

УДК 519.6:533.9

КРИТЕРИИ АДЕКВАТНОСТИ БЕЗЫЗЛУЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА В ЧИСЛЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ

© 2025 г. Л. В. Бородачев*

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», физический факультет, Москва, Россия

*E-mail: borodach2000@mail.ru

Поступила в редакцию 14.11.2024 г.

После доработки 03.12.2024 г.

Принята к публикации 30.12.2024 г.

Рассмотрены характерные черты дарвиновского (безызлучательного) описания электромагнитных полей. Получены критерии физической адекватности формализма в рамках самосогласованного подхода к модельному представлению нелинейных процессов разреженной плазмы. Показана реализация предложенных оценок адекватности безызлучательного приближения на базе численных исследований неустойчивости Вайбеля.

Ключевые слова: разреженная плазма, самосогласованный подход, безызлучательный предел, лагранжиан взаимодействия, неустойчивость Вайбеля

DOI: 10.31857/S0367676525040201, EDN: GUJERO

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, самосогласованный подход [1], учитывающий взаимозависимое влияние фазового распределения частиц и внутренних электромагнитных полей, весьма эффективен при изучении неравновесных состояний горячей плазмы, что обусловило его активное использование во многих фундаментальных и прикладных задачах нелинейной плазмифики. Математически он представлялся системой уравнений Власова, детально описывающих эволюцию каждой из компонент бесстолкновительной плазмы, и уравнений Максвелла, наиболее полно отражающих динамику внутренних электромагнитных полей.

Вместе с тем для низкочастотных слабoreлятивистских систем свободные электромагнитные поля излучательной природы играют второстепенную роль, поскольку малы в сравнении с самосогласованными и характеризуются существенно меньшими пространственно-временными масштабами. Очевидно, что численный анализ таких систем в рамках формализма Максвелла оказывается излишне подробным и, как следствие, весьма дорогостоящим.

В этой связи целесообразно обратиться к редуцированным полевым описаниям, из которых аппроксимация Дарвина (безызлучательный предел) [2] представляется наиболее интересной, поскольку исключает из рассмотрения свобод-

ные электромагнитные волны. Нетривиальность приближения состоит в том, что, пренебрегая запаздыванием, оно сохраняет ряд индукционных эффектов, в частности, связанных с законом Фарадея.

Указанные свойства модели Власова–Дарвина позволяют обозначить ее предметную область: слабoreлятивистские и относительно низкочастотные явления разреженной магнитоактивной плазмы, обусловленные коллективными взаимодействиями частиц.

Вместе с тем хотелось бы иметь более четкие ориентиры корректного физического приложения рассматриваемого формализма, по возможности, в виде определенных критериев. В этих целях рассмотрим аналитическое представление и характерные черты дарвиновского приближения электромагнитных полей.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ДАРВИНА

В системе СГСЕ уравнения дарвиновского представления электромагнитного поля имеют следующий вид

$$\nabla \vec{E} = 4\pi \rho, \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \vec{B} = 0, \quad (4)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_p + \vec{E}_v : \quad \nabla \times \vec{E}_p = 0, \quad \nabla \vec{E}_v = 0. \quad (5)$$

Здесь $\vec{E}_p, \vec{E}_v$ — соответственно, потенциальная (продольная) и вихревая (поперечная) составляющие электрического поля.

При этом уравнение непрерывности заряда, которое должно тождественно удовлетворяться, можно записать в модифицированном виде:

$$\nabla \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi} (\nabla \vec{E}_p) \right) = 0. \quad (6)$$

Отметим характерные моменты рассматриваемого формализма.

Прежде всего, как известно, разложение Гельмгольца, активно используемое дарвиновским представлением, неоднозначно и требует дополнительных условий для своей определенности. Этот вопрос детально рассмотрен в публикации [3] и в рамках настоящей работы не представляет особого интереса.

Основная цель, поставленная Дарвиным, состояла в получении как можно более точной функции Лагранжа для системы частиц и полей с мгновенным дальним действием. Как оказалось, при сравнительной малости отношения тепловой скорости (v) к скорости света (c) такую систему удастся описать через незапаздывающие потенциалы лагранжианом взаимодействия, точным до величин порядка $(v/c)^2$. Поэтому, структурно отвечая понятию слабого релятивизма, он не включает тормозное излучение зарядов, которое представляется членами не ниже третьего порядка малости в разложении по параметру $(v/c) \ll 1$ полной лагранжевой функции [4].

Таким образом, следуя физическому содержанию дарвиновской аппроксимации, система уравнения (1)–(5) не должна описывать свободную электромагнитную волну, т.е. электрические и магнитные поля должны носить исключительно самосогласованный характер.

Покажем это, применив операцию rot к уравнению (3). Тогда, используя известное преобразование двойного роторного произведения, получим

$$\Delta \vec{B} = -\frac{4\pi}{c} (\nabla \times \vec{J}). \quad (7)$$

Как легко видеть из уравнений (1), (2) и (7) (с учетом разложения (5)), внутреннее электромагнитное поле действительно определено лишь текущими значениями плотностей заряда и тока. Последнее, заметим попутно, обуславливает численную экономичность полевого расчета.

Наконец, убедимся, что коллективные взаимодействия разреженной слабoreлятивистской ($T \ll mc^2$) плазмы, отвечающие физическому наложению самосогласованного подхода, дарвиновский формализм описывает весьма точно.

Для этого рассмотрим эффект мгновенного дальнего действия на характерных плазменных масштабах (r_{De}, ω_{pe}), где время запаздывания можно оценить как

$$\tau_3 \approx \frac{r_{De}}{c} \ll \frac{r_{De}}{v_T} \approx \omega_{pe}^{-1}. \quad (8)$$

Следовательно, распределение частиц, движущихся со скоростями $\approx v_T$, не успевает сколько-нибудь заметно измениться на временах τ_3 . То есть по отношению к мгновенным значениям самосогласованных полей коррективы, обусловленные запаздыванием, являются исчезающе малыми поправками.

В заключение краткого обзора основных черт безызлучательного предела отметим, что внешне он отличается от полного электромагнитного описания лишь опущенной поперечной составляющей тока смещения. Этот момент весьма важен в контексте настоящей работы, поскольку представляется естественным искать условие корректности дарвиновского формализма в задачах кинетики разреженной плазмы, оценивая возможное влияние отброшенной части тока смещения на развитие того или иного плазменного процесса.

КРИТЕРИИ АДЕКВАТНОСТИ

Требуемую оценку можно получить, рассматривая вклады опущенной и оставшейся частей тока смещения в генерацию внутреннего электромагнитного поля. Для этого воспользуемся размерностным (точнее масштабным) анализом, в рамках которого будем полагать, что значимые изменения базовых величин дарвиновской системы уравнений происходят в характерных масштабах (L, T) некоторого гипотетического процесса. При этом усредненные значения $|\nabla \times \vec{u}|$ или $|\nabla \vec{u}|$ можно оценить как (u/L) , а усредненное значение $|\partial \vec{u} / \partial t|$ — как (uT) .

Тогда из уравнения (2) следует:

$$|\nabla \times \vec{E}| = |\nabla \times \vec{E}_v| \approx E_v/L; \quad |\partial \vec{B} / \partial t| \approx B/T. \quad (9)$$

И верна оценка

$$E_v \approx (BL)/(cT). \quad (10)$$

Аналогично с учетом уравнения (6) можно записать:

$$\begin{aligned} |\nabla \vec{J}| &\approx J/L; \\ \left| \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi} (\nabla \vec{E}_p) \right) \right| &= \left| \nabla \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}_p}{\partial t} \right| \approx \\ &\approx \left| \partial \vec{E}_p / \partial t \right| / (4\pi L). \end{aligned} \quad (11)$$

Откуда следует, что

$$\left| \partial \vec{E}_p / \partial t \right| \approx 4\pi J. \quad (12)$$

Далее из уравнения (3) получим с учетом оценки (12) отношения:

$$\begin{aligned} \left| \nabla \times \vec{B} \right| &\approx B/L; \\ \left| \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_p}{\partial t} \right| &\leq \left| \frac{4\pi}{c} \vec{J} \right| + \left| \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_p}{\partial t} \right| \approx \\ &\approx \left(\frac{4\pi}{c} J + \frac{4\pi}{c} J \right). \end{aligned} \quad (13)$$

И с их помощью найдем границу значений $|\vec{B}|$:

$$B \leq \frac{4\pi}{c} JL. \quad (14)$$

Наконец, используя оценку (10) и верхнюю границу $|\vec{B}|$, получим:

$$\left| \partial \vec{E}_v / \partial t \right| \approx E_v / T \approx (BL) / (cT^2) \leq 4\pi J \left(\frac{L}{cT} \right)^2. \quad (15)$$

Таким образом, с учетом выражений (12) и (15) отношение величин поперечной и продольной составляющих тока смещения имеет оценку

$$\frac{\left| \partial \vec{E}_v / \partial t \right|}{\left| \partial \vec{E}_p / \partial t \right|} \approx \left(\frac{L}{cT} \right)^2. \quad (16)$$

Данная оценка, по сути, определяет критерий физической адекватности дарвиновского приближения полей в задачах кинетики разреженной плазмы:

$$\left(\frac{L}{cT} \right)^2 \ll 1. \quad (17)$$

Действительно, в этом случае вклад поперечной составляющей тока смещения в развитие исследуемого процесса на фоне вклада его продольной составляющей исчезающе мал и результаты, полученные в рамках модели Власова–Дарвина, физически достоверны.

Подчеркнем, что анализ отношения (16) корректен лишь при безусловном удовлетворении неравенства

$$\frac{v_T}{c} \ll 1, \quad (18)$$

которое в настоящем контексте можно назвать условием (критерием) слабого релятивизма. Этот критерий адекватности вытекает из исходных физических предпосылок построения дарвиновского лагранжиана взаимодействия, но имеет отношение ко всему самосогласованному формализму.

Отметим, что возможна следующая, так сказать, волновая интерпретация найденного критерия (17).

Пусть линейный размер модельной области (l_{sys}) имеет порядок пространственного масштаба (L) процесса, а его характерное время (T) определяет некоторую, назовем ее характерной, частоту ω_{ch} .

Тогда выражение $(L/(cT))$ можно трактовать как отношение длины области моделирования к длине волны (λ) с частотой (ω_{ch}) в вакууме:

$$\left(\frac{L}{cT} \right) \approx \left(\frac{l_{\text{sys}}}{\omega_{\text{ch}}} \right). \quad (19)$$

Следовательно, использование безызлучательного предела в рамках самосогласованного подхода корректно, если линейный размер модельной системы существенно меньше длины волны с характерной частотой ($\approx 2\pi/T$) в вакууме. Подобная интерпретация полученного критерия особенно наглядна в случае численного анализа различного рода неустойчивостей. В этой связи рассмотрим, для примера, обоснование корректности модели Власова–Дарвина в реальном численном исследовании вайбелевской неустойчивости [5].

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВАЙБЕЛЯ

Как известно, анизотропное распределение электронов по скоростям в однородной разреженной плазме может вызывать спонтанное возникновение и быстрое усиление поперечного к акцентированной составляющей скорости частиц магнитного поля — электромагнитную неустойчивость Вайбеля (ВН) [6]. Имея определенную специфику проявлений в ряде областей плазмифизики [7], она характеризуется обязательным наличием существенно нелинейного режима, который и определяет пространственно-временные масштабы явления (L, T).

При этом хорошо развитая линейная теория электромагнитных неустойчивостей [8] позволяет делать количественные оценки характерных параметров ВН. В частности, найти зависимости инкремента γ от волнового числа k (при различных значениях показателя исходной анизотропии среды A) из полученного в цитируемой работе дисперсионного уравнения

$$k_x^2 c^2 - \omega^2 = \omega_{\text{pe}}^2 \left(A + (A+1) \frac{\omega}{k_x u_x} Z \left(\frac{\omega}{k_x u_x} \right) \right). \quad (20)$$

Здесь $A = (u_z^2/u_x^2 - 1)$ (анизотропное распределение электронов характеризуется отношением $u_z > u_x = u_y$ компонент тепловой скорости), $\omega_{\text{pe}} = \sqrt{4\pi n_0 q^2 / m}$ — ленгмюровская частота, а Z — так называемая дисперсионная функция [5].

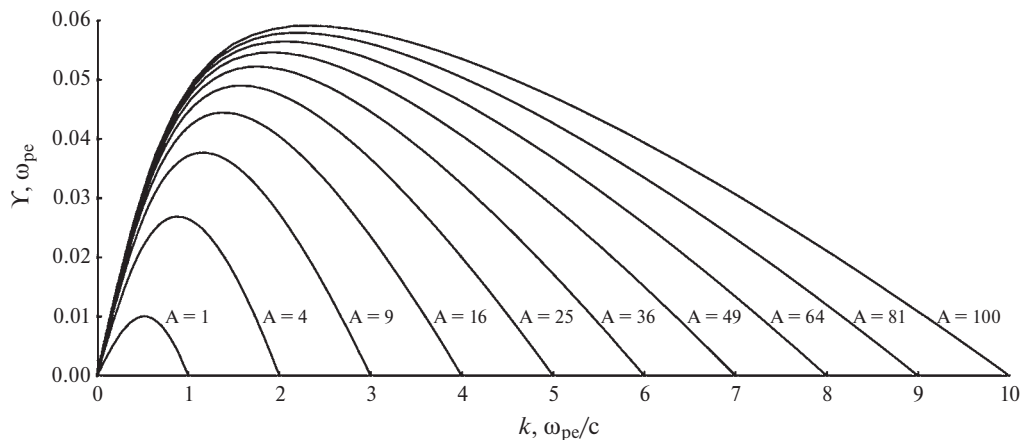


Рис. 1. Инкременты вайбелевской неустойчивости для различных A .

Неустойчивые корни уравнения (20) определяют стоячие волны с мнимой положительной величиной ω , обуславливающие развитие ВН. Они находятся в диапазоне от $k_{xc}/\omega_{pe} = 0$ до $k_{xc}/\omega_{pe} = \sqrt{A}$ для любого $A > 0$. При этом инкремент неустойчивости $\gamma = -i\omega$ имеет в этой области один максимум, что позволяет выделить наиболее активную моду (см. рис. 1).

В работе [5] задавалось равномерное пространственное распределение электронов и однозарядных ионов, имевших в силу инертности вид положительного фона. При этом компоненты тепловой скорости электронов полагались $u_z = 0.1 [c]$, $u_x = u_y = 0.0316 [c]$, что определяло исходный показатель анизотропии $A = 9$.

Численное решение уравнения (20) (см., например, [9]) для принятых значений базовых параметров давало величины $\gamma_{\max} \approx 0.037 [\omega_{pe}]$ и $k_{\max} \approx 1.2 [\omega_{pe}/c]$, что соответствовало длине волны $\lambda_{\max} \approx 5.2 [c/\omega_{pe}]$.

Полученные значения длины волны $\lambda_{\max}$ и инкремента $\gamma_{\max}$ наиболее активной моды, по сути, определяющей развитие вайбелевской неустойчивости, позволяют оценить характерные пространственно-временные масштабы процесса:

$$T \approx 1/\gamma_{\max}, \quad L \approx \lambda_{\max} \quad (21)$$

и с учетом значения акцентированной составляющей тепловой скорости найти значения параметров слабого релятивизма плазменной системы

$$(v_T/c) < (u_z/c) = 0.1 \quad (22)$$

и корректности дарвиновского приближения электромагнитных полей

$$(L/(cT))^2 \approx (\lambda_{\max} \cdot \gamma_{\max})^2 \approx 0.04. \quad (23)$$

Заметим, что отношение линейного размера модельной системы l_{sys} и длины волны с частотой

ω_{ch} в вакууме при этом имеет (в единицах c/ω_{pe}) вид

$$l_{\text{sys}} \approx \lambda_{\max} \approx 5.2 \ll \lambda_{ch} \approx cT \approx 27. \quad (24)$$

Таким образом, на основании полученных оценок можно утверждать, что результаты численного анализа неустойчивости Вайбеля в рамках самосогласованного подхода с безызлучательной (дарвиновской) аппроксимацией внутренних электромагнитных полей будут физически достоверны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный подход позволяет еще на стадии аналитического прогноза основных параметров исследуемого явления разреженной магнитоактивной плазмы получить априорную информацию о возможности использования дарвиновского представления электромагнитных полей в рамках самосогласованного формализма. Учитывая существенную численную экономичность безызлучательного предела в сравнении с полным (максвелловским) описанием, по видимому, целесообразно включение рассмотренной методики в общую постановку компьютерных экспериментов, особенно при изучении крупномасштабных плазменных процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов А.А. Теория многих частиц. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 348 с.
2. Darwin C.G. // Phil. Magazine. 1920. V. 39. P. 537.
3. Бородачев Л.В., Мингалев И.В., Мингалев О.В. // Мат. моделир. 2006. Т. 18. № 11. С. 217.
4. Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. 702 с.
5. Borodachev L.V., Kolomiets D.O. // J. Plasma Phys. 2011. V. 77. P. 277.
6. Weibel E.S. // Phys. Rev. Lett. 1959. V. 2. P. 83.
7. Davidson R.C., Hammer D.A., Haber I., Wagner C.E. // Phys. Fluids. 1972. V. 15. P. 317.
8. Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей. М.: Атомиздат, 1975.
9. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

Adequacy criteria for non-radiative limit in numerical studies of rarified plasma

L. V. Borodachev*

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Moscow, 119991 Russia

**e-mail: borodach2000@mail.ru*

The characteristic features of Darwin's (non-radiative) description of electromagnetic fields are considered. Criteria for the physical adequacy of the formalism are obtained within the framework of a self-consistent approach to the model representation of nonlinear processes of rarefied plasma. The implementation of the proposed estimates of the adequacy of the non-radiative approximation based on numerical researches of the Weibel instability.

Keywords: rarefied plasma, self-consistent approach, non-radiative limit, Lagrangian interaction, Weibel instability