ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2025, том 89, № 1, с. 107–113

УДК 534.2

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НА ОСНОВЕ АППАРАТА УГЛОВЫХ ГАРМОНИК

© 2025 г. Д. И. Зотов, О. Д. Румянцева*, А. С. Черняев

Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», физический факультет, кафедра акустики, Москва, Россия

**e-mail: burov@phys.msu.ru*

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.
После доработки 16.09.2024 г.
Принята в печать 30.09.2024 г.

Предложена усовершенствованная численная реализация двумерного функционально-аналитического алгоритма, предназначенного для восстановления пространственных распределений скорости звука и коэффициента поглощения в области томографирования. Продемонстрирована высокая точность получаемых томограмм даже при больших волновых размерах и сложной внутренней структуре исследуемого объекта.

Ключевые слова: акустическая томография, восстановление скорости звука и поглощения, функциональный алгоритм, угловые гармоники

DOI: 10.31857/S0367676525010182, **EDN:** CZOWJO

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим строгое волновое решение обратной задачи акустического рассеяния. Требуется восстановить неоднородные пространственные распределения скорости звука $c(\vec{r})$ и амплитудного коэффициента поглощения $\alpha(\vec{r},\omega_j)$ на заданной частоте ω_j внутри томографируемого объекта, находящегося в области $\mathfrak{R}$. Вне области $\mathfrak{R}$ имеется однородная непоглощающая фоновая среда; скорость звука в ней c_0 и волновое число $k_{0j}=\omega_j/c_0$. Излучатели и приемники, используемые для получения экспериментальных данных, находятся вне области $\mathfrak{R}$ и окружают исследуемый объект со всех сторон. Объект зондируется фиксированным падающим полем акустического давления $u_0(\vec{r})$. Попадая на объект, это поле $u_0(\vec{r})$ рассеивается на акустических неоднородностях внутри $\mathfrak{R}$. Тем самым, создается полное поле $u(\vec{r})$, которое регистрируется всеми приемниками. После этого изменяется направление падающего поля, и соответствующие поля $u(\vec{r})$ опять принимаются. Полный набор данных получается перебором всевозможных направлений зондирования и приема. Этот набор данных обрабатывается, т. е. решается обратная задача. В итоге восстанавливаются искомые функции $c(\vec{r})$ и $\alpha(\vec{r},\omega_j)$ количественно. Возможность получения количественных оценок в каждой точке пространства $\vec{r}$ является принципиальным отличием обратных акустических задач томографического типа от обратных задач УЗИ-типа. Эта возможность обеспечивается, во-первых, за счет наличия экспериментальных данных при самых разных ракурсах и, во-вторых, за счет достаточно строгого алгоритма обработки таких данных. Ниже в целях обработки рассматривается двумерный волновой функционально-аналитический алгоритм [1–5] в монохроматическом варианте. В основе этого алгоритма лежат идеи решения обратных задач рассеяния на квантово-механических потенциалах [1–3, 6, 7].

Полное поле $u(\vec{r})$ при каждом фиксированном $u_0(\vec{r})$ подчиняется уравнению Гельмгольца $\nabla^2 u(\vec{r})+k_{0j}^2 u(\vec{r})=v(\vec{r})u(\vec{r})$, где $v(\vec{r},\omega_j)=\omega_j^2\left(\frac{1}{c_0^2}-\frac{1}{c^2(\vec{r})}\right)-i2\omega_j\frac{\alpha(\vec{r},\omega_j)}{c(\vec{r})}$ — функция рассеивателя при временнóй зависимости полей $\sim\exp(-i\omega_j t)$. Сначала должна быть восстановлена функция $v(\vec{r},\omega_j)$ [8], после чего из нее можно выделить отдельные функции $c(\vec{r})$ и $\alpha(\vec{r},\omega_j)$ [9]. Входными данными для функционального алгоритма являются комплексные значения классической амплитуды рассеяния $f(\vec{k},\vec{l};\omega_j)$. Они полагаются известными для всех действительных волновых векторов $\vec{k}$, $\vec{l}\in\mathbb{R}^2$, где $\vec{k}^2=\vec{l}^2=k_{0j}^2$. Пусть падающее поле является классической плоской волной

$$u_0(\vec{r},\vec{k};\omega_j)=\exp(i\vec{k}\vec{r}) \qquad (1)$$

с волновым вектором $\vec{k}$, а поле $u(\vec{r}, \vec{k}, \omega_j)$ принимается в дальней зоне в направлении, сонаправленном волновому вектору $\vec{l}$, т. е. $\vec{r} \uparrow\uparrow \vec{l}$. Тогда значения $f(\vec{k}, \vec{l}, \omega_j)$ пропорциональны рассеянному полю $u(\vec{r}, \vec{k}; \omega_j) - u_0(\vec{r}, \vec{k}; \omega_j)$. В то же время, значения $f(\vec{k}, \vec{l}; \omega_j)$ могут быть пересчитаны из полей, принятых в ближней зоне вне области томографируемого объекта [8, 10].

ДВУМЕРНЫЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ И АППАРАТ УГЛОВЫХ ГАРМОНИК

Двумерный функциональный алгоритм восстановления функции рассеивателя $v(\vec{r}, \omega_j)$ состоит из нескольких последовательных этапов, которые приводятся ниже в терминах углов и угловых гармоник [4, 5]. А именно, угловой спектр $\widetilde{g}(q)$ для произвольной периодической функции $g(\varphi)$ с периодом 2π определяется соотношениями (угловые гармоники имеют целочисленные номера $q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, т. е. $q \in \mathbb{Z}$):

$$\widetilde{g}(q) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(\varphi) \exp(-iq\varphi) d\varphi, \qquad g(\varphi) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \widetilde{g}(q) \exp(iq\varphi), \qquad q \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Для двумерных векторов $\vec{k}$ и $\vec{l}$ в полярной системе координат имеем:

$$\vec{k} = \{k_{0j}, \varphi\}, \quad \vec{l} = \{k_{0j}, \varphi'\}, \tag{3}$$

тогда $f(\vec{k}, \vec{l}; \omega_j) \equiv f(\varphi, \varphi'; \omega_j)$. Сначала на основе известных значений классической амплитуды рассеяния $f(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ находятся две функции $h^{\pm}(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ — так называемая обобщенная амплитуда рассеяния. С этой целью при каждом фиксированном значении φ решается линейная система уравнений, которая получается перебором всех углов φ':

$$h^{\pm}(\varphi, \varphi'; \omega_j) - \pi i \int\limits_0^{2\pi} h^{\pm}(\varphi, \varphi''; \omega_j) \times \theta[\pm \sin(\varphi'' - \varphi)] f(\varphi'', \varphi'; \omega_j) d\varphi'' = f(\varphi, \varphi'; \omega_j), \tag{4}$$

где $\theta(t) = \{1 \text{ при } t > 0;\ 0 \text{ при } t \leqslant 0\}$ — функция Хевисайда. После этого для каждой фиксированной точки $\vec{r}$ с декартовыми координатами $\vec{r} = \{x, y\}$ строятся вспомогательные функции

$$Q^{\pm}(\vec{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j) \equiv h^{\pm}(\varphi, \varphi'; \omega_j) \times \exp[ik_{0j}\{x(\cos\varphi' - \cos\varphi) + y(\sin\varphi' - \sin\varphi)\}] \times \theta[\pm \sin(\varphi' - \varphi)]. \tag{5}$$

Вычисляется их двойной угловой спектр фурье-преобразованием по углам:

$$\widetilde{\widetilde{Q}}^{\pm}(\vec{r}, q, q'; \omega_j) \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\pi} d\varphi' \times Q^{\pm}(\vec{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j) \exp(-iq\varphi) \exp(-iq'\varphi'), \tag{6}$$

и для всех $q' \in \mathbb{Z}$ строится функция

$$\widetilde{\widetilde{B}}(\vec{r}, q, q'; \omega_j) = \begin{cases} i\pi \widetilde{\widetilde{Q}}^{-}(\vec{r}, q, q'; \omega_j) \\ \text{при } q = 0, 1, 2, 3, \ldots; \\ i\pi \widetilde{\widetilde{Q}}^{+}(\vec{r}, q, q'; \omega_j) \\ \text{при } q = -1, -2, \ldots\ . \end{cases} \tag{7}$$

Знание $\widetilde{\widetilde{B}}(\vec{r}, q, q'; \omega_j)$ позволяет найти угловые гармоники $\widetilde{\mu}^{\mathrm{cl}}(\vec{r}, q; \omega_j)$ классического поля со снятой «несущей» волной: $\mu^{\mathrm{cl}}(\vec{r}, \vec{k}; \omega_j) \equiv \exp(-i\vec{k}\vec{r}) u(\vec{r}, \vec{k}; \omega_j)$. Эти угловые гармоники находятся в каждой фиксированной точке $\vec{r}$ из системы линейных уравнений:

$$\widetilde{\mu}^{\mathrm{cl}}(\vec{r}, q; \omega_j) + 2\pi \sum_{q'=-\infty}^{\infty} \widetilde{\widetilde{B}}(\vec{r}, q, -q'; \omega_j) \times \widetilde{\mu}^{\mathrm{cl}}(\vec{r}, q'; \omega_j) = \delta_{q0}, \tag{8}$$

где $\delta_{q0} = \{1 \text{ при } q = 0;\ 0 \text{ при } q \neq 0\}$. Наконец, искомая функция рассеивателя вычисляется из соотношения

$$v(\vec{r}, \omega_j) = k_{0j} \left(i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \left\{ \widetilde{\mu}^{\mathrm{cl}}(\vec{r}, q = -1; \omega_j) + 2i\pi^2 \sum_{q'=-\infty}^{\infty} \widetilde{\widetilde{Q}}^{-}(\vec{r}, q = -1, -q'; \omega_j) \widetilde{\mu}^{\mathrm{cl}}(\vec{r}, q'; \omega_j) \right\}. \tag{9}$$

Описанный двумерный функциональный алгоритм позволяет практически строго (с точностью до эффектов, связанных с рассеянием назад) учитывать процессы многократного рассеяния волн на неоднородностях среды. При этом все решаемые системы уравнений (4) и (8) остаются линейными относительно неизвестных. Тем не менее, численная реализация алгоритма [4, 5] весьма нетривиальна. При численной реализации оказывается удобным использовать аппарат угловых гармоник, который уже применялся ранее для записи соотношений (6)—(9) данного алгоритма [4, 5], а также для коррекции экспериментальных данных в случае неидеальных позиций излучателей и приемников [11].

В предшествующих вариантах численной реализации [4, 5] обобщенная амплитуда рассеяния $h^{\pm}(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ находилась из системы (4) непосредственно в терминах углов φ и φ'. Вспомогательные функции $Q^{\pm}(\vec{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j)$ формировались, согласно (5), также в терминах углов, после чего выполнялось двойное фурье-преобразование по углам (6). Последующие действия (7)—(9) выполнялись уже в терминах угловых гармоник [4, 5].

Ниже предлагается решать систему (4) и рассматривать соотношение (5) сразу с помощью угловых гармоник. Такой прием позволяет, во-первых, повысить точность численной реализации при переходе от непрерывных значений углов φ и φ' к дискретным номерам угловых гармоник q и q'. Во-вторых, в соотношениях (4) и (5) присутствуют функции Хевисайда

$$\theta^{\pm}(\varphi) \equiv \theta(\pm\sin\varphi), \tag{10}$$

которые изменяются скачкообразно от 1 до 0 в бесконечно малой окрестности нулевого значения их аргумента. Поэтому угловой шаг дискретизации для функций $\theta^{\pm}(\varphi)$ должен быть гораздо мельче, чем для $f\left(\varphi,\varphi';\omega_{\mathrm{j}}\right)$ и $h^{\pm}\left(\varphi,\varphi';\omega_{\mathrm{j}}\right)$. Это взаимосвязано с тем, что угловой спектр $\widetilde{\theta}^{\pm}(q) \equiv \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\theta^{\pm}(\varphi)\exp(-iq\varphi)d\varphi$ функций $\theta^{\pm}(\varphi)$ спадает медленно:

$$\widetilde{\theta}^{\pm}(q) = \frac{1}{2}(\mp i)^q \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{2}q\right) \equiv \equiv \left\{\frac{1}{2} \text{ при } q=0;\ \pm\frac{i}{2\pi q}\left\{(-1)^q-1\right\} \text{ при } q\neq 0\right\}, \tag{11}$$

причем $\widetilde{\theta}^{-}(q) = \left\{\widetilde{\theta}^{+}(q)\right\}^{*}$, $\forall q$. В то же время, в (5) присутствует функция

$$E\left(\vec{r},\varphi,\varphi';\omega_{\mathrm{j}}\right) \equiv \exp\left[ik_{0\mathrm{j}}\left\{x\left(\cos\varphi'-\cos\varphi\right)+ + y\left(\sin\varphi'-\sin\varphi\right)\right\}\right] \equiv \exp\left\{i(\vec{l}-\vec{k})\vec{r}\right\}, \tag{12}$$

где учтено (3). Функция $E\left(\vec{r},\varphi,\varphi';\omega_{\mathrm{j}}\right)$ осциллирует при изменении φ и φ' тем сильнее, чем больше фиксированное значение $k_{0\mathrm{j}}|\vec{r}|$. Как следствие, угловой спектр этой функции будет иметь тем более высокие значимые угловые гармоники, чем больше $k_{0\mathrm{j}}|\vec{r}|$. Таким образом, введение дискретных аналогов обеих функций (10) и (12) требует повышенного внимания при численной реализации рассматриваемого функционального алгоритма.

В-третьих, рассмотрение функций в терминах угловых гармоник делает удобным контроль над достаточностью объема дискретизованных значений функций, участвующих на каждом этапе процедуры восстановления. Такой контроль, начиная с объема исходных дискретизованных данных $f\left(\varphi,\varphi';\omega_{\mathrm{j}}\right)$, принципиален для обеспечения единственности, устойчивости и, в конечном счете, адекватности решения рассматриваемой обратной задачи [8]. Об этом кратко будет упомянуто на этапе численного моделирования.

Для преобразования интегрального члена уравнений (4) функции $h^{\pm}\left(\varphi,\varphi'';\omega_{\mathrm{j}}\right)$ и $f\left(\varphi'',\varphi';\omega_{\mathrm{j}}\right)$ можно представить, согласно (2), как

$$h^{\pm}\left(\varphi,\varphi'';\omega_{\mathrm{j}}\right) = \sum_{q''=-\infty}^{\infty}\widetilde{h}^{\pm}\left(\varphi,q'';\omega_{\mathrm{j}}\right)\exp\left(iq''\varphi''\right),$$

$$f\left(\varphi'',\varphi';\omega_{\mathrm{j}}\right) = \sum_{q'''=-\infty}^{\infty}\widetilde{f}\left(q''',\varphi';\omega_{\mathrm{j}}\right)\exp\left(iq'''\varphi''\right).$$

Это приводит уравнения (4) к виду:

$$h^{\pm}\left(\varphi,\varphi';\omega_{\mathrm{j}}\right) - \pi i\sum_{q''=-\infty}^{\infty}\sum_{q'''=-\infty}^{\infty}\widetilde{h}^{\pm}\left(\varphi,q'';\omega_{\mathrm{j}}\right)\times \times\widetilde{f}\left(q''',\varphi';\omega_{\mathrm{j}}\right)2\pi\exp\left[i\left(q''+q'''\right)\varphi\right]\times \times\widetilde{\theta}^{\pm}\left[-\left(q''+q'''\right)\right] = f\left(\varphi,\varphi';\omega_{\mathrm{j}}\right).$$

Фурье-преобразование данного выражения по углу φ' дает:

$$\widetilde{h}^{\pm}\left(\varphi,q';\omega_{\mathrm{j}}\right) - 2i\pi^2\sum_{q''=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{q'''=-\infty}^{\infty}\widetilde{\theta}^{\pm}\left(-q''-q'''\right)\times \times\widetilde{\widetilde{f}}\left(q''',q';\omega_{\mathrm{j}}\right)\exp\left(iq'''\varphi\right)\right\}\exp\left(iq''\varphi\right)\times \times\widetilde{h}^{\pm}\left(\varphi,q'';\omega_{\mathrm{j}}\right) = \widetilde{f}\left(\varphi,q';\omega_{\mathrm{j}}\right);\quad q'\in\mathbb{Z}. \tag{13}$$

Система уравнений (13), получающаяся перебором $q' \in \mathbb{Z}$, решается относительно одинарных угловых гармоник $\widetilde{h}^{\pm}\left(\varphi,q';\omega_{\mathrm{j}}\right)$ при каждом фиксированном угле φ. В правой части (13) стоит одинарный угловой спектр классической амплитуды рассеяния

$$\widetilde{f}\left(\varphi,q';\omega_{\mathrm{j}}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\varphi,\varphi';\omega_{\mathrm{j}}\right)\exp\left(-iq'\varphi'\right)d\varphi',\quad q'\in\mathbb{Z}. \tag{14}$$

а в левой части — двойной угловой спектр

$$\widetilde{\widetilde{f}}\left(q,q';\omega_{\mathrm{j}}\right) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}d\varphi'\times \times f\left(\varphi,\varphi';\omega_{\mathrm{j}}\right)\exp\left(-iq\varphi\right)\exp\left(-iq'\varphi'\right),\quad q,q'\in\mathbb{Z}. \tag{15}$$

После нахождения $\widetilde{h}^{\pm}\left(\varphi,q';\omega_{\mathrm{j}}\right)$ вычисляется двойной угловой спектр

$$\widetilde{\widetilde{h}}\left(q,q';\omega_{\mathrm{j}}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\widetilde{h}^{\pm}\left(\varphi,q';\omega_{\mathrm{j}}\right)\exp(-iq\varphi)d\varphi. \tag{16}$$

С другой стороны, можно находить сразу двойные угловые гармоники $\widetilde{\widetilde{h}}^{\pm}\left(q,q';\omega_{\mathrm{j}}\right)$ из системы, которая получается фурье-преобразованием уравнений (13) по углу φ с последующей заменой переменных:

$$\widetilde{\widetilde{h}}^{\pm}\left(q,q';\omega_{\mathrm{j}}\right) - 2i\pi^2\sum_{q''=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{q'''=-\infty}^{\infty}\widetilde{\widetilde{f}}\left(-q'''+q-q'',q';\omega_{\mathrm{j}}\right)\times \times\widetilde{\theta}^{\pm}\left(q'''-q\right)\right\}\widetilde{\widetilde{h}}^{\pm}\left(q''',q'';\omega_{\mathrm{j}}\right) = \widetilde{\widetilde{f}}\left(q,q';\omega_{\mathrm{j}}\right);\quad q,q'\in\mathbb{Z}. \tag{17}$$

Однако в отличие от системы (13), которая решается при каждом фиксированном φ, система(17) требует нахождения $\widetilde{\widetilde{h}}^{\pm}\left(q,q';\omega_j\right)$ сразу для всех значений $\left(q,q'\right)$, т. е. ни один из аргументов q или q'

зафиксировать нельзя. Тем самым, переход от (13) к (17) не всегда целесообразен, поскольку могут возникнуть трудности из-за матриц огромной размерности при решении системы (17) — подобно ситуации, описанной в [12].

Вместо выполнения последовательности действий (5) и (6), выражение (5) можно преобразовать сразу в терминах угловых гармоник. Учитывая (1), (3) и (12), имеем: $E\left(\vec{r},\varphi,\varphi';\omega_j\right) = \exp(-i\vec{k}\vec{r})\times \exp(i\vec{l}\vec{r}) \equiv P\left(\vec{r},\varphi+\pi;\omega_j\right)P\left(\vec{r},\varphi';\omega_j\right)$. Здесь для удобства введено обозначение $u_0\left(\vec{r},\vec{k};\omega_j\right) \equiv \equiv P\left(\vec{r},\varphi;\omega_j\right) = \exp(i\vec{k}\vec{r})$, и тогда

$$-\vec{k} = \left\{k_{0j},\varphi+\pi\right\},\quad P\left(\vec{r},\varphi+\pi;\omega_j\right) \equiv \exp(-i\vec{k}\vec{r});$$
$$\vec{l} = \left\{k_{0j},\varphi'\right\},\quad P\left(\vec{r},\varphi';\omega_j\right) \equiv \exp(i\vec{l}\vec{r}).$$

Выражение (5) переписывается как

$$Q^{\pm}\left(\vec{r},\varphi,\varphi';\omega_j\right) = h^{\pm}\left(\varphi,\varphi';\omega_j\right)\exp\left\{i(\vec{l}-\vec{k})\vec{r}\right\}\times \times\theta^{\pm}\left(\varphi'-\varphi\right) \equiv h^{\pm}\left(\varphi,\varphi';\omega_j\right)\times \times P\left(\vec{r},\varphi+\pi;\omega_j\right)P\left(\vec{r},\varphi';\omega_j\right)\theta^{\pm}\left(\varphi'-\varphi\right). \tag{18}$$

Каждая из функций $h^{\pm}$ и P в (18) представляется в виде суммы угловых гармоник:

$$h^{\pm}\left(\varphi,\varphi';\omega_j\right) = \sum_{q_1=-\infty}^{\infty}\sum_{q_2=-\infty}^{\infty}\tilde{\tilde{h}}^{\pm}\left(q_1,q_2;\omega_j\right)\times \times\exp(iq_1\varphi)\exp(iq_2\varphi'),$$

$$P\left(\vec{r},\varphi+\pi;\omega_j\right) = \sum_{q_3=-\infty}^{\infty}\tilde{P}\left(\vec{r},q_3;\omega_j\right)\exp\left\{iq_3(\varphi+\pi)\right\},$$

$$P\left(\vec{r},\varphi';\omega_j\right) = \sum_{q_4=-\infty}^{\infty}\tilde{P}\left(\vec{r},q_4;\omega_j\right)\exp\left(iq_4\varphi'\right), \tag{19}$$

и выполняется двойное фурье-преобразование выражения (18) по углам φ и φ', согласно (6). Это приводит (18) к виду:

$$\tilde{\tilde{Q}}^{\pm}\left(\vec{r},q,q';\omega_j\right) = \sum_{q_1=-\infty}^{\infty}\sum_{q_2=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{q_3=-\infty}^{\infty}(-1)^{q-q_1+q_3}\times \times\tilde{P}\left(\vec{r},q-q_1+q_3;\omega_j\right)\tilde{P}\left(\vec{r},q'-q_2-q_3;\omega_j\right)\tilde{\theta}^{\pm}\left(q_3\right)\right\}\times \times\tilde{\tilde{h}}^{\pm}\left(q_1,q_2;\omega_j\right). \tag{20}$$

Поскольку в полярной системе координат $\vec{r} = \left\{|\vec{r}|,\varphi_{\vec{r}}\right\}$, то

$$P\left(\vec{r},\varphi;\omega_j\right) \equiv \exp(i\vec{k}\vec{r}) = \exp\left\{ik_{0j}|\vec{r}|\cos\left(\varphi_{\vec{r}}-\varphi\right)\right\} = = \sum_{q=-\infty}^{\infty}i^q J_q\left(k_{0j}|\vec{r}|\right)\exp\left[iq\left(\varphi-\varphi_{\vec{r}}\right)\right], \tag{21}$$

где J_q — функция Бесселя q-го порядка. Из сравнения (19) и (21) следует, что

$$\tilde{P}\left(\vec{r},q;\omega_j\right) = i^q\exp\left(-iq\varphi_{\vec{r}}\right)J_q\left(k_{0j}|\vec{r}|\right). \tag{22}$$

Подстановка (22) в (20) приводит к окончательному выражению:

$$\tilde{\tilde{Q}}^{\pm}\left(\vec{r},q,q';\omega_j\right) = (-i)^{q-q'}\exp\left\{-i\varphi_{\vec{r}}\left(q+q'\right)\right\}\times \times\sum_{q_1=-\infty}^{\infty}\sum_{q_2=-\infty}^{\infty}(-i)^{q_2-q_1}\exp\left\{i\varphi_{\vec{r}}\left(q_1+q_2\right)\right\}\times \times\varkappa^{\pm}\left(q-q_1,q'-q_2,k_{0j}|\vec{r}|\right)\tilde{\tilde{h}}^{\pm}\left(q_1,q_2;\omega_j\right), \tag{23}$$

где

$$\varkappa^{\pm}\left(n,n',k_{0j}|\vec{r}|\right) \equiv \sum_{q_3=-\infty}^{\infty}(-1)^{q_3}J_{n+q_3}\left(k_{0j}|\vec{r}|\right)\times \times J_{n'-q_3}\left(k_{0j}|\vec{r}|\right)\cdot\tilde{\theta}^{\pm}\left(q_3\right);\quad n,n'\in\mathbb{Z}. \tag{24}$$

Выражение для $\tilde{\theta}^{\pm}(q)$ приведено в (11). Оно позволяет преобразовать выражение (24) с учетом того, что $\tilde{\theta}^{\pm}(q) = 0$ при $|q| = 2,4,6,8,\ldots$:

$$\varkappa^{\pm}\left(n,n',k_{0j}|\vec{r}|\right) = \frac{1}{2}J_n\left(k_{0j}|\vec{r}|\right)J_{n'}\left(k_{0j}|\vec{r}|\right)\pm \pm\frac{i}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2m+1}J_{n+2m+1}\left(k_{0j}|\vec{r}|\right)\times \times J_{n'-2m-1}\left(k_{0j}|\vec{r}|\right);\quad n,n',m\in\mathbb{Z}. \tag{25}$$

Из (25) непосредственно видно, что $\varkappa^{-}\left(n,n',k_{0j}|\vec{r}|\right) = \left\{\varkappa^{+}\left(n,n',k_{0j}|\vec{r}|\right)\right\}^{*}, \forall n,n'\in\mathbb{Z}$.

Таким образом, последовательность действий при восстановлении функции рассеивателя с помощью аппарата угловых гармоник имеет вид, представленный на схеме 1.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Проверка эффективности предложенного нового варианта численной реализации двумерного функционального алгоритма выполнялась путем восстановления модельного акустического рассеивателя. Для задания модели рассеивателя были взяты два МРТ-изображения двумерных сечений молочной железы [13]. Одно из изображений стало условно интерпретироваться как значения скорости звука $c(\vec{r})$ (рис. 1*а*), другое изображение — значения коэффициента поглощения $\alpha\left(\vec{r},\omega_j\right)$ (рис. 1*б*). В фоновой непоглощающей среде (воде), окружающей молочную железу, полагалось $c_0 = 1500$ м/с; тогда длина волны $\lambda_0 \equiv 2\pi/k_0 = = 10^{-3}$ м при выбранной частоте 1.5 МГц. Шаг дискретизации рассматриваемых изображений задавался равным $0.5\lambda_0$. При этом вся область томографирования составляла $106\lambda_0$ вдоль каждой декартовой оси, а линейный размер собственно сечения молочной железы составлял $\approx 80\lambda_0$. Количественные значения на изображениях задавались на основе характерных диапазонов $c(\vec{r})$ и $\alpha\left(\vec{r},\omega_j\right)$ [14, 15]: полагалось 1460–1535 м/с для c и 15–34 Нп/м, т. е. 1.3–3.0 Дб/см, для α. Значения c и α наибольшие в коже, а в подкожной жировой ткани — значительно меньше.

$$\begin{tikzcd}
f\left(\varphi,\varphi';\omega_j\right) \arrow[r, "(14),\ (15)"'] & \tilde{f}\left(\varphi,q';\omega_j\right), \tilde{\tilde{f}}\left(q,q';\omega_j\right) \arrow[r, "(13)"'] \arrow[dr, dashed, "(17)"'] & \tilde{h}^{\pm}\left(\varphi,q';\omega_j\right) \arrow[d, "(16)"] \\
 & & \tilde{\tilde{h}}^{\pm}\left(q,q';\omega_j\right) \arrow[r, dashed] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\dashrightarrow_{(25),\ (23)} \tilde{\tilde{Q}}^{\pm}\left(\vec{r},q,q';\omega_j\right) \xrightarrow[(7),\ (8)]{} \tilde{\mu}^{\mathrm{cl}}\left(\vec{r},q;\omega_j\right) \xrightarrow[(9)]{} v\left(\vec{r},\omega_j\right)$$

Схема 1.

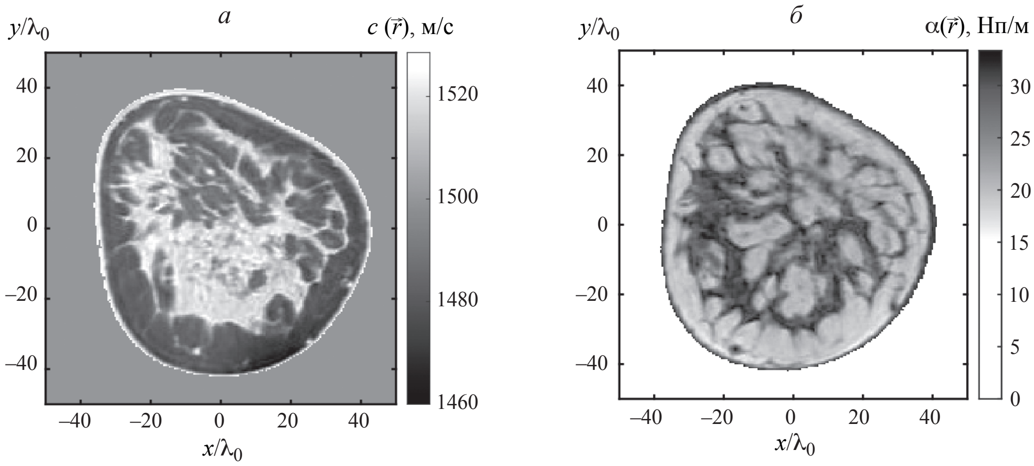

Рис. 1. Исходная модель акустического рассеивателя: пространственные распределения скорости звука (*а*) и коэффициента поглощения (*б*) в двумерном сечении молочной железы.

При прохождении волны вдоль траекторий, параллельных оси абсцисс и оси ординат, наибольший положительный дополнительный набег фазы волны $\Delta\psi > 0$ приобретается на участках с $c(\vec{r}) > c_0$ [4, 8, 12] вдоль сечения $y = -\lambda_0$ и составляет $\Delta\psi \approx 1.25\pi$. Наибольший (по модулю) отрицательный набег $\Delta\psi < 0$ приобретается на участках с $c(\vec{r}) < c_0$ [4, 8, 12] вдоль сечения $y = -31\lambda_0$ и составляет $\Delta\psi \approx -1.27\pi$. Максимальное поглощение наблюдается вдоль сечения $x = -16.5\lambda_0$, при этом амплитуда волны уменьшается в ≈ 8 раз. Таким образом, эффекты многократного рассеяния волн выражены достаточно сильно.

Приемоизлучающие квазиточечные преобразователи в количестве 800 располагались равномерно на окружности радиуса 0.1536 м вокруг области томографирования. Из таких данных пересчитывалась амплитуда рассеяния $f\left(\varphi,\varphi';\omega_j\right)$ с угловым шагом дискретизации $2\pi/800$. Надо отметить, что количество преобразователей в современных ультразвуковых томографах, которые предназначены, в первую очередь, для послойной диагностики молочной железы, может достигать полторы-две тысячи [16, 17]. Более того, дополнительное вращение антенной решетки позволяет, в принципе, существенно увеличить эффективный объем экспериментальной информации [8].

Двойной угловой спектр амплитуды рассеяния $\tilde{\tilde{f}}\left(q,q';\omega_j\right)$ сконцентрирован около антидиагонали $q' = -q$. Угловой спектр спадает с высокой точностью к практически нулевым значениям при наибольших $|q|$ и $|q'|$ (рис. 2*а*). Это означает, что упомянутый объем дискретизованных данных $f\left(\varphi,\varphi';\omega_j\right)$ заключает в себе практически всю информацию об объекте, которую можно получить за счет измерений поля вне объекта при заданной частоте ω_j. Такого объема данных оказывается достаточным для восстановления с хорошим качеством сложной пространственной структуры рассматриваемого рассеивателя, а также значений скорости звука (рис. 2*б*) и коэффициента поглощения (рис. 2*в*). Одномерное сечение молочной железы приведено на рис. 2*б* и 2*в* для наглядной иллюстрации высокой точности восстановления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, численная реализация функционального алгоритма с помощью аппарата угловых гармоник оказалась эффективной. В то же время, на практике линейный размер рассеивателя может быть еще больше, а контраст скорости звука и коэффициента поглощения еще сильнее, чем в рассмотренной модели. В свою очередь, это еще больше усиливает эффекты многократного рассеяния волн. Тогда для обеспечения устойчивого восста-

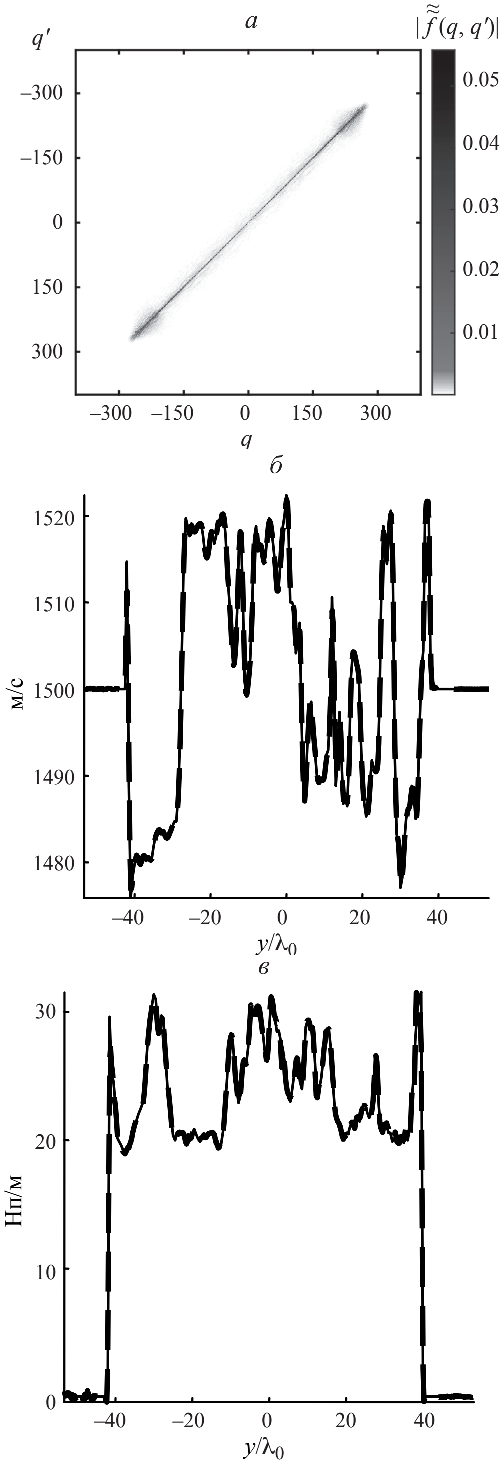

Рис. 2. Двойной угловой спектр амплитуды рассеяния (*а*) и результат восстановления (толстая пунктирная линия) скорости звука (*б*) и коэффициента поглощения (*в*) при $x = 0$ в сравнении с истинными значениями (сплошная тонкая линия).

новления рассеивателя требуется, в общем случае, многочастотный режим [5].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-22-00192, https://rscf.ru/project/24-22-00192/.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гриневич П.Г., Манаков С.В.* // Функцион. анализ и его прил. 1986. Т. 20. № 2. С. 14; *Grinevich P.G., Manakov S.V.* // Funct. Anal. Appl. 1986. V. 20. No. 2. P. 94.
2. *Novikov R.G.* // J. Func. Analysis. 1992. V. 103. No. 2. P. 409.
3. *Novikov R.G.* // Phys. Lett. A. 1998. V. 238. No. 2–3. P. 73.
4. *Буров В.А., Румянцева О.Д.* Обратные волновые задачи акустической томографии. Ч. 4: Функционально-аналитические методы решения многомерной акустической обратной задачи рассеяния. М.: ЛЕНАНД, 2024. 504 с.
5. *Буров В.А., Алексеенко Н.В., Румянцева О.Д.* // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 6. С. 784; *Burov V.A., Alekseenko N.V., Rumyantseva O.D.* // Acoust. Phys. 2009. V. 55. No. 6. P. 843.
6. *Faddeev L.D.* // J. Sov. Math. 1976. V. 5. P. 334.
7. *Novikov R.G.* // Int. Math. Res. Papers. 2005. V. 2005. No. 6. P. 287.
8. *Буров В.А., Румянцева О.Д.* Обратные волновые задачи акустической томографии. Ч. 2. Обратные задачи акустического рассеяния. М.: URSS, 2021. 768 с.
9. *Зотов Д.И., Румянцева О.Д., Шуруп А.С.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2018. Т. 82. № 1. С. 41; *Zotov D.I., Rumyantseva O.D., Shurup A.S.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2018. V. 82. No. 1. P. 35.
10. *Буров В.А., Шуруп А.С., Румянцева О.Д. и др.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2012. Т. 76. № 12. С. 1524; *Burov V.A., Shurup A.S., Rumyantseva O.D. et al.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2012. V. 76. No. 12. P. 1365.
11. *Зотов Д.И., Румянцева О.Д.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2022. Т. 86. № 1. С. 122; *Zotov D.I., Rumyantseva O.D.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2022. V. 86. No. 1. P. 83.
12. *Зотов Д.И., Румянцева О.Д., Черняев А.С.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2024. Т. 88. № 1. С. 131; *Zotov D.I., Rumyantseva O.D., Cherniaev A.S.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2024. V. 88. No. 1. P. 113.
13. https://rentgenogram.ru/dicom-arhiv/molochnye-zhelezy
14. https://itis.swiss/virtual-population/tissue-properties/database
15. *Li F., Villa U., Duric N., Anastasio M.A.* // Proc. SPIE. 2023. V. 12470. Art. No. 124700K.
16. *Malik B., Terry R., Wiskin J., Lenox M.* // Med. Phys. 2018. V. 45. No. 7. P. 3063.
17. *Duric N., Sak M., Fan S. et al.* // J. Clin. Med. 2020. V. 9. No. 2. Art. No. 367.

Reconstructing the spatial distribution of acoustic characteristics by technique of angle harmonics

D. I. Zotov, O. D. Rumyantseva*, A. S. Cherniaev

Department of Acoustics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia

e-mail: burov@phys.msu.ru

Improved numerical implementation of the two-dimensional functional analytical algorithm is proposed. The algorithm is designed to reconstruct spatial distributions of sound speed and absorption coefficient in a tomography region. The high accuracy of obtained tomograms is illustrated even with large wave sizes and complicated internal structure of object under study.

Keywords: acoustic tomography, sound velocity and absorption reconstruction, functional algorithm, angular harmonics