

УДК 532.5.031

## НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

© 2025 г. А. А. Очиров\*, К. Ю. Лапшина

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского Российской академии наук», Москва, Россия*

*\*e-mail: otchirov@mail.ru*

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

Исследовано потенциальное волновое движение вдоль свободной поверхности глубокой идеальной жидкости. Получены точные решения уравнений движения с физически обоснованными граничными условиями на свободной поверхности. Исследована форма свободной поверхности в зависимости от амплитуды и выделены характеристики поверхности. Исследованы характеристики волн в зависимости от параметра нелинейности.

**Ключевые слова:** идеальная жидкость, потенциальное течение, волновое движение, W-функция Ламберта, нелинейные волны, характеристики волн

**DOI:** 10.31857/S0367676525010214, **EDN:** CZERZE

### ВВЕДЕНИЕ

Человечество на протяжении довольно длительного времени привлекает исследование волн на поверхности жидкости. Еще Леонардо да Винчи в пятнадцатом веке в своих трудах упоминал поверхностные волны. С появлением математического аппарата исследования от простых наблюдений переходят к аналитическому описанию, а развитие техники эксперимента привело к качественно новым экспериментальным описаниям разнообразнейших явлений, возникающих на поверхности жидкости. Исследования поверхностных волн находят свое место и в классических трактатах и учебниках [1–4] и в специализированных монографиях, посвященных волновым движениям жидкости [5–8].

В современных работах часто решается линеаризованная задача о расчете характеристик инфинитезимальных поверхностных периодических течений в жидкости в различных постановках [9–11]. Наряду с линеаризованными задачами в теоретических работах объектом исследования становятся нелинейные волны, и исследователи в самых разнообразных постановках задачи получают точные решения нелинейных уравнений Эйлера, Кортевега–де Фриза, Шредингера, Хопфа [12–16]. Интерес к изучению поверхностных волн не угас до сих пор, и они становятся предметом как теоретического [12, 13, 16] так и экспериментального [17–21] изучения. Интерес связан с необходимо-

стью изучения параметров морских волн, описанных в учебных пособиях по океанографии [22, 23] для подробного описания и предсказания поведения волновых и многих смежных явлений в океане. Несмотря на давнюю историю вопроса до сих пор не разработана полная теория, позволяющая по измеренным характеристикам предсказывать поведение волн. В последние годы активизировалась работа по теоретическому и экспериментальному описанию. Также происходит развитие экспериментальных методов контроля поверхностных волн (см. например, [24]).

Для изучения и предсказания поведения волн на поверхности моря необходима регистрация элементов, характеристик и параметров волн. В настоящей работе предлагается структуризация элементов волн на поверхности глубокого океана, описываемых функциями Ламберта. Решение задачи в виде функций Ламберта впервые получено и обсуждалось в [16]. Настоящая работа направлена на исследование влияния амплитуды волны на ее различные характеристики и измеряемые в эксперименте параметры.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим распространение периодических потенциальных волновых движений вдоль свободной поверхности идеальной глубокой жидкости, занимающей нижнее полупространство  $z < 0$  в декартовой системе координат. В простейшем слу-

чае в приближении постоянной плотности  $\rho = \text{const}$  без учета поверхностного натяжения в двумерной постановке математическая формулировка задачи включает в себя уравнения Эйлера и неразрывности и дополняется стандартными граничными условиями на свободной поверхности. При переходе в систему координат  $O\xi z$ , движущуюся вместе с волной со скоростью  $c$ , учитывая связь между горизонтальными координатами  $\xi = x - ct$ , математическая формулировка задачи записывается следующим образом:

$$z < \zeta: \quad \rho(-c\partial_\xi \vec{u} + (\vec{u}\nabla)\vec{u}) = -\nabla P + \rho \vec{g}, \quad (1)$$

$$\partial_t \rho + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad (2)$$

$$z = \zeta: \quad P = P_0, \quad w - u\partial_\xi \zeta = -c\partial_\xi \zeta. \quad (3)$$

Здесь функция  $\zeta = \zeta(\xi)$  описывает отклонение свободной поверхности от равновесного положения  $z = 0$ , ускорение свободного падения  $\vec{g} = (0, -h)$  направлено вертикально вниз против направления оси  $Oz$ , переменными  $u$  и  $w$  обозначены горизонтальная и вертикальная компоненты скорости  $\vec{u}$ , а давление  $P$  складывается из атмосферного  $P_0$ , гидростатического и динамического давления  $\tilde{P}$ :

$$P(\xi, z) = P_0 + \rho g(\zeta - z + \tilde{P}(\xi, z)). \quad (4)$$

Для жидкости с постоянной плотностью уравнение неразрывности сводится к условию несжимаемости, и в двумерной постановке можно ввести функцию тока  $\psi$  такую, что  $\vec{u} = (u, w) = (\partial_z \psi - \partial_x \psi)$ . Решение для функции тока ищется в виде представления, определяющего экспоненциальное затухание волнового движения с удалением от свободной поверхности и обобщенное для волнового пакета представление, выглядит следующим образом:

$$\psi(\xi, z) = \int_0^\infty \exp(k(z - \zeta(\xi))) \phi(k, \xi) dk, \quad (5)$$

Из кинематического граничного условия (3) и (5) получим для функции тока:

$$\psi(\xi, z) = c(\zeta + a) \int_0^\infty \exp(k(z - \zeta(\xi))) f(k) dk, \quad (6)$$

$$\int_0^\infty f(k) dk = 1.$$

Не вдаваясь в особенности решения, которое не является основным интересом настоящего рассмотрения и подробно рассмотрено, и описано в работе [13], отметим, что для функции, описывающей отклонение свободной поверхности от равновесного значения получается выражение:

$$\zeta(\xi, A) = -\frac{1}{k} \left( W\left(-\frac{kA}{2} \exp(ik\xi)\right) + W\left(-\frac{kA}{2} \exp(-ik\xi)\right) \right). \quad (7)$$

Здесь символом  $A$  обозначена амплитуда волнового движения, а  $W(x) - W$  — функция Ламберта.

В [16] показано, что функция  $f(k)$  в выражении (6) является дельта-функцией Дирака  $\delta(k - k_*)$  и в таком случае, применяя свойство функции Ламберта  $W(x) \exp(W(x))$  можно записать для функции тока:

$$\psi_\pm(\xi, z) = -\frac{c}{k_*} W(-k_* A e^{\pm ik_* \xi}) \times \exp\left(W(-k_* A e^{\pm ik_* \xi})\right) e^{k_* z} = c A e^{\pm ik_* \xi} e^{k_* z}. \quad (8)$$

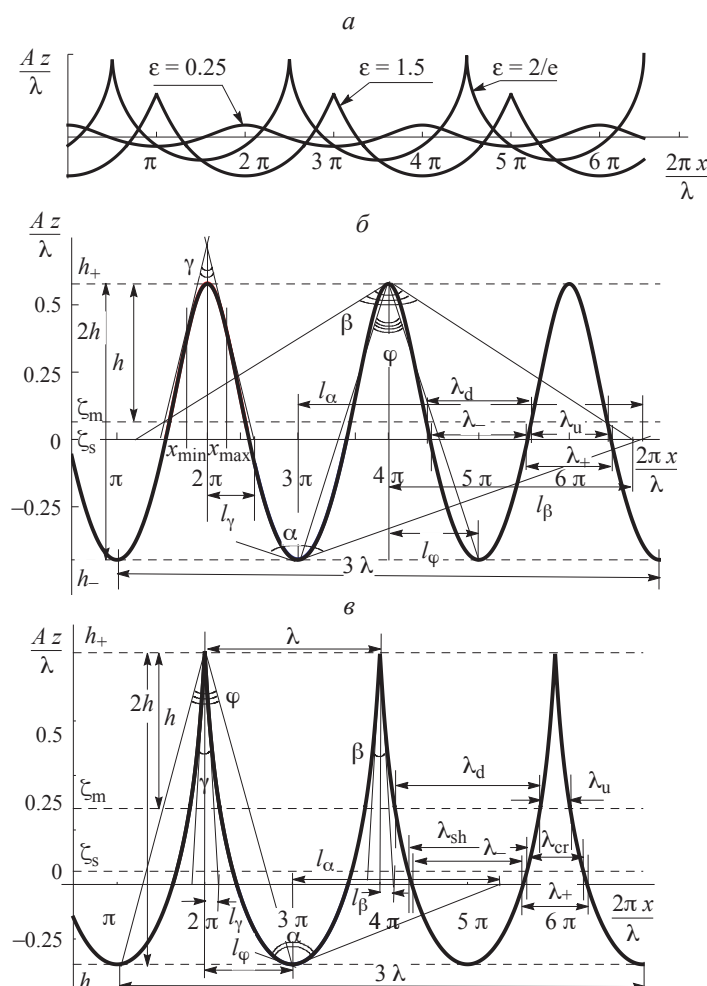
Настоящая работа посвящена анализу формы и некоторых характеристик свободной поверхности, в задаче о распространении поверхностных волн, точное решение которой определяется волнами Ламберта.

## АНАЛИЗ ФОРМЫ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Проанализируем поведение формы свободной поверхности (7). Для инфинитезимальных волн  $kA \ll 1$  и выражение, описывающее форму свободной поверхности (7), принимая во внимание разложение функции Ламберта по малому параметру  $W(x) = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 + o(x^3)$  при  $|x| \ll 1$ , принимает вид:

$$\begin{aligned} \zeta(\xi, A) &= -\frac{1}{k} \left( W\left(-\frac{kA}{2} \exp(ik\xi)\right) + W\left(-\frac{kA}{2} \exp(-ik\xi)\right) \right) = \\ &= -\frac{1}{k} \left( -\frac{kA}{2} \exp(ik\xi) - \frac{kA}{2} \exp(-ik\xi) \right) = A \cos(k\xi). \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, при малых амплитудах форма свободной поверхности близка к гармонической. Выполним построение формы свободной поверхности для различных параметров нелинейности  $\varepsilon = A\omega^2/g$ , характеризующего отношение амплитуды волнового движения  $A$  к длине волны. С ростом параметра нелинейности гребень волны вытягивается и при некотором критическом значении  $\varepsilon_{cr} = 2/e$  на вершине волны возникает сингулярность и форма поверхности перестает быть гладкой. Волны, удовлетворяющие условию  $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$  будем называть гладкими или докритическими волнами, а волны, удовлетворяющие  $\varepsilon \geq \varepsilon_{cr}$  будем называть острыми или закритическими. На рис. 1а представлены типичные формы поверхности для докритических и закритических волн. Поверхностные волны характеризуются большим набором параметров, которые можно отслеживать в экспериментальных исследованиях. На рис. 1б и 1в представлены формы поверхности для гладкой и острой волны с указанием характеристик поверхностного волнового движения, оценка которых может быть получена при обработке оптических данных волн на поверхности жидкости. В табл. 1 перечислены характеристики и приведено их описание.



**Рис. 1.** Профили поверхностных волн: общий вид для различных параметров нелинейности докритического, критического и закритического (*а*); волна с докритическим параметром нелинейности с указанием характеристик волнового движения (*б*); волна с закритическим параметром нелинейности с указанием характеристик волнового движения (*в*).

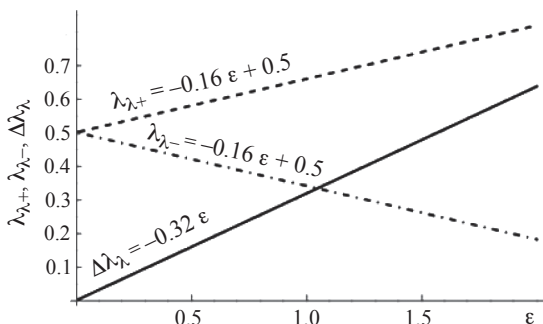
**Таблица 1.** Характеристики поверхностного волнового возмущения

Обозначение	Характеристика
$\lambda$	Длина волны
$A$	Амплитуда волны
$h_+, h_-$	Возвышение и заглубление волны
$\zeta_s$	Серединный уровень волны, уровень, отсекающий равные площади и характеризующий положение центра масс
$\zeta_m$	Средний уровень, определяющий положение, равноудаленное от вершины и подошвы
$\lambda_{sh}, \lambda_{cr}$	Длительность ложбины и гребня волны
$\lambda_d, \lambda_u$	Длительность участка ниже и выше среднего уровня волны $\zeta_m$
$\lambda_-, \lambda_+$	Длительность участка волны ниже и выше равновесного положения $z = 0$
$\alpha$	Угол при подошве волны
$\beta$	Угол при вершине волны
$\gamma$	Угол между линиями с максимальной крутизной фронта и среза
$\varphi$	Угол между линиями, соединяющими вершину и соседние подошвы, характеризующий крутизну волны
$x_{max}, x_{min}$	Значения абсцисс, при которых достигается максимальная крутизна фронта и среза волны

Интересно, что некоторые параметры при переходе от докритической к закритической области теряют свой смысл, а некоторые наоборот — проявляются явственнее. В качестве примера можно выделить угол между линиями наибольшей крутизны среза и фронта волны  $\gamma$  и уровень срединной линии  $\zeta_s$ , определяющий положение выше и ниже которого площади, заметаемые волной одинаковы. Угол  $\gamma$  для закритических волн совпадает с углом  $\beta$  при вершине гребня волны, а для докритических волн эти углы различны. Положение срединной линии  $\zeta_s$  для докритических волн близко к положению равновесия  $z = 0$ , однако, для закритических волн этот уровень заметно превышает равновесный.

Рассмотрим, как влияет увеличение амплитуды волны на некоторые характеристики поверхностных волн. На рис. 2 построены зависимости длительности участка волны, отнесенные к ее длине, превышающих равновесный уровень (имеющих положительные значения абсцисс)  $\lambda_{\lambda_+} = \lambda_+/\lambda$ , не превышающих (имеющих отрицательные значения абсцисс)  $\lambda_{\lambda_-} = \lambda_-/\lambda$  и их разность  $\Delta\lambda_\lambda = \lambda_{\lambda_-} - \lambda_{\lambda_+} = (\lambda_- - \lambda_+)/\lambda$ . Для удобства построения выполнены в величинах, отнесенных к длине волны для различных параметров нелинейности  $\epsilon$ . При малых амплитудах длительности волны над и под равновесным уровнем практически совпадают, однако, с увеличением амплитуды участок над равновесным уровнем укорачивается по сравнению с участком под равновесным уровнем. Несмотря на то, что длительность  $\lambda_{\lambda_+}$  уменьшается с увеличением амплитуды, длина свободной поверхности волны ведет себя нелинейным образом. Длина свободной поверхности вместе с положением уровня  $\zeta_s$  характеризует потенциальную энергию: увеличение этих величин приводит к увеличению потенциальной энергии волнового движения.

На рис. 3 изображены зависимости от параметра нелинейности длины поверхностей участков

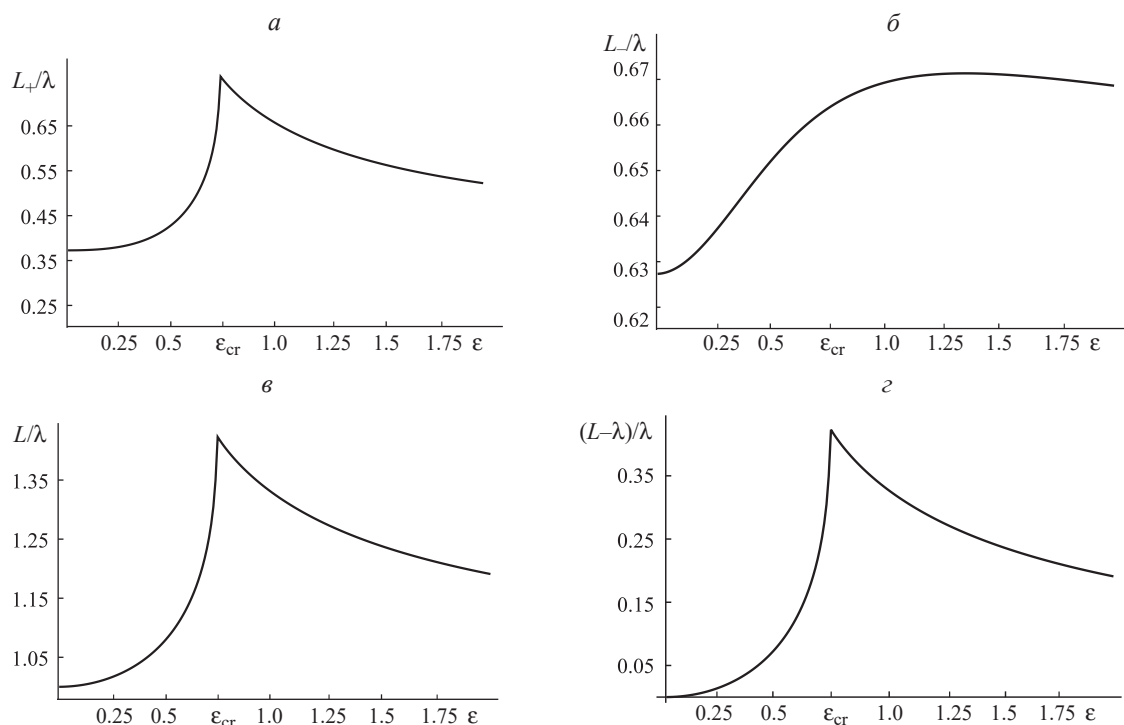


**Рис. 2.** Отнесенная к длине волны длительность участка волны в зависимости от параметра нелинейности над равновесным уровнем  $\lambda_{\lambda_+}$ , под равновесным уровнем  $\lambda_{\lambda_-}$  и разности длительности под равновесным уровнем и над равновесным уровнем  $\Delta\lambda_\lambda = \lambda_{\lambda_-} - \lambda_{\lambda_+}$ .

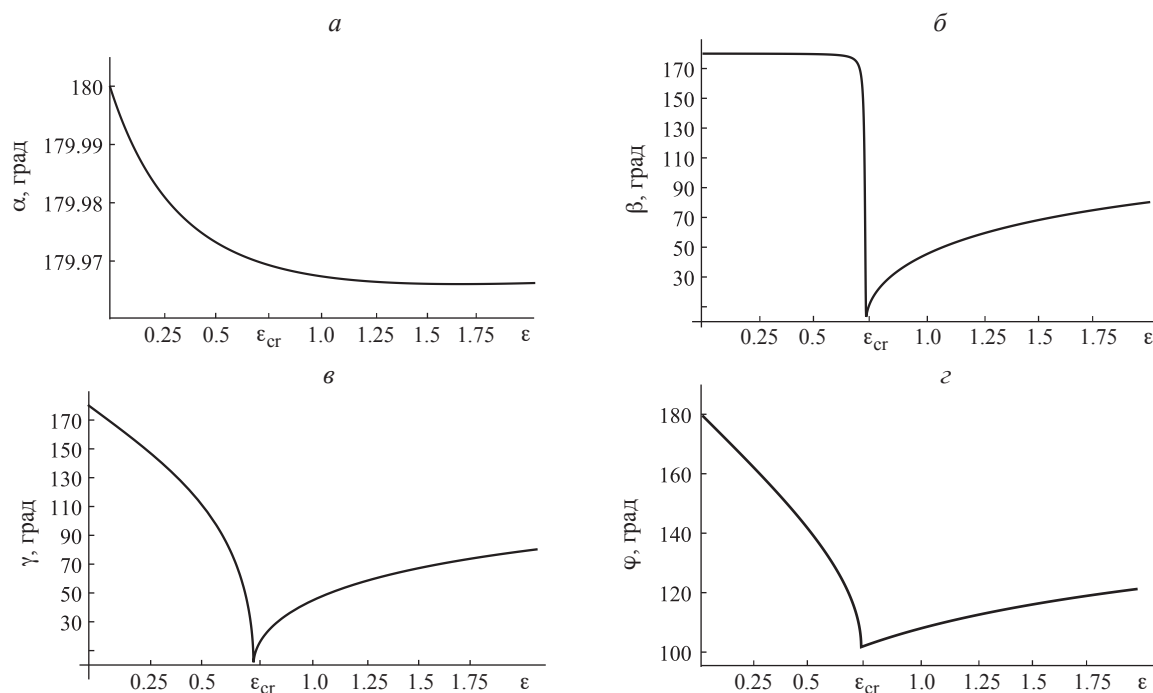
волны, отнесенные к длине волны для участка превышающей равновесный уровень  $L_+/\lambda$  (рис. 3а), не превышающей равновесный уровень  $L_-/\lambda$  (рис. 3б) и общая длина свободной поверхности  $L/\lambda = (L_+ + L_-)/\lambda$ . Видно, что для докритических гладких волн с увеличением амплитуды происходит плавный незначительный рост длины поверхности участка волны, находящегося под равновесным уровнем и относительно резкий рост длины поверхности участка над равновесным уровнем. С превышением критического значения параметра нелинейности происходит менее резкое уменьшение длины свободной поверхности этого участка. Вблизи критического значения параметра нелинейности существует область параметров, для которых длина свободной поверхности верхней части волны превышает длину свободной поверхности в нижней части волны. Эта же область характеризуется наибольшей длиной поверхности волны (см. рис. 3в) и, следовательно, наибольшей доступной поверхностной потенциальной энергией.

Рассмотрим углы, характеризующие свободную поверхность волны. На рис. 4 представлены зависимости углов, характеризующих различные участки волны в зависимости от параметра нелинейности. На рис. 4а представлена зависимость угла при подошве волны  $\alpha$ . С увеличением амплитуды волны угол при подошве практически не меняется и близок к  $180^\circ$ . Для угла при вершине волны  $\beta$  (см. рис. 4б) похожая тенденция наблюдается только для гладких докритических волн, однако с приближением параметра нелинейности к критическому значению происходит резкое уменьшение значения угла и последующий плавный рост с увеличением амплитуды для закритических волн. Угол между линиями с максимальной крутизной фронта и среза  $\gamma$  для закритических волн совпадает с углом при вершине  $\beta$ , а в области докритических значений параметра нелинейности происходит более плавное по сравнению с углом  $\beta$  уменьшение значения. Угол, образованный линиями, соединяющими вершину волны с двумя соседними подошвами  $\varphi$  (или между линиями, соединяющими подошву с двумя соседними вершинами) также уменьшается с увеличением амплитуды в области докритических значений параметра нелинейности, при критическом значении достигает минимального значения (около  $100^\circ$ ) и для закритических волн плавно растет с увеличением амплитуды.

Описанные характеристики, а также другие величины, изображенные на рис. 1б,в можно отслеживать при постановке экспериментов для определения параметров волнового движения, точное решение которого описывается функциями Ламберта.



**Рис. 3.** Отнесенная к длине волны участка волны в зависимости от параметра нелинейности над равновесным уровнем  $L_+/\lambda$  (а); под равновесным уровнем  $L_-/\lambda$  (б). Суммарная длина участка поверхности  $L/\lambda$  (в); относительное удлинение свободной поверхности  $(L - \lambda)/\lambda$  (г).



**Рис. 4.** Характерные углы волны в зависимости от параметра нелинейности: угол при подошве  $\alpha$  (а), угол при вершине  $\beta$  (б), угол между линиями с максимальной крутизной фронта и среза  $\gamma$  (в), угол между линиями, соединяющими вершину и соседние подошвы  $\varphi$  (г).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено решение нелинейной задачи о распространении гравитационных волн вдоль свободной поверхности идеальной глубокой несжимаемой жидкости. Построены параметры волн, кото-

рые возможно использовать в эксперименте, чтобы характеризовать волны. С увеличением амплитуды волнового движения происходит заострение вершин волн и при некотором критическом значении амплитуды на вершине возникает особая точка. Критическое значение амплитуды разграничи-

вает плавные докритические волны от заостренных закритических. Исследовано влияние изменения амплитуды волнового движения на длительность и длину поверхности участков волн Ламберта для докритических и закритических амплитуд. Исследованы углы, образующиеся касательными к свободной поверхности на вершине, подошве волны, а также в точках на срезе и фронте волны, характеризующимися максимальными значениями крутизны. Получены координаты этих положений и показано, что для закритических волн эти координаты совпадают с координатами вершины волны. Предложенное описание приведено в наблюдаемых и возможных для фиксирования в эксперименте величинах.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ 124012500442-3).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лэмб Г. Гидродинамика. М.-Л.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1947.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Л.-М.: Гостехиздат, 1948.
3. Уизем Д. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
4. Филлипс О.М. Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеиздат, 1980.
5. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
6. Меоте Б.Л. Введение в гидродинамику и теорию волн на воде. Л.: Гидрометеиздат, 1974.
7. Монин А.С., Каменкович В.М., Корт В.Г. Изменчивость мирового океана. Л.: Гидрометеиздат, 1974.
8. Зубов Н.Н. Динамическая океанология. М.-Л.: Гидрометеиздат, 1947.
9. Белоножко Д.Ф. // Изв. РАН. Сер. физ. 2024. Т. 88. № 1. С. 148; *Belonozhko D.F.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2024. V. 88. No. 1. P. 127.
10. Очиров А.А. // Изв. РАН. Сер. физ. 2023. Т. 87. № 1. С. 94; *Ochirov A.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2024. V. 88. No. 1. P. 79.
11. Очиров А.А. // Изв. РАН. Сер. физ. 2024. Т. 88. № 1. С. 154; *Ochirov A.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2024. V. 88. No. 1. P. 132.
12. Абрашкин А.А., Пелиновский Е.Н. // УФН. 2022. Т. 192. № 5. С. 491; *Abrashkin A.A., Pelinovsky E.N.* // Phys. Usp. 2022. V. 65. No. 5. P. 453.
13. *Kistovich A.V., Chashechkin Yu.D.* // Water Resources. 2016. V. 43. No. 1. P. 144.
14. *Zhuravleva E.* // Phys. Fluids. 2023. V. 35. No. 1. Art. No. 117104.
15. *Zubarev N.M.* // Mathematics. 2023. V 11. No. 9. Art. No. 1999.
16. *Kistovich A.V., Chashechkin Y.D.* // Water Resources. 2018. V. 45. P. 719.
17. *Kalinichenko A.V.* // IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Engin. 2021. V. 1191. No. 1. Art. No. 012005.
18. Ильиных А.Ю. // Изв. РАН. Сер. физ. 2023. Т. 87. № 1. С. 99; *Ilinykh A.Yu.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2023. V. 87. No. 1. P. 83.
19. Запечалов А.С., Гармашов А.В. // Морск. гидрофиз. журн. 2024. Т. 40. № 1(235). С. 78.
20. Кориненко А.Е., Малиновский В.В. // Морск. гидрофиз. журн. 2023. Т. 39. № 6(234). С. 814.
21. Мельникова О.Н., Плаксина Ю.Ю., Уваров А.В. и др. // Изв. РАН. Сер. физ. 2022. Т. 86. № 7. С. 1026; *Melnikova O.N., Plaksina Yu.Yu., Uvarov A.V. et al.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2022. V. 86. No. 1. P. 852.
22. Лаппо Д.Д., Стрекалов С.С., Завьялов В.К. Нагрузки и воздействия ветровых волн на гидротехнические сооружения Теория. Инженерные методы. Расчеты. Л.: ВНИИГ, 1990.
23. Безруков Ю.Ф. Океанология. Ч. 2. Динамические явления и процессы в океане. Симферополь: ТНУ им. В.И. Вернадского, 2006.
24. *Sterlyadkin V.V., Kulikovskiy K.V., Kuzmin A.V. et al.* // J. Atmos. Ocean. Technol. 2021. V. 38. No. 8. P. 1415.

## Some characteristics of nonlinear potential surface waves in an ideal liquid

A. A. Ochirov\*, K. Yu. Lapshina

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,  
Moscow, 119526 Russia*

*\*e-mail: otchirov@mail.ru*

The potential wave motion along the free surface of a deep ideal liquid is studied. Exact solutions of the equations of motion with physically justified boundary conditions on a free surface are obtained. The shape of the free surface is studied depending on the amplitude and the characteristics of the surface are highlighted. The characteristics of waves depending on the nonlinearity parameter are investigated.

**Keywords:** ideal fluid, potential flow, wave motion, Lambert W function, nonlinear waves, characteristics of wave motion