптического вычисления оператора Лапласа [1] являются более простыми с точки зрения их изготовления по сравнению с дифракционными решетками. В то же время, они обладают горизонтальной плоскостью симметрии, что создает затруднения при их практической реализации (поскольку, в частности, расположение этих структур на подложке нарушает симметрию и приводит к исчезновению нуля отражения).

По мнению авторов настоящей работы, металлодиэлектрические слоистые структуры, по сравнению с чисто диэлектрическими брэгговскими структурами, обладают преимуществом при вычислении оператора Лапласа при нормальном падении, поскольку не требуют наличия горизонтальной плоскости симметрии.

В настоящей работе исследуется слоистая металлодиэлектрическая структура «металл-диэлектрик-металл-диэлектрик», расположенная на металлической подложке. Показано, что такая структура позволяет выполнить оптическое вычисление оператора Лапласа от профиля падающего оптического пучка с высокой точностью. При

этом приведенные результаты численного моделирования полностью согласуются с теоретическим описанием.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОПТИЧЕСКОГО ПУЧКА ПРИ ОТРАЖЕНИИ ОТ СТРУКТУРЫ

Рассмотрим сначала преобразование x -компоненты электрического поля трехмерного линейно поляризованного оптического пучка, происходящее при его отражении от некоторой слоистой структуры при нормальном падении. Следуя работе [1], можно показать, что x -компонента электрического поля отраженного пучка, представленная в виде разложения по плоским волнам, будет иметь вид

$$E_{\text{refl},x}(x, y) = \iint G_x(k_x, k_y) H(k_x, k_y) \times \exp(ik_x x + ik_y y) dk_x dk_y, \quad (1)$$

где $G_x(k_x, k_y)$ — спектр x -компоненты электрического поля падающего пучка, представляющий амплитуды плоских волн с тангенциальными компонентами волновых векторов (пространственными частотами) k_x, k_y , образующих падающий пучок, а $H(k_x, k_y)$ — передаточная функция (ПФ), которая описывает преобразование спектра падающего пучка (изменение амплитуд плоских волн, происходящее при отражении). Как показано в работе [1], данная ПФ выражается через коэффициенты отражения структуры для TE- и TM-поляризованных плоских волн и для слоистой структуры с нулем отражения при нормальном падении имеет следующее разложение в ряд Тейлора до квадратичных членов в окрестности нуля:

$$H(k_x, k_y) \approx c_{x,2} k_x^2 + c_{y,2} k_y^2. \quad (2)$$

Таким образом, в окрестности нуля ПФ содержит только квадратичные члены. В этом случае, как следует из формул (1), (2), структура реализует следующую операцию дифференцирования второго порядка поперечного профиля x -компоненты электрического поля падающего пучка:

$$E_{\text{refl},x}(x, y) = -c_{x,2} \frac{\partial^2 E_{\text{inc},x}(x, y)}{\partial x^2} - c_{y,2} \frac{\partial^2 E_{\text{inc},x}(x, y)}{\partial y^2}. \quad (3)$$

Очевидно, что при равенстве коэффициентов $c_{x,2}$ и $c_{y,2}$ в (2) профиль отраженного пучка (3) будет пропорционален оператору Лапласа от профиля падающего пучка. Как было отмечено выше, данный случай представляет наибольший практический интерес и поэтому будет рассмотрен ниже.

ГЕОМЕТРИЯ ИССЛЕДУЕМОЙ МЕТАЛЛОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЛОИСТОЙ СТРУКТУРЫ И ПОЛУЧЕНИЕ НУЛЯ ОТРАЖЕНИЯ

Для вычисления дифференциального оператора второго порядка (3) при нормальном падении предлагается использовать четырехслойную структуру «металл-диэлектрик-металл-диэлектрик» (МДМД), расположенную на подложке (оптически толстом слое) из металла. Будем считать, что над структурой находится среда с показателем преломления $n_{\text{sup}} = 1$ (рис. 1).

В работах [11, 12] был рассмотрен метод расчета трехслойных металлодиэлектрических структур, состоящих из двух металлических слоев, разделенных слоем диэлектрика, и имеющих нуль отражения. Используем аналогичный этим работам подход для расчета параметров исследуемой четырехслойной МДМД-структуре, имеющей нуль отражения. Формула для расчета толщины верхнего металлического слоя при заданных толщинах «нижней» пары слоев металла и диэлектрика для достижения нулевого отражения [11] имеет вид:

$$\left| \frac{r}{r^2 - t^2} \right| = |\rho|, \quad (4)$$

где r, t — комплексные коэффициенты отражения и пропускания верхнего металлического слоя, рассматриваемые как функции его толщины h_1 ; ρ — комплексный коэффициент отражения «нижней» пары слоев, состоящей из металлического слоя толщиной h_3 и диэлектрического слоя толщиной h_4 (рис. 1). Отметим, что в формуле (4) коэффициенты r и t предполагаются рассчитанными при фиксированных длине волны λ и поляризации падающей волны. После нахождения толщины первого (верхнего) металлического слоя h_1 толщина диэлектрического слоя h_2 «верхней» пары, обеспечивающая нулевое отражение, может быть найдена из формулы [11]

$$h_2 = \frac{1}{2k_0 n} \left[\arg \frac{r}{r^2 - t^2} - \arg \rho + 2\pi j \right], \quad (5)$$

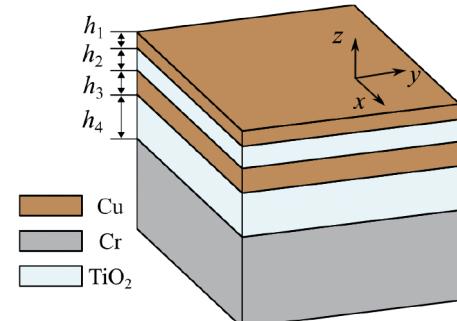


Рис. 1. Геометрия и параметры исследуемой металло-диэлектрической слоистой структуры.

где k_0 — волновое число, n — показатель преломления диэлектрического слоя, j — целое число, обеспечивающее положительное значение толщины h_2 .

Стоит отметить, что структура, параметры которой рассчитаны по формулам (4) и (5) в случае нормального падения, будет обладать нулем отражения второго порядка по пространственным частотам в силу симметрии задачи дифракции.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим теперь возможность использования исследуемой четырехслойной МДМД-структурь для вычисления оператора Лапласа от профиля x -компоненты электрического поля падающего пучка. Согласно (2), (3), для этого необходимо выполнение условия $c_{x,2} = c_{y,2}$. Возможность достижимости указанного условия исследовалась для МДМД-структур в конфигурации «Cu–TiO₂–Cu–TiO₂» (материалы слоев — медь и диоксид титана) на подложке из хрома (Cr) при фиксированной длине волны $\lambda = 633$ нм и ТМ-поляризации. Параметрами оптимизации были толщины нижней «металлодиэлектрической пары» слоев h_3 и h_4 (рис. 1), а толщины верхних двух слоев h_1 и h_2 рассчитывались по формулам (4) и (5) из условия получения нуля отражения. Для выбранной длины волны использовались следующие значения показателей преломления для указанных выше материалов [13, 14]: $n_{\text{Cu}} = 0.23 + 3.43i$ (Cu), $n_{\text{TiO}_2} = 2.58$ (TiO₂), $n_{\text{Cr}} = 3.14 + 3.31i$ (Cr).

В результате расчетов была найдена структура со следующими толщинами слоев: $h_1 = 7.2$ нм, $h_2 = 51$ нм, $h_3 = 34.0$ нм, $h_4 = 79.1$ нм. Для данной структуры условие $c_{x,2} = c_{y,2}$ выполняется с высокой точностью: $c_{x,2} = 0.033 \cdot e^{-2.92i}$ мкм², $c_{y,2} = 0.034 \cdot e^{-2.92i}$ мкм².

На рис. 2 a показан модуль ПФ исследуемой структуры, рассчитанный численно в рамках строгое решения уравнений Максвелла методом [15]. Модуль ПФ на рис. 2 a оказался визуально неотли-

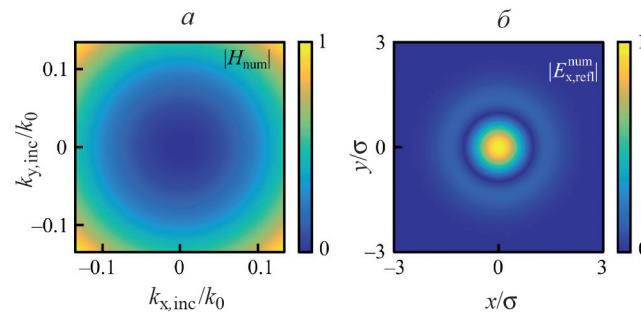


Рис. 2. Модуль строго рассчитанной ПФ металло-диэлектрической слоистой структуры, выполняющей вычисление оператора Лапласа (a) и нормированная на максимальное значение абсолютная величина x -компоненты электрического поля численно рассчитанного отраженного пучка (b).

чимым от модуля «модельной» передаточной функции (2) при значениях коэффициентов, приведенных выше, поэтому последний не показан для краткости. Отклонение модулей модельной функции и численно рассчитанной ПФ является малым: СКО, нормированное на максимум модуля ПФ составляет всего 0.73%, а максимальное отклонение — 1.94%. Отметим, что строгое рассчитанная ПФ имеет требуемый квадратичный вид при $\sqrt{k_x^2 + k_y^2}/k_0 \leq 0.135$, что соответствует пространственному разрешению $\approx 3.7\lambda$. Достигнутое пространственное разрешение практически совпадает с пространственным разрешением, полученным в работе [10], где для вычисления оператора Лапласа использовалась существенно более сложная структура в виде метаповерхности с существенно субволновыми размерами деталей элементарной ячейки.

Далее, рассмотрим преобразование x -компоненты электрического поля, происходящее при отражении от исследуемой структуры падающего гауссова пучка:

$$E_{\text{inc},x}(x, y) = \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2} \right]. \quad (6)$$

Для рассматриваемого случая «модельная» функция, описывающая профиль отраженного пучка и рассчитанная по формуле (3), будет иметь вид:

$$E_{\text{refl},x}(x, y) = -4 \frac{c_{x,2}}{\sigma^4} (x^2 + y^2 - \sigma^2) \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2} \right]. \quad (7)$$

На рис. 2 b показан модуль строго рассчитанного профиля отраженного пучка при $\sigma = 6$ мкм. Как и в случае передаточной функции, модельный (7) и строго рассчитанный профили отраженного пучка хорошо совпадают, при этом нормированная среднеквадратическая ошибка составляет всего 0.45%, а максимальное отклонение — 1.07%.

Как было отмечено во введении, оператор Лапласа широко используется для выделения контуров (перепадов яркости) на изображении. В качестве примера, иллюстрирующего эту операцию, рассмотрим падающий пучок с профилем x -компоненты электрического поля в виде т. н. супергауссовой функции

$$E_{\text{inc},x}(x, y) = \exp \left[-\frac{x^6 + y^6}{\sigma^6} \right]. \quad (8)$$

На рис. 3 a показан результат преобразования МДМД-структурой падающего пучка с профилем (8) при $\sigma = 3$ мкм, а на рис. 3 b — нормированные сечения профилей падающего и отраженного пучков при $y = 0$. Рис. 3 показывает появление характерных для оператора Лапласа двойных контуров на границах входного пучка с квазипрямоугольной формой и шириной по уровню спада 0.5 в 6 мкм.

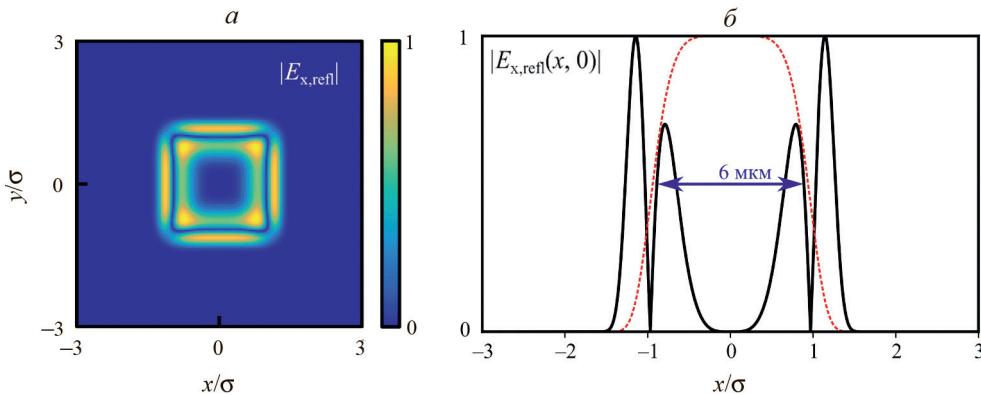


Рис. 3. Нормированный на максимальное значение модуль профиля x -компоненты отраженного электрического поля, формируемый при падающем пучке с профилем в виде супергауссовой функции (*а*); Сечения нормированных на максимальные значения профилей отраженного пучка $E_{\text{refl},x}(x, y)$ (черная линия) и падающего пучка $E_{\text{inc},x}(x, y)$ вдоль оси x при $y = 0$ (красная пунктирная линия) (*б*). Синей стрелкой показана ширина падающего пучка по уровню 0.5.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, нами исследована оптическая реализация операции пространственного дифференцирования второго порядка при нормальном падении оптического пучка с помощью слоистой металлодиэлектрической структуры. Найдены параметры четырехслойной МДМД-структурь, при которых выполняется условие, требуемое для оптического вычисления оператора Лапласа от профиля падающего пучка. Результаты численного моделирования подтверждают теоретические результаты и показывают возможность оптического вычисления оператора Лапласа с высоким качеством (при среднеквадратической ошибке менее 1%). Полученные результаты могут найти применение при создании систем аналоговых оптических вычислений и оптической обработки информации.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-12-00028).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bykov D.A., Doskolovich L.L., Bezus E.A., Soifer V.A.* // Opt. Express. 2014. V. 22. No. 21. P. 25084.
2. *Doskolovich L.L., Kashapov A.I., Bezus E.A. et al.* // Opt. Express. 2023. V. 31. No. 10. P. 17050.
3. *Zhou Y., Zheng H., Kravchenko I.I., Valentine J.* // Nature Photon. 2020. V. 14. P. 316.
4. *Tu Y., Liang Y., Zhu X. et al.* // Opt. Commun. 2023. V. 549. Art. No. 129935.
5. *Guo C., Xiao M., Minkov M. et al.* // Optica. 2018. V. 5. No. 3. P. 251.
6. *Kashapov A.I., Doskolovich L.L., Bezus E.A. et al.* // Comp. Opt. 2023. V. 47. No. 6. P. 845.
7. *Кашапов А.И., Безус Е.А., Быков Д.А., Досколович Л.Л.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2023. Т. 87. № 1. С. 19; *Kashapov A.I., Bezus E.A., Bykov D.A., Doskolovich L.L.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2023. V. 87. No. 1. P. 13.
8. *Soshnikov D.V., Doskolovich L.L., Byzov E.V. et al.* // Comp. Opt. 2023. V. 47. No. 5. P. 691.
9. *Wesemann L., Panchenko E., Singh K. et al.* // APL Photonics. 2019. V. 4. No. 10. Art. No. 100801.
10. *Pan D., Wan L., Ouyang M. et al.* // Photon. Res. 2021. V. 9. No. 9. P. 1758.
11. *Kashapov A.I., Doskolovich L.L., Bezus E.A. et al.* // J. Optics. 2021. V. 23. No. 2. Art. No. 023501.
12. *Doskolovich L.L., Kashapov A.I., Bezus E.A. et al.* // Photon. Nanostruct. 2022. V. 52. Art. No. 101069.
13. <https://refractiveindex.info/>
14. *Johnson P.B., Christy R.W.* // Phys. Rev. B. 1972. V. 6. No. 12. P. 4370.
15. *Moharam M.G., Pommet D.A., Grann E.B. Gaylord T.K.* // J. Opt. Soc. Amer. A. 1995. V. 12. P. 1077.

Optical computation of the Laplace operator at normal incidence using a multilayer metal-dielectric structure

A. I. Kashapov*, E. A. Bezus, D. A. Bykov, L. L. Doskolovich

*Image Processing Systems Institute, National Research Centre «Kurchatov Institute», Samara, 443001 Russia
Samara National Research University, Samara, 443086 Russia*

* e-mail: ar.kashapov@outlook.com

We theoretically and numerically investigate the optical implementation of the second-order spatial differentiation operation using a layered metal-dielectric structure at normal light beam incidence. Numerical simulation results confirm the theoretical results and show the possibility of ‘optical calculation of the Laplace operator with high quality.

Keywords: optical differentiation, second derivative, Laplace operator, layered structure, normal incidence, resonance