



ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

# СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ



[www.sciencejournals.ru](http://www.sciencejournals.ru)

В журнале "Известия Российской академии наук. Серия физическая" публикуются полнотекстовые статьи, подготовленные по материалам лучших докладов, рекомендованных программными комитетами научных конференций, симпозиумов и совещаний, созываемых Российской академией наук.



# СОДЕРЖАНИЕ

Том 87, номер 1, 2023

## Волновые явления: физика и применения

|                                                                                                                                                                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| (2D + 1) оптические вихри в туннельно-связанном волноводе<br><i>Б. С. Брянецев, А. А. Калинович, И. Г. Захарова</i>                                                                                                    | 6  |
| Передаточные функции пропускающих многослойных неоднородных голографических фотополимерных жидкокристаллических дифракционных структур<br><i>С. Н. Шарангович, В. О. Долгирев</i>                                      | 12 |
| Оптический дифференциатор второго порядка на основе композитной структуры металл–диэлектрик–металл<br><i>А. И. Кашапов, Е. А. Безус, Д. А. Быков, Л. Л. Досколович</i>                                                 | 19 |
| Оптико-терагерцевые солитоны с наклонными волновыми фронтами системы уравнений типа Захарова–Буссинеска<br><i>С. В. Сазонов, Н. В. Устинов</i>                                                                         | 25 |
| Взаимодействие уединенных электромагнитных волн в двумерной графеновой сверхрешетке<br><i>О. Ю. Бабина, С. Ю. Глазов, И. Н. Федулов</i>                                                                                | 30 |
| Управление проводимостью двумерной графеновой сверхрешетки поперечными электрическими полями<br><i>С. Ю. Глазов, Н. Е. Мещерякова, И. А. Подгорная</i>                                                                 | 34 |
| Эффект увлечения электронов бризером в сверхрешетке на основе графена<br><i>П. В. Бадикова, Д. В. Завьялов, В. И. Конченков, С. В. Крючков</i>                                                                         | 38 |
| Флоке-спектр дираковского кристалла в поле импульсного излучения<br><i>С. В. Крючков, Е. И. Кухарь, Д. А. Силиванов</i>                                                                                                | 44 |
| Радиофотонный оптимальный фильтр для быстрой обработки сверхширокополосного входного сигнала<br><i>В. В. Кулагин, В. В. Валуев, Д. Буркитбаев, В. Н. Корниенко, В. А. Черепенин</i>                                    | 49 |
| Умножение частоты в сильноточном релятивистском гиротроне для получения мощного излучения терагерцевого диапазона<br><i>А. Н. Леонтьев, Р. М. Розенталь, Н. С. Гинзбург, И. В. Зотова, А. М. Малкин, А. С. Сергеев</i> | 56 |
| Трансивер цифровой фазированной антенной решетки с многолучевой диаграммой направленности<br><i>Лу Гомин, П. Н. Захаров, А. Ф. Королев</i>                                                                             | 61 |
| Дисперсионные характеристики сверхразмерных ламп бегущей волны субмиллиметрового диапазона<br><i>В. Е. Родякин, В. М. Пикунов, В. Н. Аксенов</i>                                                                       | 66 |
| Расчет числа каналов проводимости в одноэлектронной резервуарной сети на металлоорганических каркасных полимерах<br><i>С. А. Панкратов, А. А. Паршинцев, Д. Е. Преснов, В. В. Шорохов</i>                              | 71 |
| Восстановление структуры объекта с помощью корреляционной обработки акустического поля активных шумовых источников<br><i>К. В. Дмитриев</i>                                                                            | 79 |
| Особенности ультразвуковой визуализации слоистых объектов<br><i>Ю. С. Петронюк, С. А. Титов, А. Н. Богаченков, В. М. Левин, И. Г. Григорьева</i>                                                                       | 84 |

|                                                                                                                                                                                                                                               |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Клиновые акустические волны в трещине, заполненной текучей средой<br><i>В. Г. Можяев</i>                                                                                                                                                      | 89  |
| Двумерное волновое движение в вязкой однородной жидкости<br><i>А. А. Очиров</i>                                                                                                                                                               | 94  |
| Волны и пузыри импакта капли<br><i>А. Ю. Ильиных</i>                                                                                                                                                                                          | 99  |
| Исследование магнитной гетероструктуры MgO/CoFeB/Ta гармоническим методом<br><i>А. С. Трушин, Г. А. Кичин, К. А. Звездин</i>                                                                                                                  | 105 |
| Эволюция мод магнитного туннельного перехода при изменении направления внешнего магнитного поля<br><i>М. Д. Шканакина, Г. А. Кичин, П. Н. Скирджов, М. Г. Путря, К. А. Звездин</i>                                                            | 109 |
| Исследование возможности существования мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора<br><i>Е. В. Евстифеев, О. И. Москаленко</i>                                                     | 115 |
| Исследование возможности существования мультистабильности в режиме перемежающейся фазовой синхронизации в ансамбле однонаправленно связанных систем Ресслера<br><i>В. А. Ханадеев, А. Д. Плотникова, О. И. Москаленко</i>                     | 120 |
| Анализ когнитивной нагрузки в задаче Стернберга с использованием окулографии<br><i>Н. А. Брусинский, А. А. Бадарин, А. В. Андреев, В. М. Антипов, С. А. Куркин, А. Е. Храмов</i>                                                              | 125 |
| Новый электроэнцефалографический маркер эффективности решения когнитивной задачи<br><i>Н. М. Смирнов, А. А. Бадарин, С. А. Куркин, А. Е. Храмов</i>                                                                                           | 129 |
| <hr/>                                                                                                                                                                                                                                         |     |
| Моделирование пространственной структуры волнового поля аврорального хисса и сравнение с результатами наземных наблюдений<br><i>А. С. Никитенко, Ю. В. Федоренко, Ю. Маннинен, О. М. Лебедь, Е. Б. Бекетова</i>                               | 134 |
| Математическая модель глобального ионосферного электрического поля, создаваемого грозами<br><i>В. В. Денисенко, М. Дж. Райкрофт, Р. Дж. Харрисон</i>                                                                                          | 141 |
| Особенности обработки данных эксперимента по исследованию протон-протонных корреляций в реакции $d + {}^1\text{H} \rightarrow n + p + p$<br><i>В. В. Мицук, А. А. Афонин, А. А. Каспаров, В. М. Лебедев, М. В. Мордовской, А. В. Спасский</i> | 148 |
| <hr/>                                                                                                                                                                                                                                         |     |

# Contents

Vol. 87, No. 1, 2023

## Wave Phenomena: Physics and Applications

|                                                                                                                                                                                                                  |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| (2D + 1) optical vortices in a tunnel-coupled waveguide<br><i>B. S. Bryantsev, A. A. Kalinovich, I. G. Zakharova</i>                                                                                             | 6  |
| Transmission functions of transmissive multilayer inhomogeneous holographic photopolymer liquid crystal diffraction structures<br><i>S. N. Sharangovich, V. O. Dolgirev</i>                                      | 12 |
| Second-order optical differentiator based on a composite metal–dielectric–metal structure<br><i>A. I. Kashapov, E. A. Bezus, D. A. Bykov, L. L. Doskolovich</i>                                                  | 19 |
| Optical-terahertz solitons with tilted wave fronts of system of the Zakharov–Boussinesq type equations<br><i>S. V. Sazonov, N. V. Ustinov</i>                                                                    | 25 |
| Interaction of solitary electromagnetic waves in a 2D graphene superlattice<br><i>O. Yu. Babina, S. Yu. Glazov, I. N. Fedulov</i>                                                                                | 30 |
| Two-dimensional graphene superlattice conductivity control by transverse electric fields<br><i>S. Yu. Glazov, N. E. Mescheryakova, I. A. Podgornaya</i>                                                          | 34 |
| The effect of entrainment of electrons by a breather in a graphene-based superlattice<br><i>P. V. Badikova, D. V. Zav'yalov, V. I. Konchenkov, S. V. Kryuchkov</i>                                               | 38 |
| Floquet spectrum of Dirac crystal in the field of pulsed radiation<br><i>S. V. Kryuchkov, E. I. Kukhar, D. A. Silivanov</i>                                                                                      | 44 |
| Microwave photonics matched filter for fast processing of ultra-wideband input signal<br><i>V. V. Kulagin, V. V. Valuev, D. Burkitbaev, V. N. Kornienko, V. A. Cherepenin</i>                                    | 49 |
| Frequency multiplication in a high-current relativistic gyrotron for obtaining high-power THz-band radiation<br><i>A. N. Leontiev, R. M. Rozental, N. S. Ginzburg, I. V. Zotova, A. M. Malkin, A. S. Sergeev</i> | 56 |
| Digital phased antenna array transceiver with multibeam radiation pattern<br><i>Lu Guoming, P. N. Zakharov, A. F. Korolev</i>                                                                                    | 61 |
| Dispersion characteristics of oversized travelling wave tubes of the submillimeter wave range<br><i>V. E. Rodyakin, V. M. Pikunov, V. N. Aksenov</i>                                                             | 66 |
| Calculation of the number of conduction channels in a single-electron reservoir network on metal-organic framework polymers<br><i>S. A. Pankratov, A. A. Parshintsev, D. E. Presnov, V. V. Shorokhov</i>         | 71 |
| Object structure reconstruction using correlation processing of the acoustic field of active noise sources<br><i>K. V. Dmitriev</i>                                                                              | 79 |
| Features of ultrasonic visualization of layered objects<br><i>Y. S. Petronyuk, S. A. Titov, A. N. Bogachenkov, V. M. Levin, I. G. Grigorieva</i>                                                                 | 84 |

|                                                                                                                                                                                 |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Wedge acoustic waves in a fluid-filled crack                                                                                                                                    |     |
| <i>V. G. Mozhaev</i>                                                                                                                                                            | 89  |
| Two-dimensional wave motion in a viscous homogeneous liquid                                                                                                                     |     |
| <i>A. A. Ochirov</i>                                                                                                                                                            | 94  |
| Waves and bubbles of drop impact                                                                                                                                                |     |
| <i>A. Yu. Ilinykh</i>                                                                                                                                                           | 99  |
| Study of magnetic heterostructure MgO/CoFeB/Ta using the harmonic method                                                                                                        |     |
| <i>A. S. Trushin, G. A. Kichin, K. A. Zvezdin</i>                                                                                                                               | 105 |
| Evolution of magnetic tunnel junction's modes for different directions of an external magnetic field                                                                            |     |
| <i>M. D. Shkanakina, G. A. Kichin, P. N. Skirdkov, M. G. Putrya, K. A. Zvezdin</i>                                                                                              | 109 |
| Study of the possibility of existence of multistability near the boundary of generalized synchronization in systems with a complex attractor topology                           |     |
| <i>E. V. Evstifeev, O. I. Moskalenko</i>                                                                                                                                        | 115 |
| Investigation of the possibility of the existence of multistability in the regime of intermittent phase synchronization in ensemble of unidirectionally coupled Rössler systems |     |
| <i>V. A. Khanadeev, A. D. Plotnikova, O. I. Moskalenko</i>                                                                                                                      | 120 |
| Analysis of cognitive load in the Sternberg problem: eye-tracker study                                                                                                          |     |
| <i>N. A. Brusinsky, A. A. Badarin, A. V. Andreev, V. M. Antipov, S. A. Kurkin, A. E. Hramov</i>                                                                                 | 125 |
| A new electroencephalography marker of the cognitive task performance                                                                                                           |     |
| <i>N. M. Smirnov, A. A. Badarin, S. A. Kurkin, A. E. Hramov</i>                                                                                                                 | 129 |
| <hr/>                                                                                                                                                                           |     |
| Modeling of the auroral hiss spatial structure and comparison with the observed results                                                                                         |     |
| <i>A. S. Nikitenko, Yu. V. Fedorenko, J. Manninen, O. M. Lebed, E. B. Beketova</i>                                                                                              | 134 |
| Mathematical model of the global ionospheric electric field generated by thunderstorms                                                                                          |     |
| <i>V. V. Denisenko, M. J. Rycroft, R. G. Harrison</i>                                                                                                                           | 141 |
| Features of data processing of the study experiment of proton-proton correlations in the $d + {}^1\text{H} \rightarrow n + p + p$ reaction                                      |     |
| <i>V. V. Mitcuk, A. A. Afonin, A. A. Kasparov, V. M. Lebedev, M. V. Mordovskoy, A. V. Spassky</i>                                                                               | 148 |
| <hr/>                                                                                                                                                                           |     |

# **Волновые явления: физика и применения**

Редактор тематического выпуска  
канд. физ.-мат. наук **А. Н. Калиш**

УДК 535.03:519.06

## (2D + 1) ОПТИЧЕСКИЕ ВИХРИ В ТУННЕЛЬНО-СВЯЗАННОМ ВОЛНОВОДЕ

© 2023 г. Б. С. Брянтцев<sup>1</sup>, \*, А. А. Калинович<sup>1</sup>, И. Г. Захарова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, Москва, Россия

\*E-mail: brisbryantsev@mail.ru

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

С помощью компьютерного моделирования исследован процесс формирования и распространения вихревых солитонов в туннельно-связанном волноводе с кубической нелинейностью в случае аномальной дисперсии. Сделано предположение, что получение стабильных решений возможно из-за введения в структуру аналога спин-орбитальной связи, реализующейся в бинарных бозе-эйнштейновских конденсатах.

DOI: 10.31857/S0367676522700016, EDN: JGLUAL

### ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие исследователей привлекают структуры, называемые вихревыми оптическими солитонами или вихрями. Оптическим вихрем является солитон, в волновом фронте которого содержится фазовая сингулярность. При этом он имеет характерное распределение интенсивности (например, похожее на кольцо) и фазы (в виде спирали). Исследования солитонов, в том числе, имеющих фазовую сингулярность, проводятся, в основном, в средах с керровской (кубической) нелинейностью. Обзор современного состояния исследований оптических вихревых структур приведен в статье [1].

Работа Б.А. Маломеда [1] посвящена рассмотрению последних теоретических и экспериментальных результатов, полученных при изучении двумерных и трехмерных солитонов, обладающих орбитальным угловым моментом. Двумерные и трехмерные солитоны, также называемые световыми пулями, в отличие от одномерных, которые обычно стабильны, подвержены неустойчивостям, вызванным эффектами, возникающими в кубически нелинейных средах. Соответственно главной задачей, стоящей перед исследователем оптических многомерных солитонов является поиск физических сред и моделей, в которых световые пули могут распространяться стабильно. Вместе с уже известными методами стабилизации солитонов Б.А. Маломед описывает две относительно новые возможности, возникшие благодаря исследованию процессов, происходящих в бозе-эйнштейновских конденсатах (БЭК). Первую из них, обнаружили в гибридной модели БЭК, описываемой системой из двух уравнений Гросс-

Питаевского, где уравнения были связаны между собой микроволновым полем через магнитно-дипольный переход [2]. В рамках данной модели исследователям удалось добиться стабилизации двумерных вихревых солитонов. Более того, как показали авторы [2], в гибридной модели БЭК вихревые солитоны могут обладать достаточно высоким топологическим зарядом, при этом сохраняя свою устойчивость. Вторая идея стабилизации импульсов/пучков стала основой для настоящей работы и будет описана ниже.

Вихревые солитоны, а также импульсы/пучки, с помощью которых они генерируются, имеют множество практических применений: оптические системы связи, захват и перемещение частиц вихревыми пучками, микроскопия с высоким разрешением и другие [3]. Для полноценного использования оптических солитонов с фазовой сингулярностью требуется преодолеть проблему азимутальной неустойчивости, характерную для пучков, обладающих орбитальным угловым моментом. Азимутальная неустойчивость ведет к распаду оптических вихрей на некоторое количество фундаментальных солитонов, которые также являются неустойчивыми в кубически нелинейных средах. Для стабилизации вихрей существует несколько способов, например, использование сред с конкурирующими нелинейностями [4, 5], сред с захватывающими потенциалами [6] или сред с нелокальной нелинейностью [7]. Новую возможность преодоления азимутальной неустойчивости обнаружили в бинарных БЭК. Стабильные двумерные и трехмерные оптические вихри были получены в БЭК с (псевдо) спин-орбитальной связью (СОС), которая является эффективной

имитацией СОС, порождаемой связью магнитного момента электрона с магнитным полем, создаваемым собственным электростатическим полем ионной решетки [8], в полупроводниках. Авторы [9] использовали оптическую аналогию СОС в структуре, представляющей собой двухжильный волновод с керровской нелинейностью, для стабилизации фундаментальных двумерных солитонов.

В настоящей работе мы изучаем возможность использования аналога оптической СОС [9] для стабилизации двумерных оптических вихрей.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Мы рассматриваем распространение оптических пучков в двухжильном волноводе с фокусирующей кубичной нелинейностью и аномальной дисперсией групповых скоростей. Из-за небольшой модуляции показателя преломления происходит взаимное проникновение полей между жилами за счет туннельного эффекта. Такой волновод можно представить, как два связанных волновода, и описать двумя связанными НУШ, которые выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_1}{\partial z} &= \frac{i}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) q_1 + i |q_1|^2 q_1 + \left( ic - \delta \frac{\partial}{\partial t} \right) q_2 + i \beta q_1, \\ \frac{\partial q_2}{\partial z} &= \frac{i}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) q_2 + i |q_2|^2 q_2 + \left( ic - \delta \frac{\partial}{\partial t} \right) q_1 - i \beta q_2.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь  $q_{1,2}$  — комплексные амплитуды пучков в первом и втором волноводах, поперечная координата  $x$  и продольная координата  $z$  нормированы, соответственно, на ширину пучка  $x_0$  и дифракционную длину  $L_{diff} = kx_0^2$ , где  $k$  — волновое число,  $t$  — локальное время, нормированное на величину  $(t_0 = (L_{diff} |\partial^2 k / \partial \omega^2|)^{1/2})$ . За аналог СОС, названный в [9] связывающей дисперсией (СД), отвечает коэффициент  $\delta \approx (c/t_0) [2/\omega + \chi_l^{-1} \partial \chi_l / \partial \omega]$ , где  $\chi_l$  — амплитуда модуляции диэлектрической проницаемости,  $c$  — величина линейной связи между волноводами,  $\beta$  описывает разность показателя преломления в волноводах.

Система (1) обладает следующими интегралами движения:

$$U = \iint (|q_1|^2 + |q_2|^2) dx dt, \quad (2)$$

$$\begin{aligned}H &= \iint \left[ \beta (|q_2|^2 - |q_1|^2) - c Re \left( q_1 q_2^* + q_2 q_1^* \right) + \right. \\ &\quad \left. + \delta Im \left( q_1^* \frac{\partial q_2}{\partial t} + q_2^* \frac{\partial q_1}{\partial t} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1,2} (| \partial q_n / \partial x |^2 + | \partial q_n / \partial t |^2 - |q_n|^4) / 2 \right] dx dt,\end{aligned}\quad (3)$$

где (2) — закон сохранения энергии, а (3) — гамильтониан.

На вход волновода подаются импульсы-пучки, содержащие пространственно-временные оптические вихри. Начальные условия в этом случае имеют вид:

$$q_{1,2}(x, t)|_{z=0} = A_{10,20} \exp(x^2 + t^2 + i\phi), \quad (4)$$

где  $\phi = \arg(x + it)$ ,  $A_{10,20}$  — входные значения амплитуды импульсов-пучков в первом и втором волноводе, соответственно.

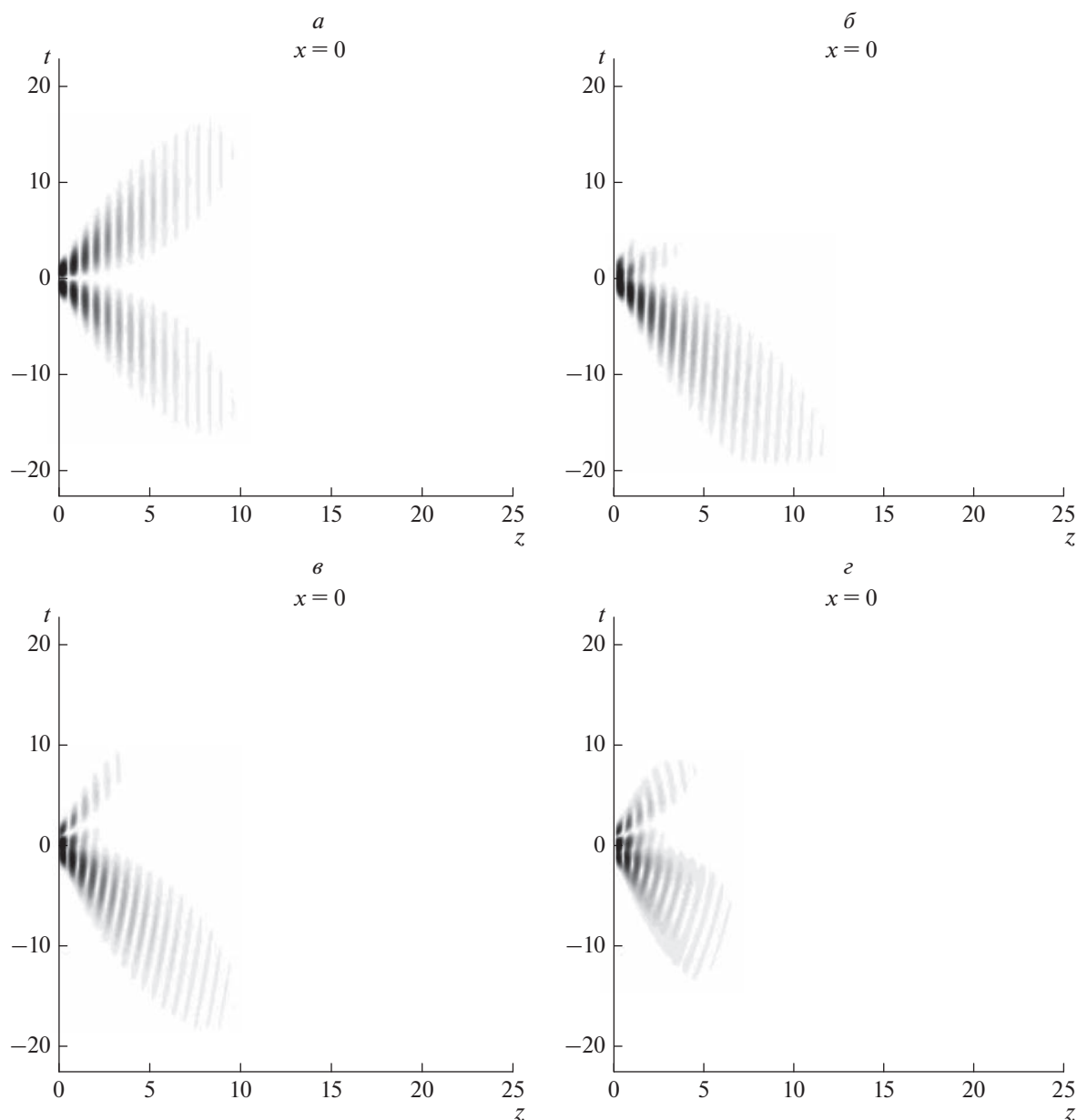
Мы проводили компьютерное моделирование на основе системы (1) совместно с начальными условиями (4), используя численный псевдоспектральный метод, реализуемый с помощью итераций. На каждом шаге по  $z$  проводилось преобразование комплексных амплитуд  $q_{1,2}$  в Фурье-образы, проводился расчет новой итерации и затем обратно преобразовывался Фурье-преобраз. Данный процесс проводился до тех пор, пока максимальная разница между предыдущей и новой итерациями не превышала некоторого заданного числа, обычно порядка  $10^{-10}$ – $10^{-12}$ . При этом контролировалось сохранение интегралов (2) и (3). В качестве результата расчета получалась зависимость изменения комплексной амплитуды от продольной координаты  $z$ . Анализировалось сохранение формы импульса-пучка и наличие оптических вихрей в нем.

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Перед рассмотрением процессов формирования и распространения вихревых солитонов в двухжильном волноводе, мы рассчитали стабильное солитонное решение в такой структуре, основываясь на данных статьи [9]. При значениях  $A_{10} = 1.75$ ,  $A_{20} = 0$ ,  $\delta = 2$ ,  $c = 1$ ,  $\beta = 3$  происходит формирование и затем стабильное распространение фундаментального солитона. Далее мы использовали эти параметры, как параметры пробного решения вида (4), запускаемого в среду.

На вход первого волновода был подан импульс-пучок с пространственно-временным оптическим вихрем вида (4), в результате во время распространения, благодаря линейной связи волноводов структуры, во втором волноводе генерируется импульс-пучок, который также имеет особенности волнового фронта. В расчетах использованы следующие параметры:  $A_{10} = 1.75$ ,  $A_{20} = 0$ ,  $\delta = 0$ ,  $c = 1$ ,  $\beta = 5$ . При  $\delta = 0$  в системе отсутствует СД, импульсы-пучки в обеих жилах разрушаются из-за не скомпенсированного влияния дифракции и дисперсии (рис. 1а). При постепенном увеличении  $\delta$  (с шагом 0.5), в системе начинает действовать СД, импульс-пучок продолжает расширяться в пространстве и времени, но с другим



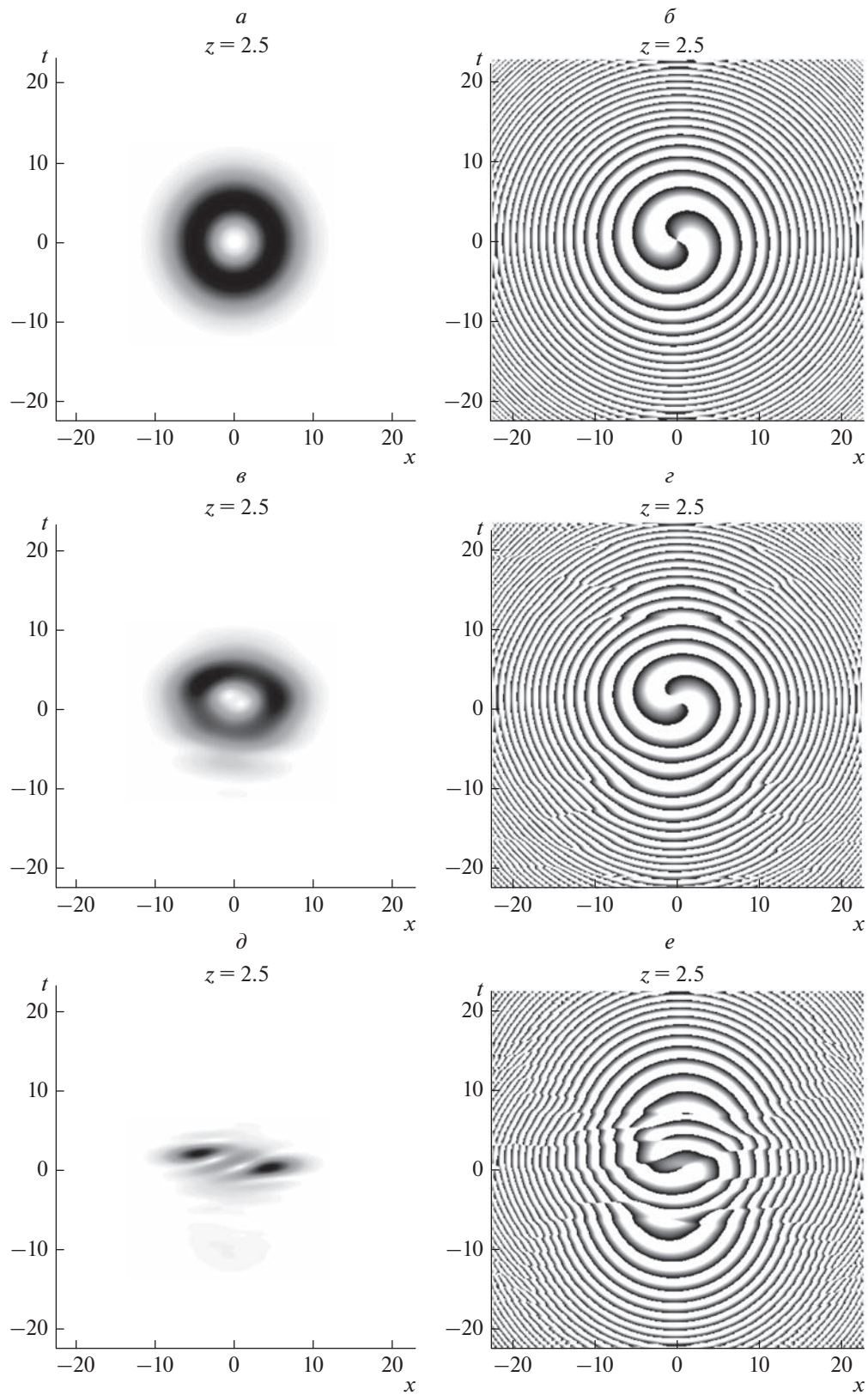


**Рис. 1.** Профиль амплитуды в  $tz$ -плоскости для импульса-пучка во втором волноводе для разных значений  $\delta = 0$  (а), 0.5 (б), 1 (в), 1.5 (г) при постоянных  $c = 1$ ,  $\beta = 5$ ,  $A_{10} = 1.75$ ,  $A_{20} = 0$ .

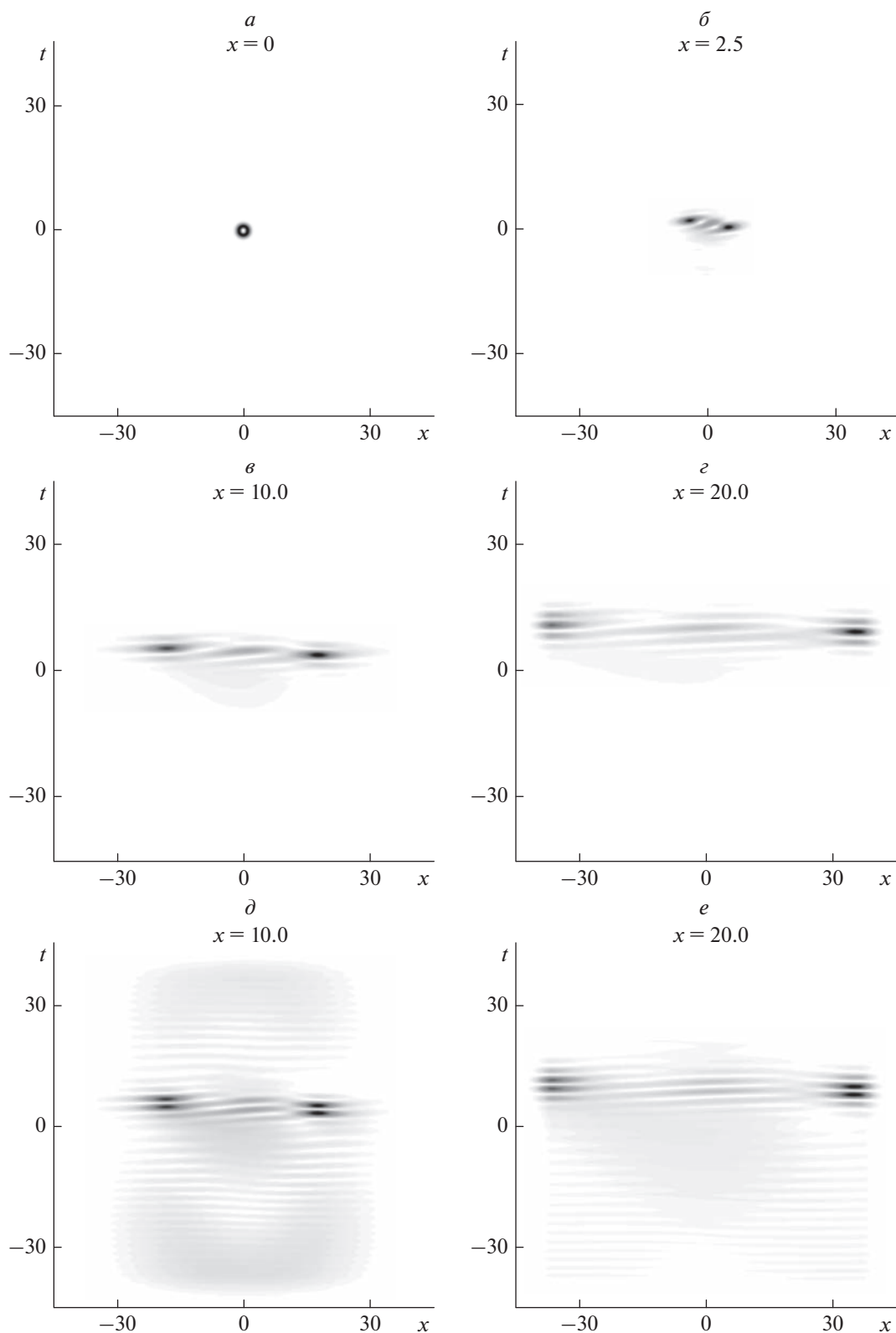
“паттерном” распада (рис. 1а–1г). Распределение амплитуды и фазы в плоскости  $xt$  также меняется с ростом  $\delta$  (рис. 2). Можно видеть, что при  $\delta = 0$  и  $\delta = 1$  импульс-пучок сохраняет кольцевую структуру на расстоянии двух нелинейных длин (рис. 2а и 2в). Фазовая особенность при этом также сохраняется (рис. 2б и 2г). При  $\delta = 2$  импульс-пучок конденсируется в два больших и несколько небольших локализаций (рис. 2д), причем, фазовый фронт сохраняет сложную структуру (рис. 2е). Можно видеть возникновение множества пар оптических вихрей низкой интенсивно-

сти, но солитонный характер распространения нарушается.

При вариации других параметров ( $c, \beta$ ) форма импульсов-пучков в первом и втором волноводе изменяется, но они распадаются на несколько небольших быстро затухающих кластеров. При достаточно высоком значении амплитуды начальный вихревой импульс-пучок в первом волноводе распадается на фундаментальные солитоны, которые распространяются без изменений в своей форме на всей дистанции распространения (рис. 3а–3г). Фундаментальные солитоны в пер-



**Рис. 2.** Распределение амплитуды ( $a, в, д$ ) и фазы ( $б, г, е$ ) импульса-пучка в первом волноводе при разных значениях параметра  $\delta = 0$  ( $a, б$ ),  $1$  ( $в, г$ ),  $2$  ( $д, е$ ) при постоянных  $c = 1$ ,  $\beta = 3$ ,  $A_{10} = 1.75$ ,  $A_{20} = 0$ .



**Рис. 3.** Распределение амплитуды для импульса-пучка в первом (*a–г*) и втором (*д, е*) волноводе в различных точках вдоль продольной координаты  $z = 0$  (*a*), 2.5 (*б*), 10 (*в, д*), 20 (*г, е*) при постоянных  $c = 1$ ,  $\beta = 3$ ,  $\delta = 2$ ,  $A_{10} = 3.5$ ,  $A_{20} = 0$ .

вом волноводе также генерируют пары солитонов во втором волноводе, которые остаются стабильными на всей дистанции распространения (рис. 3д и 3е).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проанализировано распространение оптических вихревых импульсов-пучков в системе двух туннельно-связанных кубично-нелинейных волноводов. С помощью численного моделирования показано, что вихревые солитоны в данном случае неустойчивы при различных комбинациях амплитуды модуляции диэлектрической проницаемости, величины линейной связи между волноводами и разности показателя преломления в волноводах. Однако импульсы-пучки сохраняют пространственно-временную вихревую структуру на протяжении нескольких дисперсионных и дифракционных длин.

Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной

школы Московского государственного университета “Фотонные и квантовые технологии. Цифровая медицина”.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Malomed B.A.* // Physica D. 2019. V. 399. P. 108.
2. *Qin J., Dong G., Malomed B.A.* // Phys. Rev. A. 2016. V. 94. Art. No. 053611.
3. *Shen Y., Wang X., Xie Z. et al.* // Light Sci. Appl. 2019. V. 8. P. 90.
4. *Falcão-Filho E.L., de Araújo C.B., Boudebs G. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2013. V. 110. Art. No. 013901.
5. *Reyna A.S., Jorge K.C., de Araújo C.B.* // Phys. Rev. A. 2014. V. 90. Art. No. 063835.
6. *Mihalache D., Mazilu D., Malomed B.A. et al.* // Phys. Rev. A. 2006. V. 73. Art. No. 043615.
7. *Crasovan L.-C., Torres J.P., Mihalache D. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. Art. No. 063904.
8. *Bychkov Y.A., Rashba E.I.* // J. Phys. C. 1984. V. 17. P. 6039.
9. *Kartashov Y.V., Malomed B.A., Konotop V.V. et al.* // Opt. Lett. 2015. V. 40. No. 6. P. 1045.

### (2D + 1) optical vortices in a tunnel-coupled waveguide

**B. S. Bryantsev<sup>a,\*</sup>, A. A. Kalinovich<sup>a</sup>, I. G. Zakharova<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: brisbryantsev@mail.ru*

The process of formation and propagation of vortex solitons in a tunnel-coupled waveguide with cubic nonlinearity in the case of anomalous dispersion is investigated by computer modeling methods. Obtaining stable solutions could be possible due to the introduction into the structure of an analogue of the spin-orbit coupling realized in binary Bose–Einstein condensates.

УДК 535.421

# ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ПРОПУСКАЮЩИХ МНОГОСЛОЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ГОЛОГРАФИЧЕСКИХ ФОТОПОЛИМЕРНЫХ ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ДИФРАКЦИОННЫХ СТРУКТУР

© 2023 г. С. Н. Шарангович<sup>1</sup>, \*, В. О. Долгирев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники”, Томск, Россия

\*E-mail: shr@tusur.ru

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Представлена новая аналитическая модель дифракции плоских квазимонохроматических световых пучков на пространственно-неоднородных многослойных дифракционных структурах, сформированных в фотополимерном материале с нематическими жидкими кристаллами, имеющих плавную оптическую неоднородность по толщине слоев. Показано, что при использовании электрического поля, приложенного на дифракционные слои, содержащие фотополимерную композицию с высокой долей содержания жидкокристаллической компоненты, происходит трансформация селективного отклика с существенным смещением угловой селективности.

DOI: 10.31857/S0367676522700028, EDN: JGPCXN

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время многослойные неоднородные голографические дифракционные структуры (МНГДС) привлекают свое внимание множество исследователей своими уникальными дифракционными характеристиками [1–11]. Селективный отклик таких структур отличается от стандартных одиночных голографических дифракционных структур (ГДС) наличием локальных максимумов, заключенных в общий контур селективности, который при этом аналогичен одиночной ГДС [3–6]. Варьируя соотношением толщин буферных и дифракционных слоев, а также их количеством, возможно изменять вид селективного отклика [3–6, 12–14]. Данная особенность позволяет рассматривать данные структуры, например, в качестве элементов спектральных фильтров или же для генерации последовательности фемтосекундных лазерных импульсов [7–11].

В предыдущей работе [14] была продемонстрирована возможность управления дифракционными характеристиками МНГДС, сформированных в капсулированных полимером жидких кристаллах (КПЖК), с помощью внешнего электрического воздействия. При электрическом воздействии на определенные дифракционные слои появлялась возможность “отключать” дифракцию на необыкновенных собственных волнах, что в итоге приводило к трансформации селективного отклика на выходе всей МНГДС. Следовательно, на основе таких структур появляется возможность построения уже электрически управляемых

дифракционных оптических элементов для спектральной фильтрации оптического излучения.

Однако, проведенные исследования с КПЖК показывают, что среда является оптически однородной, происходит полное разделение фаз, и при управлении внешним электрическим полем директор капсул жидких кристаллов (ЖК) поворачивается по толщине слоев ГДС одинаково. При рассмотрении же случая, когда концентрация ЖК достаточно велика (более 90%), среда имеет плавную оптическую неоднородность [15, 16], что необходимо учитывать при решении задачи дифракции.

Таким образом, целью данной работы является разработка аналитической модели дифракции света на МНГДС в ФПМ-ЖК, которые имеют плавную оптическую неоднородность по толщине слоев.

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

При значительно большей концентрации ЖК (более 90%) по сравнению с фотополимерным материалом (ФПМ), их ориентация определяется границами дифракционного слоя и описывается уравнением Фредерикса [15, 16]:

$$\frac{1}{\xi_E(E)} \left( \frac{d_n}{2} + y \right) = \int_0^{\varphi(\vec{r}, E)} \left( \sin^2 \varphi_m(\vec{r}, E) - \sin^2 \varphi \right)^{-1/2} d\varphi, \quad (1)$$

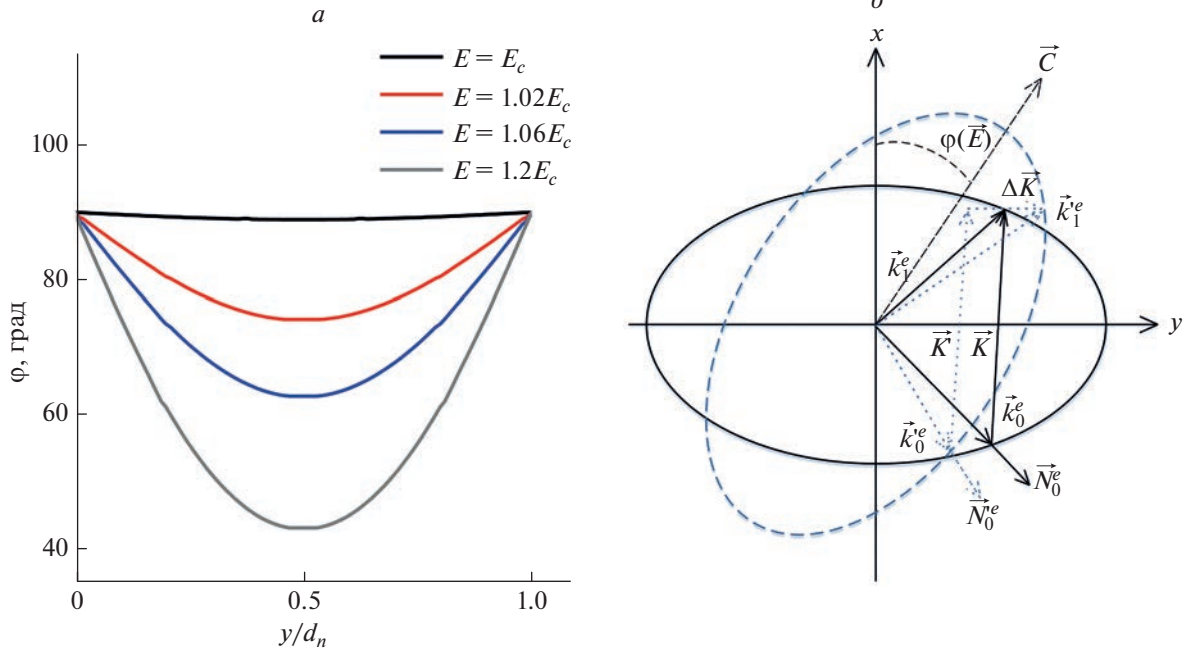


Рис. 1. Зависимость угла поворота директора ЖК по толщине ФПМ-ЖК слоя (а) и векторная диаграмма дифракции (б).

где  $\varphi_m(\vec{r}, E)$  и  $\varphi(\vec{r}, E)$  определяют максимальный угол и угол поворота директора ЖК по глубине слоя,  $\xi_E(E) = \sqrt{4\pi K_{33}/\Delta\epsilon^n}/E$  является электрически когерентной длиной,  $K_{33}$  задает коэффициент упругости ЖК,  $d_n$  является толщиной дифракционного слоя,  $n$  является номером слоя,  $\Delta\epsilon^n = \epsilon_{LC}^{o,n} - \epsilon_{LC}^{e,n}$ ,  $\epsilon_{LC}^{e,n}$  и  $\epsilon_{LC}^{o,n}$  являются компонентами тензора диэлектрической проницаемости слоев, измеренные при продольной и поперечной ориентации директора ЖК соответственно.

Для начала поворота директора ЖК необходимо достичь уровня критической напряженности Фредерикса, которое определяется как [14–16]:

$$E_c = \pi/d_n \sqrt{4\pi K_{33}/\Delta\epsilon}. \quad (2)$$

Для демонстрации причины возникновения плавной оптической неоднородности по глубине ФПМ-ЖК слоя, на рис. 1а приведен численный расчет угла поворота директора ЖК от прикладываемого внешнего электрического поля. Из представленного рисунка хорошо видно, что угол поворота директора ЖК имеет разные значения по глубине дифракционного слоя, что в итоге и обуславливает оптическую неоднородность среды. На рис. 1б также продемонстрирована векторная диаграмма дифракции света на необыкновенных волнах при изменении угла поворота директора ЖК.

Учитывая угол поворота директора ЖК из выражения (1), тензор диэлектрической проницае-

мости для  $n$ -го слоя с ФПМ-ЖК записывается как [16]:

$$\epsilon^n = (1 - \rho)(\epsilon_p^n \cdot \hat{I} + \Delta\epsilon_p^n) + \rho(\epsilon_{LC}^n + \Delta\epsilon_{LC}^n), \quad (3)$$

где  $\rho$  – доля ЖК в слое,  $\hat{I}$  – единичный тензор,  $\epsilon_p^n = (n_p)^2$  – диэлектрическая проницаемость полимера,  $\epsilon_{LC}^n = \epsilon_o^n \hat{I} + \Delta\epsilon^n \vec{C}\vec{C}$  – тензор диэлектрической проницаемости ЖК,  $\vec{C}$  – директор ЖК,  $n = 1 \dots N$ ,  $N$  – количество слоев.

Изменение тензора диэлектрической проницаемости можно представить в виде ряда Фурье по пространственным гармоникам решеток, учитывая, что  $\Delta\epsilon_p^n \delta \ll \epsilon_p^n$  и  $\Delta\epsilon_{LC}^n \delta \ll \epsilon_{LC}^n$ :

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon_p^n &= \Delta\epsilon_{0,p}^n + \sum_{j=1}^N \Delta\epsilon_{j,p}^n \cos(j\vec{K} \cdot \vec{r}), \\ \Delta\epsilon_{LC}^n &= \Delta\epsilon_{0,LC}^n + \sum_{j=1}^N \Delta\epsilon_{j,LC}^n \cos(j\vec{K} \cdot \vec{r}), \end{aligned}$$

где  $\vec{r}$  – радиус вектор,  $\vec{K}$  – вектор решетки, а  $\Delta\epsilon_{j,p}^n$  и  $\Delta\epsilon_{j,LC}^n$  определяются как:

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon_{j,p}^n &= 2n_p^n \Delta n_{j,p}^n \cdot \hat{I}, \\ \Delta\epsilon_{j,LC}^n &= 2(n_o^n \Delta n_{j,e}^n \cdot \hat{I} + (n_o^n \Delta n_{j,o}^n - n_e^n \Delta n_{j,e}^n) \cdot \vec{C}\vec{C}). \end{aligned}$$

При решении задачи дифракции будем предполагать, что на МНГДС, у которой каждый дифракционный слой с ФПМ-ЖК расположен



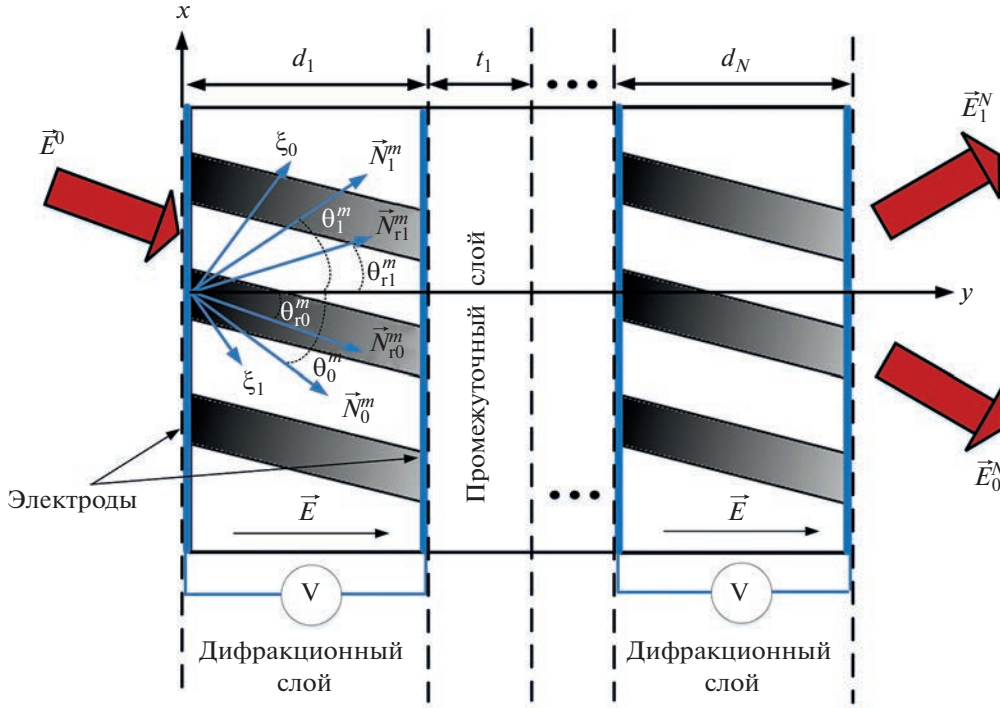


Рис. 2. Схема дифракции света на МНГДС с ФПМ-ЖК.

между двумя пластинами, выполненными из оптически прозрачного материала (стекло), где на внутреннюю сторону каждой пластины нанесены электроды из проводящего оптически прозрачного материала (оксид индия-олова), падает произвольно поляризованный квазимонохроматический световой пучок  $\vec{E}^0$  с волновым вектором  $\vec{k}_0$  и единичным комплексным вектором поляризации  $\vec{e}_0$  (рис. 2). Для схемы дифракции будем также рассматривать обобщенный случай, когда дифракционная структура наклонена, вследствие возможной последовательной записи нескольких наложенных решеток (рис. 2) [17].

Следуя методу медленноменяющихся амплитуд в случае брэгговской дифракции световых пучков на МНГДС в оптически неоднородных слоях ФПМ-ЖК (рис. 2), амплитуды взаимодействующих волн определяются системами уравнений связанных волн в частных производных [14–16]:

$$\begin{aligned} \vec{N}_{r0}^{m,n} \cdot \nabla E_0^{m,n}(\omega, \vec{r}) &= \\ &= -iC_1^{m,n}(E) \cdot n_1^{m,n}(\vec{r}, E) \cdot E_1^{m,n}(\omega, \vec{r}) \times \\ &\quad \times \exp[+i\Theta^{m,n}(\vec{r}, E)], \\ \vec{N}_{r1}^{m,n} \cdot \nabla E_1^{m,n}(\omega, \vec{r}) &= -iC_0^{m,n}(E) \times \\ &\quad \times n_1^{m,n}(\vec{r}, E) \cdot E_0^{m,n}(\omega, \vec{r}) \cdot \exp[-i\Theta^{m,n}(\vec{r}, E)], \end{aligned} \quad (4)$$

где  $C_j^{m,n}(E) = \omega(\vec{e}_1^{m,n} \Delta \epsilon^n(\vec{r}) \vec{e}_0^{m,n})(c_n n_{1,0}^{m,n} \cos \beta_{1,0}^{m,n})^{-1}/4$  – коэффициенты связи;  $n_1^{m,n}$  – нормированный профиль показателя преломления первой гармоники ГДС,  $j = \{0, 1\}$ ,  $\Theta^{m,n}(\vec{r}, E)$  – интегральная фазовая расстройка, выражаемая как [16]:

$$\Theta^{m,n}(\vec{r}, E) = \int_0^{d_n} \Delta \vec{K}^{m,n}(\vec{r}, E) d\vec{r}, \quad (5)$$

Однако, согласно результатам, приведенным в работе [16], зависимость  $\Theta^{m,n}(\vec{r}, E)$  имеет сложный вид, что делает получение решений для (4) в случае высокой эффективности дифракции невозможным. Вместе с тем, каждый ФПМ-ЖК слой можно аппроксимировать параболической функцией, тогда интегральную фазовую расстройку  $\Theta^{m,n}(\vec{r}, E)$  для каждого  $n$ -го слоя можно представить в аналитическом виде [16]:

$$\begin{aligned} \Theta^{m,n}(\vec{r}, E) &= \int \Delta \vec{K}^{m,n}(\vec{r}) d\vec{r} = \int (\Delta K^{m,n} \vec{y}_0) d(\vec{y}_0 y) = \\ &= \Delta K_0^{m,n} y + \frac{t_y^n}{2} y^2, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\Delta K_0^{m,n}$  – проекция вектора  $\Delta \vec{K}^{m,n}(\vec{r})$  на ось  $y$  при  $\vec{r} = 0$ ,  $t_y^n$  – параметр аппроксимации, вывод которого приведен в [16].

И если ввести коэффициенты аппроксимации для интегральной фазовой расстройки для каждого ФПМ-ЖК слоя вида:

$$\begin{aligned} \Theta^{m,1}(y_1, E) &= \Theta_n + a_1(E)y_1 + b_1(E)y_1^2, \\ &\text{при } n = 1, \\ \Theta^{m,n}(y_n, E) &= \Theta^{n-1} + a_n(E)y_n + b_n(E)y_n^2, \\ &\text{при } n = 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\Theta_n$  – начальная интегральная фазовая расстройка,  $a_n(E)$  и  $b_n(E)$  – коэффициенты аппроксимации,  $y_n = 0 \dots d_n$  – координата  $n$ -го слоя, которая должна удовлетворять условию  $Q = \lambda d_n / \Lambda^2 \geq 1$  для режима дифракции Брэгга. То сопоставив выражения (6) и (7), можно получить следующее:

$$\begin{aligned} \Theta_n &= 0, \quad a_n(E) = \Delta K_0^{m,n}, \quad b_n(E) = t_y^n / 2, \\ &\text{где } n = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Таким образом, связь между слоями задается  $\Theta^{m,n-1}$  и для определения решения уравнений (4) необходимо произвести аппроксимацию параметра  $\Theta^{m,n}(\vec{r})$  для каждого слоя и определить коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  из (7) путем минимизации интегральной среднеквадратической ошибки аппроксимации [16]:

$$er^n(y) = 1/d_n \sqrt{\int_0^{d_n} (\Theta^{m,n}(y) - \Theta^{m,n}(y_n, E))^2 dy_n},$$

где  $\Theta^{m,n}(y)$  – параметр интегральной фазовой расстройки из (4),  $\Theta^{m,n}(y_n, E)$  – аппроксимирующая функция в  $n$ -ом слое, определяемая уравнениями (7).

Возвращаясь к схеме дифракции (рис. 2), определим выражения для пространственных распределений световых полей для 0-го и 1-го дифракционного порядка на выходе МНГДС [14, 16]:

$$\begin{aligned} \bar{E}_1^n(\eta) &= \bar{e}_1^{o,n} E_1^{o,n}(\eta) \exp \left[ -i \int_0^{d_n} \bar{k}_1^{o,n} d\vec{r} \right] + \\ &+ \bar{e}_1^{e,n} E_1^{e,n}(\eta) \exp \left[ -i \int_0^{d_n} \bar{k}_1^{e,n} d\vec{r} \right], \\ \bar{E}_0^n(\xi) &= \bar{e}_0^{o,n} E_0^{o,n}(\xi) \exp \left[ -i \int_0^{d_n} \bar{k}_0^{o,n} d\vec{r} \right] + \\ &+ \bar{e}_0^{e,n} E_0^{e,n}(\xi) \exp \left[ -i \int_0^{d_n} \bar{k}_0^{e,n} d\vec{r} \right], \end{aligned}$$

где  $\xi_0 = \xi$ ,  $\xi_1 = \eta$ ,  $\xi_0, \xi_1$  – апертурные координаты.

Для описания преобразования плоских световых волн в многослойных средах воспользуемся матричным методом. Для этого перейдем от ам-

плитудных распределений частотных Фурье-компонент дифрагирующих пучков к их угловым спектрам [6, 14]:

$$E_j^e(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} E_j^e(l) \exp[ik_j^e l \theta] dl,$$

где  $l = \xi_0, \xi_1$ , а угол  $\theta$  характеризует направление плосковолновых компонент  $E_j^e(\theta)$  относительно волновых нормалей.

В результате процесс преобразования частотно-угловых спектров взаимодействующих световых пучков для необыкновенных волн на выходе МНГДС представится в виде [6, 14]:

$$\bar{E}^{e,n} = \bar{T}^n \cdot \bar{E}^0, \quad (8)$$

где  $\bar{T}^N = \bar{T}^{e,N} \cdot \bar{A}^{e,N-1} \cdot \bar{T}^{e,N-1} \dots \bar{A}^{e,n} \cdot \bar{T}^{e,n} \dots \bar{A}^{e,1} \cdot \bar{T}^{e,1}$  – матричная передаточная функция

всей МНГДС,  $\bar{E}^{e,n} = \begin{bmatrix} E_0^{e,n}(\omega, \theta) \\ E_1^{e,n}(\omega, \theta) \end{bmatrix}$ ,

$\bar{T}^{n,m} = \begin{bmatrix} T_{00}^{n,m}(\omega, \theta) & T_{10}^{n,m}(\omega, \theta) \\ T_{01}^{n,m}(\omega, \theta) & T_{11}^{n,m}(\omega, \theta) \end{bmatrix}$  – матричная переда-

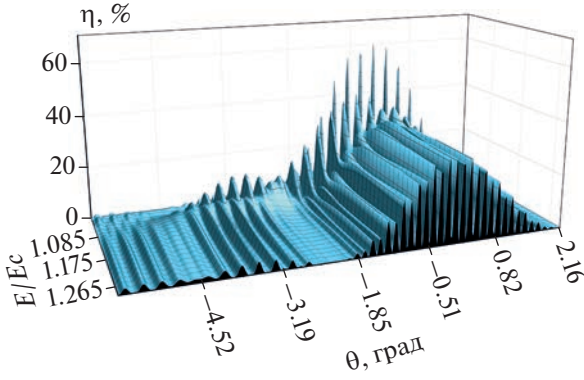
точная функция,  $\bar{E}^0 = \begin{bmatrix} E_0(\omega, \theta) \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{A}^{e,n}$  – матрица перехода для промежуточного слоя, которая представлена в работах [6, 14].

Компоненты матрицы  $\bar{T}^{e,n}$  определяются как [16]:

$$\begin{aligned} T_{00}^{e,n} &= -\frac{C_0^{e,n} C_1^{e,n} d_n^2}{4v_1 v_0} \int_{-1}^{+1} \exp[\delta m'(1-y) + \delta^2 n'(1-y)^2] \times \\ &\times \Phi\left(\frac{d'}{b'}, 1, 2; \quad b' \delta^2 \frac{v_1}{v_0} (1-y^2)\right) dy, \\ T_{10,01}^{e,n} &= -i \frac{C_{1,0}^{e,n} d_n}{2v_{0,1}} \int_{-1}^{+1} \exp[\delta m'(1-y) + \delta^2 n'(1-y)^2] \times \\ &\times \Phi\left(\frac{d'}{b'}, 1; \quad b' \delta^2 \frac{v_1}{v_0} (1-y^2)\right) dy, \\ T_{11}^{e,n} &= -\frac{C_0^{e,n} C_1^{e,n} d_n^2}{4v_1 v_0} \int_{-1}^{+1} \exp[\delta m(1-y) + \delta^2 n(1-y)^2] \times \\ &\times \Phi\left(\frac{d'}{a} + 1, 2; \quad a \delta^2 \frac{v_1}{v_0} (1-y^2)\right) dy, \end{aligned}$$

где  $\Phi(a, b; c)$  – вырожденная гипергеометрическая функция первого рода, для  $n = 1$   $T_{10}^{e,n} = 0$  и  $T_{11}^{e,n} = 0$ ,  $\delta = d_n(\eta_1 v_0 - \eta_0 v_1) / 2v_1$ ,  $\theta_{rj}^{e,n}$  – углы между групповыми нормальными  $\bar{N}_{rj}^{e,n}$  и осью  $y$ ,  $\eta_j = \eta_j^{e,n} = \pm \sin \theta_{rj}^{e,n}$ ,  $m = \eta(-a + b v_1 / v_0) - i \Delta K' d_n / 2\delta$ ,





**Рис. 3.** Зависимость дифракционной эффективности для трехслойной ГДС с ФПМ-ЖК от угла считывания и значения внешнего электрического поля на втором слое.

$$v_j = v_j^{e,n} = \cos \theta_{rj}^{e,n}, \quad d' = -\sigma^2, \quad m' = \xi(-a'/2 + b'v_1/v_0) - i\Delta K' d_n / 2\delta, \quad n' = \frac{b'v_1}{v_0} - \frac{a'}{2}, \quad a = i \frac{t_y^n v_1 v_0}{(\eta_1 v_0 + \eta_0 v_1)^2},$$

$$a' = -i \frac{t_y^{n2} v_1}{(\eta_1 v_0 + \eta_0 v_1)^2}, \quad b = i \frac{t_y^n v_0^2}{(\eta_1 v_0 + \eta_0 v_1)^2}, \quad n = \frac{v_1}{v_0} \left( a - \frac{b v_1}{2 v_0} \right), \quad n' = \frac{v_1}{v_0} \left( a - \frac{b v_1}{2 v_0} \right), \quad b' = -i \frac{t_y^n v_1 v_0}{(\eta_1 v_0 - \eta_0 v_1)^2},$$

$$\sigma = \frac{C_0^{e,n} C_1^{e,n}}{(\eta_1 v_0 - \eta_0 v_1)^2}$$

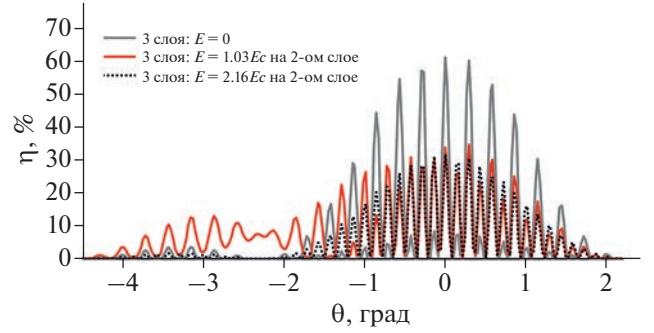
### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

При численном расчете будем полагать, что поляризация падающего излучения совпадает с поляризацией собственных необыкновенных волн для каждого слоя. Световые пучки являются плоскими монохроматическими с единичной амплитудой. Дифракционная эффективность на выходе МНГДС можно определить по известному выражению:

$$\eta_d^{e,n}(E, \Delta K) = \left| E_1^{e,n}(E, \Delta K) \right|^2 / \left( \left| E_1^{e,n}(E, \Delta K) \right|^2 + \left| E_0^{e,n}(E, \Delta K) \right|^2 \right), \quad (9)$$

где элементы  $E_{0,1}^{e,n}(E, \Delta K)$  выражаются через элементы матрицы  $\tilde{T}^{e,n}$ .

При численном расчете будет использована трехслойная ГДС с однородными профилями показателя преломления. Параметры для моделирования:  $\lambda = 633$  нм;  $d_n = 20$  мкм;  $t_n = 160$  мкм;  $n_{lc}^o = 1.535$  и  $n_{lc}^e = 1.68$  являются обыкновенными и необыкновенными показателями преломления



**Рис. 4.** Зависимость дифракционной эффективности для трехслойной ГДС с ФПМ-ЖК от угла считывания и дискретных значений внешнего электрического поля на втором слое.

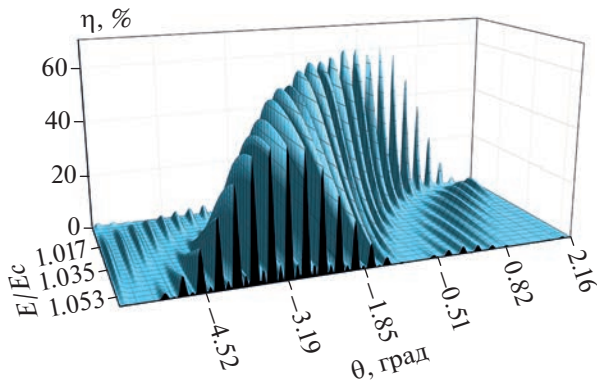
для ЖК соответственно;  $n_p = 1.535$  является показателем преломления для полимера; угол Брэгга составляет  $\theta_b = 15$  градусов; период дифракционной структуры 1.2 мкм; параметры для аппроксимации пространственной амплитуды первой гармоники показателя преломления для ФПМ-ЖК слоев функцией вида  $n(y, c, s, t) = \cosh(c(sy - t))^{-1}$  равны  $\{c, s, t\} = \{0.058, -1.867, -0.688\}$ .

На рис. 3 и 4 приведены зависимости дифракционной эффективности для трехслойной ГДС с ФПМ-ЖК от угла считывания и приложенного электрического поля только на второй слой.

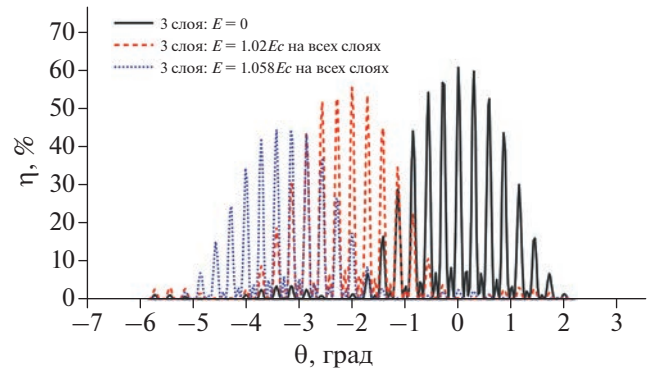
Как видно из рис. 3 и 4, при подаче напряжения только на второй дифракционный слой селективный отклик трехслойной ГДС начинает трансформироваться до вида двухслойной ГДС, но с увеличенным промежуточным слоем, что обуславливает добавление локальных максимумов контура селективности. Однако, кроме трансформации, из-за плавной оптической неоднородности в ФПМ-ЖК слоях, наблюдается смещение угловой селективности даже при небольшом увеличении значения внешнего электрического воздействия, относительно критической напряженности Фредерикса, что не было так характерно для случая с КПЖК [14].

На рис. 5 и 6 приведены зависимости дифракционной эффективности для трехслойной ГДС в случае электрического воздействия на всех слоях.

Как видно из рис. 5 и 6, при электрическом воздействии на всех слоях происходит существенное смещение угловой селективности вследствие увеличения интегральной фазовой расстройки в каждом дифракционном слое. В общем случае, при дальнейшем увеличении значения электрического поля дифракция отключится. Однако, при небольшом увеличении значения электрического поля, относительно критической напряженности Фредерикса, появляется возможность плавно



**Рис. 5.** Зависимость дифракционной эффективности для трехслойной ГДС с ФПМ-ЖК от угла считывания и значения внешнего электрического поля на всех слоях.



**Рис. 6.** Зависимость дифракционной эффективности для трехслойной ГДС с ФПМ-ЖК от угла считывания и дискретных значений внешнего электрического поля на всех слоях.

смещать угловую селективность, что в случае с МНГДС можно интерпретировать как канальную перестройку, если рассматривать такие структуры в качестве спектральных фильтров.

Также стоит отметить, что в случае увеличения числа и толщины дифракционных слоев при электрическом воздействии на всех слоях, произойдет увеличение коэффициента смещения угловой селективности, что обусловлено ростом интегральной фазовой расстройкой из-за плавной оптической неоднородности от каждого дифракционного слоя с ФПМ-ЖК.

Приведенные закономерности необходимо учитывать при построении управляемых оптических спектральных фильтров на основе МНГДС с ФПМ-ЖК, так как это позволяет не только иметь возможность трансформации селективного отклика, но и осуществлять канальную перестройку с помощью внешнего электрического воздействия.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлена новая аналитическая модель дифракции света на пропускающих электрически управляемых многослойных неоднородных голографических дифракционных структурах в фотополимерных композициях с жидкокристаллической компонентой, которая учитывает плавную оптическую неоднородность вдоль глубины решеток. Представленные передаточные функции описывают эволюцию частотно-угловых спектров световых пучков при их дифракции на многослойных неоднородных голографических дифракционных структурах.

С помощью численного расчета было продемонстрировано, что при воздействии электрического поля на выбранный ФПМ-ЖК слой селективный отклик МНГДС может трансформировать-

ся. При этом, вследствие плавной оптической неоднородности ФПМ-ЖК слоев, трансформация протекает со смещением угловой селективности, направление которого зависит от направления приложенного электрического поля.

Выявленные закономерности можно использовать для осуществления перестройки каналов, если рассматривать многослойные неоднородные голографические дифракционные структуры в качестве электрически управляемых элементов оптических спектральных фильтров.

Работа выполнена в рамках программы стратегического академического лидерства “Приоритет-2030”.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Malallah R., Li H., Qi Y. et al. // J. Opt. Soc. Amer. A. 2019. V. 36. No. 3. P. 320.
2. Malallah R., Li H., Qi Y. et al. // J. Opt. Soc. Amer. A. 2019. V. 36. No. 3. P. 334.
3. Pen E.F., Rodionov M.Yu., Chubakov P.A. // Optoelectron. Instrum. Data Process. 2017. V. 53. No. 1. P. 59.
4. Pen E.F., Rodionov M.Yu. // Quantum Electron. 2017. V. 40. No. 10. P. 919.
5. Шарангович С.Н., Дудник Д.И. // Изв. РАН. Сер. физ. 2021. Т. 85. № 1. С. 14; Sharangovich S.N., Dudnik D.I. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2021. V. 85. No. 1. P. 8.
6. Dudnik D.I., Semkin A.O., Sharangovich S.N. // J. Phys. Conf. Ser. 2021. V. 1745. Art. No. 012018.
7. Yan X., Wang X., Chen Y. et al. // Appl. Phys. B. 2019. V. 125. Art. No. 67.
8. Yan X., Gao L., Yang X., Dai Y. // Opt. Express. 2014. V. 22. No. 21. P. 26140.
9. Kazanskiy N.L., Khonina S.N., Karpeev S.V., Porfirev A.P. // Quantum Electron. 2020. V. 50. No. 7. P. 629.
10. Kudryashov S.I. // Appl. Surface Sci. 2019. V. 484. P. 948.

11. *Pavlov D.* // Opt. Lett. 2019. V. 44. No. 2. P. 283.
12. *Sharangovich S.N., Dolgirev V.O.* // J. Phys. Conf. Ser. 2021. Art. No. 012023.
13. *Sharangovich S.N., Dolgirev V.O.* // IEEE Proc. 2021. Art. No. 21430788.
14. *Шарангович С.Н., Долгирев В.О.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2022. Т. 86. № 1. С. 35; *Sharangovich S.N., Dolgirev V.O.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2022. V. 86. No. 1. P. 18.
15. *Semkin A.O., Sharangovich S.N.* // Polymers. 2019. V. 11. No. 861. P. 1.
16. *Ноздреватых Б.Ф., Устюжанин С.В., Шарангович С.Н.* // Доклады ТУСУР. 2007. № 2. С. 192.
17. *Доволнов Е.А., Шарангович С.Н.* // Опт. и спектроск. 2008. Т. 105. № 2. С. 336; *Dovolnov E.A., Sharangovich S.N.* // Opt. Spectrosc. 2008. V. 105. No. 2. P. 310.

## Transmission functions of transmissive multilayer inhomogeneous holographic photopolymer liquid crystal diffraction structures

S. N. Sharangovich<sup>a, \*</sup>, V. O. Dolgirev<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Tomsk State University of Control and Radioelectronics Systems, Tomsk, 634050 Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: shr@tusur.ru*

A new analytical model of diffraction of quasimonochromatic light beams on spatially inhomogeneous multilayer diffraction structures formed in photopolymer material with nematic liquid crystals having smooth optical inhomogeneity in the thickness of layers is presented. It is shown that when an applied electric field is applied to diffraction layers containing a photopolymer composition with a high proportion of liquid crystalline component, a transformation of the selective response with a significant shift in angular selectivity occurs

УДК 535.4

## ОПТИЧЕСКИЙ ДИФФЕРЕНЦИАТОР ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ОСНОВЕ КОМПОЗИТНОЙ СТРУКТУРЫ МЕТАЛЛ–ДИЭЛЕКТРИК–МЕТАЛЛ

© 2023 г. А. И. Кашапов<sup>1, 2, \*</sup>, Е. А. Безус<sup>1, 2</sup>, Д. А. Быков<sup>1, 2</sup>, Л. Л. Досколович<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup>Институт систем обработки изображений РАН – филиал федерального государственного учреждения “Федеральный научно-исследовательский центр “Кристаллография и фотоника”  
Российской академии наук”, Самара, Россия

<sup>2</sup>Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва”, Самара, Россия

\*E-mail: ar.kashapov@outlook.com

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Рассмотрены оптические свойства композитной структуры, состоящей из двух последовательно расположенных трехслойных структур “металл–диэлектрик–металл” (МДМ-структур), разделенных слоем диэлектрика. Показано, что такая композитная МДМ-структура при нормальном падении оптического сигнала может выполнять пространственно-временное дифференцирование второго порядка с высоким качеством. Полученные результаты могут найти применение при создании систем аналоговых оптических вычислений и оптической обработки информации.

DOI: 10.31857/S036767652270003X, EDN: JGSRSI

### ВВЕДЕНИЕ

В последнее время наблюдается большой интерес к разработке компактных структур нанофотоники для дифференцирования оптических сигналов, а также для реализации более сложных дифференциальных операторов. Указанные дифференцирующие структуры являются перспективными в задачах обработки информации в режиме реального времени [1, 2].

Преобразование оптического сигнала, происходящее при его отражении или прохождении через дифракционную структуру, может быть описано как преобразование сигнала линейной системой, у которой передаточная функция (ПФ) задается коэффициентом отражения или пропускания структуры, рассматриваемым как функция угловой и/или пространственной частоты [2–4]. В частности, выполнение операции оптического дифференцирования во времени соответствует в Фурье-пространстве умножению спектра падающего импульса на  $-i\omega$ , где  $\omega$  – угловая частота. Аналогичным образом, в случае пространственного дифференцирования пространственный спектр падающего пучка умножается на  $ik_{x,0}$ , где  $k_{x,0}$  – пространственная частота (тангенциальная компонента волнового вектора падающей волны). Таким образом, ПФ идеального дифференциатора имеет нуль на центральной частоте (угловой или пространственной). В этой связи необходимым

условием для оптического дифференцирования является наличие нуля в спектре отражения или пропускания дифракционной структуры. Поскольку нули в спектре отражения (пропускания), как правило, обусловлены резонансными эффектами возбуждения собственных мод структуры, то для дифференцирования широко используются резонансные структуры фотоники, в частности, резонансные дифракционные решетки [2, 3], слоистые структуры [4, 5] и микро-резонаторы [6].

В недавней работе авторов настоящей статьи было показано, что простая трехслойная структура металл–диэлектрик–металл (МДМ-структура) позволяет в отражении реализовать вычисление первой производной по пространственной переменной или во времени [7]. При этом было строго показано, что в спектре МДМ-структуры всегда можно получить нуль отражения за счет выбора толщин металлических и диэлектрических слоев. Отметим, что, в отличие от дифференциаторов в [5, 8], МДМ-структура не требует призмы для ввода излучения и поэтому является существенно более компактной.

В настоящей работе впервые теоретически описано и численно продемонстрировано применение композитной МДМ-структуры для реализации операции “пространственно-временного” дифференцирования второго порядка. Под “пространственно-временным” дифференцированием

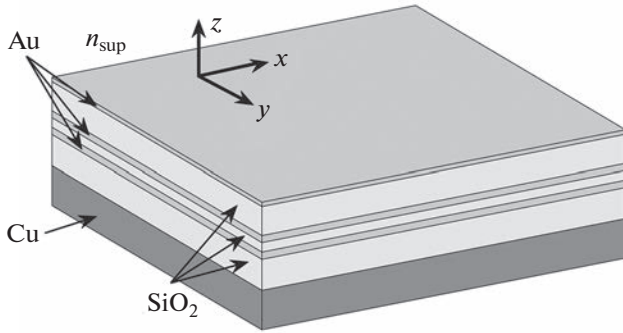


Рис. 1. Геометрия композитной структуры металл–диэлектрик–металл.

ем при этом понимается вычисление дифференциального оператора, равного линейной комбинации производных соответствующего порядка по времени и по пространственной координате.

### ОДИНОЧНАЯ И КОМПОЗИТНАЯ СТРУКТУРЫ МЕТАЛЛ–ДИЭЛЕКТРИК–МЕТАЛЛ

Одиночная структура металл–диэлектрик–металл состоит из верхнего металлического слоя, диэлектрического слоя и нижнего металлического слоя [7] (на рис. 1 схематично показана геометрия аналогичной композитной МДМ-структуры, рассмотренной ниже). Пусть на МДМ-структуру падает плоская волна, имеющая единичную амплитуду и некоторую фиксированную поляризацию (поперечную электрическую (ТЕ) или поперечную магнитную (ТМ)). Обозначим  $k_{x,0} = k_0 n_{\text{sup}} \sin \theta_0$  тангенциальную компоненту волнового вектора падающей волны, где  $\theta_0$  – угол падения,  $k_0 = \omega_0/c$  – волновое число,  $\omega_0$  – частота волны,  $c$  – скорость света,  $n_{\text{sup}}$  – показатель преломления области над структурой.

С использованием модели многолучевой интерференции коэффициент отражения МДМ-структуры несложно получить в виде [7]

$$R = \frac{r_1 - e^{2ik_{z,0}h_d} \rho (r_1 r_2 - t^2)}{1 - r_2 \rho e^{2ik_{z,0}h_d}}, \quad (1)$$

где  $r_1, r_2$  – комплексные коэффициенты отражения верхнего металлического слоя для плоских волн, падающих на слой сверху из области над структурой и снизу со стороны диэлектрического слоя,  $t$  – коэффициент пропускания верхнего металлического слоя,  $\rho$  – коэффициент отражения

нижнего металлического слоя,  $k_{z,0} = \sqrt{k_0^2 n_d^2 - k_{x,0}^2}$  –  $z$ -компонента волнового вектора плоской волны в диэлектрическом слое, отраженной от нижнего слоя металла,  $n_d$  и  $h_d$  – показатель преломления и толщина диэлектрического слоя соответственно.

Коэффициенты отражения и пропускания металлических слоев в (1) зависят от их толщины и частоты, угла падения и поляризации падающей волны и рассчитываются по формулам, описывающим отражение и прохождение плоской волны через плоскопараллельный слой однородного материала.

Отметим, что рассматриваемая МДМ-структура является резонансной, поскольку в ней могут существовать вытекающие моды, локализованные в диэлектрическом слое [7]. В ряде случаев в резонансных структурах коэффициент отражения может обращаться в нуль. Данное свойство является важным с практической точки зрения, и, в частности, позволяет использовать резонансные структуры в качестве оптических дифференциаторов.

Приравнявая к нулю числитель выражения для коэффициента отражения в (1), получим, что коэффициент отражения МДМ-структуры обращается в нуль при выполнении равенства

$$r_1 / (r_1 r_2 - t^2) = e^{2ik_{z,0}h_d} \rho. \quad (2)$$

В работе [7] было доказано, что при фиксированной толщине нижнего металлического слоя соотношение (2) всегда может быть выполнено за счет выбора толщин верхнего металлического и диэлектрического слоев. Таким образом, при заданных материалах, частоте  $\omega = \omega_0$  и угле падения (тангенциальной компоненте волнового вектора) в МДМ-структуре всегда можно получить нулевое отражение. Отметим, что при нормальном падении ( $k_{x,0} = 0$ ) коэффициент отражения МДМ-структуры в силу симметрии задачи дифракции является четной функцией от  $k_x$ , и поэтому структура, имеющая нуль отражения 1-го порядка по  $\omega$  при  $\omega = \omega_0$ , будет иметь нуль отражения 2-го порядка по  $k_x$ .

Покажем, что, “комбинируя” две МДМ-структуры, имеющие нуль отражения и разделенные промежуточным слоем диэлектрика, можно получить в спектре отражения нуль 2-го порядка по  $\omega$ . Геометрия композитной МДМ-структуры показана на рис. 1. Действительно, используя модель многолучевой интерференции, коэффициент отражения композитной МДМ-структуры можно также получить в виде (1), только коэффициенты  $r_1, r_2, \rho, t$  теперь уже следует рассматривать не как коэффициенты отражения и пропускания верхнего и нижнего металлических слоев, а как коэффициенты отражения и пропускания верхней и нижней МДМ-структур. При этом толщина диэлектрического слоя  $h_d$  в (1) теперь соответствует толщине диэлектрического слоя, разделяющего МДМ-структуры. Если МДМ-структуры, образующие композитную МДМ-структуру, име-



ют нули отражения при  $\omega = \omega_0$ , то коэффициенты  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\rho$ ,  $t$  могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} r_1 &= r_1(\omega) = r_{1,1}(\omega - \omega_0) + \\ &+ r_{1,2}(\omega - \omega_0)^2 + O[(\omega - \omega_0)^3], \\ r_2 &= r_2(\omega) = r_{2,0} + r_{2,1}(\omega - \omega_0) + O[(\omega - \omega_0)^2], \\ t &= t(\omega) = t_0 + t_1(\omega - \omega_0) + O[(\omega - \omega_0)^2], \\ \rho &= \rho(\omega) = \rho_1(\omega - \omega_0) + \\ &+ \rho_2(\omega - \omega_0)^2 + O[(\omega - \omega_0)^3]. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1) и проводя несложные преобразования, коэффициент отражения композитной МДМ-структуры можно получить в виде

$$R_2(\omega) = (r_{1,1} + e^{2ik_{z,0}h} t_0^2 \rho_1)(\omega - \omega_0) + O[(\omega - \omega_0)^2], \quad (4)$$

где  $h$  – толщина диэлектрического слоя, разделяющего МДМ-структуры. Соответственно, при выполнении условия

$$-r_{1,1}/t_0^2 = e^{2ik_{z,0}h} \rho_1 \quad (5)$$

композитная структура будет иметь нуль отражения 2-го порядка по  $\omega$  при  $\omega = \omega_0$ . При нормальном падении композитная МДМ-структура, удовлетворяющая условию (5), будет иметь нули 2-го порядка как по  $\omega$ , так и по  $k_x$ .

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Рассмотрим пространственно-временное преобразование двумерного оптического импульса с центральной частотой  $\omega = \omega_0$ , происходящее при отражении от многослойной структуры при нормальном падении ( $\theta_0 = 0$ ). Пространственно-временную огибающую падающего импульса в системе координат  $(x, z)$  (ось  $z$  перпендикулярна структуре, рис. 1), можно представить в виде суперпозиции плоских волн с различными угловыми ( $\omega = \omega_0 + \omega_{inc}$ ) и пространственными ( $k_x$ ) частотами:

$$\begin{aligned} E_{inc}(x, t + z/v) &= \\ &= \iint_{\Omega} G(k_x, \omega_{inc}) \exp[ik_x x - i\omega_{inc}(t + z/v)] dk_x d\omega_{inc}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $G(k_x, \omega_{inc})$  – спектр огибающей, заданный в некоторой области  $\Omega$ ,  $v = c/n_{sup}$  – скорость распространения импульса.

Преобразование пространственно-временной огибающей импульса (6), происходящее при отражении импульса от слоистой структуры, опи-

сывается линейной системой с передаточной функцией (ПФ) [9]

$$H_{st}(k_x, \omega_{inc}) = R(k_x, \omega_{inc} + \omega_0). \quad (7)$$

Таким образом, огибающая отраженного импульса примет вид

$$\begin{aligned} E_{refl}(x, t - z/v) &= \iint_{\Omega} G(k_x, \omega_{inc}) R(k_x, \omega_{inc} + \omega_0) \times \\ &\times \exp[ik_x x - i\omega_{inc}(t - z/v)] dk_x d\omega_{inc}. \end{aligned} \quad (8)$$

Если в качестве слоистой структуры используется композитная МДМ-структура, удовлетворяющая условию (5), т.е. имеющая нули отражения второго порядка и по  $\omega$  и по  $k_x$  при  $\omega = \omega_0$  и  $k_x = 0$ , то ПФ (7) может быть записана в виде

$$H_{st}(k_x, \omega_{inc}) = c_{x,2} k_x^2 + c_{t,2} \omega_{inc}^2 + O[k_x^4 + \omega_{inc}^3]. \quad (9)$$

Главные члены разложения в (9) пропорциональны ПФ идеальных дифференциаторов 2-го порядка по пространственной переменной и во времени, и поэтому композитная МДМ-структура позволяет реализовать вычисление следующего дифференциального оператора, которое будем называть пространственно-временным дифференцированием 2-го порядка:

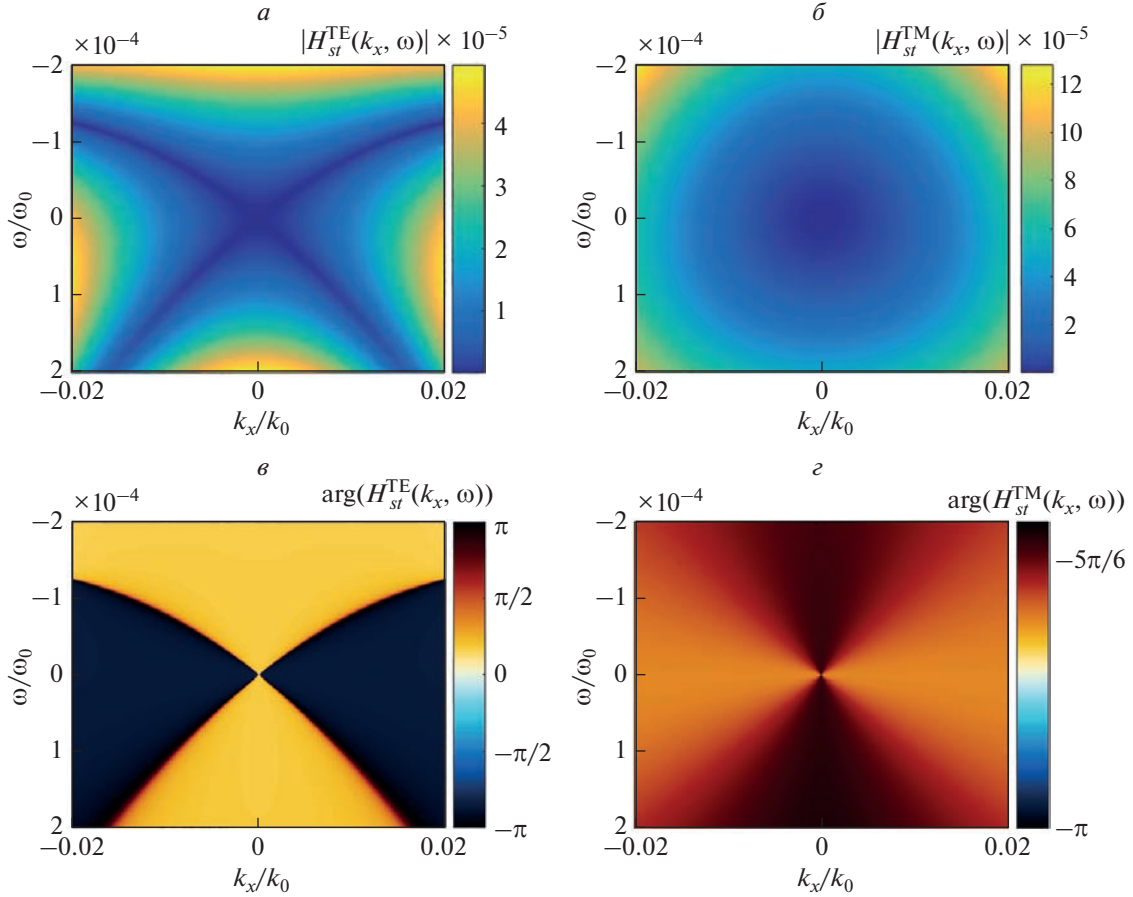
$$E_{refl}(x, t) = -c_{x,2} \frac{\partial^2 E_{inc}(x, t)}{\partial x^2} - c_{t,2} \frac{\partial^2 E_{inc}(x, t)}{\partial t^2}. \quad (10)$$

Отметим, что, как будет продемонстрировано в следующем разделе, различные соотношения между коэффициентами ряда Тейлора  $c_{x,2}$  и  $c_{t,2}$  в (9), (10) позволяют получить различные профили огибающих отраженного пространственно-временного импульса.

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим возможность использования исследуемой композитной МДМ-структуры для выполнения операций пространственно-временного дифференцирования второго порядка (10) на примере падающих ТЕ- и ТМ-поляризованных пространственно-временных оптических импульсов с центральной частотой  $\omega_0 = 2.99$  фс<sup>-1</sup> (длиной волны  $\lambda_0 = 630$  нм) и гауссовым профилем огибающей  $P_{inc}(x, t) = \exp[-(x/\sigma_x)^2 - (t/\sigma_t)^2]$ , где  $\sigma_x = 18$  мкм,  $\sigma_t = 5800$  фс.

Для реализации дифференциального оператора (10) была рассчитана композитная МДМ-структура, удовлетворяющая условию (5) и состоящая из слоев золота (Au), меди (Cu) и диоксида кремния (SiO<sub>2</sub>). Конфигурация слоев структуры, перечисленных сверху вниз, имеет вид Au–SiO<sub>2</sub>–Au–SiO<sub>2</sub>–Au–SiO<sub>2</sub>–Cu. Стоит отметить, что для



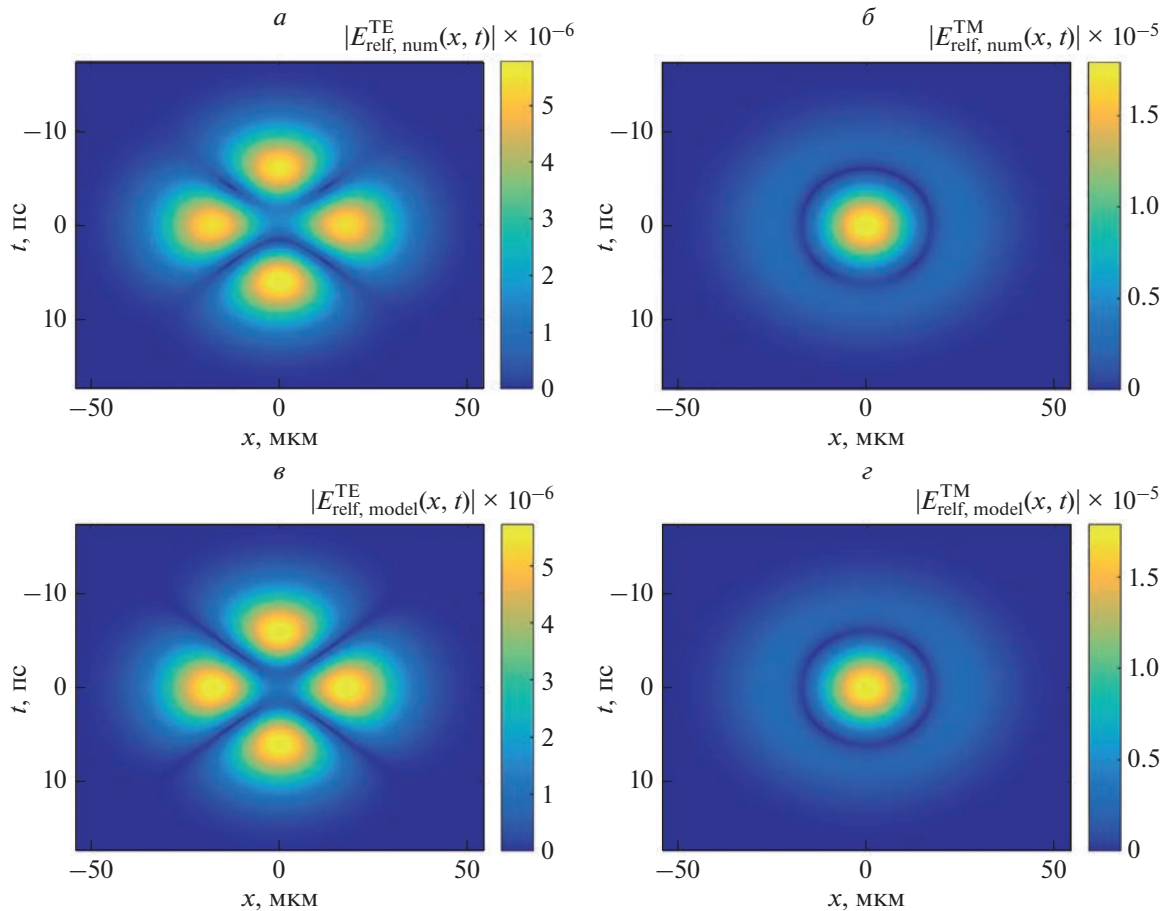
**Рис. 2.** Модули (а, б) и фазы (в, г) ПФ композитной МДМ-структуры, выполняющей преобразование ТЕ-поляризованного (левый столбец) и ТМ-поляризованного (правый столбец) пространственно-временных оптических импульсов.

рассматриваемого примера использование меди в качестве материала нижнего слоя обеспечило лучшие рабочие характеристики структуры (соотношения между коэффициентами в выражениях (9) и (10), приведенными ниже) по сравнению со случаем, когда все металлические слои структуры выполнены из золота. Указанная структура расположена на подложке из кварца ( $\text{SiO}_2$ ), над структурой — воздух. Для показателей преломления материалов использовались справочные данные [10, 11]. Толщины слоев рассчитанной структуры, имеющей нули второго порядка по  $\omega$  и по  $k_x$ , описываются следующим массивом: [21.6, 146.5, 33.8, 46.0, 34.5, 156.3, 100.0] нм.

На рис. 2 показаны рассчитанные с помощью строгого метода решения задачи дифракции на слоистых структурах [12] модуль и фаза (аргумент) пространственно-временных ПФ структуры  $H_{st}^{\text{TE}}$  — для ТЕ-поляризованных волн (рис. 2а и 2в) и  $H_{st}^{\text{TM}}$  — для ТМ-поляризованных волн (рис. 2б и 2г). Представленные ПФ хорошо ап-

проксимируются главными (квадратичными) членами разложения в (9) при  $c_{x,2} = 0.0024e^{-2.69i}$  мкм<sup>2</sup>,  $c_{t,2} = 276.9e^{0.45i}$  фс<sup>2</sup> (для ТЕ-поляризации) и  $c_{x,2} = 0.0031e^{-2.74i}$  мкм<sup>2</sup>,  $c_{t,2} = 276.9e^{-2.69i}$  фс<sup>2</sup> (для ТМ-поляризации).

Верхний ряд на рис. 3 показывает амплитуды отраженных ТЕ- (рис. 3, левый столбец) и ТМ- (рис. 3, правый столбец) поляризованных пространственно-временных импульсов ( $|E_{\text{refl, num}}^{\text{TE}}|$  и  $|E_{\text{refl, num}}^{\text{TM}}|$  соответственно), рассчитанных численно на основе формулы (8). Нижний ряд рис. 3 показывает аналитически полученные по формуле (10) “модельные” амплитуды отраженных импульсов  $|E_{\text{refl, model}}^{\text{TE}}|$  и  $|E_{\text{refl, model}}^{\text{TM}}|$ . Из рис. 3 видно, что численно рассчитанные огибающие отраженных импульсов хорошо описываются выражениями (10) при соответствующих значениях коэффициентов  $c_{x,2}$ ,  $c_{t,2}$ . Действительно, нормированное среднеквадратическое отклонение численно



**Рис. 3.** Численно (а, б) и аналитически (в, г) рассчитанные модули огибающих отраженных пространственно-временных ТЕ- (а, в) и ТМ- (б, г) поляризованных оптических импульсов.

рассчитанной огибающей отраженного импульса от “модельной” огибающей (10) для случая ТЕ-поляризации (рис. 3а и 3в) составляет 1.6%, а аналогичное значение для случая ТМ-поляризованного импульса (рис. 3б и 3г) — всего лишь 0.2%.

Отметим, что существенно различный вид огибающих отраженных импульсов на рис. 3 обусловлен различным соотношением между аргументами комплексных коэффициентов  $c_{x,2}$ ,  $c_{t,2}$  в случаях ТЕ- и ТМ-поляризации. Для ТЕ-поляризации (рис. 2а и 2в) разность фаз указанных коэффициентов близка к  $\pi$ , а для ТМ-поляризации (рис. 2б и 2г) — близка к нулю.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены условия нулевого отражения для одиночной и композитной МДМ-структур. С использованием теории линейных систем показано, что композитная МДМ-структура, имеющая при нормальном падении нуль отражения 2-го порядка по угловой и пространственной частотам, позволяет реализовывать операцию “про-

странственно-временного” дифференцирования 2-го порядка.

В рамках численного моделирования показано, что операция пространственно-временного дифференцирования 2-го порядка реализуется с высоким качеством (при среднеквадратичной ошибке менее 2%). При этом показано, что композитная МДМ-структура позволяет формировать различные оптические импульсы в зависимости от поляризации падающего излучения.

Полученные результаты могут найти применение при создании систем аналоговых оптических вычислений и оптической обработки информации.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 19-19-00514) в части исследования МДМ-структур и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (государственное задание ФНИЦ “Кристаллография и фотоника” РАН) в части реализации моделирующего программного обеспечения.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Silva A., Monticone F., Castaldi G. et al.* // Science. 2014. V. 343. P. 161.
2. *Zhou Y., Zheng H., Kravchenko I.I., Valentine J.* // Nature Photon. 2020. V. 14. P. 316.
3. *Bykov D.A., Doskolovich L.L., Soifer V.A.* // Opt. Lett. 2011. V. 36. P. 3509.
4. *Doskolovich L.L., Bykov D.A., Bezus E.A., Soifer V.A.* // Opt. Lett. 2014. V. 39. P. 1278.
5. *Golovastikov N.V., Doskolovich L.L., Bezus E.A. et al.* // J. Exp. Theor. Phys. 2018. V. 127. P. 202.
6. *Karimi A., Zarifkar A., Miri M.* // J. Opt. Soc. Amer. B. 2019. V. 36. P. 1738.
7. *Kashapov A.I., Doskolovich L.L., Bezus E.A. et al.* // J. Optics. 2021. V. 23. No. 2. Art. No. 023501.
8. *Zhang J., Ying Q., Ruan Z.* // Opt. Lett. 2019. V. 44. P. 4511.
9. *Golovastikov N.V., Bykov D.A., Doskolovich L.L.* // Opt. Lett. 2015. V. 40. P. 3492.
10. <https://refractiveindex.info>.
11. *Johnson P.B., Christy R.W.* // Phys. Rev. B. 1972. V. 6. No. 12. P. 4370.
12. *Moharam M.G., Pommet D.A., Grann E.B., Gaylord T.K.* // J. Opt. Soc. Amer. A. 1995. V. 12. P. 1077.

## Second-order optical differentiator based on a composite metal–dielectric–metal structure

**A. I. Kashapov<sup>a, b, \*</sup>, E. A. Bezus<sup>a, b</sup>, D. A. Bykov<sup>a, b</sup>, L. L. Doskolovich<sup>a, b</sup>**

<sup>a</sup>*Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the Federal Scientific Research Centre “Crystallography and Photonics” of the Russian Academy of Sciences, Samara, 443001 Russia*

<sup>b</sup>*Samara National Research University, Samara, 443086 Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: ar.kashapov@outllok.com*

Optical properties of a composite structure consisting of two sequentially arranged three-layer metal-dielectric-metal structures (MDM-structures) are considered. It is shown that such a composite MDM-structure can perform second-order spatiotemporal differentiation with high quality at normal incidence. The obtained results can find application in creating systems for analog optical computing and optical information processing.

УДК 535.8:517.958

# ОПТИКО-ТЕРАГЕРЦОВЫЕ СОЛИТОНЫ С НАКЛОННЫМИ ВОЛНОВЫМИ ФРОНТАМИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЗАХАРОВА–БУССИНЕСКА

© 2023 г. С. В. Сазонов<sup>1, 2, 3, \*</sup>, Н. В. Устинов<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение “Национальный исследовательский центр  
“Курчатовский институт”, Москва, Россия

<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, Москва, Россия

<sup>3</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)”, Москва, Россия

<sup>4</sup>Автономная некоммерческая образовательная организация высшего образования  
“Калининградский институт управления”, Калининград, Россия

\*E-mail: sazonov.sergey@gmail.com

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Исследована генерация в квадратично-нелинейной среде терагерцового излучения оптическими импульсами с наклонными волновыми фронтами. Выведена система уравнений, описывающая этот процесс. Получены решения этой системы в виде оптико-терагерцовых солитонов. Показана возможность существования солитонов нового типа – бездисперсионных солитонов.

DOI: 10.31857/S0367676522700041, EDN: JGZGGZ

## ВВЕДЕНИЕ

Большой интерес вызывают в последние десятилетия вопросы, связанные с генерацией терагерцового излучения. С одной стороны, это обусловлено наличием у терагерцового излучения многочисленных приложений в медицине, системах восстановления изображений, системах безопасности и других областях. С другой стороны, особенности взаимодействия терагерцового излучения с различными средами все еще остаются недостаточно исследованными.

Одним из наиболее эффективных методов генерации терагерцового излучения является метод, основанный на эффекте оптического выпрямления в квадратично-нелинейном кристалле [1–3]. Эффективность генерации этим методом будет наибольшей при выполнении условия синхронизма Захарова–Бенни  $v_g = c/n_T$  [4], где  $c$  – скорость света в вакууме,  $v_g = c/(n_\omega + \omega \partial n_\omega / \partial \omega)$  – групповая скорость оптического импульса, соответствующая его несущей частоте  $\omega$ ,  $n_\omega$  и  $n_T$  – показатели преломления кристалла на несущей частоте  $\omega$  и в терагерцовом диапазоне частот соответственно. Другими словами, условие Захарова–Бенни состоит в том, что групповая скорость оптической (коротковолновой) компонен-

ты должна быть равна фазовой скорости терагерцовой (длинноволновой) составляющей.

В реальных средах условие Захарова–Бенни, как правило, не выполняется. Поэтому для повышения эффективности генерации терагерцового излучения в экспериментальных условиях используют лазерные импульсы с наклонными волновыми фронтами [5–8]. В этом случае условие наиболее эффективной генерации переходит из условия Захарова–Бенни в черенковское условие [9]

$$v_g \cos \theta = \frac{c}{n_T}, \quad (1)$$

где  $\theta$  – угол между фазовыми и групповыми фронтами лазерного сигнала. Так как обычно  $v_g > c/n_T$ , то, подбирая угол  $\theta$ , можно удовлетворить условию (1).

В ходе теоретического рассмотрения процесса генерации часто считают, что интенсивность терагерцового сигнала значительно ниже интенсивности оптического импульса, и, как следствие, пренебрегают обратным воздействием генерируемого терагерцового сигнала на оптический импульс. Однако, в настоящее время относительная эффективность генерации по энергии уже достигает нескольких процентов. В таком случае динамику

оптического и терагерцового сигналов необходимо описывать самосоогласованным образом.

Спектр входного оптического импульса пикосекундной длительности имеет ярко выраженную несущую частоту. То есть, входной импульс является квазимонохроматическим и, следовательно, к нему с хорошей точностью применимо приближение медленно меняющейся огибающей (ММО). В то же время спектр генерируемого терагерцового сигнала не имеет несущей частоты и является широкополосным. Относительная длительность терагерцового импульса составляет порядка одного или даже половины периода электромагнитных колебаний [10]. Такой сигнал обладает свойствами предельно короткого импульса [11]. Поэтому здесь неприменимо приближение ММО. Для понижения порядка волнового уравнения здесь можно использовать приближение однонаправленного распространения (ОР) [12].

Генерация терагерцового излучения оптическими импульсами с наклонными волновыми фронтами рассматривалась в рамках самосоогласованного подхода в работах [13–15]. При этом к волновому уравнению для терагерцовой компоненты применялось приближение ОР. Использование этого приближения предполагает, что угол  $\theta$  мал. Однако, для сред, у которых значение электрооптического коэффициента, определяющего эффективность генерации терагерцового излучения, велико, угол  $\theta$  в равенстве (1) оказывается большим [8]. Таким образом, отказ от приближения ОР позволяет исследовать среды, у которых угол  $\theta$  уже не является малым. Процесс генерации без использования этого приближения был рассмотрен в [16]. Следуя предложенному в [16] подходу, мы продолжаем исследование генерации терагерцового излучения в квадратично-нелинейных средах.

### СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ТИПА ЗАХАРОВА–БУССИНЕСКА

Будем считать, что плоские фазовые волновые фронты лазерного импульса параллельны оптической оси  $x$  одноосного кристалла и распространяются вдоль перпендикулярной к ней оси  $z$ . При этом электрическое поле  $E$  импульса лежит в плоскости  $(x, z)$  необыкновенной волны, называемой плоскостью главного сечения. В этом случае плоскость поляризации импульса в кристалле не изменяется. Тогда для оптической  $E_\omega$  и терагерцовой  $E_T$  компонент электрического поля справедливо волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 E_{\omega,T}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_{\omega,T}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P_{\omega,T}}{\partial t^2} - \Delta_\perp E_{\omega,T}, \quad (2)$$

где  $P_\omega$  и  $P_T$  – оптическая и терагерцовая компоненты поляризационного отклика кристалла,  $\Delta_\perp = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  – поперечный лапласиан,  $y$  – ось декартовой системы координат  $(x, y, z)$ .

Для суммарного электрического поля  $E$  импульса и суммарного поляризационного отклика  $P$  кристалла имеем

$$E = E_\omega + E_T, \quad P = P_\omega + P_T. \quad (3)$$

Обозначая через  $\psi(z, x, t)$  медленно меняющуюся комплексную огибающую электрического поля оптического импульса с несущей частотой  $\omega$ , для оптической компоненты поля в точке с радиус-вектором  $\vec{r}$  запишем

$$E_\omega(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t) e^{i(\omega t - kz)} + \psi^*(\vec{r}, t) e^{-i(\omega t - kz)}, \quad (4)$$

где  $k$  – волновое число, соответствующее несущей частоте  $\omega$ .

Учитывая временную дисперсию, для суммарного поляризационного отклика нелинейного прозрачного кристалла будем иметь

$$P = \int_0^\infty \chi_1(t') E(\vec{r}, t - t') dt' + \int_0^\infty \int_0^\infty \chi_2(t'_1, t'_2) E(\vec{r}, t - t'_1) E(\vec{r}, t - t'_2) dt'_1 dt'_2, \quad (5)$$

где  $\chi_1(t')$  и  $\chi_2(t'_1, t'_2)$  – соответственно линейная и нелинейная временные восприимчивости.

Так как в оптической и терагерцовой областях прозрачности дисперсия и нелинейность относительно слабы, в линейной части поляризационного отклика используем разложения

$$E_T(\vec{r}, t - t') \approx E_T(\vec{r}, t) - t' \frac{\partial E_T(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{t'^2}{2} \frac{\partial^2 E_T(\vec{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (6)$$

$$\psi(\vec{r}, t - t') \approx \psi(\vec{r}, t) - t' \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{t'^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (7)$$

а в нелинейной части положим

$$E_T(\vec{r}, t - t'_{1,2}) \approx E_T(\vec{r}, t), \quad \psi(\vec{r}, t - t'_{1,2}) \approx \psi(\vec{r}, t). \quad (8)$$

Используя (3)–(8), после пренебрежения быстро осциллирующими слагаемыми, будем иметь

$$P_\omega = \left( \chi_\omega \psi - i \frac{\partial \chi_\omega}{\partial \omega} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi_\omega}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + 2\chi^{(2)}(\omega, 0) E_T \psi \right) e^{i(\omega t - kz)} + c.c., \quad (9)$$

$$P_T = \chi_T E_T - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \chi_\omega}{\partial \omega^2} \right)_{\omega=0} \frac{\partial^2 E_T}{\partial t^2} + \chi^{(2)}(0,0) E_T^2 + 2\chi^{(2)}(\omega, -\omega) |\psi|^2, \quad (10)$$

где  $\chi_\omega \equiv \int_0^\infty \chi_1(t') e^{-i\omega t'} dt'$  — линейная восприимчивость среды, соответствующая частоте  $\omega$ ,  $\chi_T \equiv \chi_0 = \int_0^\infty \chi_1(t') dt'$  — терагерцовая линейная восприимчивость среды, а нелинейные частотные восприимчивости второго порядка определяются из выражения  $\chi^{(2)}(\omega; \omega_2) = \int_0^\infty \chi_2(t'_1, t'_2) e^{-i(\omega t'_1 + \omega_2 t'_2)} dt'_1 dt'_2$ .

При подстановке (9) в (2) сохраним в правой части производные по времени от линейных по  $\psi$  слагаемых не выше второго порядка, а в нелинейном слагаемом положим  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} (E_T \psi e^{i(\omega t - kz)}) \approx -\omega^2 E_T \psi e^{i(\omega t - kz)}$ . В результате из (3), (9) и (10) приходим к нелинейной системе

$$i \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = -\frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \alpha E_T \psi + \frac{c}{2n_\omega \omega} \Delta_\perp \psi, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_T}{\partial z^2} - \frac{n_T^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_T}{\partial t^2} = \\ = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mu E_T^2 + \sigma |\psi|^2) - \gamma \frac{\partial^4 E_T}{\partial t^4} - \Delta_\perp E_T. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $v_g = c/(n_\omega + \omega \partial n_\omega / \partial \omega)$ ,  $n_\omega = \sqrt{1 + 4\pi\chi_\omega}$ ,  $n_T = \sqrt{1 + 4\pi\chi_T}$ ,  $\beta = \partial^2 k / \partial \omega^2$  — параметр дисперсии групповой скорости оптической компоненты,  $k = n_\omega \omega / c$ ,  $\gamma = 2\pi(\partial^2 \chi_\omega / \partial \omega^2)_{\omega=0} / c^2$  — параметр дисперсии терагерцовой составляющей, коэффициенты  $\alpha$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  выражаются через нелинейные частотные восприимчивости второго порядка:  $\alpha = 4\pi\omega\chi^{(2)}(\omega, 0)/v_g/c^2$ ,  $\mu = 4\pi\chi^{(2)}(0; 0)/c^2$ ,  $\sigma = 8\pi\chi^{(2)}(\omega, -\omega)/c^2$ .

Как линейные, так и нелинейные восприимчивости в оптическом и терагерцевом диапазонах имеют различную физическую природу. В оптическом диапазоне восприимчивости среды при воздействии на них фемтосекундных импульсов обусловлены электронно-оптическими квантовыми переходами в атомах или молекулах. В терагерцевом же диапазоне восприимчивости формируются, главным образом, в результате взаимодействия импульса с оптическими колебательными модами ионов в узлах кристаллической решетки [17, 18].

В одномерном случае ( $\Delta_\perp \psi = \Delta_\perp E_T = 0$ ) при  $\mu = \gamma = 0$  система (11), (12) переходит в одномер-

ный вариант уравнений Захарова [4, 19]. Если  $\psi = 0$ , то уравнение (11) дает тождество  $0 = 0$ . Если к тому же  $\Delta_\perp E_T = 0$ , то (12) переходит в уравнение Буссинеска [4]. По этой причине система (11), (12) была названа в [16] уравнениями типа Захарова–Буссинеска.

Заметим, что если к уравнению (12) применить приближение ОР вдоль оси  $z$ , то система (11), (12) перейдет в систему уравнений, подробно изученную в [13–15]. Однако, как было отмечено выше, такой подход не позволяет рассматривать оптико-терагерцовые солитоны с большими углами наклона волновых фронтов оптических компонент.

### ОПТИКО-ТЕРАГЕРЦОВЫЕ СОЛИТОНЫ С НАКЛОННЫМИ ВОЛНОВЫМИ ФРОНТАМИ

Рассмотрим солитонную стадию режима генерации терагерцового излучения на основе решений системы уравнений (11), (12). При этом выделяются два случая.

В первом случае имеем решение системы (11), (12) следующего вида:

$$\psi = \psi_m e^{ikz} \operatorname{sech}^2 \xi, \quad E_T = -E_{Tm} \operatorname{sech}^2 \xi, \quad (13)$$

где

$$\xi = \frac{t - (z \cos \theta + x \sin \theta)/v}{2\tau_p},$$

амплитуды компонент равны

$$\begin{aligned} \psi_m = \frac{3}{4\alpha\tau_p^2} \times \\ \times \sqrt{\frac{1}{\sigma} \left( \beta - \frac{c}{n_\omega \omega} \frac{\sin^2 \theta}{v^2} \right) \left[ 2\alpha\gamma - \mu \left( \beta - \frac{c}{n_\omega \omega} \frac{\sin^2 \theta}{v^2} \right) \right]}, \\ E_{Tm} = \frac{3}{4\alpha\tau_p^2} \left( \beta - \frac{c}{n_\omega \omega} \frac{\sin^2 \theta}{v^2} \right). \end{aligned}$$

Групповая скорость  $v$  солитона, нелинейная постоянная распространения  $\kappa$  и угол наклона  $\theta$  фазовых волновых фронтов оптической компоненты определяются соответственно выражениями

$$\frac{1}{v} = \sqrt{\frac{n_T^2}{c^2} - \frac{\gamma}{\tau_p^2}}, \quad \kappa = \frac{1}{2\tau_p^2} \left( \beta - \frac{c}{n_\omega \omega} \frac{\sin^2 \theta}{v^2} \right), \quad \cos \theta = \frac{v}{v_g}.$$

Солитоноподобное решение, представленное выше, имеет один свободный параметр, в качестве которого удобно взять временную длительность  $\tau_p$  оптико-терагерцового импульса.

Интересным частным случаем решения (13) является решение, соответствующее условиям  $\beta = \gamma = 0$ . Групповая скорость такого солитона равна линейной фазовой скорости терагерцовой волны. Так как такой двухкомпонентный соли-

тон с наклонными волновыми фронтами формируется в отсутствие дисперсии, то он был назван бездисперсионным солитоном [16].

Отметим, что временные солитоны (уединенные импульсы, локализованные в направлении распространения) формируются за счет взаимной компенсации нелинейного самосжатия и дисперсионного уширения. Так как бездисперсионный солитон является импульсом, локализованным в направлении распространения, то его следует отнести к временным солитонам. Возможность формирования бездисперсионного солитона обусловлено влиянием дифракции оптической компоненты с наклонными волновыми фронтами. Известно, что дифракция способствует формированию пространственных солитонов, компенсируя самофокусировку световых пучков. Дифрак-

ционное искривление наклонных волновых фронтов, распространяющихся вдоль оси  $z$ , приводит к уширению оптического волнового пакета в проекции на ось  $z' = z \cos \theta + x \sin \theta$ , что равносильно наличию эффективной дисперсии. Таким образом можно сказать, что двухкомпонентные дисперсионные солитоны с наклонными волновыми фронтами у оптической компоненты обладают свойствами как временных, так и пространственных солитонов.

Во втором случае система (11), (12) имеет следующее решение:

$$\psi = \psi_m e^{i\kappa z} \operatorname{sech} 2\xi, \quad E_T = -E_{Tm} \operatorname{sech}^2 2\xi, \quad (14)$$

где

$$\psi_m = \frac{1}{c\mu v_g \tau_p^2} \sqrt{\frac{6\gamma}{\sigma} \sqrt{[\mu v_g^2 n_g^2 + c n_\omega \omega v_g^2 (6\alpha\gamma - \beta\mu) - \mu c^2] \tau_p^2 - 4c^2 \gamma \mu v_g^2}},$$

$$E_{Tm} = \frac{6\gamma}{\mu \tau_p^2}, \quad v = v_g \cos \theta, \quad \kappa = \frac{3\alpha\gamma}{\mu \tau_p^2}.$$

При этом величина угла наклона  $\theta$  фазовых волновых фронтов оптической компоненты определяется соотношением

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{n_\omega \omega v_g^2 (\beta\mu - 6\alpha\gamma)}{c\mu}}}. \quad (15)$$

Решение (14) имеет один свободный параметр, в качестве которого тоже возьмем временную длительность  $\tau_p$  импульса. Интересной особенностью этого решения является то, что угол наклона  $\theta$  и скорость  $v$  солитона не зависят от длительности  $\tau_p$ .

Отметим, что бездисперсионный солитон вида (14) тоже может существовать. Но при этом должна отсутствовать собственная нелинейность терагерцовой компоненты, а именно  $\beta = 0$  и  $\gamma \rightarrow 0$  совместно с  $\mu \rightarrow 0$ .

Общепринятое мнение в отношении приближения ОР состоит в том, что оно не влияет существенно на динамику импульсов. В качестве примера приведем редуцированные уравнения Максвелла–Блоха [4] и уравнения Шефера–Вейна [20, 21]. Динамика солитонов этих уравнений и динамика импульсных решений исходных уравнений весьма схожи. В целом, такая же ситуация имеет место для системы (11), (12) и системы уравнений, полученной из нее в [13–15] с помощью приближения ОР, в случае импульсов вида (13). Однако, для импульсов вида (14) ситуация существенно отличается. У системы, полученной

из (11), (12) с помощью приближения ОР, импульсы вида (14) могут существовать, только если выполняется ограничение на физические параметры. Мы видим, что если приближение ОР не применяется, то ограничений на параметры нет, а его использование приводит к появлению ограничения на физические параметры. Заметим, что это ограничение соответствует равенству  $\cos \theta = 1$  в соотношении (15). Возможно, что такая неоднозначная роль приближения ОР в рассматриваемой здесь задаче обусловлена тем, что его корректное использование предполагает малость угла наклона  $\theta$  фазовых волновых фронтов оптической компоненты.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследован солитоноподобный режим распространения оптико-терагерцового солитона с наклонными волновыми фронтами у оптической составляющей. Углы наклона волновых фронтов не предполагаются малыми. В этом случае генерация терагерцового сигналов описывается системой связанных нелинейных уравнений типа Захарова–Буссинеска.

Важным представляется вопрос, связанный с устойчивостью рассмотренных здесь солитоноподобных решений. Соответствующее исследование выходит за рамки настоящей работы и будет проведено отдельно.

Помимо решений при учете дисперсии обеих компонент, найдены солитоноподобные реше-

ния в условиях, когда этими дисперсиями можно пренебречь. Существование таких нетривиальных решений объясняется возникновением эффективной дисперсии групповой скорости из-за дифракции оптического импульса с наклонными волновыми фронтами. Можно показать [16], что для формирования бездисперсионных оптико-терагерцовых солитонов важным является то обстоятельство, что нелинейные восприимчивости второго порядка в спектральных областях оптических и терагерцовых частот должны иметь противоположные знаки. Таким образом, принципиальную роль в этом процессе играет частотная дисперсия нелинейной восприимчивости.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдуллин У.А., Ляхов Г.А., Руденко О.В., Чиркин А.С. // ЖЭТФ. 1974. Т. 66. С. 1295; *Abdullin U.A., Lyakhov G.A., Rudenko O.V., Chirkin A.S.* // Sov. Phys. JETP. 1974. V. 39. P. 633.
2. Багдасарян Д.А., Макарян А.О., Погосян П.С. // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 37. С. 498; *Bagdasaryan D.A., Makaryan A.O., Pogosyan P.S.* // JETP Lett. 1983. V. 37. P. 594.
3. Auston D.H., Cheung K.P., Valdmanis J.A., Kleinman D.A. // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 53. P. 1555.
4. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
5. Hebling J., Almasi G., Kozma I.Z., Kuhl J. // Opt. Express. 2002. V. 10. P. 1161.
6. Степанов А.Г., Мельников А.А., Компанец В.О., Чекалин С.В. // Письма в ЖЭТФ. 2007. Т. 85. С. 279; *Stepanov A.G., Mel'nikov A.A., Kompanets V.O., Chekalin S.V.* // JETP Lett. 2007. V. 85. P. 227.
7. Bakunov M.I., Bodrov S.B., Tsarev V.V. // J. Appl. Phys. 2008. V. 104. Art. No. 073105.
8. Hebling J., Yeh K.L., Hoffmann M.C. et al. // J. Opt. Soc. Amer. B. 2008. V. 25. No. 7. P. 6.
9. Kitaeva G.Kh. // Laser Phys. Lett. 2008. V. 5. P. 559.
10. Бугай А.Н., Сазонов С.В. // Письма в ЖЭТФ. 2008. Т. 87. С. 470; *Bugai A.N., Sazonov S.V.* // JETP Lett. 2008. V. 87. P. 403.
11. Козлов С.А., Сазонов С.В. // ЖЭТФ. 1997. Т. 84. С. 221; *Kozlov S.A., Sazonov S.V.* // JETP. 1997. V. 84. P. 221.
12. Caudrey P.J., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Bullough R.K. // J. Phys. A. 1973. V. 6. Art. No. 53.
13. Сазонов С.В., Устинов Н.В. // Письма в ЖЭТФ. 2021. Т. 114. № 7. С. 437; *Sazonov S.V., Ustinov N.V.* // JETP Lett. 2021. V. 114. No. 7. P. 380.
14. Сазонов С.В., Устинов Н.В. // Изв. РАН. Сер. физ. 2021. Т. 85. № 12. С. 1776; *Sazonov S.V., Ustinov N.V.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2021. V. 85. No. 12. P. 1420.
15. Сазонов С.В., Устинов Н.В. // Изв. РАН. Сер. физ. 2022. Т. 86. № 1. С. 47; *Sazonov S.V., Ustinov N.V.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2022. V. 86. No. 1. P. 28.
16. Sazonov S.V., Ustinov N.V. // Laser Phys. Lett. 2022. V. 19. Art. No. 025401.
17. Тсупкин А.Н., Мельник М.В., Жукова М.О. et al. // Opt. Express. 2019. V. 27. Art. No. 10419.
18. Dolgaleva K., Materikina D.V., Boyd R.W., Kozlov S.A. // Phys. Rev. A. 2015. V. 92. Art. No. 023809.
19. Захаров Б.Е. // ЖЭТФ. 1972. Т. 62. С. 1745; *Zakharov V.E.* // Sov. Phys. JETP. 1972. V. 35. P. 908.
20. Schäfer T., Wayne C.E. // Physica D. 2004. V. 196. P. 90.
21. Chung Y., Jones C.K.R.T., Schäfer T., Wayne C.E. // Nonlinearity. 2005. V. 18. P. 1351.

## Optical-terahertz solitons with tilted wave fronts of system of the Zakharov–Boussinesq type equations

S. V. Sazonov<sup>a, b, c, \*</sup>, N. V. Ustinov<sup>d</sup>

<sup>a</sup>National Research Centre “Kurchatov Institute”, Moscow, 123182 Russia

<sup>b</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia

<sup>c</sup>Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993 Russia

<sup>d</sup>Kaliningrad Institute of Management, Kaliningrad, 236003 Russia

\*e-mail: sazonov.sergey@gmail.com

The generation of terahertz radiation in a quadratically nonlinear medium by optical pulses with tilted wave-fronts is investigated. A system of equations describing this process is derived. Solutions of this system in the form of optical-terahertz solitons are obtained. The possibility of the existence of a new type of solitons—dispersionless solitons is shown.

УДК 517.957:537.9

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УЕДИНЕННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ДВУМЕРНОЙ ГРАФЕНОВОЙ СВЕРХРЕШЕТКЕ

© 2023 г. О. Ю. Бабина<sup>1</sup>, С. Ю. Глазов<sup>1, 2, \*</sup>, И. Н. Федулов<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Волгоградский государственный социально-педагогический университет”, Волгоград, Россия

<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Волгоградский государственный медицинский университет” Министерства здравоохранения  
Российской Федерации, Волгоград, Россия

<sup>3</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Югорский государственный университет”, Ханты-Мансийск, Россия

\*E-mail: ser-glazov@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Изучено взаимное влияние солитонов, распространяющихся вдоль осей двумерной сверхрешетки на основе графена по взаимоперпендикулярным направлениям. Показано, что вследствие неаддитивности энергетического спектра структуры область перекрытия солитонов претерпевает характерные изменения, связанные с образованием импульсов, распространяющихся вдоль фронтов взаимодействующих уединенных волн.

DOI: 10.31857/S0367676522700053, EDN: JHFRGW

### ВВЕДЕНИЕ

Изучение оптических свойств графеновых структур — важное и актуальное направление современных исследований физики графена. Несмотря на пока еще существующие сложности технологического плана в получении графеновых сверхструктур, активно ведутся теоретические и экспериментальные исследования одномерных [1, 2] и двумерных (2D) [3–9] сверхрешеток на основе графена (ГСР). На сегодняшний день в данной области получено множество интересных результатов. В ГСР возможна генерация и усиление электромагнитных волн, в частности уединенных электромагнитных импульсов [10–15], что уже в недалеком будущем несомненно будет иметь важное практическое значение [16, 17]. Одномерная ГСР представляет собой слой графена на полосчатой подложке из чередующихся полос, например, оксида и карбида кремния ( $\text{SiO}_2$  и  $\text{SiC}$ ) соответственно. Подложка из  $\text{SiO}_2$  не влияет на энергетический спектр графена, а в результате взаимодействия графена с подложкой из  $\text{SiC}$  появляется запрещенная зона (“щель”) шириной 0.26 эВ. Чередование щелевой и бесщелевой модификации графена приводит к образованию минизонного спектра. Ось сверхрешетки в этом случае направленно перпендикулярно чередующимся полосам  $\text{SiO}_2$  и  $\text{SiC}$ . Если же вместо полосчатой

взять подложку, образуемую периодически чередующимися в шахматном порядке прямоугольными областями оксида и карбида кремния, то получится 2D ГСР. Модельный энергетический спектр такой сверхрешетки предложен в работе [3], а в работах [5, 6] исследовалось распространение электромагнитных импульсов в 2D ГСР. В данной работе численно исследовано взаимодействие уединенных электромагнитных импульсов (УЭИ), распространяющихся вдоль осей 2D ГСР по взаимоперпендикулярным направлениям.

### ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Спектр 2D ГСР, состоящей из чередующихся в шахматном порядке прямоугольных областей щелевого и бесщелевого графена, в одноминизонном приближении имеет вид [3]

$$\varepsilon(\vec{p}) = \pm \sqrt{\Delta_0^2 + \Delta_1^2 (1 - \cos(p_x d_1)) + \Delta_2^2 (1 - \cos(p_y d_2))}, \quad (1)$$

где  $p_x, p_y$  — проекции квазиимпульса электрона на оси СР, а параметры  $\Delta_0, \Delta_1$  и  $\Delta_2$  были выбираются путем численного решения дисперсионного уравнения (здесь и далее  $\hbar = 1$ ). Подробное исследование свойств спектра 2D ГСР было предпринято в работах [4–7]. Отметим, что присущая данному спектру непараболичность предопределяет



нелинейные свойства двумерной ГСР, в частности возможность распространения в ней уединенных электромагнитных импульсов (УЭИ) [18].

Эволюция УЭИ описывается уравнением д'Аламбера для векторного потенциала с учетом столкновений

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_0(A_x, A_y) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_{st}(A_x, A_y), \quad (2)$$

где  $V = c\chi^{-1/2}$ ,  $\chi$  – эффективная диэлектрическая проницаемость среды. Векторный потенциал связан с напряженностью электрического поля  $\vec{E} = -(1/c)\partial\vec{A}/\partial t$ . При решении задачи мы выбираем кулоновскую калибровку векторного потенциала.

Плотность электрического тока определяется в виде

$$\vec{j} = -e \sum n(\vec{p}) \vec{v} \left( \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \right), \quad (3)$$

где  $n(\vec{p})$  – функция распределения электронов,  $\vec{v}(\vec{p}) = (\partial\epsilon/\partial p_x, \partial\epsilon/\partial p_y)$  – скорость электронов. В бесстолкновительном пределе из (3) получаем

$j_0(A_x, A_y)$ . Величина, стоящая в правой части уравнения (2)  $j_{st}(A_x, A_y)$  является нелинейным функционалом возмущения плотности тока  $j_0(A_x, A_y)$  при учете столкновений. Для нахождения функции распределения носителей использовано классическое уравнение Больцмана с модельным интегралом столкновений в приближении постоянной частоты релаксации ( $\nu = \text{const}$ )

$$\frac{\partial n(\vec{p})}{\partial t} - \frac{e}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \frac{\partial n(\vec{p})}{\partial \vec{p}} = -\nu (n(\vec{p}) - n_0(\vec{p})). \quad (4)$$

Разлагая скорость электронов в двумерный ряд Фурье и предполагая электронный газ невырожденным, имеем выражение для плотности тока

$$\vec{j}_0 = -\frac{en_0}{a} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{nm} \sin(n\varphi_x) \cos(m\varphi_y), \right. \\ \left. \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{nm} \sin(n\varphi_y) \cos(m\varphi_x) \right), \quad (5)$$

где  $n_0$  – концентрация 2D электронов,  $a$  – толщина графена,  $\vec{\varphi} = \frac{e}{c}(A_x d_1, A_y d_2)$  – безразмерный векторный потенциал,  $B_{nm} = a_{nm} I_{nm}/I_{00}$ ,

$$I_{nm} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(my) \exp \left[ -\sqrt{\Delta_0^2 + \Delta_1^2 (1 - \cos(x)) + \Delta_2^2 (1 - \cos(y))} / kT \right] dx dy,$$

$a_{nm} = \frac{\Delta_1^2 d_1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x) \sin(nx) \cos(my) dx dy}{\sqrt{\Delta_0^2 + \Delta_1^2 (1 - \cos(x)) + \Delta_2^2 (1 - \cos(y))}}$ .  $C_{nm}$  вычисляется аналогично  $B_{nm}$  посредством разложения в ряд Фурье проекции скорости электронов на ось  $y$ .

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Решение уравнения (2) производится численно с использованием схемы типа “крест”. Периоды сверхрешетки выбираются равными  $d_1 = d_2 = d = 2 \cdot 10^{-6}$  см, при таком выборе параметры энергетического спектра (1) составляют  $\Delta_0 = 0.4217\Delta$  (для SiC  $\Delta = 0.13$  эВ),  $\Delta_1 = \Delta_2 = 0.3318\Delta$ . Степень неаддитивности спектра будет определяться количеством перекрестных членов в его разложении в ряд Фурье.

$$\epsilon(\vec{p}) = \Delta \left\{ g_1 - \frac{g_2}{2} [\cos(p_x d) + \cos(p_y d)] - g_3 \cos(p_x d) \cos(p_y d) \right\}. \quad (6)$$

где  $g_1 = 0.624475$ ,  $g_2 = 0.1787$ ,  $g_3 = 0.01306$ . При решении данной задачи мы ограничивались лишь

первыми членами. Такой подход дает относительное отклонение спектров в 2%, что вполне соответствует случаю слабой неаддитивности. В декартовых координатах система уравнений для компонент безразмерного векторного потенциала приобретает вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \tilde{y}^2} + \sin \varphi_x (1 + \beta \cos \varphi_y) = 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial \tilde{y}^2} + \sin \varphi_y (1 + \beta \cos \varphi_x) = 0, \quad (7)$$

где  $\tilde{t} = t\omega/\sqrt{\chi}$ ,  $\tilde{x} = x\omega/c$ ,  $\tilde{y} = y\omega/c$ ,  $\omega^2 = 2\pi n_0 e^2 B_{10} d/a$ ,  $\beta = 2B_{11}/B_{10}$ . В предельном случае аддитивного энергетического спектра (при  $\beta = 0$ ) уравнения (5) представляют собой двумерные уравнения синус-Гордона. В случае слабой неаддитивности спектра ГСР система (7) допускает точное аналитическое решение для некоторых выделенных направлений [5]. При учете столкновений правая часть уравнения (7) модифицируется и вместо нее появляется нелинейный функционал от векторного потенциала, выражающийся через диссипативный ток.

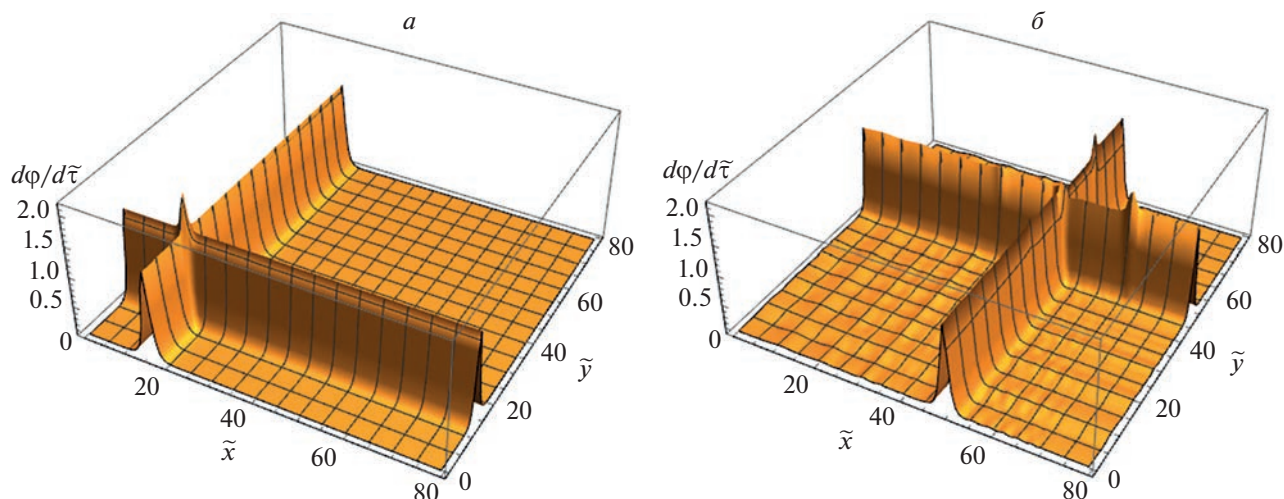


Рис. 1. Взаимодействие солитонов для  $\tilde{t} = 0$  (а), 60 (б).

Большой интерес представляет исследование взаимодействия нелинейных уединенных импульсов. В отсутствие неаддитивности спектра, когда параметр  $\beta = 0$ , солитоны, распространяющиеся вдоль взаимно перпендикулярных направлений, не взаимодействуют, вследствие чего их форма сохраняется. Однако в случае слабой неаддитивности результаты численного расчета показывают взаимное влияние распространяющихся уединенных волн даже в случае малых потенциалов.

Непосредственно результаты численного моделирования столкновений солитонов в 2D ГСР показаны на рис. 1. По горизонтальным осям отложены безразмерные координаты, по верти-

кальной — модуль напряженности электрического поля, также выраженный в безразмерных единицах. На рис. 1б хорошо виден результат взаимного влияния солитонов друг на друга. В области перекрытия солитонов наблюдается уменьшение амплитуды с одновременным образованием двух импульсов, со значительной скоростью распространяющихся вдоль фронтов уединенных волн.

Для анализа картины эволюции УЭИ удобно выбрать направление под углом  $45^\circ$  к осям ГСР и наблюдать за изменением потенциала и напряженности электрического поля вдоль этого направления. Результаты моделирования изменения формы УЭИ представлены на рис. 2. Хорошо заметно быстрое уменьшение амплитуды на начальном этапе распространения, а также то, что по достижении амплитудой определенного значения в дальнейшем она перестает изменяться. В процессе распространения изменяется также и форма импульса. В целом картина эволюции формы УЭИ выглядит как подстраивание импульса под среду, в которой происходит его распространение.

При учете столкновений электронов с решеткой амплитуды УЭИ быстро уменьшаются, поэтому основной задачей является увеличение времени его жизни. Для увеличения времени жизни солитонной системы необходимо осуществить подпитку энергии с помощью внешнего электрического поля или тока [5, 6].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численно исследовано распространение двух взаимодействующих нелинейных УЭИ в 2D ГСР в бесстолкновительном приближении и с учетом

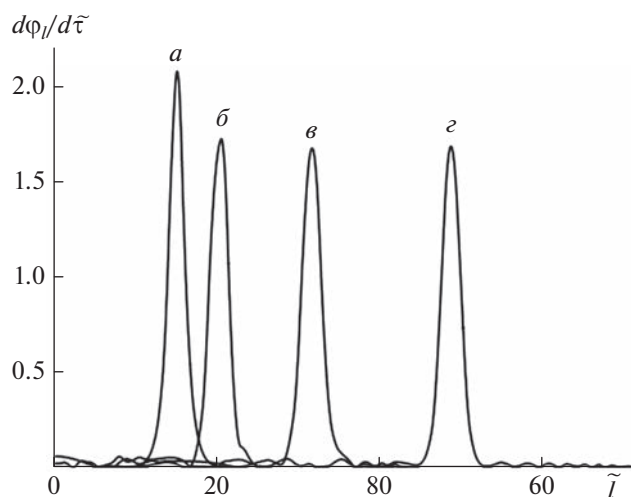


Рис. 2. Профиль импульса (срез под углом  $45^\circ$  к осям ГСР) для  $\tilde{t} = 0$  (а), 10 (б), 30 (в), 60 (г).

столкновений. Получена картина взаимного влияния и эволюции солитонов, распространяющихся вдоль осей сверхрешетки во взаимно перпендикулярных направлениях. В бесстолкновительном режиме после переходного процесса наблюдается состояние с установившейся амплитудой в области перекрытия солитонов и образование импульсов, бегущих вдоль фронтов уединенных волн. Такая эволюция рассматриваемой пары солитонов вызвана неаддитивностью энергетического спектра, приводящей к взаимосвязи ортогональных составляющих векторного потенциала. Разработан программный комплекс для численного моделирования распространения уединенных электромагнитных волн в 2D ГСР.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ratnikov P.V. // JETP Lett. 2009. V. 90. No. 6. P. 469.
2. Ratnikov P.V. // Phys. Rev. B. 2020. V. 101. Art. No. 125301.
3. Kryuchkov S.V., Popov C.A. // J. Nano-Electron. Phys. 2017. V. 9. No. 2. Art. No. 02013.
4. Бадикова П.В., Глазов С.Ю., Сыродоев Г.А. // ФТП. 2019. Т. 53. № 7. С. 927; Badikova P.V., Glazov S.Yu., Syrodov G.A. // Semiconductors. 2019. V. 53. No. 7. P. 911.
5. Глазов С.Ю., Сыродоев Г.А. // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 1. С. 128; Glazov S.Yu., Syrodov G.A. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2020. V. 84. No. 1. P. 98.
6. Glazov S.Yu., Syrodov G.A. // J. Phys. Conf. Ser. 2021. V. 1740. No. 1. Art. No. 012062.
7. Бадикова П.В., Глазов С.Ю., Сыродоев Г.А. // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 1. С. 38; Badikova P.V., Glazov S.Yu., Syrodov G.A. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2020. V. 84. No. 1. P. 30.
8. Forsythe C., Zhou X., Watanabe K. et al. // Nature Nanotech. 2018. V. 13. P. 566.
9. Zhang Y., Kim Y., Gilbert M.J. et al. // NPJ 2D Mater. Appl. 2018. V. 2. P. 31.
10. Popa D., Sun Z., Torrisi F. et al. // Appl. Phys. Lett. 2010. V. 97. Art. No. 203106.
11. Martin-Vergara F., Rus F., Villatoro F.R. // Nonlinear Syst. 2018. V. 2. P. 85.
12. Kryuchkov S.V., Kukhar' E.I. // Physica B. 2013. V. 408. P. 188.
13. Smirnova D.A., Shadrivov I.V., Smirnov A.I. et al. // Laser Photon. Rev. 2014. V. 8. P. 291.
14. Bludov Yu.V., Smirnova D.A., Kivshar Yu.S. et al. // Phys. Rev. B. 2015. V. 91. Art. No. 045424.
15. Кухарь Е.И., Крючков С.В., Ионкина Е.С. // ФТП. 2018. Т. 52. № 6. С. 620; Kukhar E.I., Kryuchkov S.V., Ionkina E.S. // Semiconductors. 2018. V. 52. No. 6. P. 766.
16. Крючков С.В., Капля Е.В. // ЖТФ. 2003. Т. 48. № 5. P. 53; Kryuchkov S.V., Kaplya E.V. // Tech. Phys. 2003. V. 48. No. 5. P. 576.
17. Sun Z., Hasan T., Ferrari A.C. // Physica E. 2012. V. 44. P. 1082.
18. Энштейн Э.М. // ФТТ. 1977. Т. 19. № 11. С. 3456; Epshtein E.M. // Sov. Phys. Solid State. 1977. V. 19. No. 11. P. 2020.

## Interaction of solitary electromagnetic waves in a 2D graphene superlattice

O. Yu. Babina<sup>a</sup>, S. Yu. Glazov<sup>a, b, \*</sup>, I. N. Fedulov<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Volgograd State Socio-Pedagogical University, Volgograd, 400005 Russia

<sup>b</sup>Volgograd State Medical University, Volgograd, 400131 Russia

<sup>c</sup>Yugra State University, Khanty-Mansiysk, 628012 Russia

\*e-mail: ser-glazov@yandex.ru

The mutual influence of solitons propagating along the axes of a two-dimensional graphene superlattice in mutually perpendicular directions has been studied. It is shown that due to the nonadditivity of the energy spectrum of the structure, the overlap region of solitons undergoes characteristic changes associated with the formation of pulses propagating along the fronts of interacting solitary waves.

УДК 537.9

## УПРАВЛЕНИЕ ПРОВОДИМОСТЬЮ ДВУМЕРНОЙ ГРАФЕНОВОЙ СВЕРХРЕШЕТКИ ПОПЕРЕЧНЫМИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ПОЛЯМИ

© 2023 г. С. Ю. Глазов<sup>1, 2, \*</sup>, Н. Е. Мещерякова<sup>2</sup>, И. А. Подгорная<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Волгоградский государственный социально-педагогический университет”, Волгоград, Россия

<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Волгоградский государственный медицинский университет” Министерства здравоохранения Российской Федерации, Волгоград, Россия

\*E-mail: ser-glazov@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Исследована возможность управления проводимостью графеновой сверхрешетки поперечными постоянными и переменными электрическими полями, обусловленная неаддитивностью ее энергетического спектра. Предложена методика определения диапазонов параметров приложенных полей, при которых управление проводимостью наиболее эффективно.

DOI: 10.31857/S0367676522700065, EDN: JINJLB

### ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в ряде теоретических исследований обращается внимание на необычные явления, связанные с неаддитивностью энергетического спектра графеновых структур. Взаимное влияние на носители тока в щелевом графене двух электромагнитных волн разной частоты со взаимно перпендикулярными векторами напряженности изучено в [1]. В графеновых сверхрешетках (ГСР) электрическое поле, приложенное поперек оси сверхрешетки, способно модифицировать продольную вольт-амперную характеристику этого материала [2–7].

Изучение двумерных (2D) ГСР привлекает внимание исследователей в связи с необычностью их свойств, в том числе и электронных, что связано с особенностями энергетического спектра графена и структур на его основе. В работах [8–11] рассматриваются новые подходы к созданию 2D ГСР. Вызывает значительный интерес модель 2D ГСР, в которой графен осажден на подложку из периодически чередующихся в шахматном порядке прямоугольных ячеек, например оксида и карбида кремния ( $\text{SiO}_2$  и  $\text{SiC}$ ) [10]. В результате взаимодействия графена с подложкой из  $\text{SiC}$  в энергетическом спектре носителей заряда появляется запрещенная зона (щель), а подложка из  $\text{SiO}_2$  не вызывает изменение спектра графена (щель отсутствует). Чередование в шахматном порядке так называемых щелевой и бесщелевой

модификаций графена [2] приводит к образованию 2D сверхрешеточного минизонного спектра. В [10, 11] исследуется влияние внешних постоянного и переменного электрических полей на транспортные свойства такой структуры. Показано, что наличие постоянного поперечного электрического поля приводит к появлению дополнительного пика в вольт-амперных характеристиках. Для такой 2D ГСР исследован коэффициент поглощения электромагнитной волны в присутствии постоянного электрического поля для случая квазиклассически сильных электрических полей [12], выявлено влияние неаддитивности спектра 2D ГСР на распространение уединенного электромагнитного импульса вдоль произвольных направлений образца [13], а также показана возможность управления амплитудами высших гармоник поперечными электрическими полями [14].

В рамках настоящей работы исследованы особенности управления проводимостью поперечными электрическими полями в 2D ГСР, состоящей из чередующихся в шахматном порядке прямоугольных областей щелевой и бесщелевой графена.

### ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Энергетический спектр электронов в 2D ГСР в одноминизонном приближении выбран в модельном виде [10]

$$\epsilon(\vec{p}) = \sqrt{\Delta_0^2 + \Delta_1^2 (1 - \cos(p_x d_1 / \hbar)) + \Delta_2^2 (1 - \cos(p_y d_2 / \hbar))}, \quad (1)$$

где  $\vec{p}$  – квазиимпульс электрона,  $d_i = a_i + b_i$  – период ГСР,  $a_i$  и  $b_i$  – ширины ячеек бесщелевого и щелевого графена. Из формулы (1) видно, что полная энергия электронов не может быть представлена алгебраической суммой ее компонент по двум взаимно перпендикулярным направлениям, то есть энергетический спектр 2D ГСР неаддитивен. Неаддитивность энергетического спектра сверхрешетки на основе графена приводит к взаимной зависимости движений носителей заряда вдоль перпендикулярных друг другу направлений, что приводит к дополнительной возможности управления током вдоль оси сверхрешетки приложением поперечного напряжения [4].

Рассмотрим случай, когда в плоскости 2D ГСР приложено постоянное и переменное электрические поля  $\vec{E} = (E_{1x} + E_{0x} \cos \omega t, E_{1y} + E_{0y} \cos \omega t)$ , где  $E_0$  и  $\omega$  – амплитуда и частота переменного

электрического поля,  $E_1$  – модуль напряженности постоянного электрического поля.

Для невырожденного электронного газа в работе [14] была получена постоянная составляющая плотности тока, текущего вдоль оси одной из осей 2D ГСР

$$j_x = j_0 \sum A_{nm} C_{nm} \sin \varphi_{knm} \cos \varphi_{knm} J_k^2(n\alpha_x + m\alpha_y), \quad (2)$$

где  $j_0 = -ed_1 n \Delta / 2$ ,  $n$  – концентрация электронов в зоне проводимости,  $J_n(x)$  – функция Бесселя 1-го рода  $n$ -го порядка,  $v$  – частота столкновений,  $\alpha_x = eE_{0x}d_1/\hbar\omega$ ,  $\alpha_y = eE_{0y}d_2/\hbar\omega$ ,  $\Omega_x = eE_{1x}d_1$ ,

$$\Omega_y = eE_{1y}d_2, \quad \sin \kappa_{knm}^{\pm} = \frac{v}{\sqrt{v^2 + (m\Omega_x \pm n\Omega_y + k\omega)^2}},$$

$$A_{nm} = \Delta_0 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(y) \sin(x) \sin(mx) \cos(ny) dx dy}{\sqrt{\Delta_0^2 + \Delta_1^2 (1 - \cos(x)) + \Delta_2^2 (1 - \cos(y))}},$$

$$C_{nm} = \frac{1}{C} \int \int \cos(mx) \cos(ny) \exp\left(-\sqrt{\Delta_0^2 + \Delta_1^2 (1 - \cos(x)) + \Delta_2^2 (1 - \cos(y))} / k_B T\right) dx dy,$$

$$C = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-\sqrt{\Delta_0^2 + \Delta_1^2 (1 - \cos(x)) + \Delta_2^2 (1 - \cos(y))} / k_B T\right) dx dy.$$

Вычисление плотности тока проведено с использованием решения кинетического уравнения Больцмана с модельным интегралом столкновений в приближении постоянного времени релаксации.

Из анализа формулы (2) можно увидеть, что вследствие неаддитивности энергетического спектра 2D ГСР, постоянная составляющая плотности тока, текущего вдоль оси  $x$ , зависит не только от полей, ориентированных вдоль этой оси (продольных), но и от полей, ориентированных перпендикулярно (поперечных).

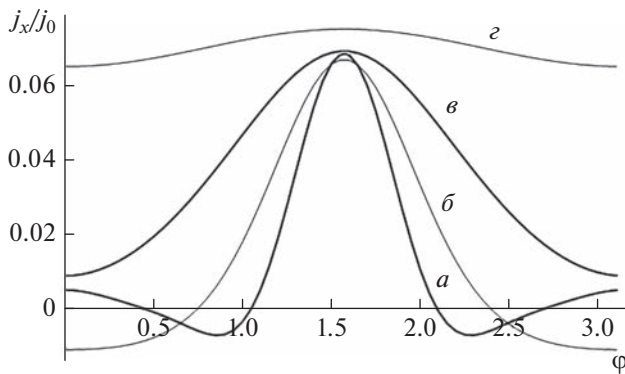
Для численного расчета также, как и в [14] выбрана симметричная 2D ГСР ( $d_1 = d_2 = d = 2 \cdot 10^{-6}$  см).

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведем один из примеров исследования плотности тока в 2D ГСР. Выберем направление вектора напряженности постоянного электрического поля вдоль одной из осей СР, для определенности вдоль оси  $x$ . Частота и амплитуда переменного электрического поля постоянны, а направление вектора поляризации этого поля задается углом  $\varphi$  относительно оси  $x$ . Зависимость плотности тока от угла поворота  $\varphi$  вектора поляризации переменного электрического поля, при фиксированных значе-

ниях параметров внешних электрических полей показана на рис. 1. Максимального значения плотность тока достигает, когда переменное поле поляризовано перпендикулярно оси 2D ГСР. С увеличением напряженности поля плотность тока, протекающего вдоль оси  $x$ , уменьшается. При сильных полях также можно наблюдать на графике смену знака тока, протекающего в продольном направлении (рис. 1а и 1б), эффект абсолютной отрицательной проводимости [15]. Для значения угла  $\varphi = \pi/2$  ярко прослеживается возможность управления проводимостью поперечными полями. Результаты данного исследования могут быть использованы для детектирования электромагнитного излучения, если, поворачивая образец с 2D ГСР, находящийся под воздействием постоянного электрического поля, измерять угол поворота и величину электрического тока.

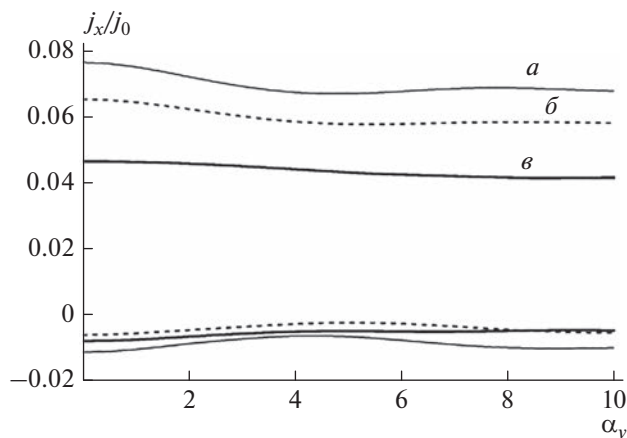
Следующей частью исследования являлось определение параметров внешних электрических полей, при которых будет наиболее эффективно изменяться плотность тока. В этом случае будем варьировать продольные и поперечные по отношению к исследуемому направлению тока компоненты электрических полей. На первом этапе численно определили диапазон возможных значений плотности тока (максимальное и мини-



**Рис. 1.** Зависимость плотности тока от угла поворота  $\varphi$  переменного поля, когда  $\Omega_x/v = 1.0$ ,  $\omega/v = 2.0$ :  $\alpha = 7$  (а), 5 (б), 3 (в), 1 (г).

мальное значение) при фиксированной частоте и при изменении остальных параметров полей.

Обнаружено, что наибольший размах между возможными значениями тока наблюдается при равенстве нулю поперечной составляющей постоянного поля ( $E_{ly} = 0$ ), когда анализируется зависимость от этой характеристики. Далее проводился численный анализ зависимости плотности тока от поперечной составляющей переменного поля при фиксированной частоте  $\omega$  и  $E_{ly} = 0$ . Результат такого расчета приведен на рис. 2. Здесь наблюдается уменьшение диапазона изменения значений плотности тока при увеличении продольной составляющей постоянного электрического поля. Аналогичные результаты получены при построении зависимости плотности тока от поперечной составляющей переменного поля при прочих равных условиях.



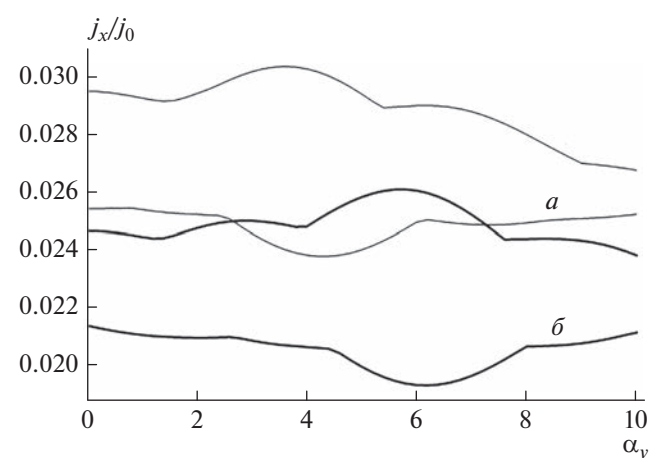
**Рис. 2.** Зависимость максимумов и минимумов плотности тока от поперечного переменного электрического поля при  $\omega/v = 2.0$ ,  $\Omega_y/v = 0$ :  $\Omega_x/v = 1.0$  (а), 2.0 (б), 3.0 (в).

На следующем этапе было определено (рис. 3), что наибольший размах максимумов и минимумов плотности тока, проявляется при равных значениях продольной  $E_{lx}$  и поперечной  $E_{ly}$  составляющих переменного электрического поля, если анализируется зависимость плотности тока от  $E_{ly}$ . При исследовании зависимости от поперечной составляющей постоянного электрического поля  $E_{0y}$ , при равенстве  $E_{0x} = E_{0y}$ , выявлено, что размах минимален. При увеличении частоты этот эффект становится менее выраженным.

Предложенная в работе методика численного определения диапазона значений плотности тока интересна тем, что, варьируя сразу несколько параметров, можно выяснить, в каких границах может изменяться исследуемая величина.

В рассматриваемом в работе частном случае энергетический спектр обладает слабой неаддитивностью, что и проявляется в слабой зависимости плотности тока от поперечного электрического поля. Отметим, что при уменьшении периода 2D ГСР возможность управления проводимостью поперечными электрическими полями увеличивается, поскольку с уменьшением периода увеличивается неаддитивность энергетического спектра [13].

Приведем оценку параметров рассматриваемой системы в связи с использованными моделями и приближениями. В работе пренебрегалось межминизонными переходами, выбрано одноминизонное приближение, что соответствует выполнению условий:  $\hbar\omega \ll \epsilon_g$ ,  $\epsilon_{g12}$  ( $\omega \ll 1.2 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ ),  $k_b T \ll \epsilon_g$ ,  $\epsilon_{g12}$  ( $T \ll 10^3 \text{ К}$ ). При расчете плотности тока использован квазиклассический подход, приводящий к условиям на параметры полей:  $\omega < 10^{13} \text{ с}^{-1}$ ;  $edE_0/\hbar v$ ,  $edE_1/\hbar v \ll 1.2 \cdot 10^3$ . Для численных расчетов использованы следующие пара-



**Рис. 3.** Зависимость максимумов и минимумов плотности тока от поперечного переменного электрического поля при  $\omega/v = 2.0$ ,  $\Omega_y/v = 0$ :  $\Omega_x/v = 3.0$ ,  $\alpha_x = 4$  (а);  $\Omega_x/v = 5.0$ ,  $\alpha_x = 6$  (б).

метры:  $n = 10^{11} \text{ см}^{-2}$ ,  $\tau = v^{-1} \approx 10^{-11} \text{ с}$ ,  $T = 70 \text{ К}$ . Численная оценка величины поля  $E$  при  $edE/\hbar v = 1$  составляет 33 В/см.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Неаддитивность энергетического спектра структур на основе графена, и, в частности, 2D ГСР, приводит к существенному отличию кинетических явлений в таких электронных системах от структур с аддитивным спектром. По сравнению со шелевым графеном [4], энергетический спектр 2D ГСР обладает более слабой неаддитивностью и значительно меньшей шириной зон (минизон) проводимости, что и определяет ее отклик на внешние электрические поля. Использование квазиклассического подхода для нахождения плотности тока в условиях воздействия произвольно поляризованных статического и переменного электрических полей позволяет получить аналитическую зависимость плотности тока от параметров полей. Проведено исследование зависимости плотности тока от параметров поперечно ориентированных электрических полей. Определены соотношения между параметрами приложенных полей, при которых наблюдается существенное различие между возможными значениями плотности тока, и, соответственно, управление проводимостью наиболее эффективно. Выявленные зависимости могут быть использованы для управления проводимостью в двумерных графеновых сверхрешетках и в устройствах детектирования электромагнитного излучения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Завьялов Д.В., Конченков В.И., Крючков С.В. // ФТП. 2009. Т. 51. № 10. С. 2033; *Zav'yalov D.V., Konchenkov V.I., Kryuchkov S.V.* // Phys. Solid State. 2009. V. 51. P. 2157.
2. Завьялов Д.В., Конченков В.И., Крючков С.В. // ФТП. 2012. Т. 46. № 1. С. 113; *Zav'yalov D.V., Konchenkov V.I., Kryuchkov S.V.* // Semiconductors. 2012. V. 46. P. 109.
3. Крючков С.В., Кухарь Е.И. // ФТП. 2016. Т. 50. № 2. С. 218; *Kryuchkov S.V., Kukhar' E.I.* // Semiconductors. 2016. V. 50. P. 217.
4. Глазов С.Ю. // Изв. РАН. Сер. физ. 2019. Т. 83. № 1. С. 19; *Glazov S.Yu.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2019. V. 83. No. 1. P. 12.
5. Крючков С.В., Кухарь Е.И., Яковенко В.А. // Изв. РАН. Сер. физ. 2010. Т. 74. № 12. С. 1759; *Kryuchkov S.V., Kukhar' E.I., Yakovenko V.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2010. V. 74. No. 12. P. 1679.
6. Крючков С.В., Кухарь Е.И. // ФТП. 2012. Т. 46. № 5. С. 684; *Kryuchkov S.V., Kukhar' E.I.* // Semiconductors. 2012. V. 46. No. 5. P. 666.
7. Кухарь Е.И., Крючков С.В., Ионкина Е.С. // Изв. РАН. Сер. физ. 2017. Т. 81. № 12. С. 218; *Kukhar E.I., Kryuchkov S.V., Ionkina E.S.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2017. V. 81. No. 1. P. 47.
8. Forsythe C., Zhou X., Watanabe K. et al. // Nature Nanotechnol. 2018. V. 13. P. 566.
9. Zhang Y., Kim Y., Gilbert M.J. et al. // NPJ 2D Mat. Appl. 2018. V. 2. P. 31.
10. Kryuchkov S.V., Popov C.A. // J. Nano-Electron. Phys. 2017. V. 9. No. 2. P. 02013.
11. Kryuchkov S.V., Popov C.A. // Proc. 2017 IEEE 7th Int. Conf. Nanomat. Appl. Prop. (Odessa, 2017). Art. No. 03CBN09.
12. Бадикова П.В., Глазов С.Ю., Сыродоев Г.А. // ФТП. 2019. Т. 53. № 7. С. 927; *Badikova P.V., Glazov S.Yu., Syrodov G.A.* // Semiconductors. 2019. V. 53. No. 7. P. 911.
13. Глазов С.Ю., Сыродоев Г.А. // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 1. С. 128; *Glazov S.Yu., Syrodov G.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2020. V. 84. No. 1. P. 98.
14. Бадикова П.В., Глазов С.Ю., Сыродоев Г.А. // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 1. С. 38; *Badikova P.V., Glazov S.Yu., Syrodov G.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2020. V. 84. No. 1. P. 30.
15. Басс Ф.Г., Булгаков А.А., Тетервов А.П. Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками. М.: Наука, 1989.

## Two-dimensional graphene superlattice conductivity control by transverse electric fields

S. Yu. Glazov<sup>a, b, \*</sup>, N. E. Mescheryakova<sup>b</sup>, I. A. Podgornaya<sup>a, b</sup>

<sup>a</sup>Volgograd State Socio-Pedagogical University, Volgograd, 400005 Russia

<sup>b</sup>Volgograd State Medical University, Volgograd, 400131 Russia

\*e-mail: ser-glazov@yandex.ru

The possibility of controlling the conductivity of a graphene superlattice by transverse constant and alternating electric fields due to the nonadditivity of its energy spectrum is investigated. A technique is proposed for identifying the parameter areas of the applied fields in which conductivity control is most effective.



УДК 530.182

## ЭФФЕКТ УВЛЕЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ БРИЗЕРОМ В СВЕРХРЕШЕТКЕ НА ОСНОВЕ ГРАФЕНА

© 2023 г. П. В. Бадикова<sup>1, 2</sup>, Д. В. Завьялов<sup>1</sup>, В. И. Конченков<sup>1, 2, \*</sup>, С. В. Крючков<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Волгоградский государственный технический университет”, кафедра физики, Волгоград, Россия

<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Волгоградский государственный социально-педагогический университет”,  
Научно-учебная лаборатория физики низкоразмерных систем, Волгоград, Россия

\*E-mail: kontchenkov@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Исследован бризероэлектрический эффект в графеновой сверхрешетке в бесстолкновительном приближении. При вычислении плотности тока увлечения использовано приближенное решение в форме бегущего бризера малой амплитуды нелинейного уравнения Клейна–Гордона, описывающего распространение нелинейных волн в графеновой сверхрешетке. Оценено время пробега бризера, обусловленное столкновительной диссипацией.

DOI: 10.31857/S0367676522700077, EDN: JIPIYY

### ВВЕДЕНИЕ

Графеновые сверхрешетки (ГСР), при получении которых используются различные способы формирования периодического потенциала, в последние годы широко исследуются теоретически и экспериментально. Непараболичность энергетического спектра ГСР позволяет ожидать проявления ряда нелинейных эффектов, известных для полупроводниковых сверхрешеток (СР). Одним из таких эффектов является распространение в сверхрешетках уединенных волн — солитонов и бризеров. В работе [1] было проанализировано уравнение Даламбера, записанное для электромагнитных волн, распространяющихся в ГСР, состоящей из чередующихся полосок шелевой и бесшелевой модификации графена [2]. Энергетический спектр сверхрешетки, рассмотренной в [1], имеет вид:

$$\varepsilon = \sqrt{\Delta^2 + p_x^2 v_F^2 + \Delta_1^2 \left(1 - \cos \frac{p_z d}{\hbar}\right)}. \quad (1)$$

Здесь  $p_x$ ,  $p_z$  — компоненты квазиимпульса электрона,  $d$  — период СР,  $v_F = 10^8$  см·с<sup>−1</sup> — скорость на поверхности Ферми в графене,  $\Delta$  — полуширина запрещенной зоны в шелевой модификации графена. В расчетах будем полагать  $\Delta = 0.13$  эВ, что соответствует полуширине запрещенной зоны графена на подложке из карбида кремния. Параметр  $\Delta_1$  соответствует полуширине минизоны проводимости одномерной полупро-

водниковой СР. Например, в [3] полагают  $\Delta_1 = 0.059$  эВ. В настоящей работе будем считать значение  $\Delta_1$  меньше или порядка  $\Delta$ . Известно [1], что в этом материале вектор-потенциал электромагнитного поля является решением уравнения Даламбера, представляемого в виде

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\omega_0^2 b^2 \sin \alpha}{\sqrt{1 + b^2 (1 - \cos \alpha)}} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\alpha = qdA_z/\hbar c$  — безразмерная компонента векторного потенциала в направлении чередова-

ния слоев СР,  $\omega_0^2 = \frac{2\pi n_0 q^2 d^2 \Delta}{a_0 \hbar^2}$ ,  $n_0$  — поверхностная

концентрация носителей заряда,  $a_0 = 0.12$  — толщина графенового слоя,  $b = \Delta_1/\Delta$ . Уравнение колебаний в форме (2) соответствует направлению вектора напряженности электрического поля вдоль оси  $z$ , при этом волна распространяется вдоль оси  $x$  (рис. 1). Уравнение (2) имеет решение в виде  $2\pi$ -импульса, выраженное неявно [1]:

$$\int_{\pi}^{\alpha(\xi)} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 + b^2 (1 - \cos \alpha)}} = 2\xi, \quad (3)$$

$\xi = \frac{x - vt}{L_0}$ ,  $L_0 = \frac{c}{\omega_0} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ ,  $v$  — скорость электромагнитного импульса. В работе [4] исследуется вопрос области стабильности  $2\pi$ -импульса в ГСР, а



также динамика  $\pi$ -импульса. Исследованию взаимодействия кинков и антикинков уравнения (2) посвящен обзор [5]. В статье [6] численно исследовано неупругое столкновение кинков и антикинков с одинаковой, но противоположной по направлению скоростью. После взаимодействия кинка и антикинка они уходят в бесконечность, когда скорость рассматриваемых уединенных волн либо больше некоторого критического значения, либо находится внутри ряда резонансных окон; в противном случае они образуют состояние, подобное бризеру, которое медленно распадается за счет излучения энергии.

В работе [7] предложен способ получения приближенного решения нелинейного уравнения Клейна–Гордона в виде бегущего бризера малой амплитуды и в качестве примера исследовано решение уравнения (2), принимающее вид

$$\alpha = \left( \frac{32(1-\omega^2)}{3b^2+2} \right)^{1/2} \times \frac{\cos\left(\gamma\omega\omega_0 b \left(t - x\sqrt{\gamma^2-1}/(\gamma c)\right)\right)}{\text{ch}\left(\omega_0 b \sqrt{\gamma^2-1} \sqrt{1-\omega^2} \left(t - x\gamma/(c\sqrt{\gamma^2-1})\right)\right)}, \quad (4)$$

$\gamma = 1/\sqrt{1-\partial^2/c^2}$ . При выводе (4) предполагалось, что  $\omega \approx 1$  и  $\omega < 1$ .

Наличие бризерного решения нелинейного уравнения интересно само по себе, а исследование динамики бризера в нелинейной среде может дать сведения о применимости ее, например, для передачи информации при помощи солитоноподобных импульсов [8]. Ряд исследований посвящен динамике уединенных волн, являющихся решениями уравнений типа Клейна–Гордона (см., например, [9–13], а также литературу, приведенную в [7]). В качестве экспериментального доказательства существования электромагнитного бризера в ГСР может выступить бризероэлектрический эффект, который должен проявляться в возникновении потока электронов в направлении распространения волны. В работе [14] рассмотрен эффект увлечения электронов в поле бризера в полупроводниковой СР в качестве примера использования бризерного решения уравнения синус-Гордона, описывающего распространение нелинейных волн в указанной структуре. Ряд работ (например, [15–17]) посвящены эффекту увлечения электронов солитонами (кинками) в полупроводниковых и графеновых сверхрешетках. В настоящей работе предпринята попытка решить аналогичную поставленную в [14] задачу о бризероэлектрическом эффекте в графеновой сверхрешетке.

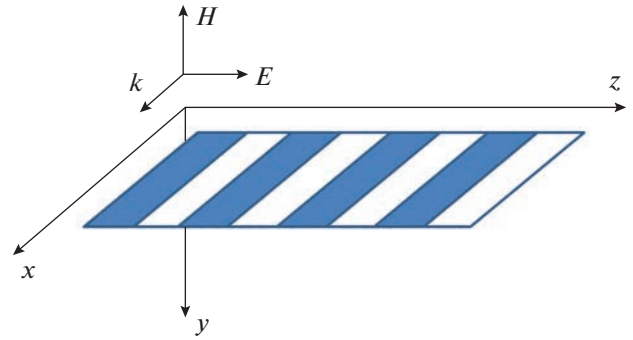


Рис. 1. Геометрия задачи.

### ИССЛЕДОВАНИЕ БРИЗЕРОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА В ГРАФЕНОВОЙ СВЕРХРЕШЕТКЕ В БЕССТОЛКОВИТЕЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Геометрия задачи показана на рис. 1. Волна распространяется вдоль оси  $x$  (перпендикулярно к направлению чередования слоев сверхрешетки), вектор  $\vec{E}$  электрической напряженности поля волны направлен вдоль оси  $z$  (вдоль оси сверхрешетки), вектор  $\vec{H}$  напряженности магнитного поля волны вдоль оси  $y$ , то есть  $\vec{E} = \{0, 0, E\}$ ,  $\vec{H} = \{0, -H, 0\}$ . Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  связаны с векторным потенциалом электромагнитного поля соотношениями

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}, \quad (6)$$

что в рассматриваемой геометрии задачи приводит к соотношениям

$$E_z = E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t}, \quad (7)$$

$$H_y = -H = -\frac{\partial A_z}{\partial x}. \quad (8)$$

Учитывая, что значения величин  $\omega$  и  $\gamma$  близки к единице, выражение (4) для векторного потенциала бризера можно представить в виде произведения  $A_z = PQ$  быстроосциллирующей функции  $P$  и медленно меняющейся функции  $Q$ :

$$P = \cos\left(\gamma\omega\omega_0 b \left(t - x\sqrt{\gamma^2-1}/(\gamma c)\right)\right), \quad (9)$$

$$Q = \frac{\hbar c}{qd} \left( \frac{32(1-\omega^2)}{3b^2+2} \right)^{1/2} \times \left( \text{ch}\left(\omega_0 b \sqrt{\gamma^2-1} \sqrt{1-\omega^2} \left(t - \gamma/(c\sqrt{\gamma^2-1})x\right)\right) \right)^{-1}. \quad (10)$$

Дифференцируя только быстроосциллирующую часть, получаем соотношение между напряжениями электрического и магнитного полей:

$$H_y = -\frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} E_z = \frac{\hbar \sqrt{\gamma^2 - 1}}{qd} \frac{\partial \alpha}{\partial t}. \quad (11)$$

В бесстолкновительном приближении плотность тока увлечения электронов бризером определяется следующим образом:

$$j_x = qn_0 u_x(p_x, p_z) = qn_0 \frac{p_x v_F^2}{\sqrt{\Delta^2 + p_x^2 v_F^2 + \Delta_1^2 \left(1 - \cos \frac{p_z d}{\hbar}\right)}}, \quad (12)$$

где  $\vec{u} = \{u_x, u_z\}$  – вектор скорости электрона в ГСР,  $p_x, p_z$  – решения классических уравнений движения электрона в поле электромагнитной волны

$$\begin{cases} \frac{dp_x}{dt} = -\frac{q}{c} u_z H_y, \\ \frac{dp_z}{dt} = qE_z + \frac{q}{c} u_x H_y. \end{cases} \quad (13)$$

Ввиду малости  $u_x$  по сравнению со скоростью света  $c$  вторым слагаемым во втором уравнении системы (13) пренебрегаем. Воспользовавшись выражением (11), получаем:

$$\begin{cases} \frac{dp_x}{dt} = -\frac{\Delta_1^2 \sin \frac{p_z d}{\hbar}}{2c \sqrt{\Delta^2 + p_x^2 v_F^2 + \Delta_1^2 \left(1 - \cos \frac{p_z d}{\hbar}\right)}} \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \\ \frac{dp_z}{dt} = -\frac{\hbar}{d} \frac{\partial \alpha}{\partial t}. \end{cases} \quad (14)$$

Решая второе уравнение в (14), получаем

$$p_z = -\frac{\hbar}{d} \alpha. \quad (15)$$

Поскольку рассматривается эффект увлечения электронов нелинейной волной, можно электрическое поле волны считать слабым в том смысле, что оно мало влияет на разогрев электронного газа в материале. Поэтому можно подобрать такие значения температуры, когда большинство электронов находятся вблизи дна минизоны проводимости и выполняется условие  $p_0 v_F \ll \Delta, \Delta_1$ , где  $p_0$  – некоторое характерное значение абсолютной величины квазиимпульса электрона. В этом случае вторым слагаемым в знаменателе правой части первого уравнения в (14) можно пренебречь. Учитывая (15), первое из уравнений движения электрона принимает вид:

$$\frac{dp_x}{dt} = -\frac{\Delta_1^2 \sqrt{\gamma^2 - 1}}{2c \gamma} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\Delta^2 + \Delta_1^2 (1 - \cos \alpha)}} \frac{\partial \alpha}{\partial t}. \quad (16)$$

Интегрируя (16) в пределах от минус бесконечности до текущего момента времени  $t$ , получаем:

$$p_x = -\frac{\Delta_1^2 \sqrt{\gamma^2 - 1}}{2c \gamma} \int_{-\infty}^t \left( \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\Delta^2 + \Delta_1^2 (1 - \cos \alpha)}} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) dt. \quad (17)$$

Полагая, что в далеком прошлом векторный потенциал поля бризера был равен нулю, получаем

$$\begin{aligned} p_x &= -\frac{\Delta_1^2 \sqrt{\gamma^2 - 1}}{2c \gamma} \int_0^\alpha \frac{\sin \alpha d\alpha}{\sqrt{\Delta^2 + \Delta_1^2 - \Delta_1^2 \cos \alpha}} = \\ &= \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma c} \left( \Delta - \sqrt{\Delta^2 + \Delta_1^2 - \Delta_1^2 \cos \alpha} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

С учетом приближения  $p_x v_F \ll \Delta, \Delta_1$  выражение для плотности тока увлечения принимает вид:

$$j_x = qn_0 \frac{v_F^2 \sqrt{\gamma^2 - 1}}{c \gamma} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + b^2 (1 - \cos \alpha)}} - 1 \right). \quad (19)$$

Заряд, переносимый через единицу площади поперечного сечения образца (в рассматриваемом случае двумерной структуры – через единицу длины поперечного сечения), в результате прохождение бризера, определяется выражением

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} j_x(x_0, t) dt, \quad (20)$$

для определенности полагаем  $x_0 = 0$ . Преобразуем выражение (4). Введем новые переменные:

$$x \omega_0 b / c \rightarrow x, \quad t \omega_0 b \rightarrow t. \quad (21)$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \alpha &= \left( \frac{32(1 - \omega^2)}{3b^2 + 2} \right)^{1/2} \times \\ &\times \frac{\cos \left( \left( \gamma \omega t - \omega x \sqrt{\gamma^2 - 1} \right) \right)}{\text{ch} \left( t \sqrt{\gamma^2 - 1} \sqrt{1 - \omega^2} - \gamma x \sqrt{1 - \omega^2} \right)}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$Q = Q_0 \frac{1}{b c} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + b^2 (1 - \cos \alpha)}} - 1 \right) dt, \quad (23)$$

$$Q_0 = \frac{qn_0 v_F^2}{c \omega_0}. \quad (24)$$

На рис. 2 и 3 приведены зависимости заряда, увлекаемого бризером, от параметра  $b = \Delta_1 / \Delta$  при разных значениях параметров  $\omega$  и  $v/c$ , соответственно. Выбранные значения параметра  $\omega$  и скорости  $v$  обусловлены условиями существования решения в указанной форме. При характерных

значениях параметров  $d = 2 \cdot 10^{-6}$  см,  $\Delta = 0.13$  эВ,  $n_0 = 10^{10}$  см $^{-2}$ ,  $v_F = 10^8$  см/с,  $a_0 = 0.12$  нм получаем величину увлеченного заряда, приходящуюся на единицу длины поперечного сечения, равной  $Q_0 = 5 \cdot 10^{-19}$  Кл/см. Полагая толщину образца порядка  $a_0$ , величина увлеченного бризером заряда, отнесенная к единице площади поперечного сечения, составляет примерно  $Q'_0 = 10^{-12}$  Кл/см $^2$ , что по порядку величины совпадает со значением, полученным в работе [14] для полупроводниковой СР с одномерным периодическим потенциалом.

### ВЫЧИСЛЕНИЕ ХАРАКТЕРНОГО ВРЕМЕНИ ПРОБЕГА БРИЗЕРА В ГРАФЕНОВОЙ СВЕРХРЕШЕТКЕ

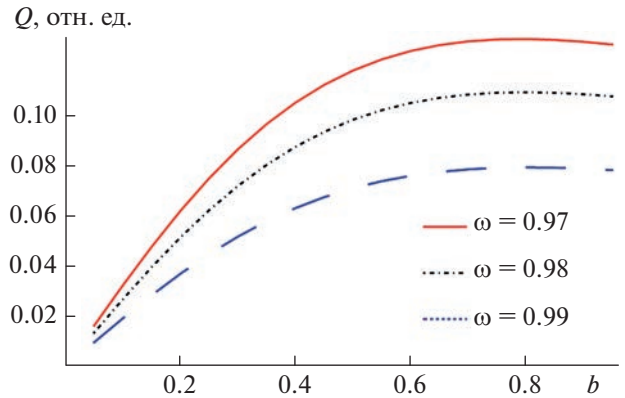
Будем предполагать время свободного пробега электрона  $\tau$  большим по сравнению со временем пребывания электрона в поле  $l/v$  ( $l$  – длина бризера),  $w/v$  ( $w$  – ширина бризера,  $v$  – скорость электрона). Тогда при определении формы бризера можно пренебречь столкновениями, а найденное таким образом поле волны подставить в уравнение Больцмана, учитывающее столкновения [14, 15]. При условии, что длина  $\lambda$  свободного пробега электрона мала по сравнению с длиной  $l$  бризера ( $\lambda \ll l$ ), в уравнении Больцмана можно пренебречь членом с пространственной производной:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + qE_z(x, t) \frac{\partial f}{\partial p_z} = -\frac{f - f_0}{\tau}. \quad (25)$$

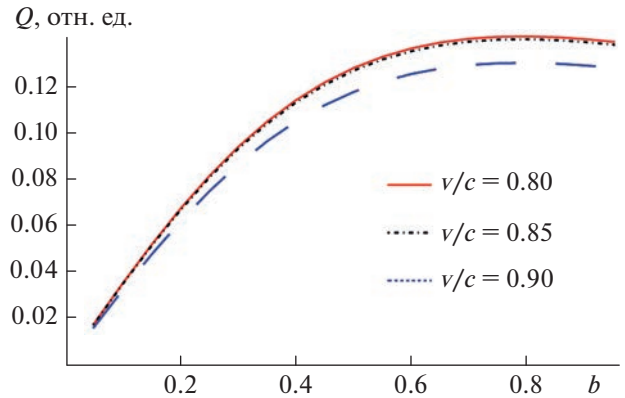
Средняя длина свободного пробега  $\lambda$  в графене при комнатной температуре и концентрации носителей заряда  $n \sim 10^{12}$  см $^{-2}$  составляет  $\lambda \sim 4 \cdot 10^{-5}$  см [18], при этом ширина бризера составляет порядка  $10^{-4}$  см (рис. 4), поэтому условие  $\lambda \ll l$  выполняется в графеновой сверхрешетке значительно менее строго, чем в полупроводниковой [14–16].

В уравнении (25)  $f(p_x, p_z, t)$  – функция распределения электронов проводимости,  $f_0(p_x, p_z)$  – равновесная функция распределения, поле бризера  $E_z(x, t)$  определяется выражениями (7), (4). Решение уравнения (25) с начальным условием  $f(\vec{p}, t_0) = f_0(\vec{p})$  имеет вид:

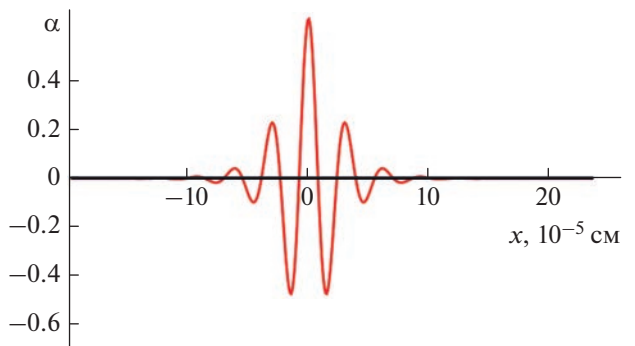
$$f = f_0 \left( p_x, p_z - q \int_{t_0}^t E_z(x, t') dt' \right) \exp \left( -\frac{t - t_0}{\tau} \right) + \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t dt_1 \exp \left( -\frac{t - t_0}{\tau} \right) f_0 \left( p_x, p_z - q \int_{t_1}^t E_z(x, t') dt' \right). \quad (26)$$



**Рис. 2.** Зависимость заряда, увлеченного бризером, от параметра  $b = \frac{\Delta_1}{\Delta}$  при различных значениях параметра  $\omega$ .



**Рис. 3.** Зависимость заряда, увлеченного бризером, от параметра  $b = \frac{\Delta_1}{\Delta}$  при различных значениях скорости распространения волны.



**Рис. 4.** График приближенного бризерного решения уравнения (2) при  $v/c = 0.9$ ,  $\Delta_1/\Delta = 0.9$ ,  $\omega = 0.1$ .

При стремлении  $t_0$  к минус бесконечности первое слагаемое в (26) стремится к нулю. Выражение для электронной функции распределения принимает вид:

$$f = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^t dt_1 \exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau}\right) \times \\ \times f_0\left(p_x, p_z + \frac{\hbar}{d}(\alpha(x, t) - \alpha(x, t_1))\right). \quad (27)$$

Равновесную функцию распределения возьмем в форме функции распределения Максвелла–Больцмана. Выражение для плотности тока вдоль направления колебаний электрического поля волны принимает вид:

$$j_z = qn_0 \frac{1}{\tau} \frac{d\Delta_1}{\hbar} \frac{I_1}{2\Delta I_0}, \quad (28)$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^t dt_1 \exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau'}\right) \int_{-\pi}^{\pi} dp_z \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \times \\ \times \frac{\sin(p_z - (\alpha(x, t) - \alpha(x, t_1))) \exp\left(-\frac{1}{T} \sqrt{1 + \beta_1 p_x^2 + b^2(1 - \cos p_z)}\right)}{\sqrt{1 + \beta_1 p_x^2 + b^2(1 - \cos(p_z - (\alpha(x, t) - \alpha(x, t_1))))}}, \quad (29)$$

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \int_{-\pi}^{\pi} dp_z \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{T} \sqrt{1 + p_x^2 \beta_1 + b^2(1 - \cos p_z)}\right). \quad (30)$$

В (28)–(30) был произведен переход к безразмерным переменным:  $p_{x,z} d/\hbar \rightarrow p_{x,z}$ ,  $x\omega_0 b/c \rightarrow x$ ,  $t\omega_0 b \rightarrow t$ ,  $kT/\Delta \rightarrow T$ , и введены обозначения:  $\beta_1 = v_F^2 \hbar^2 / (\Delta^2 d^2)$ ,  $\tau' = \tau\omega_0 b$ , функция  $\alpha(x, t)$  определяется выражением (22).

Для определения времени пробега бризера найдем скорость изменения его волнового импульса, отнесенную к единице площади поперечного сечения образца:

$$F = \frac{1}{ca_0} \int_{-\infty}^{\infty} [\vec{j}, \vec{H}]_x dx = -\frac{\hbar}{qda_0} \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} j_z \frac{\partial \alpha}{\partial t} dx. \quad (31)$$

Импульс бризера (в расчете на единицу площади) равен

$$G = \frac{\varepsilon}{4\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} [\vec{E}, \vec{H}]_x dx = \\ = \frac{\varepsilon}{4\pi q^2 d^2} \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} \omega_0 b \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)^2 dx. \quad (32)$$

Из (31), (32) получаем время пробега бризера

$$\tau_s = \frac{G}{F} = -\frac{\varepsilon}{2\pi q^2 d^2} \frac{\omega_0}{n_0} \frac{\tau'}{\Delta} a_0 I_0 \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)^2 \bigg/ \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial \alpha}{\partial t} I_1. \quad (33)$$

Выражение (33) исследуется численно. Расчет показывает, что отношение интегралов в (33) дает

величину порядка единицы. При характерных значениях параметров  $b = \Delta_1/\Delta = 0.25$ ,  $d = 2 \cdot 10^{-6}$  см,  $\Delta = 0.13$  эВ,  $n_0 = 10^{10}$  см $^{-2}$ ,  $\tau = 10^{-10}$  с,  $\varepsilon = 3.3$ ,  $T = 200$  К получаем величину  $\tau_s \sim 10^{-12}$  с. Для сравнения, в работе [14] в случае полупроводниковой сверхрешетки получили  $\tau_s = 10^{-10}$  с. Следует отметить, что используемое в настоящей работе бризерное решение является приближенным, форма которого сохраняется на протяжении около десяти ширин импульса, что соответствует приблизительно  $10^{-12}$ – $10^{-11}$  с. Поскольку вычисленное время пробега бризера, обусловленное влиянием столкновений, оказывается одного порядка с этой величиной, можно подобрать параметры сверхрешетки и внешнего поля, при которых бризероэлектрический эффект можно рассматривать в бесстолкновительном приближении.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, исследован бризероэлектрический эффект в графеновой сверхрешетке в бесстолкновительном приближении и оценено влияние столкновений электронов с неоднородностями кристаллической решетки на среднее время пробега бризера. В бесстолкновительном приближении величина увлеченного бризером заряда по порядку величины совпадает с зарядом, увлекаемым бризером в полупроводниковой сверхрешетке. За счет большей длины свободного пробега в графене по сравнению с типичными полупроводниками условие малости длины свободного пробега по сравнению с шириной бризера, требуемое для рассмотрения поля бризера как однородного, выполняется хуже, чем для полупроводниковой СР. За счет особенностей энергетического спектра ГСР интегралы в выражении

для среднего времени пробега бризера приходится брать численно. Кроме того, исходя из способа получения выражения для времени пробега бризера эта величина, вообще говоря, зависит от времени, поэтому приведенные оценки среднего времени пробега бризера верны с точностью до порядка. Полученное время пробега бризера оказывается одного порядка со временем, в течение которого форма бризерного решения может считаться постоянной, что может служить обоснованием использования бесстолбовительного приближения при расчете величины увлеченного заряда.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kryuchkov S.V., Kukhar' E.I. // *Physica B*. 2013. V. 408. P. 188.
2. Ратников П.В. // *Письма в ЖЭТФ*. 2009. Т. 90. № 4. С. 515; Ratnikov P.V. // *JETP Lett.* 2009. V. 90. P. 469.
3. Kryuchkov S.V., Kukhar' E.I. // *Physica E*. 2012. V. 46. P. 25.
4. Kryuchkov S.V., Kukhar' E.I., Zav'yalov D.V. // *Laser Phys.* 2013. V. 23. Art. No. 065902.
5. Martin-Vergara F., Rus F., Villatoro F.R. // In: *Nonlinear systems. V. 2. Understanding complex systems*. Cham: Springer, 2018. P. 85.
6. Martin-Vergara F., Rus F., Villatoro F.R. // *Chaos Solit. Fractals*. 2021. V. 151. Art. No. 111281.
7. Завьялов Д.В., Конченков В.И., Крючков С.В. // *ЖТФ*. 2022. Т. 92. № 12. С. 1763.
8. Крючков С.В., Капля Е.В. // *ЖТФ*. 2003. Т. 73. № 5. С. 53; Kryuchkov S.V., Kaplya E.V. // *Tech. Phys.* 2003. V. 48. P. 576.
9. Martin-Vergara F., Rus F., Villatoro F.R. // *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* 2020. V. 85. Art. No. 105243.
10. Goodman R.H., Haberman R. // *Phys. D*. 2004. V. 195. P. 303.
11. Mensah S.T., Allotey F.K.A., Mensah N.G. // *Phys. Scripta*. 2000. V. 62. P. 212.
12. Cuevas-Maraver J., Kevrekidis P.G., Williams F. *The sine-Gordon model and its applications*. Springer, 2014. P. 263.
13. Крючков С.В., Кухарь Е.И. // *Опт. и спектроск.* 2015. Т. 118. № 1. С. 163; Kryuchkov S.V., Kukhar' E.I. // *Opt. Spectrosc.* 2015. V. 118. No. 1. P. 157.
14. Крючков С.В., Сыродоев Г.А. // *ФТП*. 1990. Т. 24. № 6. С. 1120.
15. Эпштейн Э.М. // *ФТП*. 1980. Т. 14. № 12. С. 2422.
16. Эпштейн Э.М. // *Изв. вузов. Радиофиз.* 1981. Т. 24. № 10. С. 1293.
17. Kryuchkov S.V., Kukhar' E.I. // *Physica E*. 2013. V. 48. P. 96.
18. Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V. et al. // *Science*. 2004. V. 306. P. 666.

## The effect of entrainment of electrons by a breather in a graphene-based superlattice

P. V. Badikova<sup>a, b</sup>, D. V. Zav'yalov<sup>a</sup>, V. I. Konchenkov<sup>a, b, \*</sup>, S. V. Kryuchkov<sup>a, b</sup>

<sup>a</sup>Volgograd State Technical University, Volgograd, 400005 Russia

<sup>b</sup>Volgograd State Socio-Pedagogical University, Volgograd, 400066 Russia

\*e-mail: kontchenkov@yandex.ru

The breather electric effect in a graphene superlattice has been studied in the collisionless approximation. When calculating the drag current density, an approximate solution in the form of a small-amplitude traveling breather of the nonlinear Klein–Gordon equation describing the propagation of nonlinear waves in a graphene superlattice is used. The breather travel time due to collisional dissipation is estimated.

УДК 537.87:537.9

## ФЛОКЕ-СПЕКТР ДИРАКОВСКОГО КРИСТАЛЛА В ПОЛЕ ИМПУЛЬСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

© 2023 г. С. В. Крючков<sup>1, 2</sup>, Е. И. Кухарь<sup>2, \*</sup>, Д. А. Силиванов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Волгоградский государственный социально-педагогический университет”, Волгоград, Россия

<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Волгоградский государственный технический университет”, Волгоград, Россия

\*E-mail: eikuhar@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Вычислен флоке-спектр дираковского кристалла, помещенного в поле электромагнитного излучения, равного суперпозиции двух волн, поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях. Каждая из волн представляет собой последовательность импульсов гауссовского профиля. Исследована зависимость квазиэнергетической щели от коэффициента заполнения сигналов и временного сдвига между сигналами.

DOI: 10.31857/S0367676522700089, EDN: JIWCBE

### ВЕДЕНИЕ

Современные технологии позволяют получать низкоразмерные структуры различного типа, в том числе 2D кристаллы монокристаллической толщины [1, 2]. Открытие так называемых дираковских и вейлевских кристаллов имеет не только практическое [3, 4], но и фундаментальное значение. Хорошо известно, что свободный графен характеризуется линейной зависимостью между энергией и импульсом электрона, т.е. коническим типом закона дисперсии. В то время как графену на подложке может соответствовать гиперболический тип закона дисперсии. Как видно имеет место математическое сходство электронных состояний в физике низкоразмерных систем и релятивистской квантовой физике. Последнее дает возможность использовать современные наноматериалы в качестве платформы для моделирования и проверки некоторых эффектов квантовой электродинамики [5–8]. Таким образом, изучение нелинейных оптических и электрических свойств дираковских и вейлевских кристаллов представляет интерес для той области, что развивающейся на стыке физики твердого тела и физики высоких энергий.

Уникальность указанных выше материалов объясняется наличием в квантовом уравнении для электронных состояний слагаемых, связывающих импульс носителя заряда с его псевдоспиновой степенью свободы. Следствием проявле-

ния такой связи являются, например, эффект Zitterbewegung [9–11], переходы типа “полуметалл – изолятор” [12–15] и “дираковский–полудираковский кристалл” [16, 17]. Благодаря которым реализуются так называемые флоке-топологические изоляторы [18]. На данный момент исследования взаимодействия дираковских материалов с ВЧ полем касаются в основном непрерывного режима ЭМ излучения. Ниже излагаются результаты исследования флоке-спектра дираковского кристалла, помещенного в поле импульсного излучения.

### ФЛОКЕ-ФОРМАЛИЗМ И ФЛОКЕ-СПЕКТР

В отсутствие электромагнитного (ЭМ) излучения графен обладает полуметаллическим типом проводимости. Однако, если последний поместить в высокочастотное (ВЧ) поле ЭМ волны, то при определенных условиях возможен переход к состоянию зонного диэлектрика [12–15]. Здесь стоит отметить, что задача о взаимодействии кристалла с ВЧ излучением является нестационарной. Математической основой теории явлений, возникающих в квантовых системах, находящихся под управлением периодических полей, является флоке-формализм [13]. Подход к решению задач в рамках флоке-теории заключается в перенормировке гамильтониана системы, находящейся в периодическом поле, таким образом,

чтобы проблема временной эволюции сводилась к стационарной задаче — задаче на собственные значения нового “эффективного” гамильтониана, не зависящего от времени. В этом случае говорят о флоке-спектре системы [15]. Таким образом, указанное выше диэлектрическое состояние носит характер динамически наведенного (усредненного по времени) состояния. Соответствующая перенормировка происходит с использованием унитарных операторов, включающих в себя быстро осциллирующие функции [19]. Такой подход успешно использовался для объяснения динамического сужения зон проводимости узкощелевых полупроводников [20], эффектов динамической локализации [21], фото-туннелирования [22], переходов между сверхтекучими и диэлектрическими фазами [23], возможности реализации искусственных флоке-топологических зонных изоляторов (ФТИ) [18], возможности управления осцилляциями Шубникова-де Гааза [19] и т.д. В [14] флоке-спектр трактуется как закон дисперсии для связанных электрон-фотонных состояний, возникающих в дираковских кристаллах, помещенных в сильное поле лазерного излучения.

Пусть дираковский кристалл связан с плоскостью  $xu$ , а ЭМ излучение распространяется вдоль оси  $Oz$  так, что электрическая составляющая осциллирует вдоль графеновой плоскости. В силу малости толщины моноатомного слоя можно воспользоваться дипольным приближением и считать, что электрическое поле в той области пространства, где расположен образец, не зависит от координат. Вместе с этим гамильтониан системы также не будет зависеть от координат [13]:

$$H(\vec{p}, t) = v_F \left( \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) \cdot \vec{\sigma}. \quad (1)$$

Здесь  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  — матрицы Паули,  $v_F$  — скорость Ферми,  $\vec{A}(t+T) = \vec{A}(t)$  — векторный потенциал ЭМ поля волны в плоскости  $xu$ ,  $T$  — период ЭМ излучения. Таким образом, задача о решении уравнения  $i\hbar\dot{\psi} = H(t)\psi$  удовлетворяет требованиям теоремы Флоке, согласно которой спинор  $\psi$ , описывающий состояние электрона в 2D гексагональной структуре, можно записать в виде

$$\psi(t) = e^{\frac{i\tilde{\epsilon}t}{\hbar}} \chi(t), \quad (2)$$

где  $\tilde{\epsilon}(\vec{p})$  — флоке-спектр (квазиэнергия) электрона,  $\chi(t+T) = \chi(t)$ . Применив теорему Флоке, получим

$$\left[ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + H \right] \chi = \tilde{\epsilon} \chi. \quad (3)$$

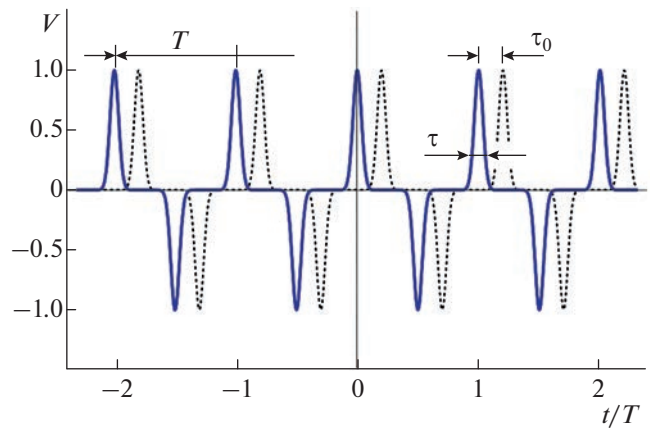


Рис. 1. Профили электромагнитных сигналов.

Решение нестационарной задачи (3) можно свести к решению однородной алгебраической системы уравнений [13]:

$$\sum_k H_{n,k} u_k = (\tilde{\epsilon} + n\hbar\Omega) u_n. \quad (4)$$

где  $u_n$  — фурье-компоненты спинора  $\chi(t)$ ,  $H_{n,k} = \left\langle H(\vec{p}, t) e^{i(n-k)\Omega t} \right\rangle_T$ ,  $\Omega = 2\pi/T$ .

### НАВЕДЕНИЕ ЗАПРЕЩЕННОЙ ЗОНЫ ИМПУЛЬСНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Считаем, что дираковский кристалл облучается двумя ЭМ волнами, поляризованными во взаимно перпендикулярных направлениях. Каждая из волн представляет собой последовательность импульсов гауссовского профиля. Длительность каждого импульса равна  $\tau$ . Эти последовательности должны, кроме всего прочего, удовлетворять дополнительным требованиям. Во-первых, ни одна из них не должна иметь постоянных составляющих, т.е. усредненное по периоду  $T$  значение напряженности электрического поля равно нулю  $\langle \vec{E}(t) \rangle_T = 0$ . Во-вторых, они должны быть сдвинуты друг по отношению к другу на некоторое время  $\tau_0$  (рис. 1). Согласно сказанному, напряженность электрического поля в плоскости  $xu$  равна

$$\vec{E}(t) = E_0 \{V(t + \tau_0), V(t)\}, \quad (5)$$

где  $E_0$  — амплитуда поля,

$$V(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n F\left(\frac{2t - nT}{2\tau}\right), \quad F(\xi) = e^{-\xi^2}. \quad (6)$$

Отношение  $\tau/T$  будем называть коэффициентом заполнения, полагая  $\tau \ll T$ . Флоке-спектр носителей заряда в кристалле будем искать путем усреднения уравнения (3) по периоду сигналов.



Для этого разложим периодическую функцию (6) в ряд Фурье (с учетом условия  $\tau \ll T$ ):

$$V(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{2k+1}(\Omega\tau) e^{i(2k+1)\Omega t}, \quad (7)$$

$$C_k(x) = \frac{x}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{k^2 x^2}{4}\right),$$

тогда векторный потенциал электрического поля равен

$$\vec{A}(t) = \frac{icE_0}{\Omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{C_{2k+1}(\Omega\tau)}{2k+1} e^{i(2k+1)\Omega t} \left\{ e^{i(2k+1)\Omega\tau_0}, 1 \right\}. \quad (8)$$

После подстановки (8) в выражение для величины  $H_{n,k}$ , фигурирующей в (4), запишем

$$\begin{aligned} & \nu_F \vec{p} \cdot \vec{\sigma} u_n + \hbar\Omega_0 \times \\ & \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{C_{2k+1}}{2k+1} \left( (-1)^{k+1} \sigma_x + i\sigma_y \right) u_{n+2k+1} = \\ & = (\tilde{\epsilon} + n\hbar\Omega) u_n, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\Omega_0 = \nu_F e E_0 / \hbar\Omega$ . Для простоты вычислений в (9) также положено  $\Omega\tau_0 = \pi/2$ . Матричное рекуррентное уравнение (9) необходимо решать численно. Однако удастся провести приближенные аналитические вычисления, если учесть, что компоненты спинора  $u_n$  имеют смысл амплитуд вероятности поглощения/испускания электроном  $n$  фотонов и  $|u_{n \neq 0}| \ll 1$  [19]. Считая, что выполняется следующее условие:

$$\Omega \gg \Omega_0, \quad (10)$$

найдем, что в дираковской точке ( $\vec{p} = 0$ ) квазиэнергетическая щель (запрещенная зона, наведенная импульсным излучением) равна

$$\Delta_g = \frac{8\hbar\Omega_0^2}{\Omega} \left( C_1^2 - \frac{C_3^2}{27} + \dots \right). \quad (11)$$

Результат (11) получен с точностью до слагаемых, содержащих  $C_n$  с  $n \leq 3$ , однако он всегда может быть уточнен с повышением порядка спиноров  $u_n$ , удерживаемых в уравнениях (9).

К результату (11) можно прийти, если применить метод усреднения по быстрым осцилляциям [17]. Данный подход обладает большей наглядностью вычислений и позволяет относительно просто получить флоке-спектр вблизи дираковской точки. Согласно ему спинор  $\chi(t)$ , фигурирующий в (2), представляется в виде постоянной и ВЧ частей:  $\chi(t) = u_0 + u_{ac}(t)$ ,  $u_0 = \text{const}$ ,  $\langle u_{ac} \rangle = 0$ , причем  $|u_{ac}| \ll |u_0|$ . После усреднения (3) по периоду ВЧ поля, запишем

$$\nu_F \vec{p} \cdot \vec{\sigma} u_0 + \frac{\nu_F e}{c} \langle \vec{A} \cdot \vec{\sigma} u_{ac} \rangle = \tilde{\epsilon} u_0. \quad (12)$$

Спинор  $u_{ac}$  можно найти, если в (3) оставить только ВЧ компоненты и отбросить все слагаемые, содержащие в качестве множителя  $u_{ac}$ . Последнее оказывается возможным в силу условия (10). В результате получим

$$\begin{aligned} u_{ac} = & -\frac{i\Omega_0}{\Omega} \times \\ & \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C_{2n+1}(\Omega\tau)}{(2n+1)^2} e^{i(2n+1)\Omega t} \left( e^{i(2n+1)\Omega\tau_0} \sigma_x + \sigma_y \right) u_0. \end{aligned} \quad (13)$$

После подстановки (13) в (12) приходим к задаче на собственные значения

$$(\nu_F \vec{p} \cdot \vec{\sigma} + \Delta_{ac} \sigma_z) u_0 = \tilde{\epsilon} u_0, \quad (14)$$

где обозначено

$$\Delta_{ac} = -\Delta_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n+1}^2(\Omega\tau) \sin(2n+1)\Omega\tau_0}{(2n+1)^3}, \quad (15)$$

$\Delta_0 = 4\hbar\Omega_0^2/\Omega$ . В результате флоке-спектр имеет вид

$$\tilde{\epsilon}(\vec{p}) = \pm \sqrt{\nu_F^2 p^2 + \Delta_{ac}^2}, \quad (16)$$

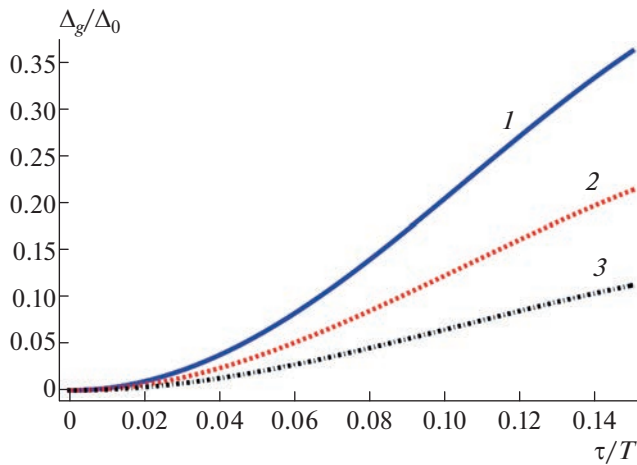
а квазиэнергетическая щель равна

$$\Delta_g = 2|\Delta_{ac}|. \quad (17)$$

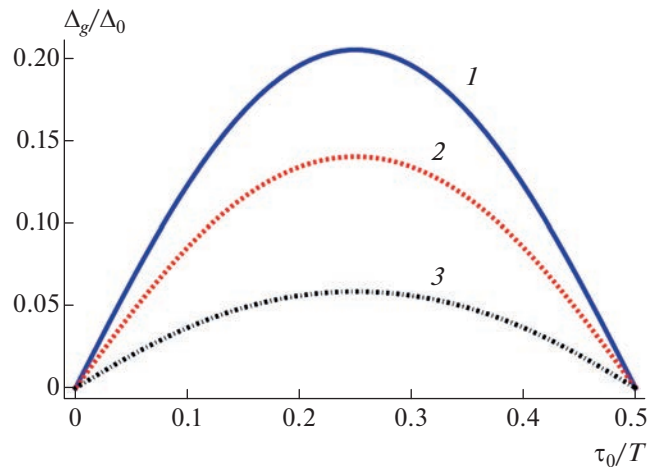
Таким образом, если выполняется неравенство (10) квазиэнергетическая щель пропорциональна квадрату амплитуды, также, как и в случае эллиптически поляризованного гармонического сигнала [13, 14]. Из формул (15) и (17) также следует, что величина  $\Delta_g$  определяется временным сдвигом импульсов  $\tau_0$ . Например, если  $\tau_0 = 0$ , то щель не наводится. Если в (15) положить  $\Omega\tau_0 = \pi/2$  и пренебречь слагаемыми с  $n \geq 2$ , то результат (17) перейдет в (11). Графики зависимости квазиэнергетической щели от коэффициента заполнения сигналов и временного сдвига между сигналами, построенный по формулам (15) и (17), показан на рис. 2 и 3 соответственно. Из рис. 2 видно, что в рамках условия  $\tau \ll T$  квазиэнергетическая щель увеличивается с ростом коэффициента заполнения. С помощью (15) можно показать, что квазиэнергетическая щель не наводится, если сдвиг во времени между последовательностями импульсов  $\tau_0$  удовлетворяет условию:  $2\tau_0 = nT$  ( $n$  — целое число).

Отметим, что эффект динамического наведения запрещенной зоны ожидается и в том случае, если образец подвергнуть излучению, представляющему собой монополярную последовательность ЭМ импульсов:  $E = E_0 |V(t)|$ . Однако в этой ситуации у переменного электрического поля будет существовать постоянная составляющая, наличие которой не предполагается в применяемых выше методах вычислений. Тем не менее посто-





**Рис. 2.** Зависимость квазиэнергетической щели от коэффициента заполнения сигналов ( $T = 0.16$  пс):  $\tau_0 = 39$  (1), 16 (2) и 8 фс (3).



**Рис. 3.** Зависимость квазиэнергетической щели от временного сдвига между сигналами ( $T = 0.16$  пс):  $\tau = 16$  (1), 12 (2) и 8 фс (3).

янную составляющую поля всегда можно убрать, создав в образце напряжение смещения, равное  $E_{bias} = \sqrt{\pi\tau}E_0/T$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше вычислен флоке-спектр дираковского электрона в поле ЭМ волн, поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях. Режим излучения предполагался импульсным, а профиль отдельного ЭМ импульса — гауссовским. Результатом действия импульсного излучения также, как и в случае непрерывного синусоидального излучения [13, 14] является динамическое наведение запрещенной зоны в дираковской точке. Ширина  $\Delta_g$  этой зоны растет с увеличением коэффициента заполнения сигналов (рис. 2). Одним из необходимых условий появления квазиэнергетической щели является наличие определенного сдвига во времени между последовательностями ЭМ импульсов, поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях. Таким образом, запрещенная зона не наводится ЭМ излучением, если сдвиг во времени  $\tau_0$  удовлетворяет условию:  $2\tau_0 = nT$  ( $n$  — целое число), в частности, если  $\tau_0 = 0$ .

Ширина запрещенной зоны  $\Delta_g$  вычислена двумя способами: методом флоке-матрицы [13] и методом усреднения по быстрым осцилляциям [17]. Каждый из этих методов имеет свои преимущества. Первый позволяет для ширины  $\Delta_g$  аналитически вычислить поправку любого порядка при произвольных значениях квазиимпульса электрона и амплитуды ЭМ поля, но требует длительных расчетов и для больших индексов  $u$  спиноров

$u_n$  — привлечения численных схем, реализуемых с помощью ЭВМ. Второй позволяет относительно просто вычислить флоке-спектр  $\tilde{\epsilon}(\vec{p})$  и найти выражение для общего слагаемого ряда (15). Однако результат, полученный на его основе, справедлив при выполнении условия (10) и может быть отнесен только к окрестности дираковской точки.

В заключении оценим величину  $\Omega$ , удовлетворяющую неравенству (10). Положив здесь  $v_F = 10^8$  см  $\cdot$  с $^{-1}$  и типичное для амплитуды напряженности электрического поля значение  $E_0 = 10^2$  В  $\cdot$  см $^{-1}$ , найдем что для выполнения условия (10) достаточно использовать  $\Omega \sim 20\text{--}60$  ТГц.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Khandelwal A., Mani K., Karigerasi M.H. et al. // Mater. Sci. Engin. B. 2017. V. 221. P. 17.
2. Zhang L., Hasan M.M., Tang Y. et al. // Mater. Today. 2021. V. 50. P. 442.
3. Prasongkit J., Shukla V., Grigoriev A. et al. // Appl. Surf. Sci. 2019. V. 497. Art. No. 143660.
4. Datta B., Vaidya J., Ghatak S. et al. // Appl. Phys. Lett. 2021. V. 119. Art. No. 133501.
5. Katsnelson M.I., Novoselov K.S., Geim A.K. // Nature Phys. 2006. V. 2. P. 620.
6. Katsnelson M.I. // Eur. Phys. J. B. 2006. V. 51. P. 157.
7. Young A.F., Kim P. // Nature Phys. 2009. V. 5. P. 222.
8. Фурсова Н.Е., Кнумаров С.А. // ФТТ. 2021. Т. 63. № 2. С. 277; Firsova N.E., Knumarov S.A. // Phys. Solid State. 2021. V. 63. P. 313.
9. Cserti J., Dávid G. // Phys. Rev. B. 2006. V. 74. Art. No. 172305.
10. Rusin T.M., Zawadzki W. // Phys. Rev. B. 2013. V. 88. Art. No. 235404.

11. Белоненко М.Б., Янушкина Н.Н. // ФТТ. 2012. Т. 54. С. 2331; Belonenko M.B., Yanyushkina N.N. // Phys. Solid State. 2012. V. 54. P. 2462.
12. Delplace P., Gomez-Leon A., Platero G. // Phys. Rev. B. 2013. V. 88. Art. No. 245422.
13. Oka T., Aoki H. // Phys. Rev. B. 2009. V. 79. Art. No. 081406.
14. Kibis O.V. // Phys. Rev. B. 2010. V. 81. Art. No. 165433.
15. Weber C.P. // J. Appl. Phys. 2021. V. 129. Art. No. 070901.
16. Montambaux G., Piéchon F., Fuchs J.-N. et al. // Eur. Phys. J. B. 2009. V. 72. P. 509.
17. Kukhar E.I., Kryuchkov S.V. // Physica E. 2021. V. 134. Art. No. 114811.
18. Wang Y.H., Steinberg H., Jarillo-Herrero and P. et al. // Science. 2013. V. 342. P. 453.
19. Kibis O.V., Morina S., Dini K. et al. // Phys. Rev. B. 2016. V. 93. Art. No. 115420.
20. Holthaus M. // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69. P. 351.
21. Creffield C.E., Sols F., Ciampini D. et al. // Phys. Rev. A. 2010. V. 82. Art. No. 035601.
22. Ma R., Tai M.E., Preiss P.M. et al. // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 107. Art. No. 095301.
23. Eckardt A., Weiss C., Holthaus M. // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 95. Art. No. 260404.

## Floquet spectrum of Dirac crystal in the field of pulsed radiation

S. V. Kryuchkov<sup>a, b</sup>, E. I. Kukhar<sup>b, \*</sup>, D. A. Silivanov<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Volgograd State Socio-Pedagogical University, Volgograd, 400066 Russia

<sup>b</sup>Volgograd State Technical University, Volgograd, 400005 Russia

\*e-mail: eikuhar@yandex.ru

The Floquet spectrum of a Dirac crystal placed in the field of electromagnetic radiation which is the superposition of two waves polarized in perpendicular directions has been calculated. Each of the waves is a sequence of pulses of Gaussian profile. The quasi-energy gap dependence on both duty cycle of the signals and time shift between the signals has been studied.

УДК 537.86:535.016

## РАДИОФОТОННЫЙ ОПТИМАЛЬНЫЙ ФИЛЬТР ДЛЯ БЫСТРОЙ ОБРАБОТКИ СВЕРХШИРОКОПОЛОСНОГО ВХОДНОГО СИГНАЛА

© 2023 г. В. В. Кулагин<sup>1,2, \*</sup>, В. В. Валуев<sup>3,4</sup>, Д. Буркитбаев<sup>5</sup>, В. Н. Корниенко<sup>2</sup>, В. А. Черепенин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”,

Государственный астрономический институт имени П.К. Штернберга, Москва, Россия

<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки “Институт радиотехники и электроники  
имени В.А. Котельникова Российской академии наук”, Москва, Россия

<sup>3</sup>Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
“Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, Россия

<sup>4</sup>Закрытое акционерное общество Научно-технический центр “Модуль”, Москва, Россия

<sup>5</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, Москва, Россия

\*E-mail: victorvkulagin@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Предложена схема специализированного аналогового процессора, реализующего радиотонный корреляционный приемник в виде оптимального фильтра для обработки сверхширокополосного СВЧ сигнала. Численно исследована работа такого фильтра, найдены его характеристики (точность определения положения максимума выходного сигнала, потенциальное быстродействие).

DOI: 10.31857/S0367676522700090, EDN: JIZXYB

### ВВЕДЕНИЕ

Широкое распространение беспилотных летательных аппаратов ставит новые задачи перед традиционной радиолокацией. Требуется не только обнаруживать летательные аппараты, что само по себе является непростой задачей ввиду их малого размера и легкости использования, но и отличать их от объектов живой природы, в частности, от птиц. Это требует уже наличия функции радиовидения в зондирующих системах, что в настоящее время является большой редкостью. Предложены различные методы построения радиоизображения, однако критическим параметром для всех схем является разрешение по дальности, которым в большой мере и определяется качество получаемой картинки. В то же время увеличение разрешения по дальности требует расширения полосы частот зондирующего сигнала. Так, для сантиметрового разрешения по дальности ширина полосы частот должна быть не меньше 5–8 ГГц. Это накладывает жесткие ограничения не только на параметры приемной системы, но и на подсистемы аналого-цифрового преобразования сигнала и его цифровой обработки. Задача еще больше усложняется в распре-

ленной радиолокационной системе с совместной когерентной обработкой выходных сигналов различных приемников. Традиционные установки, реализованные на электронных компонентах, мало приспособлены для работы с такими сигналами. Широкие перспективы в этом случае открывает применение радиотонных технологий в приемных устройствах, в частности, аналоговых радиотонных процессоров для быстрой обработки больших объемов входных данных.

Мировая тенденция развития аналоговых радиотонных (электрооптических) процессоров базируется на концепции нелинейно-фильтрующего радиотонного звена [1]. В этом случае в каждом звене возможна реализация как аналоговой линейной обработки (фильтрации) широкополосного входного СВЧ сигнала по заданному алгоритму, так и его нелинейная обработка — ограничение, генерация суммарных и разностных частот и др. Специализированные аналоговые радиотонные процессоры обычно содержат всего несколько радиотонных звеньев и могут применяться для выполнения определенных задач. Такие устройства позволяют значительно увеличить быстродействие и дают возмож-

ность создать интегрально-оптическую реализацию системы с существенно уменьшенными массой и габаритами, что чрезвычайно важно, например, при реализации распределенного зондирующего комплекса с мобильными приемными системами, располагающимися на беспилотных летательных аппаратах. Первые радиотонные программируемые процессоры для выполнения определенных операций уже реализованы в лабораторных условиях [2–4] и в ближайшее время могут поступить в производство.

Нами предложена схема специализированного аналогового процессора, реализующего радиотонный корреляционный приемник в виде оптимального фильтра для обработки сверхширокополосного СВЧ сигнала. Численно исследовано функционирование такого фильтра и найдены его характеристики (точность определения положения максимума выходного сигнала, потенциальное быстроедействие).

### СХЕМА РАДИОФОТОННОГО ОПТИМАЛЬНОГО ФИЛЬТРА

Специализированный аналоговый процессор, реализующий радиотонный корреляционный приемник для обработки сверхширокополосного входного СВЧ сигнала, удобнее всего построить в виде оптимального фильтра. В этом случае необходимо наблюдать за выходным сигналом фильтра, и в момент превышения этим сигналом определенного порога принимается решение об обнаружении цели. Время прихода сигнала (дальность до цели) рассчитывается по времени достижения максимального значения выходным сигналом фильтра. Радиотонный оптимальный фильтр может быть реализован по схеме параллельного (поперечного) фильтра [1, 5–7]. Здесь входной сигнал разделяется на несколько каналов, в каждом канале вводится определенная задержка сигнала, а также осуществляется изменение его амплитуды (взвешивание), после этого выходные сигналы со всех каналов складываются. Преимуществом такой схемы для коротких сигналов является относительно небольшое число требуемых каналов. Вместе с тем параллельная схема обеспечивает минимальное время обработки входного сигнала фильтра, которое может быть порядка двух длительностей сигнала. Последовательные фильтры требуют намного более длительных времен обработки.

Согласно теории обнаружения известного сигнала в принимаемой смеси сигнала и шума [8], решение об обнаружении может основываться на значении следующей величины (достаточной статистики):

$$G_n = \sum_{k=1}^n s(t_k) x(t_k), \quad (1)$$

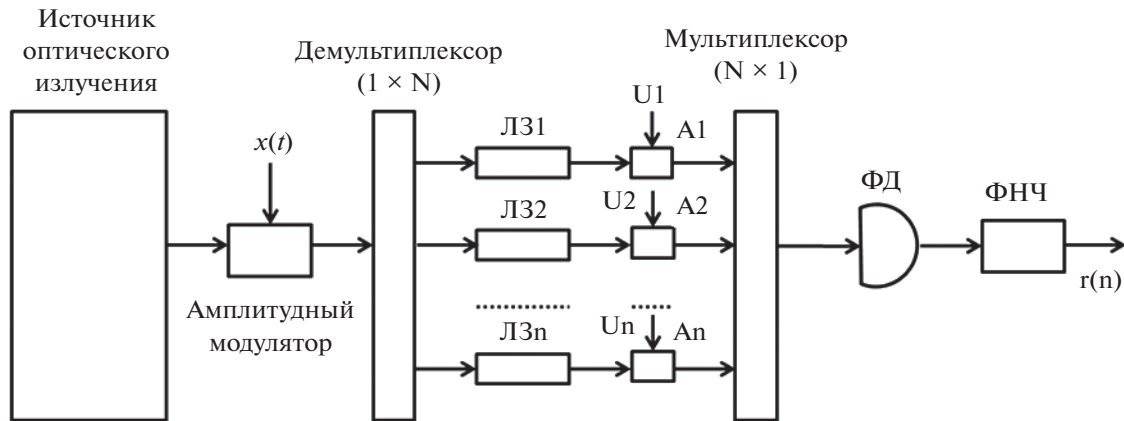
где  $s(t)$  — обнаруживаемый сигнал,  $x(t) = s(t) + n(t)$  — принимаемая смесь сигнала и шума  $n(t)$ , который предполагается белым,  $t_k$  —  $n$  равноотстоящих моментов времени в интервале наблюдения  $T$ . Величина  $G_n$  формируется на выходе оптимального фильтра в момент времени  $t = T$  [9, 10].

Для решения задач фильтрации сигналов в радиотонике широко используются параллельные фильтры. Такой фильтр имеет конечную импульсную характеристику, и для него выходной сигнал  $r(n)$  является взвешенной суммой  $M$  задержанных копий входного сигнала  $s(n)$  [1]:

$$r(n) = \sum_{m=0}^{M-1} A_m x(n - m\tau), \quad (2)$$

где  $A_m$  — вес сигнала  $m$ -ой линии задержки параллельного фильтра,  $\tau$  — шаг временной задержки. Коэффициенты  $A_m$  могут в общем случае быть положительными, отрицательными и комплексными в зависимости от типа фильтра. Сравнивая выражения (1) и (2), можно сделать вывод, что параллельный фильтр способен сформировать сигнал, соответствующий сигналу на выходе оптимального фильтра (1), если длины линий задержки и коэффициенты  $A_m$  выбраны в соответствии с моментами  $t_k$  и значениями сигнала  $s(t_k)$ .

Возможная схема радиотонного параллельного оптимального фильтра для приемной системы радара приведена на рис. 1. Лазерный источник может содержать непрерывный лазер, генератор оптической гребенки частот или набор разночастотных лазеров. В случае набора лазеров с разными частотами не происходит оптической интерференции выходных полей из разных каналов фильтра, что увеличивает стабильность его работы. Для одного непрерывного лазера все задержки в оптимальном фильтре должны быть кратны оптическому периоду, обеспечение этого может потребовать существенного усложнения схемы. Для генератора оптической гребенки частот могут появляться интерференционные члены, что, возможно, потребует дополнительной фильтрации выходного сигнала оптимального фильтра. Входной сигнал  $x(t)$  (см. (1)) подается на оптический амплитудный модулятор для преобразования СВЧ сигнала в оптический диапазон. Требуемый частотный коэффициент передачи оптимального фильтра определяется характеристиками излучаемого импульса  $s(t)$  [5]. По нему рассчитываются длины линий задержки, максимальная длина которых ограничена длительностью импульса, и весовые коэффициенты фильтра, которые передаются затем на оптиче-



**Рис. 1.** Схема радиотонного параллельного оптимального фильтра: ЛЗ — линии задержки, А — управляемые оптические аттенуаторы, ФД — фотодетектор, ФНЧ — фильтр низких частот. В случае использования непрерывного лазера мультиплексор может быть заменен сумматором, демультимплексор — делителем.

ские аттенуаторы. Схема, показанная на рис. 1, позволяет использовать только положительные весовые коэффициенты, что требует положительных значений сигнала в моменты  $t_k$ . Набор весовых коэффициентов может храниться в памяти приемной системы для каждого типа излучаемого импульса и передаваться на фильтр непосредственно в процессе работы при необходимости смены типа импульса. Если используется всего один тип излучаемого импульса, то весовые коэффициенты могут быть аппаратно фиксированы.

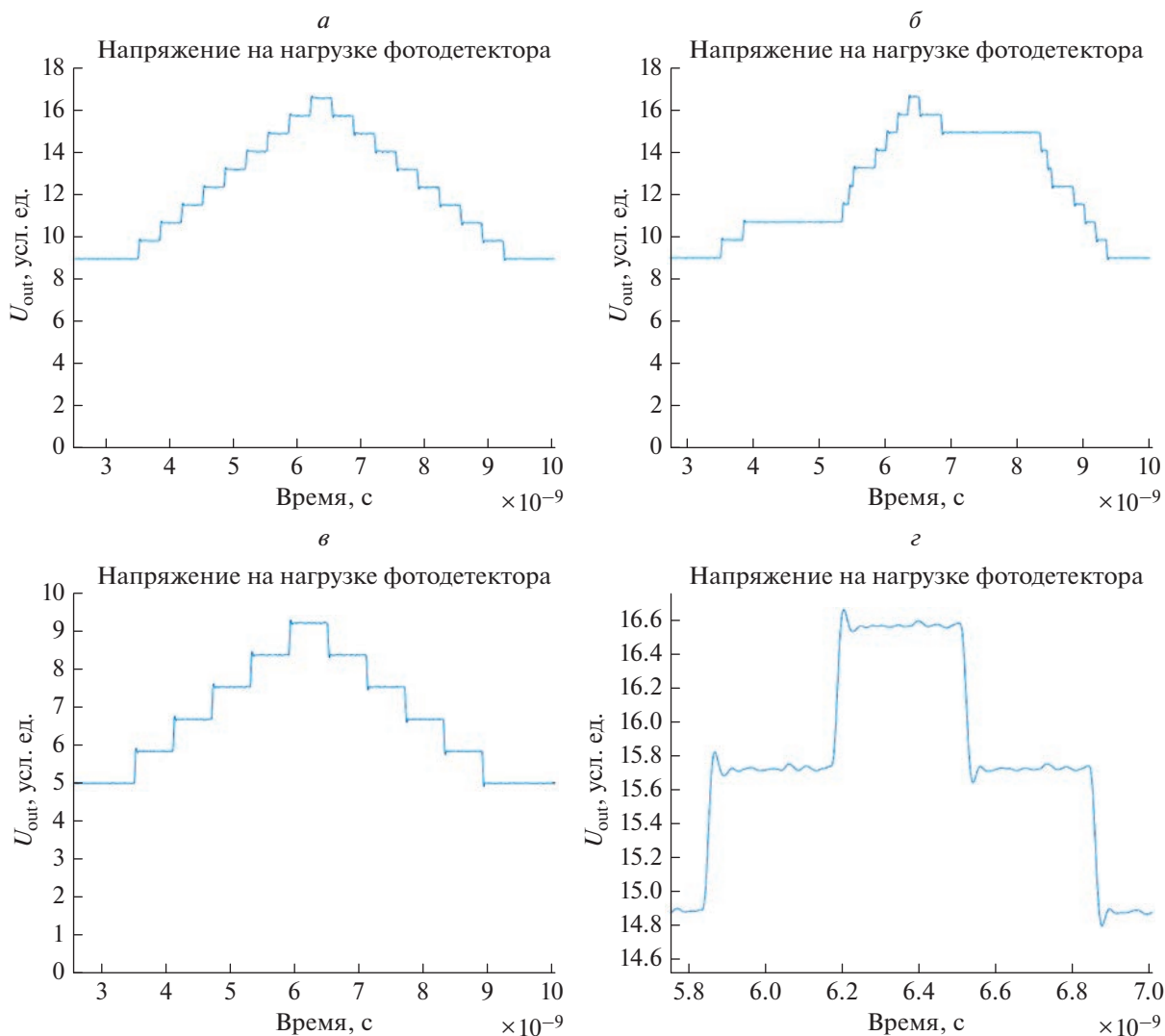
Для численного моделирования характеристик оптимального фильтра была разработана математическая модель, основанная на динамических уравнениях для элементов, используемых в схеме (лазер, модулятор, фотодетектор, фильтр, делители), а также определены источники шумов, включающие дробовой шум, тепловые шумы схемы, амплитудный и частотный шумы лазерного источника, темновой шум фотодетектора, и их параметры [11]. С помощью программного комплекса МАТЛАБ был разработан и отлажен численный код для проведения моделирований. Моделирования проводились для различных входных широкополосных сигналов — сигнала прямоугольного вида (для тестовых целей и как аналога видеосигналов), а также радиосигналов с огибающей треугольной формы частотой 10 ГГц с длительностью 0.6 и 3 нс.

### ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СИГНАЛА

Для определения свойств радиотонного оптимального фильтра были проведены тестовые моделирования фильтрации прямоугольного сигнала. В этом случае аналитическое решение точ-

но известно (прямоугольный сигнал на входе оптимального фильтра преобразуется в треугольный сигнал на его выходе), а вид выходного сигнала наглядный и допускает очевидную интерпретацию. Сигнал на выходе радиотонного оптимального фильтра с 9 линиями задержки при подаче на его вход импульса прямоугольной формы длительностью 3 нс представлен на рис. 2а и 2б (постоянный уровень определяется параметрами схемы и известен). Для случая одинаковой разности длин соседних линий задержки (0.33 нс, рис. 2а) выходной сигнал имеет ступенчатую симметричную форму (количество ступеней равно количеству линий задержки), при этом его вершина совпадает по времени с окончанием входного импульса, что позволяет определить время прихода сигнала (в данном случае правая граница верхней ступени располагается в точке 6.5 нс, прямоугольный импульс начинается в момент времени 3.5 нс и заканчивается при 6.5 нс). На рис. 2б разница в длинах между 2 и 3 линиями задержки увеличена и составляет порядка 1.5 нс. В результате форма выходного сигнала значительно искажается и становится несимметричной. В то же время правая граница верхней ступени остается в том же положении, что доказывает возможность использования параллельных фильтров с неравномерным расположением точек вычисления весовых коэффициентов (с изменяющейся разностью длин соседних линий задержки). Такое свойство существенно упрощает определение подходящего расположения этих точек (т.е. длин линий задержки и весовых коэффициентов) для знакопеременного импульса.

Сигнал на выходе радиотонного оптимального фильтра с 5 линиями задержки представлен на рис. 2в. Здесь ступени уширены по сравнению



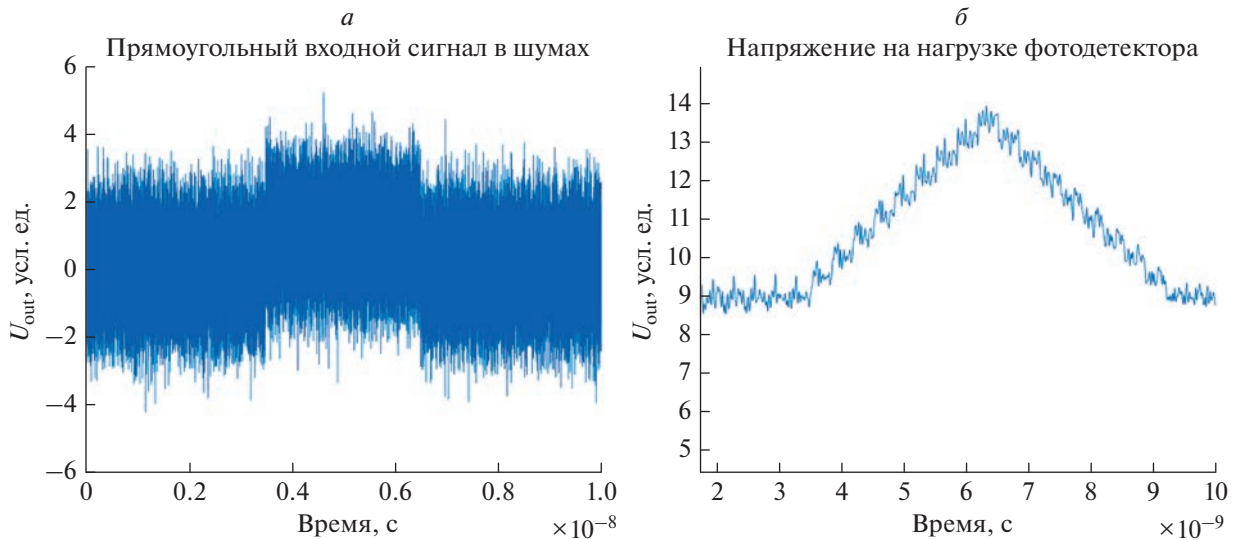
**Рис. 2.** Сигнал на выходе радиофотонного оптимального фильтра при подаче на вход импульса прямоугольной формы длительностью 3 нс: 9 линий задержки, одинаковая разность длин соседних линий (0.33 нс) (а); 9 линий задержки, разность в длинах между 2 и 3 линиями задержки составляет порядка 1.5 нс (б); 5 линий задержки, одинаковая разность длин соседних линий (в); собственные шумы оптимального фильтра (увеличенный вид верхней части сигнала, 9 линий задержки) (г). Входной импульс заканчивается в момент времени 6.5 нс.

с фильтром с 9 линиями задержки (рис. 2а). Точность измерения времени прихода принимаемого сигнала в радиофотонном оптимальном фильтре (рис. 1) определяется в случае прямоугольного импульса шириной ступеньки выходного сигнала (при умеренных шумах). Действительно, решение об обнаружении сигнала принимается, когда амплитуда сигнала на выходе оптимального фильтра превышает определенный порог. В присутствии входных шумов такое превышение может иметь место в любой точке верхней ступени, т.е. ошибка измерения времени прихода равна половине ширины верхней ступени. Оказывается, что, изменяя разность длин соседних линий

задержки определенным образом, можно существенно сузить верхнюю ступень и повысить точность измерения времени прихода сигнала (ср. ширину верхней ступени на рис. 2а и 2б).

На рис. 2г представлена вершина выходного сигнала оптимального фильтра в увеличенном виде в отсутствие шумов входного сигнала. На горизонтальных участках видны собственные шумы радиофотонного оптимального приемника. Они определяются параметрами элементов фильтра (лазер, фотодетектор). Параллельный фильтр базируется на оптической передающей линии, поэтому их шумовые характеристики оказываются схожими. В результате радиофотонный опти-





**Рис. 3.** Фильтрация аддитивной смеси сигнала и шума радиотонным оптимальным фильтром с 9 линиями задержки при подаче на вход импульса прямоугольной формы длительностью 3 нс: входной сигнал (а) и сигнал на выходе (б) оптимального фильтра в присутствии сильных входных шумов.

мальный фильтр может обеспечить отношение сигнал/шум на уровне 40–60 дБ для сигналов с шириной полосы в несколько гигагерц. Вверху левых и внизу правых границ ступеней на рис. 2г видны выбросы, связанные с работой фильтра низких частот на выходе фотодетектора (рис. 1). Этот фильтр подавляет оптические частоты, пропуская выходной сигнал оптимального фильтра. В реальных системах подавление обычно осуществляется фотодетектором.

Входной и выходной сигналы оптимального фильтра в присутствии сильных входных шумов (квадрат амплитуды сигнала порядка дисперсии шума) представлены на рис. 3а и 3б. Очевидно хорошее фильтрующее действие оптимального фильтра, обеспечивающего обнаружение входного сигнала даже при таких сильных шумах. Правая граница верхней ступени по-прежнему совпадает с окончанием прямоугольного импульса, но максимальное значение выходного сигнала достигается в середине верхней ступени вследствие сильных шумов.

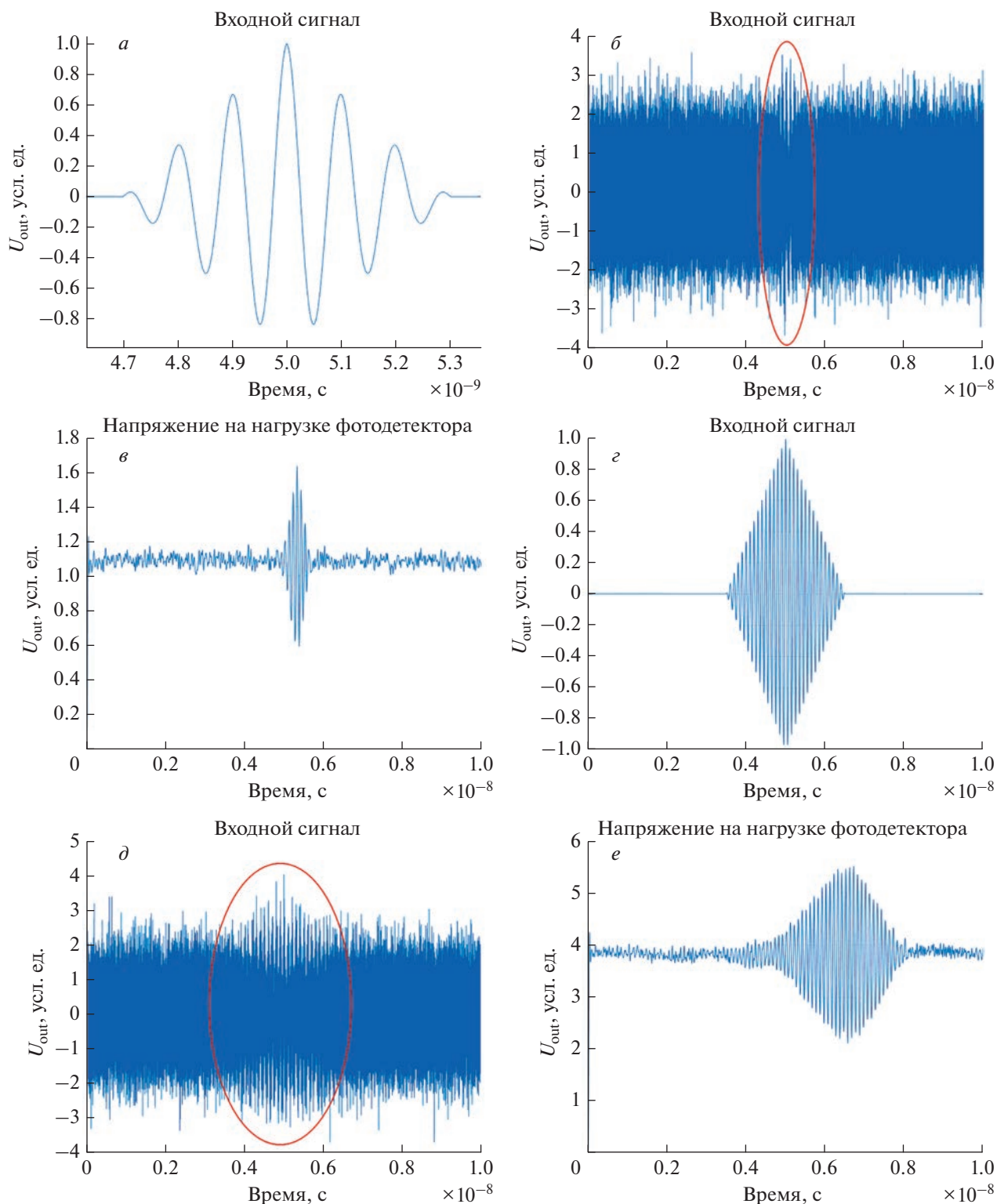
### ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ТРЕУГОЛЬНЫХ СИГНАЛОВ РАЗЛИЧНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ

Фильтрация аддитивной смеси сигнала и шума оптимальным фильтром с 9 линиями задержки для входного сверхширокополосного радиоимпульса частотой 10 ГГц и длительностью 0.6 нс с огибающей треугольной формы представлена на рис. 4. Исходный импульс показан на рис. 4а,

входной и выходной сигналы фильтра — на рис. 4б и 4в соответственно (положение входного импульса в шумах на рис. 4б отмечено красным эллипсом, характеристики шума аналогичны случаю на рис. 3б). Здесь опять фильтрующая способность радиотонного приемника достаточно высокая, дисперсия шумовой дорожки на выходе оказывается намного меньше максимальной амплитуды импульса, при этом, как и ранее, максимум выходного сигнала фильтра совпадает с окончанием входного радиосигнала.

Фильтрация сверхширокополосного радиосигнала 10 ГГц, 3 нс с треугольной огибающей представлена на рис. 4г, 4д и 4е. При увеличении длительности импульса его вершина становится более плоская, что ухудшает разрешение по дальности при наличии шумов. В то же время здесь это разрешение составляет не хуже нескольких длин волн излучения, т.е. оказывается менее 10 см для частоты 10 ГГц.

Интересно отметить, что увеличение количества линий задержки от 9 до 15 не приводит к пропорциональному улучшению разрешающей способности для радиоимпульсов с треугольной огибающей длительностью не более 10–20 нс. При этом время фильтрации оказывается порядка времени прохождения сигнала по фильтру (доли микросекунды). При реализации оптимального фильтра с применением дискретных комплектующих максимальное количество линий задержки может ограничиваться также и технологическими факторами. В итоге количество линий задержки, применяемое в реальной системе, определяется



**Рис. 4.** Излучаемый сигнал (*a*, *г*), а также входной (*б*, *д*) и выходной (*в*, *е*) сигналы оптимального фильтра с 9 линиями задержки для импульса с огибающей треугольной формы частотой 10 ГГц и длительностью 0.6 (*a–в*) и 3 нс (*г–е*). Положение входного сигнала в шумах отмечено красным эллипсом.

компромиссом между технологически допустимым числом линий задержки и точностью определения задержки, ограничиваемой как шириной

ступеньки, так и достигаемым отношением сигнал/шум. Детальное исследование характеристик радиофотонного оптимального приемника для



различных типов и параметров сигнала будет представлено в последующих работах.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы характеристики радиофотонного оптимального приемника, реализованного по схеме параллельного фильтра. Продемонстрированы его хорошие фильтрующие свойства. Выяснено влияние числа линий задержки и разности их длин на выходной сигнал оптимального фильтра. Для случая переменной разности длин соседних линий задержки форма выходного сигнала значительно искажается и становится несимметричной. В то же время при таких изменениях вершина импульса отклика сохраняет свое положение и совпадает с точкой окончания входного импульса, что доказывает возможность использования параллельных фильтров с неравномерным расположением точек вычисления весовых коэффициентов. Внутренние шумы оптимального приемника обеспечивают отношение сигнал/шум, достаточное для уверенного обнаружения входного сигнала и определения времени его прихода.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты № 19-29-06108-мк и 20-07-00768-а).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Capmany J., Ortega B., Pastor D. // J. Light Technol. 2006. V. 24. P. 201.
2. Capmany J., Gasulla I., Pérez D. // Nature Photonics. 2016. V. 10. P. 6.
3. Marpaung D., Yao J., Capmany J. // Nature Photonics. 2019. V. 13. P. 80.
4. Smit M., Williams K., Van der Tol J. // APL Photonics. 2019. V. 4. Art. No. 050901.
5. Durand O., Dolfi D., Laude V. et al. // Opt. Lett. 1996. V. 21. No. 11. P. 803.
6. Lee J., Chang Y., Han Y.-G. et al. // Appl. Opt. 2007. V. 46. No. 22. P. 5158.
7. Muzammil A., Nabeel R. // Appl. Opt. 2004. V. 43. No. 15. P. 3159.
8. Хелстром К. Статистическая теория обнаружения сигналов. М.: ИЛ, 1963. С. 109.
9. Лэм Г. Аналоговые и цифровые фильтры. М.: Мир, 1982. С. 61.
10. Кук Ч., Бернфельд М. Радиолокационные сигналы. М.: Советское радио, 1971. С. 15.
11. Валуев В.В., Гуляев Ю.В., Конторов С.М. и др. // Радиотехн. и электрон. 2018. Т. 63. № 9. С. 1020; Valuev V.V., Gulyaev Yu.V., Kontorov S.M. et al. // J. Commun. Technol. Electron. 2018. V. 63. No. 9. P. 1080.

## Microwave photonics matched filter for fast processing of ultra-wideband input signal

V. V. Kulagin<sup>a, b, \*</sup>, V. V. Valuev<sup>c, d</sup>, D. Burkutbaev<sup>e</sup>, V. N. Kornienko<sup>b</sup>, V. A. Cherepenin<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Lomonosov Moscow State University, Sternberg State Astronomical Institute, Moscow, 119991 Russia

<sup>b</sup>Kotel'nikov Institute of Radioengineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 125009 Russia

<sup>c</sup>National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, 115409 Russia

<sup>d</sup>Research Centre "Module", Moscow, 125190 Russia

<sup>e</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia

\*e-mail: victorvkulagin@yandex.ru

A scheme of a specialized analog processor implementing a microwave photonics correlation receiver in the form of a matched filter for processing an ultra-wideband microwave signal is proposed. The operation of such a filter is numerically investigated, its characteristics are found (accuracy of determining the position of the maximum of the output signal, potential performance).

УДК 621.385.6

## УМНОЖЕНИЕ ЧАСТОТЫ В СИЛЬНОТОЧНОМ РЕЛЯТИВИСТСКОМ ГИРОТРОНЕ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ МОЩНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ТЕРАГЕРЦЕВОГО ДИАПАЗОНА

© 2023 г. А. Н. Леонтьев<sup>1, \*</sup>, Р. М. Розенталь<sup>1, 2</sup>, Н. С. Гинзбург<sup>1</sup>, И. В. Зотова<sup>1</sup>,  
А. М. Малкин<sup>1, 2</sup>, А. С. Сергеев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки “Федеральный исследовательский центр  
Институт прикладной физики Российской академии наук”, Нижний Новгород, Россия

<sup>2</sup>Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
“Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского”,  
Нижний Новгород, Россия

\*E-mail: leontiev@ipfran.ru

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

В рамках усредненных уравнений и на основе трехмерного моделирования методом крупных частиц исследован режим умножения частоты в сильноточном релятивистском гиротроне диапазона 0.1 ТГц. Показано, что отношение мощности излучения на третьей гармонике к уровню генерации на основном циклотронном резонансе может составлять 0.4–0.8%, что позволяет рассчитывать на получение излучения в диапазоне 0.3 ТГц субмегаваттного уровня мощности.

DOI: 10.31857/S0367676522700107, EDN: JJCLJD

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время одними из наиболее мощных источников излучения терагерцевого диапазона являются гиротроны, которые в импульсном режиме обеспечивают уровни мощности в сотни киловатт в терагерцевом диапазоне при работе на основном циклотронном резонансе [1, 2]. Однако необходимость создания достаточно сильных магнитных полей в большом объеме является одним из ключевых факторов, ограничивающих продвижение мощных гиротронов в более высокочастотные диапазоны. К примеру, в случае сильноточного гиротрона диапазона 0.3 ТГц требуется магнитное поле около 20 Тл [3].

В этой связи, как с целью повышения частоты генерации при заданной величине магнитного поля, так и для снижения магнитного поля на заданной частоте, представляет интерес исследование возбуждения в гиротронах на циклотронных гармониках. Одной из привлекательных возможностей здесь является использование эффекта умножения частоты [4, 5]. При этом, поскольку электронный пучок является нелинейной средой, в нем под воздействием внешней или сгенерированной самим пучком низкочастотной волны возникают гармоники тока, которые обеспечивают последующее высокочастотное излучение на гармониках частоты низкочастотной волны.

В случае слаборелятивистских винтовых электронных пучков значительным недостатком описанного механизма является низкий коэффициент нелинейной трансформации, который определяется как отношение мощности высокочастотного излучения к уровню низкочастотной генерации на основном циклотронном резонансе. Это обусловлено, с одной стороны, неэквидистантностью спектра мод цилиндрических волноводов, типично используемых в гиротронах, а, с другой, — быстрым спаданием коэффициентов связи с увеличением номера гармоники. В частности, проведенные в [6, 7] измерения мощности для слаборелятивистского гиротрона с рабочей частотой 0.26 ТГц показали, что значения коэффициента нелинейной трансформации на второй циклотронной гармонике на частоте 0.52 ТГц составили  $10^{-4}$  (т.е., около 0.01% относительно мощности излучения на первой гармонике), а для третьей циклотронной гармоники на частоте 0.78 ТГц — около  $10^{-6}$  (0.0001%). В то же время, хорошо известно, что степень спада коэффициентов связи на гармониках уменьшается с увеличением энергии электронов [8].

В данной работе показано, что при использовании релятивистского сильноточного винтового электронного пучка, коэффициент нелинейной трансформации в гиротроне увеличивается на не-

скольких порядков. В результате мощность генерации на третьей гармонике может составлять десятки доли процента относительно мощности генерации на первой гармонике.

### МОДЕЛИРОВАНИЕ В РАМКАХ УСРЕДНЕННОГО ПОДХОДА

Рассмотрим модель гиротрона в виде отрезка слабонерегулярного цилиндрического волновода радиусом  $R_0$ , в котором винтовой электронный пучок возбуждает несколько ТЕ-мод с номерами  $n = 1, 2, 3, \dots$  и значениями азимутального и радиального индексов  $m_n$  и  $q_n$ , соответственно. Будем полагать, что каждая мода взаимодействует с пучком на  $s_n$ -ой циклотронной гармонике; при этом частота излучения на заданной моде близка как к критической частоте моды в резонаторе  $\bar{\omega}_n^c$ , так и к величине  $s_n \omega_H^0$ , где  $\omega_H^0 = eH_0/m_e c \gamma_0$  — гирочастота,  $H_0$  — величина ведущего магнитного поля,  $\gamma_0$  — релятивистский масс-фактор. Электрическое поле каждой из мод в рабочем пространстве может быть представлено в виде

$$\vec{E}_n = \text{Re} \left( A_n(z, t) \vec{E}_\perp^n(r) \exp(is_n \omega_H^0 t - im_n \phi) \right), \quad (1)$$

где  $A_n(z, t)$  — медленно меняющаяся комплексная амплитуда моды с номером  $n$ , функция  $\vec{E}_\perp^n(r)$  описывает радиальную структуру моды,  $\phi$  — азимутальный угол. Электронно-волновое взаимодействие с учетом разброса по скоростям в электронном пучке может быть описано следующей системой уравнений (ср. с [9]):

$$\begin{aligned} i \frac{\partial^2 a_n}{\partial Z^2} + s_n \frac{\partial a_n}{\partial \tau} + (i \Delta_n + i \delta_n(Z) + \sigma_n) a_n = \\ = i \frac{G_n}{4\pi^2} \frac{\int_0^{2\pi} e^{i(m_n - s_n)\phi} \int_0^{2\pi} \alpha(p_0) \int_0^{2\pi} p^s d\theta_0 dp_0 d\phi}{\int_0^{2\pi} \alpha(p_0) \sqrt{\bar{g}_0^2 + 1 - \bar{g}_0^2 |p_0|^2} dp_0}, \quad (2) \\ \sqrt{\bar{g}_0^2 + 1 - \bar{g}_0^2 |p_0|^2} \frac{\partial p}{\partial Z} + \frac{\bar{g}_0^2}{4} \frac{\partial p}{\partial \tau} + ip(|p|^2 - |p_0|^2) = \\ = i \sum_n a_n (p^*)^{s_n-1} e^{-i(m_n - s_n)\phi}, \end{aligned}$$

где

$$a_n = \frac{e A_n J_{m_n - s_n}(v_{m_n, q_n} R_b / R_0) s_n^{s_n} \bar{\beta}_{\perp 0}^{s_n - 4}}{m c \omega_H^0 2^{s_n - 1} s_n! \gamma_0}, \quad (3)$$

безразмерная амплитуда поля

$$Z = \frac{\bar{\beta}_{\perp 0}^2 \omega_H^0}{2 \bar{\beta}_{\parallel 0} c} z, \quad \tau = \frac{\bar{\beta}_{\perp 0}^4}{8 \bar{\beta}_{\parallel 0}^2} \omega_H^0 t, \quad (4)$$

безразмерные продольная координата и время,  $\bar{\beta}_{\perp 0} = \bar{V}_{\perp 0}/c$  и  $\bar{\beta}_{\parallel 0} = \bar{V}_{\parallel 0}/c$  — средние значения нормированной поперечной и продольной скорости электронов на входе в область взаимодействия,  $g_0 = \bar{\beta}_{\perp 0}/\bar{\beta}_{\parallel 0}$  — соответствующий питч-фактор,

$$p = \frac{(p^x + ip^y) e^{-is_n \omega_H t + i(m_n - 1)\phi}}{m \bar{V}_{\perp 0} \gamma_0} \quad (5)$$

нормированный на среднее начальное значение комплексный поперечный импульс,

$$\Delta_n = \frac{8 \bar{\beta}_{\parallel 0}^2 s_n^2 \omega_H^0 - \bar{\omega}_n^c}{\bar{\beta}_{\perp 0}^4 \bar{\omega}_n^c} \quad (6)$$

циклотронная расстройка для моды с номером  $n$ ,

$$\delta_n(Z) = \frac{8 \bar{\beta}_{\parallel 0}^2 s_n^2 \bar{\omega}_n^c - \omega_n^c(Z)}{\bar{\beta}_{\perp 0}^4 \bar{\omega}_n^c} \quad (7)$$

геометрическая расстройка, описывающая профиль резонатора  $R(z)$ ,  $\omega_n^c(Z) = v_{m_n, q_n} c / R(z)$  — функция, задающая зависимость критической частоты моды с номером  $n$  от продольной координаты,

$$\begin{aligned} G_n = 64 \frac{e I_b}{m_e c^3} \frac{\bar{\beta}_{\parallel 0} \bar{\beta}_{\perp 0}^{2(s_n - 4)}}{\gamma_0} \times \\ \times s_n^3 \left( \frac{s_n^{s_n}}{2^{s_n} s_n!} \right)^2 \frac{J_{m_n - s_n}^2(v_{m_n, q_n} R_b / R_0)}{(v_n^2 - m_n^2) J_{m_n}^2(v_{m_n, q_n})} \end{aligned} \quad (8)$$

— параметр возбуждения для пучка с радиусом инжекции  $R_b$  и током  $I_b$ ,  $v_{m_n, q_n}$  — корень с номером  $q_n$  уравнения  $J'_{m_n}(v) = 0$ ,

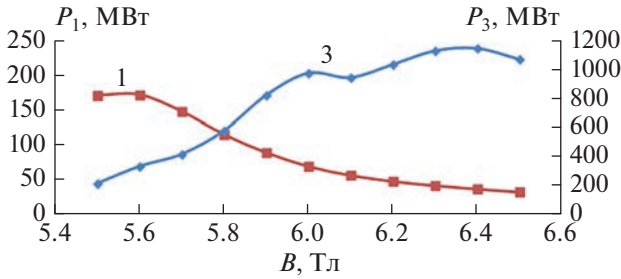
$$\sigma_n = 4 \frac{\bar{\beta}_{\parallel 0}^2 s_n^2}{\bar{\beta}_{\perp 0}^4 Q_n} \quad (9)$$

коэффициент поглощения,

$$Q_n = \frac{R_0}{d_n} \left( 1 - \frac{m_n^2}{v_{m_n, q_n}^2} \right), \quad (10)$$

омическая добротность для моды с номером  $n$ ,  $d_n$  — соответствующая толщина скин-слоя. Для учета начального разброса электронов по поперечным скоростям использовалась гауссова функция распределения:

$$\alpha(p) = \frac{\sum_{j=-M}^M e^{-j^2 \chi} \int_0^{2\pi} p_j^{s_n} d\theta_0}{\sum_{j=-M}^M e^{-j^2 \chi} \sqrt{g^2 + 1 - g^2 |p_j|^2}}, \quad (11)$$



**Рис. 1.** Моделирование на основе усредненных уравнений. Зависимость мощности генерации на основной гармонике  $P_1$  и третьей гармонике  $P_3$  от величины магнитного поля.

где целое число  $M$  определяет число фракций электронов, равное  $2M + 1$ ,  $p_j$  — значение комплексного поперечного импульса для  $j$ -й фракции электронов,  $\chi$  — параметр относительной ширины гауссовой кривой распределения.

Будем считать, что на входе в пространство взаимодействия электроны равномерно распределены по фазам циклотронного вращения

$$p_j(Z=0) = p_j^0 e^{i\theta_0}, \quad \theta_0 \in [0, 2\pi). \quad (12)$$

В свою очередь  $p_j^0 = (1 + \epsilon j) e^{i\theta}$ , где  $\epsilon$  — параметр абсолютной величины разброса.

Во входном и выходном сечениях пространства взаимодействия используется излучательное граничное условие [10]:

$$\begin{aligned} a_n(Z=0, \tau) - \frac{e^{-i(\Delta_n + \delta_n(0) + \sigma_n)/s_n}}{\sqrt{i\pi s_n}} \times \\ \times \int_0^\tau \frac{e^{-i(\tau-\tau')}}{\sqrt{\tau-\tau'}} \frac{\partial a_n(0, \tau')}{\partial Z} d\tau' = 0, \\ a_n(Z=L, \tau) + \frac{e^{-i(\Delta_n + \delta_n(L) + \sigma_n)/s_n}}{\sqrt{i\pi s_n}} \times \\ \times \int_0^\tau \frac{e^{-i(\tau-\tau')}}{\sqrt{\tau-\tau'}} \frac{\partial a_n(L, \tau')}{\partial Z} d\tau' = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $L$  — нормированная длина резонатора.

В использованных нормировках мощность излучения каждой из мод в выходном сечении находится по формуле

$$P_n [\text{кВт}] = 511.765 I [A] \frac{\gamma_0 \beta_{\perp 0}^2}{G_n} \text{Im} \left( a_n \frac{\partial a_n^*}{\partial Z} \right) \Big|_{Z=L}. \quad (14)$$

Рассмотрим релятивистский гиротрон диапазона 0.1 ТГц с рабочей модой  $\text{TE}_{-4,2}$ , возбуждаемый винтовым электронным пучком с энергией 500 кэВ и током 2 кА. Для удобства будем полагать, что рабочая мода на основной гармонике гирочастоты имеет номер 1, соответственно  $s_1 = 1$ ,

$m_1 = -4$ ,  $q_1 = 2$ . Известно, что для эффективного умножения излучения в гармонику с номером  $s_n$ , необходимо, чтобы азимутальные индексы мод на первой и  $n$ -ой циклотронных гармониках удовлетворяли соотношению

$$m_n = s_n m_1, \quad (15)$$

и, одновременно, выполнялось условие кратности критических частот

$$\bar{\omega}_n^c \approx s_n \bar{\omega}_1^c, \quad (16)$$

Последнее условие удобно переписать для значений собственных чисел мод:

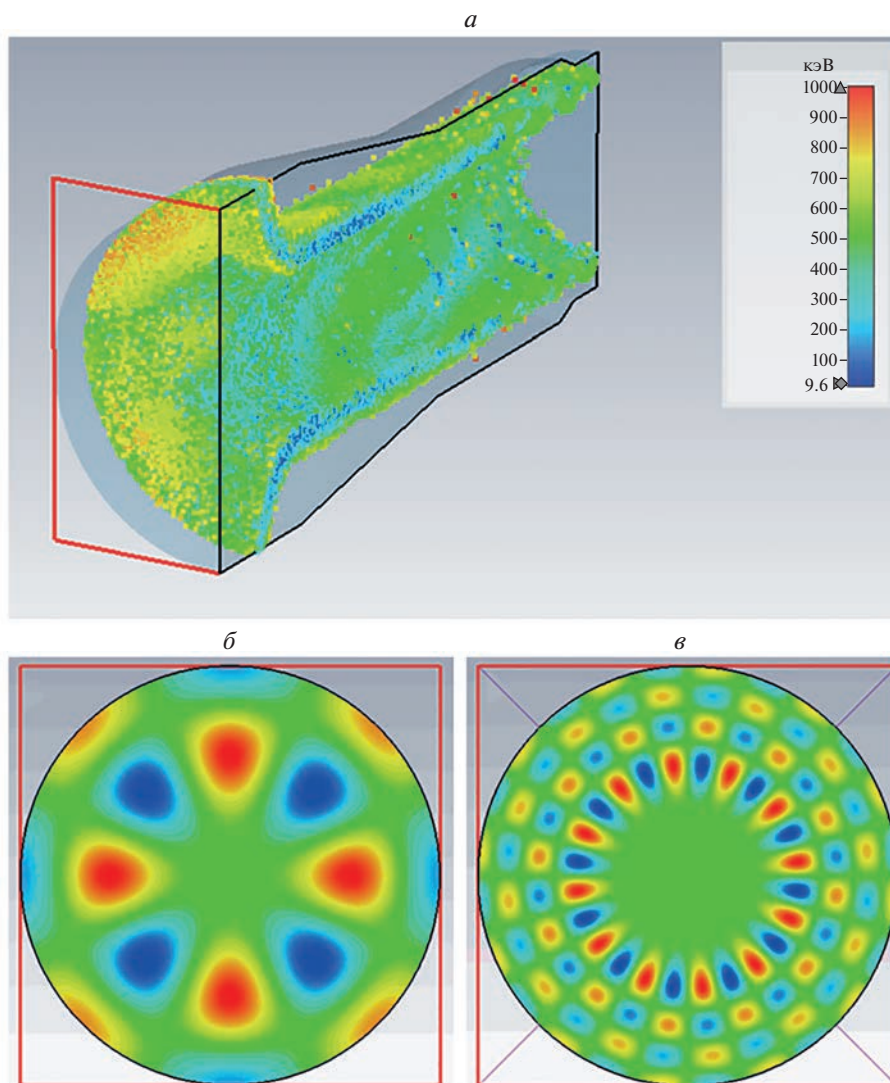
$$V_{m_n, q_n} \approx s_n V_{m_1, q_1}. \quad (17)$$

Рассмотрим умножение в гармонику с номером  $s_2 = 3$  на частоте 0.3 ТГц. Согласно условию (15), азимутальный индекс высокочастотной моды будет равен  $m_2 = -12$ . В свою очередь, условие (17) будет лучше всего выполняться для моды  $\text{TE}_{-12,4}$ , так что  $q_2 = 4$ . Для величины начального разброса электронов по поперечным скоростям 20% и среднего начального значения питч-фактора  $g_0 = 1$  значения параметров в выражениях (11), (12) примут значения  $\epsilon = 0.04$ ,  $\chi = 0.33$ .

На рис. 1 показана рассчитанная на основе уравнений (2) зависимость мощности излучения от величины магнитного поля. Максимальная мощность излучения на основном циклотронном резонансе  $P_1$  достигает почти 200 МВт при магнитном поле около 5.5 Тл и плавно спадает по мере его увеличения. В свою очередь, по мере роста магнитного поля, мощность излучения на третьей гармонике плавно нарастает, достигая максимального значения более 1 МВт.

### ТРЕХМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДОМ КРУПНЫХ ЧАСТИЦ

Для более полного анализа характеристик генерации на высоких циклотронных гармониках расчеты гиротрона были также выполнены на основе трехмерного PIC-моделирования методом крупных частиц с использованием программы CST Particle Studio. В моделировании винтовой электронный пучок с начальной энергией 500 кэВ, током 2 кА и разбросом по скоростям около 20% возбуждал резонатор гиротрона на моде  $\text{TE}_{-4,2}$  на частоте 0.1 ТГц. На рис. 2а представлена геометрия пространства взаимодействия, мгновенное положение макрочастиц и их распределение по энергиям. Использовалось около 300 тысяч макрочастиц, количество узлов сетки составляло около 25 млн. После окончания взаимодействия электронный пучок высаживался на стенку электродинамической системы в спадающем магнитном поле.



**Рис. 2.** Геометрия пространства взаимодействия, мгновенное положение макрочастиц и их распределение по энергиям в трехмерном РИС моделировании (а), поперечное распределение возбуждаемого высокочастотного поля моды  $TE_{-4,2}$  на первой циклотронной гармонике (б) и моды  $TE_{-12,4}$  на третьей циклотронной гармонике (в).

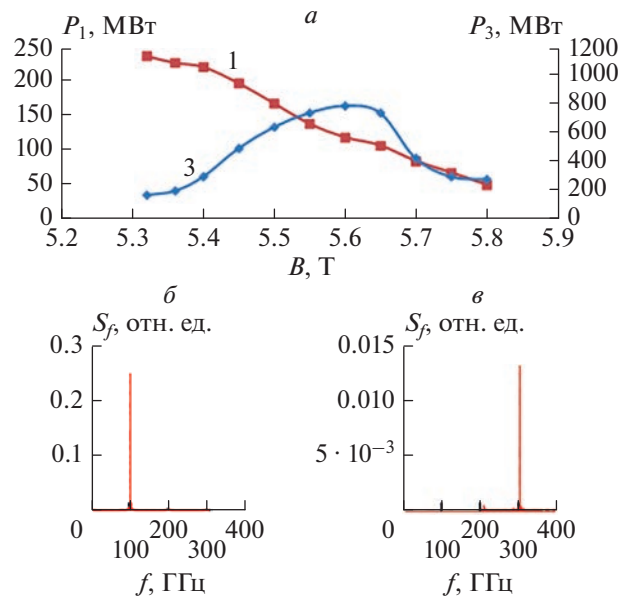
На рис. 2б и 2в показаны поперечные структуры высокочастотного поля для моды  $TE_{-4,2}$ , возбуждаемой на первой гармонике гирочастоты, и на моде  $TE_{-12,4}$ , возбуждаемой на третьей гармонике. На рис. 3а показана зависимость мощности излучения от величины магнитного поля на основной рабочей моде  $TE_{-4,2}$  и моде  $TE_{-12,4}$ . Частота излучения на третьей гармонике ровно в три раза превышает частоту генерации на первой гармонике и составляет 0.3 ТГц (рис. 3б и 3в). Максимальный уровень мощности на третьей гармонике достигает 0.8 МВт.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, результаты моделирования показывают возможность достижения в реляти-

вистских гиротронах субмегаваттного уровня мощности излучения в диапазоне 0.3 ТГц в режиме умножения на третьей циклотронной гармонике с кратным снижением величины магнитного поля. Отметим, что в настоящее время ведется разработка релятивистских гиротронов с выходной мощностью около 80 МВт с рабочей частотой 0.3 ТГц на основном циклотронном резонансе [3]. Соответственно, в подобных гиротронах в режиме умножения частоты можно рассчитывать на получение излучения с уровнем мощности в сотни киловатт в диапазоне около 0.9 ТГц.

Работа выполнена в рамках государственного задания № 0030-2021-0027 (программа “Развитие техники, технологий и научных исследований в области использования атомной энергии в Российской Федерации на период до 2024 г.”).



**Рис. 3.** Результаты трехмерного PIC моделирования: Зависимость мощности генерации на основной гармонике  $P_1$  и третьей гармонике  $P_3$  от величины магнитного поля (а), спектр выходного излучения гиротрона на модах  $TE_{-4,2}$  (б) и  $TE_{-12,4}$  (е).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sabchevski S., Glyavin M., Mitsudo S. et al. // J. Infrared Millim. THz Waves. 2021. V. 42. No. 7. P. 715.
2. Thumm M. // J. Infrared Millim. THz Waves. 2020. V. 41. No. 1. P. 1.
3. Rozental R.M., Danilov Yu.Yu., Leontyev A.N. et al. // IEEE Trans. Electron Dev. 2022. V. 69. No. 3. P. 1451.
4. Завольский Н.А., Нусинович Г.С., Павельев А.Б. // Изв. вузов. Радиофиз. 1988. Т. 31. № 3. С. 361.
5. Idehara T., Ogawa I., Shimizu Y., Tatsukawa T. // J. Infrared Millim. THz Waves. 1998. V. 19. P. 803.
6. Golubiatnikov G.Yu., Koshelev M.A., Tsvetkov A.I. et al. // IEEE Trans. Terahertz Sci. Tech. 2020. V. 10. No. 5. P. 502.
7. Glyavin M., Zotova I., Rozental R. et al // J. Infrared Millim. THz Waves. 2020. V. 41. P. 1245.
8. Братман В.Л., Гинзбург Н.С., Нусинович Г.С. и др. // В кн.: Релятивистская высокочастотная электроника. Горький: ИПФАН СССР, 1979. С. 157.
9. Dumbrajs O., Saito T., Tatematsu Y., Yamaguchi Y. // Phys. Plasmas. 2016. V. 23. Art. No. 093109.
10. Ginzburg N.S., Nusinovich G.S., Zavolsky N.A. // Int. J. Electron. 1986. V. 61. No. 6. P. 881.

### Frequency multiplication in a high-current relativistic gyrotron for obtaining high-power THz-band radiation

A. N. Leontiev<sup>a,\*</sup>, R. M. Rozental<sup>a,b</sup>, N. S. Ginzburg<sup>a</sup>, I. V. Zotova<sup>a</sup>, A. M. Malkin<sup>a,b</sup>, A. S. Sergeev<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Federal Research Center Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, 603950 Russia

<sup>b</sup>Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, 603950 Russia

\*e-mail: leontiev@ipfran.ru

Using averaged equations and 3D particle-in-cell simulations, we investigate the frequency multiplication regime in a high-current relativistic gyrotron operating in 0.1 THz frequency band. We demonstrate that the ratio of the 3rd harmonic power and the fundamental cyclotron resonance power can reach 0.4–0.8%, which allows for obtaining the 0.3 THz radiation with sub-MW output power level.

УДК 621.396.677

## ТРАНСИВЕР ЦИФРОВОЙ ФАЗИРОВАННОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ С МНОГОЛУЧЕВОЙ ДИАГРАММОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ

© 2023 г. Лу Гомин<sup>1</sup>\*, П. Н. Захаров<sup>1</sup>, А. Ф. Королев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

“Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, физический факультет, Москва, Россия

\*E-mail: luguoming.hit@gmail.com

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Разработан трансивер для цифрового формирования многолучевой диаграммы направленности цифровой антенной решетки, состоящий из передатчика и приемника, интегрированных на единой печатной плате. Экспериментально измерены параметры трансивера и многолучевой диаграммы направленности фазированной антенной решетки с цифровой схемой.

DOI: 10.31857/S0367676522700119, EDN: JJGRDD

### ВВЕДЕНИЕ

В последние годы увеличивается интерес к цифровому формированию диаграммы направленности для пятого и будущих поколений (5G/6G) систем сотовой связи. Цифровое формирование лучей в системах с разнесенным приемом и передачей (MIMO) позволяет увеличить зону покрытия и емкость сети в системах сотовой связи 5G. По сравнению с аналоговой многолучевой антенной решеткой, цифровая схема формирования лучей обеспечивает более высокую энергетическую эффективность и гибкое формирование лучей [1]. В MIMO-системах связи при использовании предварительного кодирования осуществляется формирование нескольких лучей, передающих потоки данных в однопользовательском и многопользовательском режимах [2–5]. MIMO-системы с формированием лучей имеют повышенную устойчивость к помехам с направлений, не соответствующих сформированным лучам в диапазоне миллиметровых волн в 5G-системах связи [1]. В [6–8] рассмотрено использование аналоговых фазированных антенных решеток, реализованных по технологии интегральных схем в миллиметровой 5G-связи. Комбинированная аналогово-цифровая фазированная антенная решетка для формирования лучей предложена в [9, 10]. Использование линз для формирования и переключения лучей в 5G-системах связи описано в [11, 12].

В [1] описывается трансивер (приемопередатчик) для MIMO-системы с полным цифровым формированием многолучевой диаграммы для 5G-связи, в трансивере интегрированы 64 канала формирования лучей, компоненты фильтров и

соединений трансивера выполнены по технологии “волновод в подложке” (SIW, Substrate Integrated Waveguide); трансивер работает в режиме дуплекса с временным разделением (TDD), обеспечивает выходную мощность в линейном режиме не менее 12 дБм на канал и общую мощность передачи решетки до 30 дБм; трансивер с 64 каналами возбуждает антенную решетку с количеством элементов  $16 \times 4$  и коэффициентом направленного действия 17.4 дБи; расположение 16 элементов в горизонтальном направлении и 4 элементов в вертикальном направлении обеспечивает более узкую азимутальную ширину диаграммы, что приводит к лучшему пространственному разделению абонентов. В [3] описан трансивер, изготовленный по стандартной 65 нм КМОП-технологии (комплементарная структура металл-оксид-полупроводник); в трансивере использованы локальные генераторы с управляемыми фазовыми сдвигами, что позволяет достичь независимости фазы от амплитуды; для управления трансивером используется последовательный периферийный интерфейс (SPI); антенные элементы выполнены в формате патчей с коэффициентом направленного действия 3.9 дБи, антенная решетка имеет расположение элементов  $16 \times 1$  и обеспечивает качание лучей в диапазоне углов от  $-30^\circ$  до  $30^\circ$  относительно нормали. В [13] представлена двухлучевая система передачи/приема (трансивер) с рабочей полосой частот 28–32 ГГц в 5G-связи, трансивер возбуждает фазированную антенную решетку с количеством элементов  $2 \times 64$  и двойной поляризацией волн излучения, решетка выполнена на SiGe-чипах с двойным лу-



чевым формирователем, 6 битами фазы и диапазоном регулировки коэффициента усиления до 25 дБ; чип выдает мощность 11–12 дБм на канал в режиме передачи и имеет коэффициент шума 4.8 дБ в режиме приема; на печатной плате 16 чипов возбуждает двухлучевую решетку с количеством элементов  $2 \times 64$ , решетка выполнена с использованием технологии флип-чип, обеспечивает качание каждого луча в диапазоне  $\pm 50^\circ$  по азимуту и  $\pm 25^\circ$  по углу места. При излучении двух лучей в ММО-системе скорость передачи данных достигала 9.6 Гбит/с в диапазоне качания лучей  $\pm 50^\circ$  при использовании квадратурной амплитудной модуляции (QAM-64). В [14] в трансивере использован микроконтроллер и радиочастотная интегральная микросхема (RFIC) для управления формированием лучей. В [15] трансивер с фазированной антенной решеткой выполнен по технологии 65 нм КМОП в рабочем диапазоне частот 28 ГГц для 5G и следующих поколений связи, элемент решетки занимает площадь всего  $0.48 \text{ мм}^2$  благодаря бисимметричной структуре. В [16] 16-канальный трансивер с фазированной антенной решеткой выполнен по 28 нм КМОП-технологии, предназначен для использования в ММО-системе 5G-базовой станции связи; количество элементов фазированной антенной решеткой достигает 1024, при использовании решетки с количеством элементов  $16 \times 16$  диапазон углов сканирования лучей составляет  $\pm 60^\circ$ , уровень боковых лепестков не превышает 10 дБ, ширина луча  $6^\circ$ . В [17] описан трансивер с гибридным (аналоговым и цифровым) методом формирования лучей в ММО-системе, проведена оптимизация количества элементов и расстояний между ними, оценка влияния параметров на диаграмму излучения. В [18] описаны перспективные радиофотонный и оптические методы формирования диаграммы направленности в будущих поколениях беспроводной связи.

## РАЗРАБОТКА ТРАНСИВЕРА

Трансивер состоит из передатчика и приемника. Передатчик выполняет функции перевода сигнала из цифровой в аналоговую форму, переноса сигнала на несущую частоту, усиления и фильтрации сигнала. Приемник реализует фильтрацию, усиление, перенос на нулевую частоту, аналогово-цифровое преобразование (АЦП). Основные компоненты трансивера: сдвоенные интегрированные ЦАП и АЦП, усилители низкой частоты, фильтры низких частот (ФНЧ), квадратурный модулятор и демодулятор (квадратурные смесители), фильтры высоких частот (ФВЧ), усилители радиочастоты, элементы питания.

Обработанный с учетом диаграммообразования и модуляции в ПЛИС (программируемой логической интегральной схеме) платы ЦОС (циф-

ровой обработки сигналов) цифровой сигнал поступает на вход передатчика трансивера через многоконтактный высокоскоростной разъем; 12-битные выборки сигнала подаются на ЦАП передатчика и проходят фильтры защиты от наложения спектров, усиливаются и поступают на квадратурный смеситель. В трансивере была использована микросхема ЦАП/АЦП AFE7225 с частотой дискретизации 125 МГц, что обеспечивает ширину полосы до 80 МГц на радиочастоте. С выхода ЦАП квадратурные модулирующие сигналы поступают на два идентичных операционных усилителя OPA695IDBV, затем проходят Чебышевские фильтры нижних частот девятого порядка для защиты от наложения спектров. ФНЧ на L–C компонентах обеспечил подавление не менее 50 дБ на частоте 50 МГц и неравномерность в полосе пропускания 1 дБ. С выходов ФНЧ сигналы поступают на квадратурный смеситель на GaAs с полосой частот 4–8 ГГц, подавлением зеркального канала до –40 дБ. Смеситель осуществляет перенос сигналов с нулевой частоты в рабочий диапазон частот фазированной антенной решетки (ФАР) 7.0–7.4 ГГц. Далее сигнал поступает на усилитель радиочастоты (РЧ) на микросхеме NBB-400 с усилением порядка 12 дБ. Усиленный сигнал поступает на усилитель мощности GVA-82+, обеспечивающий максимальную выходную мощность до +20 дБм. На выходе передатчика формируется сигнал возбуждения элемента фазированной антенной решетки, что обеспечивает формирование диаграммы направленности излучения. В приемнике (приемном тракте трансивера) осуществляются преобразования, обратные выполненным в передатчике. На рис. 1 представлена схема приемопередатчика (трансивера).

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ТРАНСИВЕРА И ИЗЛУЧЕНИЯ ФАР

Экспериментальные измерения характеристик разработанного трансивера было проведено в комплексе, состоящем из анализатора спектра Rohde & Schwarz FSVR40 и ЭВМ с telnet-клиентом, осуществляющим удаленное управление приборами и проведение измерений.

Радиочастотный выход трансивера подключался ко входу анализатора спектра Rohde & Schwarz FSVR40; с командной строки через telnet-клиент задавалась выходная частота трансивера 2 ГГц, выходная мощность 20 дБм. Анализатором спектра с помощью маркера измерялась центральная частота спектра сигнала и выходная мощность. Далее аналогичные измерения проводились для верхней граничной частоты 8.5 ГГц, а также контролировалась мощность на промежуточных частотах. В результате измерений установлено, что передатчик обеспечивает рабочий диапазон частот от 2 до 8.5 ГГц по уровню –3 дБ

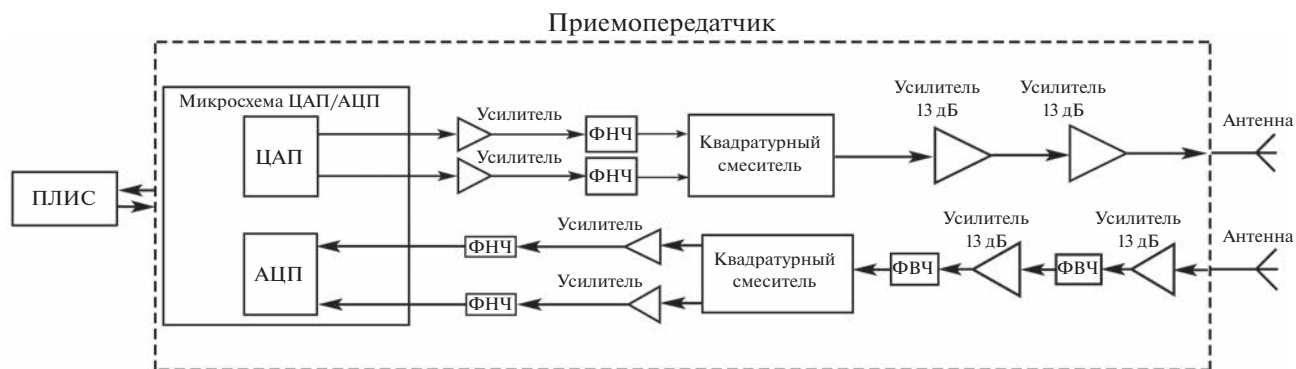


Рис. 1. Блок-схема приемопередатчика.

при выходной мощности не менее +20 дБм. При экспериментальных измерениях ширины полосы радиочастотный выход трансивера подключался ко входу анализатора спектра FSVR40; с командной строки через telnet-клиент задавалась выходная частота трансивера 4 ГГц, выходная мощность 20 дБм. Анализатором спектра с помощью двух маркеров измерялась ширина полосы спектра сигнала по уровню  $-3$  дБ. Полученное значение составило 77 МГц.

Экспериментальное измерение диаграммы направленности цифровой антенной решетки (ЦАР), построенной на трансиверах, проведено на стенде [3], [19], состоящем из ЭВМ, анализатора спектра, приемной антенны, платы с ПЛИС, антенной решетки с топологией  $4 \times 4$  и трансиверов. На рис. 2 представлена полученная диаграмма направленности ЦАР, излучающей три луча в горизонтальной плоскости. На рис. 3 представле-

на измеренная диаграмма направленности ЦАР, излучающей три луча в вертикальной плоскости. Результаты экспериментальных измерений представлены в табл. 1 и 2.

Из рис. 2 видно, что в горизонтальной плоскости при излучении трех лучей коэффициент направленного действия составил 13.1–16.8 дБи, качание лучей осуществлялось в диапазоне углов от  $-45^\circ$  до  $45^\circ$  относительно нормали. Из рис. 3 видно, что в вертикальной плоскости при излучении трех лучей коэффициент направленного действия составил 12.3–16.8 дБи, качание лучей осуществлялось в диапазоне углов от  $-45^\circ$  до  $45^\circ$  относительно нормали. В горизонтальной и вертикальной плоскостях характеристики излучения лучей в направлениях  $45^\circ$  и  $315^\circ$  симметричны относительно нормали; чем больше угол излучения луча, тем больше боковой лепесток. Различие ширины основного лепестка лучей по уровню  $-3$  дБ в

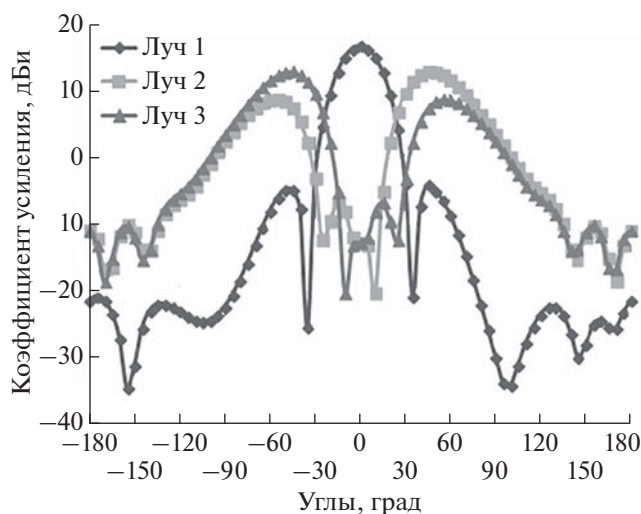


Рис. 2. Диаграмма направленности цифровой антенной решетки, излучающей три луча в горизонтальной плоскости.

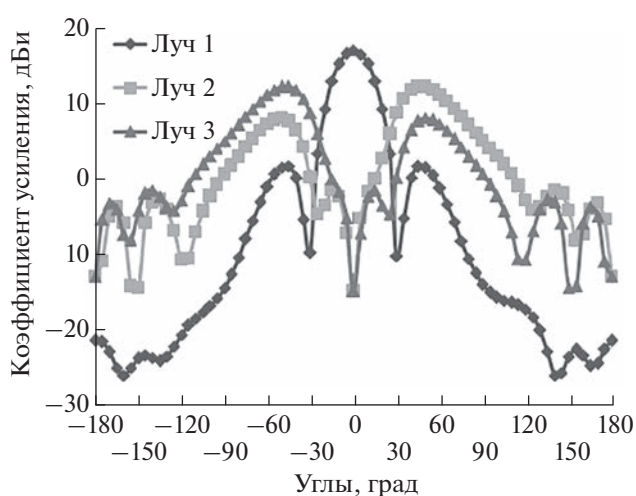


Рис. 3. Диаграмма направленности цифровой антенной решетки, излучающей три луча в вертикальной плоскости.

**Таблица 1.** Результаты экспериментальных измерений многолучевой диаграммы в горизонтальной плоскости

| Луч 1                                           |                                        |
|-------------------------------------------------|----------------------------------------|
| Характеристики излучения                        | Результаты экспериментальных измерений |
| Направление излучения луча, град                | 0                                      |
| Коэффициент направленного действия, дБи         | 16.8                                   |
| Ширина основного лепестка по уровню –3 дБ, град | 26                                     |
| Уровень максимального бокового лепестка, дБ     | –20.7                                  |
| Луч 2                                           |                                        |
| Характеристики излучения                        | Результаты экспериментальных измерений |
| Направление излучения луча, град                | 45                                     |
| Коэффициент направленного действия, дБи         | 13.1                                   |
| Ширина основного лепестка по уровню –3 дБ, град | 37                                     |
| Уровень максимального бокового лепестка, дБ     | –4.2                                   |
| Луч 3                                           |                                        |
| Характеристики излучения                        | Результаты экспериментальных измерений |
| Направление излучения луча, град                | 315                                    |
| Коэффициент направленного действия, дБи         | 13.1                                   |
| Ширина основного лепестка по уровню –3 дБ, град | 36                                     |
| Уровень максимального бокового лепестка, дБ     | –4.4                                   |

**Таблица 2.** Результаты экспериментальных измерений многолучевой диаграммы направленности в вертикальной плоскости

| Луч 1                                           |                                        |
|-------------------------------------------------|----------------------------------------|
| Характеристики излучения                        | Результаты экспериментальных измерений |
| Направление излучения луча, град                | 0                                      |
| Коэффициент направленного действия, дБи         | 16.8                                   |
| Ширина основного лепестка по уровню –3 дБ, град | 26                                     |
| Уровень максимального бокового лепестка, дБ     | –15.3                                  |
| Луч 2                                           |                                        |
| Характеристики излучения                        | Результаты экспериментальных измерений |
| Направление излучения луча, град                | 45                                     |
| Коэффициент направленного действия, дБи         | 12.3                                   |
| Ширина основного лепестка по уровню –3 дБ, град | 39                                     |
| Уровень максимального бокового лепестка, дБ     | –4.2                                   |
| Луч 3                                           |                                        |
| Характеристики излучения                        | Результаты экспериментальных измерений |
| Направление излучения луча, град                | 315                                    |
| Коэффициент направленного действия, дБи         | 12.3                                   |
| Ширина основного лепестка по уровню –3 дБ, град | 39                                     |
| Уровень максимального бокового лепестка, дБ     | –4.5                                   |

горизонтальной и вертикальной плоскостях не превышает 3 градуса.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный трансивер обеспечил формирование сигнала в диапазоне рабочих частот от 2 до 8.5 ГГц для возбуждения элементов ФАР. Сигнал позволяет сформировать многолучевую диаграмму направленности, а также использовать различные виды модуляции лучей. Цифровая схема обеспечивает формирование нескольких лучей в пространстве с независимым управлением направлением каждого из них. Трансивер изготовлен на единой печатной плате и совместим с разработанной многолучевой фазированной антенной решеткой. Цифровая схема формирования лучей позволяет формировать многолучевую диаграмму излучения в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Binqi Yang, Zhiqiang Yu, Ji Lan et al.* // IEEE Transact. Microwave Theory Technique. 2018. V. 66. No. 7. P. 3403.
2. *Shu Sun, Rappaport T.S., Heath R.W. et al.* // IEEE Commun. Magazine. 2014. V. 52. No. 12. P. 110.
3. *Yun Wang, Rui Wu, Jian Pang et al.* // IEEE J. Solid-State Circuits. 2020. V. 55. No. 5. P. 1249.
4. *Biao Long, Dake Liu, Yipeng Sun* // Sensors. 2022. V. 22. No. 3. Art. No. 753.
5. *Tong Wu, Zixiong Wang, Shiyang Han et al.* // Photonics. 2022. V. 9. No. 3. Art. No. 168.
6. *Bodhisatwa Sadhu, Yahya Tousi, Joakim Hallin et al.* // Digest Tech. Papers. IEEE International Solid-State Circuits Conference, 2017. P. 128.
7. *Kibaroglu K., Sayginer M., Rebeiz G.M.* // IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. (IMS), 2017. P. 1892.
8. *Garg R., Natarajan A.S.* // IEEE Transact. Microwave Theory Techniques. 2017. V. 65. No. 11. P. 4703.
9. *Wonil Roh, Ji-Yun Seol, Jeongho Park et al.* // IEEE Commun. Magazine. 2014. V. 52. No. 2. P. 106.
10. *Yungsoo Kim, Hyun-Yong Lee, Jongho Oh et al.* // IEEE J. Select. Top. Signal Process. 2016. V. 10. No. 3. P. 589.
11. *Juha Ala-Laurinaho, Jouko Aurinsalo, Aki Karttunen et al.* // IEEE Trans. Microwave Theory Techniques. 2016. V. 64. No. 7. P. 2244.
12. *Brady J., Hogan J., Sayeed A.* // IEEE Globecom Workshops, 2016. P. 1.
13. *Nafe A., Sayginer M., Kibaroglu K. et al.* // IEEE Transact. Microwave Theory Techniques. 2020. V. 68. No. 9. P. 3872.
14. *Jungwoo Kim, Jae Min Kim, Sangwook Han et al.* // IEEE Radio Freq. Integr. Circuits Symp. (RFIC). 2020. P. 203.
15. *Okada K.* // IEEE Int. Electron Devices Meeting (IEDM), 2020. P. 753.
16. *Park H.-C., Kang D., Lee J. et al.* // IEEE Int. Electron Devices Meeting (IEDM), 2020. P. 355.
17. *Kavya K., Murty V.S.S.C.S., Sujanth Narayan K.G. et al.* // Sixth Int. Conf. Wireless Commun. Signal Process. Network. (WiSPNET), 2021. P. 143.
18. *Kanta K., Toumasis P., Tokas K. et al.* // Appl. Sci. 2022. V. 12. No. 4. Art. No. 2122.
19. *Лу Гомин, Захаров П.Н., Королев А.Ф.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2019. Т. 83. № 1. С. 50; *Lu Guoming, Zakharov P.N., Korolev A.F.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2019. V. 83. No. 1. P. 40.

## Digital phased antenna array transceiver with multibeam radiation pattern

**Lu Guoming<sup>a,\*</sup>, P. N. Zakharov<sup>a</sup>, A. F. Korolev<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Department of Photonics and Microwave Physics, Moscow, 119991 Russia*

*\*e-mail: luguoming.hit@gmail.com*

A transceiver has been designed for the digital generation of a multibeam radiation pattern in this work. The transceiver consists of a transmitter and receiver, both are integrated on a single printed circuit board. The transceiver provides the formation of multiple beams in the far field of the radiation zone. The experimental measurement of the multibeam radiation pattern of a phased antenna array with a digital pattern synthesis was carried out.

УДК 621.385.624

## ДИСПЕРСИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СВЕРХРАЗМЕРНЫХ ЛАМП БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ СУБМИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА

© 2023 г. В. Е. Родякин<sup>1</sup>, \*, В. М. Пикунов<sup>1</sup>, В. Н. Аксенов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем лазерных и информационных технологий РАН – филиал Федерального государственного учреждения “Федеральный научно-исследовательский центр “Кристаллография и фотоника” Российской академии наук”, Шатура, Россия

<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, физический факультет и Международный лазерный центр, Москва, Россия

\*E-mail: vrodyakin@mail.ru

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Исследованы возможности использования сверхразмерных замедляющих систем в лампах бегущей волны субмиллиметрового диапазона. Предложена линейная теория, разработанная для анализа свойств таких замедляющих систем. Приводятся результаты теоретического анализа горячих дисперсионных характеристик сверхразмерных диафрагмированных волноводов на частоты 315 и 800 ГГц.

DOI: 10.31857/S0367676522700120, EDN: JJMNHY

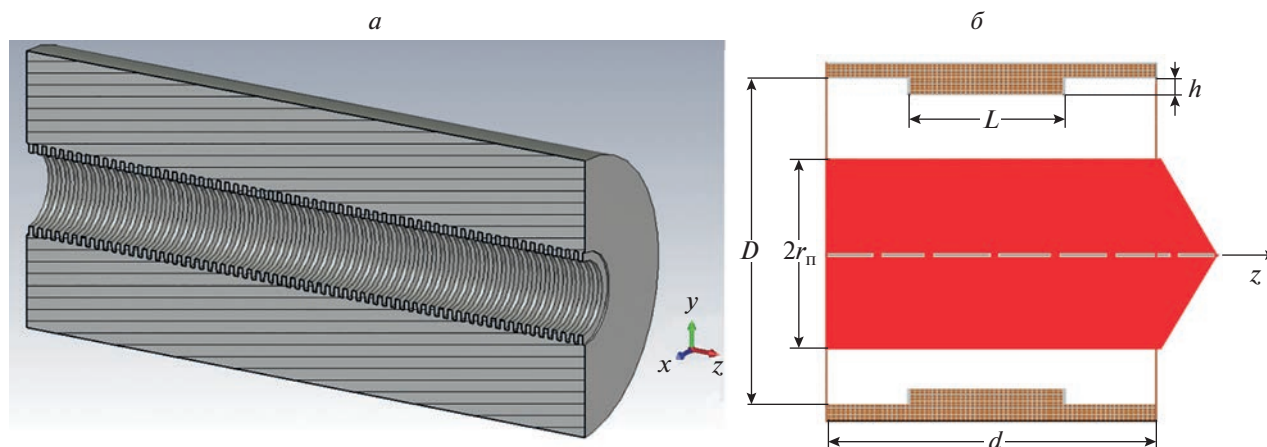
### ВВЕДЕНИЕ

Создание мощных компактных усилителей излучения в субмиллиметровом диапазоне длин волн является актуальной задачей электроники больших мощностей для многих технических приложений. Такие классические электровакуумные усилители СВЧ диапазона, как лампа бегущей волны (ЛБВ) и клистроны с распределенным взаимодействием (КРВ) являются перспективными устройствами при переходе в миллиметровый и субмиллиметровый диапазоны длин волн [1].

Важнейшим параметром, определяющим выходную СВЧ мощность подобных устройств, является величина силы тока транспортируемого электронного пучка, которая ограничивается диаметром пролетного канала. Поперечные размеры пролетных каналов (труб дрейфа) различных микроволновых электронных устройств определяются рабочей длиной волны, типом устройства и характеризуются параметром сверхразмерности  $O_S = D/\lambda$ , где  $D$  – средний диаметр пролетного канала,  $\lambda$  – центр полосы рабочих длин волн. Для обеспечения эффективного взаимодействия электронного потока с электромагнитными полями диаметр пролетных каналов ЛБВ и КРВ, разработанных в субмиллиметровом и в коротковолновой части миллиметрового диапазона, обычно меньше  $\lambda/4$  ( $O_S < 0.25$ ) [2].

В связи с малыми размерами сечения пролетного канала в субмиллиметровом диапазоне электронная пушка должна иметь либо катоды с плотностью тока эмиссии  $j_k \sim 100 \text{ А} \cdot \text{см}^{-2}$  и более, либо достаточно высокую компрессию электронного пучка для получения рабочих токов. При этом в силу предельно малых размеров пролетных каналов в этом диапазоне, плотности токов в пролетных каналах могут достигать  $j_0 > 1 \text{ кА} \cdot \text{см}^{-2}$  [2, 3], характерных для релятивистских электронных пучков сильноточных электронных устройств сантиметрового диапазона. Однако увеличение плотности тока в компактных приборах микроэлектроники миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов в основном ограничивается проблемой их магнитной фокусировки с помощью постоянных магнитов, максимальная индукция которых в настоящее время составляет около 1 Тл [2].

Для увеличения тока и мощности может быть использовано пространственное развитие поперечного сечения пролетных каналов. В сантиметровом диапазоне для этого широко используются многолучевые приборы. Однако продвижение таких конструкций в миллиметровый диапазон ограничивается проблемами формирования и транспортировки отдельных плотных электронных пучков в узком пространстве системы взаимодействия. Поэтому в миллиметровом диапазо-



**Рис. 1.** Конструкция сверхразмерной ЗС в виде диафрагмированного волновода (а). Схема одной ячейки периодической ЗС в виде диафрагмированного волновода со сплошным электронным пучком (красный цвет) (б).

не в настоящее время в ведущих мировых центрах микроэлектроники ведутся активные работы по разработке ЛБВ и КРВ на основе ленточных электронных пучков, обеспечивающих пространственное развитие приборов в одном измерении [3, 4].

При освоении субмиллиметрового диапазона перспективным представляется использование сверхразмерных аксиально-симметричных конструкций ЛБВ, которые позволяют обеспечить пространственное развитие в двух измерениях. Подобная технология широко применяется в сильноточной электронике СВЧ при создании мощных источников импульсного излучения в миллиметровом и сантиметровом диапазоне длин волн [5–8]. Так для многоволновых черенковских устройств на сверхразмерных замедляющих структурах (ЗС) типа ЛБВ и ЛОВ параметр  $O_S \geq 3-4$ , и ограничен вырождением замедленных несимметричных гибридных волн [9]. При больших значениях  $O_S$  существенно обостряется конкуренция мод, что является одной из серьезных проблем, возникающей при создании мощных микроволновых электронных устройств на сверхразмерных ЗС с аксиальной симметрией [10].

Чтобы избежать существенных трудностей с вырождением и конкуренцией высших мод в сверхразмерных ЗС будем рассматривать в качестве перспективной конструкцию ЛБВ с периодическим волноводом в качестве ЗС, имеющей значения параметра  $O_S \sim 1.5-2.5$ . Такая конструкция позволяет использовать электронную селекцию рабочей моды  $E_{01}$  периодического волновода вблизи  $\pi$ -вида.

Увеличение параметра  $O_S$  в 6–10 раз по сравнению с традиционными для КРВ и ЛБВ приводит

к увеличению в десятки раз площади поперечного сечения пролетного канала в сверхразмерных ЛБВ с периодическим волноводом и делает возможным использование электронных пучков с большим диаметром. Это позволяет повысить ток и выходную мощность электровакуумных усилителей в субмиллиметровом диапазоне.

Для исследования возможности использования сверхразмерных периодических волноводов в качестве ЗС компактных ЛБВ в субмиллиметровом диапазоне были разработаны численные алгоритмы линейной теории таких приборов.

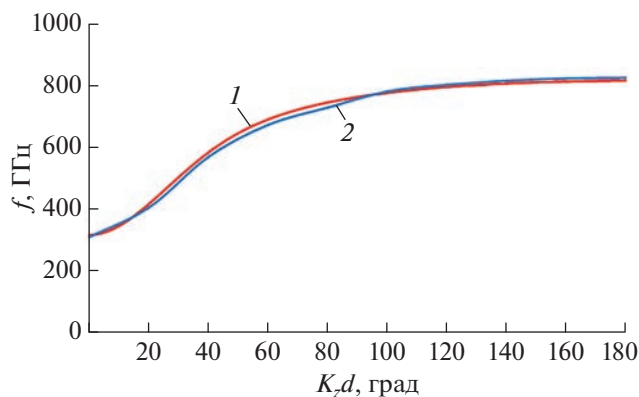
### ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ СВЕРХРАЗМЕРНОЙ ЛБВ

В данной линейной модели рассматривается задача вычисления постоянных распространения аксиально-симметричных электронно-электромагнитных волн, возбуждаемых сплошным или кольцевым электронным пучком в круглом слабо гофрированном волноводе (рис. 1а). Схема одной ячейки периодической ЗС с периодом  $d$  и глубиной неоднородности  $h$  для трапецевидной гофрировки представлены на рис. 1б.

Предполагается, что в области взаимодействия существует достаточно большое магнитное поле, и электроны потока имеют лишь продольную составляющую скорости, а электронный пучок с внешним радиусом  $r_n$  возбуждает только аксиально-симметричные поля  $E$ -типа. Также считается, что потери энергии электронов на излучение при пролете ячейки ЗС малы и справедливы приближения линейной теории.

С учетом сделанных предположений система уравнений в системе МКСА для определения пе-





**Рис. 2.** “Холодная” дисперсионная характеристика сверхразмерного диафрагмированного волновода на 800 ГГц, рассчитанная с помощью разработанного алгоритма (1) и с помощью CST Studio (2).

ременных составляющих физических величин имеет вид:

$$\text{rot} \vec{H} - i\omega \epsilon_0 \vec{E} = \vec{j}, \quad (1.1)$$

$$\text{rot} \vec{E} + i\omega \mu_0 \vec{H} = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{dv_z}{dz} + i \frac{\omega}{v_{0z}} v_z = -\frac{\eta_e}{\gamma_0^3 v_{0z}} E_z, \quad (1.3)$$

$$\frac{dj_z}{dz} + i\omega \rho = 0, \quad (1.4)$$

где:  $\vec{E} = \{E_r, 0, E_z\}$ ,  $\vec{H} = \{0, H_\phi, 0\}$ ,  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  – диэлектрическая и магнитная постоянные;  $\vec{j} = (\rho_0 v + v_0 \rho)$ ,  $\rho$ ,  $j$ ,  $v$  – переменные, а  $\rho_0$ ,  $j_0$ ,  $v_0$  – постоянные составляющие плотности заряда, конвекционного тока и скорости электронного пучка;  $\gamma_0 = 1 + V_0/mc^2$  – релятивистский фактор Лоренца,  $V_0$  – ускоряющий потенциал в области прохождения электронного потока,  $\eta_e = |e|/m$ ,  $e$ ,  $m$  – заряд и масса электрона;  $c$  – скорость света в вакууме;  $\omega = 2\pi f$  – исследуемая круговая частота. Первые два уравнения (1) есть уравнения Максвелла, третье – линеаризованное релятивистское уравнение одномерного движения электронного пучка, четвертое – одномерный закон сохранения заряда в линейном случае. Решение (1) должно удовлетворять следующим граничным условиям:

а) тангенциальная компонента электрического поля во внутренних точках поверхности нерегулярного волновода равна нулю;

б) выполнены условия ограниченности электромагнитных полей на оси нерегулярного волновода;

в) справедливы линейные краевые условия в виде обобщенных условий Флоке.

Для решения системы уравнений (1) с граничными условиями а), б) и в) используется неполный метод Галеркина со вспомогательной функцией [11], который позволяет свести задачу к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) для переменных компонент электромагнитных полей, скорости и плотности тока к жесткой линейной однородной СОДУ с периодическими коэффициентами. Для нахождения искоемых собственных значений комплексной постоянной распространения  $K_z$  используется численный QZ алгоритм.

Разработанные алгоритмы позволяют получать как “холодные” (без пучка), так и “горячие” (с пучком) дисперсионные характеристики сверхразмерных периодических ЗС на основе периодических неоднородных волноводов.

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

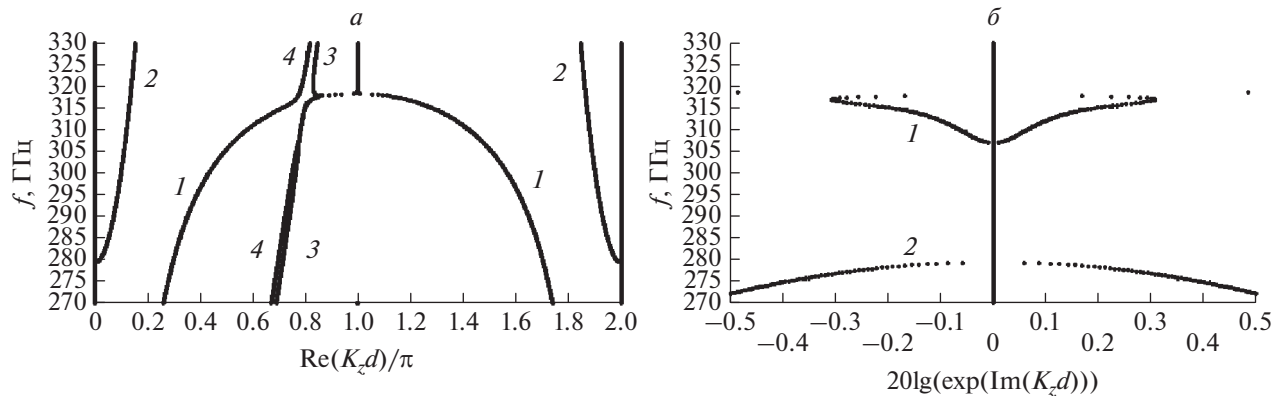
С целью проверки точности разработанного алгоритма было проведено сравнение результатов расчета “холодных” дисперсионных характеристик слабо гофрированных волноводов с результатами, полученными с помощью трехмерного спектрального модуля широко известного комплекса программ CST Studio [12]. Сравнительные результаты расчетов “холодных” дисперсионных характеристик ЗС с трапециевидной гофрировкой на частоту 800 ГГц представлены на рис. 2. Результаты свидетельствуют о хорошей точности разработанных алгоритмов.

С помощью разработанной линейной модели было проведено численное исследование дисперсионных характеристик двух сверхразмерных ЛБВ субмиллиметрового диапазона на 315 и 800 ГГц. Параметры приборов и полученные результаты расчетов приведены в табл. 1. Указанные в таблице значения  $K_1$  и  $K_{100}$  означают полученные в расчетах коэффициенты усиления на одну и 100 ячеек ЛБВ соответственно.

**Таблица 1.** Параметры приборов и результаты расчетов

| $V_0$ , кВ | $I_0$ , А | $r_n$ , мм | $D$ , мм | $h$ , мм | $d$ , мм | $L$ , мм | $f$ , ГГц | $\lambda$ , мм | $O_s$ | $K_1$ , дБ | $K_{100}$ , дБ |
|------------|-----------|------------|----------|----------|----------|----------|-----------|----------------|-------|------------|----------------|
| 20         | 6         | 0.65       | 2        | 0.2      | 0.1      | 0.05     | 315       | 0.95           | 2.10  | 0.3        | 30             |
| 20         | 1         | 0.25       | 0.8      | 0.08     | 0.045    | 0.03     | 800       | 0.37           | 2.16  | 0.2        | 20             |





**Рис. 3.** Реальная (а) и мнимая (б) части дисперсионной диаграммы сверхразмерного волновода на 315 ГГц с трапециевидной гофрировкой (1 –  $E_{01}$ , 2 –  $E_{02}$ , 3 и 4 – медленная и быстрая волны пространственного заряда).

На рис. 3 в качестве примера показаны рассчитанные реальная и мнимая части дисперсионной диаграммы для ЛБВ на 315 ГГц. Реальная часть дисперсионных диаграмм (рис. 3а) определяет набег фазы рассматриваемых волн, а мнимые части (рис. 3б) – величину нарастания (затухания) на периоде ЗС односекционной сверхразмерной ЛБВ. Как видно из рисунка, вблизи  $\pi$ -вида происходит интенсивное взаимодействие рабочей моды  $E_{01}$  с медленной волной пространственного заряда. Искорененный электронный пучок при ускоряющем напряжении 20 кВ имеет среднюю плотность тока около 500 А/см<sup>2</sup>, что позволяет обеспечить его жесткую фокусировку магнитным полем постоянного магнита с индукцией от 0.5 до 1.0 Тл. Полученное значение усиления 0.3 дБ на одну ячейку ЗС позволяет обеспечить коэффициент усиления односекционной ЛБВ 30 дБ при количестве ячеек, равном 100. Общая длина системы взаимодействия такого усилителя составляет всего 1 см.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для создания мощных усилителей СВЧ излучения в субмиллиметровом диапазоне предложено использовать сверхразмерные аксиально-симметричные конструкции ЛБВ со слабо гофрированными ЗС. Для их исследования разработана линейная теория электронно-волнового взаимодействия. Полученные с ее помощью результаты проведенных теоретических исследований подтверждают возможность применения в сверхразмерных компактных ЛБВ электронных потоков с мощностью, в десятки раз превышающую мощность используемых в настоящее время традиционных усилителей в субмиллиметровом диапазоне. Для оценок уровней выходной мощности и КПД предлагаемого нового типа усилителей этого диапазона необходимо проведение дальнейших ис-

следований с помощью нелинейных моделей с учетом высокочастотных потерь в стенках ЗС.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках выполнения работ по государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Srivastava A.* // EJAET. 2015. V. 2. No. 8. P. 54.
2. *Booskee J. H.* // Phys. Plasmas. 2008. V. 15. Art. No. 055502.
3. *Pasour J., Wright E., Nguyen K.T. et al.* // IEEE Trans. Electron. Devices. 2014. V. 61. No. 6. P. 1630.
4. *Field M.* // IEEE Trans. Electron Devices. 2018. V. 65. No. 6. P. 2122.
5. *Бугаев С.П., Канавец В.И., Кошелев В.И., Черепенин В.А.* Релятивистские многоволновые СВЧ генераторы. Новосибирск: Наука, 1991.
6. *Черепенин В.А.* // УФН. 2006. Т. 176. № 10. С. 1124.
7. *Корниенко В.Н., Черепенин В.А.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2018. Т. 82. № 1. С. 52; *Kornienko V.N., Cherepenin V.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2018. V. 82. No. 1. P. 45.
8. *Гинзбург Н.С., Песков Н.Ю., Сергеев А.С. и др.* // Изв. вузов. Прикл. нелин. динамика. 2020. Т. 28. № 6. С. 575.
9. *Пикунов В.М.* // Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та. 2016. № 5. С. 165507.
10. *Дейчули М.П., Кошелев В.И.* // Радиотехн. и электрон. 2013. Т. 58. № 8. С. 829.
11. *Лузянин Д.Б., Пикунов В.М.* // Радиотехн. и электрон. 1991. Т. 37. № 11. С. 144.
12. [www.cst.com](http://www.cst.com).

## **Dispersion characteristics of oversized travelling wave tubes of the submillimeter wave range**

**V. E. Rodyakin<sup>a, \*</sup>, V. M. Pikunov<sup>a</sup>, V. N. Aksenov<sup>b</sup>**

*<sup>a</sup>Institute on Laser and Information Technologies — Branch of the Federal Scientific Research Centre  
“Crystallography and Photonics” of the Russian Academy of Sciences, Shatura, 140700 Russia*

*<sup>b</sup>Lomonosov Moscow State University, Physics Department and International Laser Center, Moscow, 119991 Russia*

*\*e-mail: vrodyakin@mail.ru*

The possibilities of using oversized slow-wave structures in traveling wave tubes of the submillimeter wave range are investigated. A description of a linear theory developed to analyze the properties of such slow-wave structures is given. The results of the theoretical analysis of the hot dispersion characteristics of oversized diaphragm waveguides at frequencies of 315 and 800 GHz are presented.

УДК 537.9:538.935

## РАСЧЕТ ЧИСЛА КАНАЛОВ ПРОВОДИМОСТИ В ОДНОЭЛЕКТРОННОЙ РЕЗЕРВУАРНОЙ СЕТИ НА МЕТАЛЛОРГАНИЧЕСКИХ КАРКАСНЫХ ПОЛИМЕРАХ

© 2023 г. С. А. Панкратов<sup>1, 2, \*</sup>, А. А. Паршинцев<sup>1, 2, 3</sup>, Д. Е. Преснов<sup>1, 2, 4</sup>, В. В. Шорохов<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, физический факультет, Москва, Россия

<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”,  
Центр квантовых технологий, Москва, Россия

<sup>3</sup>Университет Бернардо О’Хиггинс, Сантьяго, Чили

<sup>4</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”,  
Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д.В. Скобельцына, Москва, Россия

\*E-mail: pankratov.sa18@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

С помощью теории функционала плотности получены одночастичные спектры фрагментов одномерной цепочки металлорганического координационного полимера. Рассчитано эффективное сопротивление органического участка звена, характерная кулоновская энергия и емкость зарядового центра. Получена оценка количества каналов проводимости в экспериментально исследуемой резервуарной сети на основе рассматриваемых полимерных цепочек.

DOI: 10.31857/S0367676522700132, EDN: JJOAC

### ВВЕДЕНИЕ

Технологические возможности изготовления базовых функциональных элементов в сверхбольших и производительных современных микросхемах приближаются вплотную к атомарным масштабам. Тем не менее, полные размеры самых миниатюрных простейших функциональных элементов в таких микросхемах все еще составляют десятки нанометров. Дальнейшее увеличение плотности размещения таких элементов потребует перехода к устройствам, в которых базовые функциональными элементами будут состоять из единичных или небольших групп атомов и, по сути, будут являться наноэлектронными устройствами с атомной функциональной структурой. В этой связи особый интерес исследователей представляют атомарные и молекулярные одноэлектронные структуры — наноэлектронные устройства, работающие на новых физических принципах [1]. В таких устройствах перенос заряда осуществляется посредством туннелирования одиночных электронов. Ключевой особенностью таких устройств является наличие сильных кулоновских эффектов, среди которых можно выделить корреляцию туннельного переноса заряда и

кулоновскую блокаду туннельного тока при определенных распределениях дополнительных и поляризационных зарядов на рабочих атомах или молекулах [2, 3].

К устройствам, в которых используется специальным образом созданное распределение молекул на поверхности диэлектрика или примесных атомов в приповерхностном слое полупроводника, относятся одноэлектронные резервуарные вычислительные сети, отличающиеся новыми функциональными свойствами и компактностью. В качестве примеров таких устройств можно привести структуры, описанные в исследованиях [4, 5]. В этих работах представлены одноэлектронные устройства на основе неупорядоченных систем зарядовых центров, состоящих из золотых нанокластеров и примесных атомов бора в кремниевой подложке соответственно. Одноэлектронные резервуарные сети в работах [4, 5] представляют собой локализованные в областях диаметром 100–200 нм системы зарядовых центров, связанных между собой туннельным образом и окруженных системой управляющих наноэлектродов. Количество зарядовых центров в рабочей области таких устройств может составлять от десят-

ков до десятков тысяч штук и зависит от расстояния между электродами и типов используемых центров.

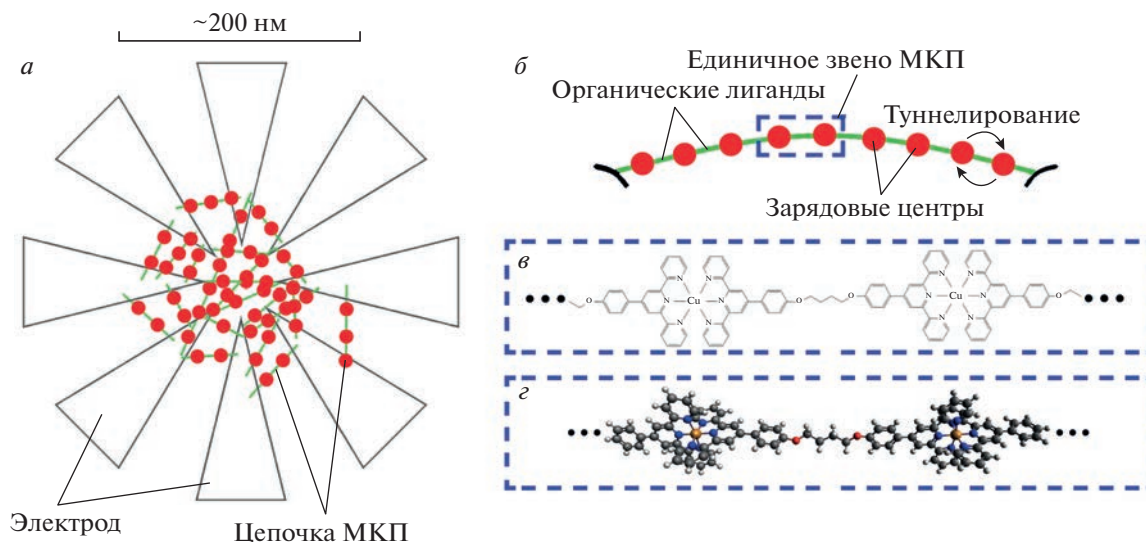
Механизм работы одноэлектронных резервуарных сетей заключается в задании потенциального рельефа в области локализации зарядовых центров с помощью управляющих электродов и управлении наведенными на центры зарядами. Такое управление позволяет активировать различные подгруппы зарядовых центров и зарядовые состояния, открывая одни каналы туннелирования и закрывая другие. Определение величин необходимых потенциалов для реализации той или иной функции резервуарной сети осуществляется методами машинного обучения [4]. Таким образом осуществляется управление одноэлектронным транспортом в этих структурах и их программирование на выполнение различных логических функций.

С одной стороны, сверхкомпактная одноэлектронная резервуарная сеть — универсальный многоконтактный динамический перестраиваемый аналоговый элемент. На его основе можно создавать динамически перестраиваемые элементы двоичной и троичной логики [4], перестраиваемые нелинейные аналоговые функциональные элементы, а также сенсоры заряда и электрического поля. С другой стороны, такие одноэлектронные резервуарные сети могут быть использованы в качестве нейросетей [6], для распознавания образов или моделирования мозговой активности, где использование традиционной электроники или программных аналогов затруднительно и дорого [5]. Однако в данных устройствах активная внутренняя структура зарядовых центров сильно неупорядочена, что негативно сказывается на предсказуемости и повторяемости внутренних транспортных процессов и функциональных свойств системы.

Возможной реализацией одноэлектронных резервуарных сетей с упорядоченной структурой зарядовых центров является использование металлоорганических каркасных полимеров (англ. metal-organic frameworks, MOF, МКП) [7]. Это пористые кристаллические материалы, в которых ионы металлов или иные полиядерные неорганические кластеры связаны между собой органическими молекулами, называемыми лигандами. Связь между органической и неорганической составляющими осуществляется за счет донации и акцепции электронов атомами и называется координационной [8]. Использование металлоорганических каркасных полимеров позволяет в перспективе создавать сверхкомпактные наноэлектронные резервуарные сети с одномерными, двумерными и трехмерным упорядоченным расположением зарядовых центров, что необходимо для получения стабильных характеристик в будущих

устройствах с атомной функциональной структурой. Кроме того, МКП обладает рядом свойств, которые могут быть полезны для исследователей в области наноэлектроники [9]. МКП могут быть синтезированы на рабочих поверхностях с помощью самосборки, что может упростить технологию изготовления устройств на их основе. Широкий выбор лигандов и металлических центров позволяет подобрать полимер с нужными свойствами, структурой и размерностью для конкретной задачи [7]. Кроме того, МКП являются модифицируемыми и могут обратимо менять свои свойства под внешним воздействием.

Металлоорганические каркасные полимеры уже активно используются в качестве активных структур во множестве устройств. Например, в работах [10, 11] был продемонстрирован одноатомный одноэлектронный транзистор на основе одного звена МКП с металлическими центрами на ионах кобальта и родия, отделенными от управляющих электродов непроводящими лигандами. С помощью затвора авторы могли управлять одноэлектронным током в системе при температурах вплоть до комнатных, а посредством выбора лиганда и металлического центра — варьировать характеристики устройства. Также МКП могут быть использованы для построения двух- и трехмерных систем молекулярных кубитов [12, 13]. Существует большое количество хорошо отработанных способов осаждения МКП, что позволяет синтезировать исследуемую систему практически на любой подложке [14]. Благодаря упорядоченной и настраиваемой структуре МКП оказывается возможным управление количеством кубитов и дистанцией между ними. Некоторые полимеры обладают высокими временами спин-решеточной релаксации даже при комнатной температуре [14], что задает более высокий предел для времени когерентности кубита, определяющего стабильность его состояния и количество ошибок при работе с ним. Кроме того, пористость материала позволяет молекулам анализируемых веществ попадать внутрь полимера, что может быть использовано для детектирования биохимических агентов с помощью кубитов [15]. МКП также успешно применяются в сцинтилляторных детекторах непрямого обнаружения [16] и детекторах излучения [17]. Немаловажным является то, что МКП могут быть также использованы в качестве активных элементов сенсорных устройств. Эти полимеры могут проявлять отклик на внешние воздействия, такие как изменение температуры, давления, электромагнитного поля или химического окружения [9]. Например, в работе [18] представлен электронный сенсор на основе протеиновых нанопроводов, модифицированных молекулами-аттракторами и объединенных в большой массив. Конструкция сенсора позволяет заменить нанопровод на одномерную цепочку МКП, что мо-



**Рис. 1.** Схема исследуемой одноэлектронной резервуарной сети на основе МКП (вид сверху) (а). Треугольниками обозначены нанoeлектроды, размещенные на непроводящей твердотельной подложке. Зелеными линиями с красными кружками — МКП, красные кружки — зарядовые центры на ионах меди с лигандами терпиридина. Схематическое изображение полимерной цепочки с обозначениями ее составных частей (б). Структурная формула звена МКП (в). Трехмерное изображение звена МКП (г).

жет улучшить характеристики устройства [9]. Металлорганические координационные полимеры имеют практически неограниченный потенциал для модификации благодаря своей вариативности, что может расширить круг детектируемых веществ одним сенсором [7].

По предварительным оценкам применение МКП как активного компонента одноэлектронной резервуарной сети позволит довести рабочую температуру вплоть до комнатной. При этом механизм функционирования устройства значительно не изменится: металлические центры МКП будут образовывать сеть изолированных одноатомных зарядовых центров, между которыми будут туннелировать носители заряда. Однако малые размеры и, следовательно, малые емкости зарядовых центров должны обеспечить большие изменения зарядовых энергий при туннелировании электронов

$$\Delta E = \frac{e^2}{2C}, \quad (1)$$

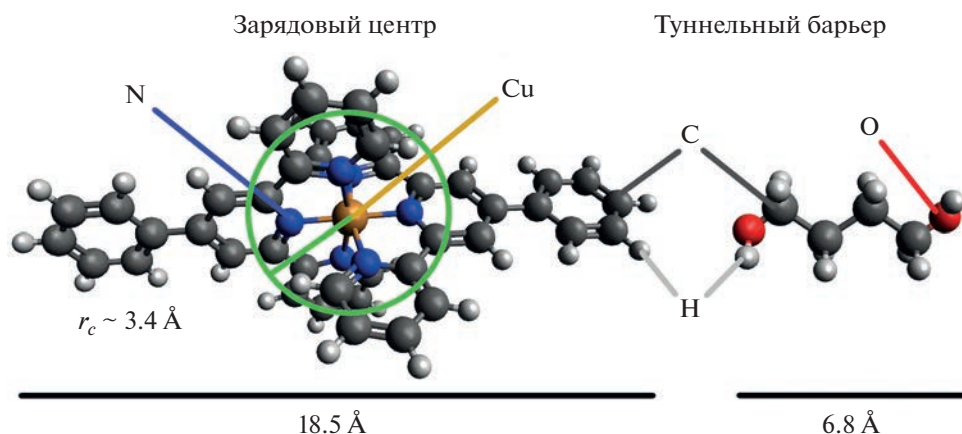
где  $C$  — собственная эффективная электрическая емкость зарядового центра [19],  $e$  — заряд электрона. Это должно обеспечить малость тепловых флуктуаций с энергией  $k_B T$ , где  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура, наблюдаемость одноэлектронных эффектов и стабильную работу устройства даже при комнатной температуре.

Проведено теоретическое изучение проводящих свойств металлорганического одномерного координационного полимера, замыкающего си-

стему управляющих нанoeлектродов в резервуарной одноэлектронной сети. Рассмотрен одномерный МКП, в котором в качестве органического лиганда, соединяющего два выделенных зарядовых центра — атома меди(II), является терпиридин (см. рис. 1б). Одномерный МКП был выбран в качестве первоначального объекта исследования, как более простое химическое соединение для изготовления и расчета его модельных свойств.

## МЕТОД РАСЧЕТА

Теоретически рассматриваемая в данной работе одноэлектронная резервуарная сеть на основе МКП представлена схематично на рис. 1а [20]. На систему расположенных по кругу золотых нанoeлектродов, минимальное расстояние между которыми составляет 40 нм, осаждаются одномерные МКП, представленные зелеными линиями с красными кружками. Красными кружками схематично обозначены зарядовые центры — атомы меди, окруженные лигандной оболочкой (терпиридин). На рисунке число зарядовых центров не соответствует реальной системе, поскольку даже в самом коротком МКП, соединяющем соседние электроды, число зарядовых центров — атомов меди 15 и более. Структурная формула одного звена МКП с двумя зарядовыми центрами представлена на рис. 1в. Такие звенья, соединяясь последовательно, образуют структуру одномерного МКП, представляя собой один проводящий канал. Поскольку в реальном эксперименте одно-



**Рис. 2.** Составные части исследуемого МКП: зарядовый центр на ионе меди с лигандами терпиридина (слева) и эффективный туннельный барьер, образуемый бутан-содержащим участком МКП (справа) с указанием химических элементов и характерных размеров.

мерные МКП осаждаются на нанoeлектроды случайным образом, часть осажденных молекул может и не замыкать нанoeлектроды, будучи прикрепленными только одним концом к ним. Сопротивление, измеряемое на каждой паре электродов, обратно пропорционально числу каналов МКП, замыкающих их, и определяется сопротивлением каждого канала, которое, в свою очередь, определяется числом звеньев в каждом канале МКП и прозрачностью туннельного барьера в каждом звене [21]

$$\frac{1}{R_{ij}} = \sum_{\alpha} \frac{1}{R_{ij,\alpha}} = \sum_{\alpha} \frac{1}{n_{ij,\alpha} r} = \tau G_0 \sum_{\alpha} \frac{1}{n_{ij,\alpha}}, \quad (2)$$

где  $R_{ij}$  — сопротивление измеряемое между электродами  $i$  и  $j$ ;  $N_{ij}$  — число МКП, замыкающих электроды  $i$  и  $j$ ;  $R_{ij,\alpha}$  — сопротивление одного канала МКП;  $n_{ij,\alpha}$  — число звеньев к каналу с индексом  $\alpha$ , соединяющем электроды  $i$  и  $j$ ;  $\tau$  — прозрачность туннельного барьера между двумя соседними зарядовыми центрами МКП;  $G_0 = e^2/h$  — квант проводимости. Выражение (2) показывает, что основной вклад в электропроводность между парой электродов  $i$  и  $j$  дают каналы, замыкающие их и имеющие наименьшее число  $n_{ij,\alpha}$ . В предположении, что каналы МКП имеют примерно одинаковую минимальную длину, выражение (2) может быть записано в приближенной форме

$$\frac{1}{R_{ij}} \approx \tau G_0 \frac{N_{ij}}{\langle n_{ij,\alpha} \rangle}, \quad (3)$$

где  $\langle n_{ij,\alpha} \rangle$  — среднее число звеньев в МКП. Выражение (3) может быть использовано для оценки числа каналов, замыкающих каждую пару электродов, если известна величина прозрачности

туннельного барьера между соседними зарядовыми центрами  $\tau$ . Точное значение коэффициента прозрачности туннельного барьера между соседними зарядовыми центрами может быть рассчитано методом матрицы переноса [22]. Для приближенной оценки может быть использована формула для прямоугольного потенциального барьера с эквивалентной площадью:

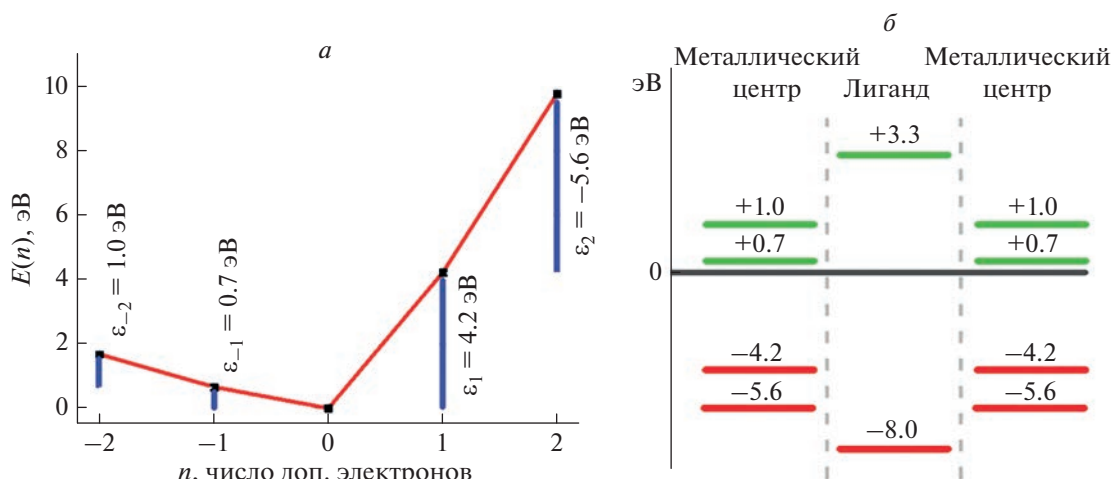
$$\tau \approx 1 / \left( 1 + \frac{U_0^2 \sin^2(h^2 \kappa a)}{4E(U_0 E)} \right), \quad (4)$$

$$\sqrt{2mU_0}a = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U(x) - E)} dx,$$

где  $U_0$  и  $a$  — высота и ширина эквивалентного прямоугольного туннельного барьера,  $E$  и  $m$  — энергия и масса туннелирующего электрона,  $\kappa = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$  — подбарьерный коэффициент затухания,  $U(x)$  — распределение эффективного потенциала между соседними зарядовыми центрами. Это распределение вычисляется по данным о распределении электронной плотности, положениям и зарядам ядер, которые могут быть вычислены с помощью квантово-химических пакетов.

Для вычисления сопротивления одного канала МКП в этой работе использовался подход, основанный на формуле (3). На первом этапе рассматривался участок МКП, состоящий из двух зарядовых центров меди. Каждый зарядовый центр — координационное соединение иона меди, окруженное двумя лигандами терпиридина с молекулами бензола (рис. 2). Полная структура молекулы изображена на рис. 1в и 1г. Она образуется двумя зарядовыми центрами, соединенными через атомы кислорода с бутаном. Для задания атомной струк-





**Рис. 3.** Зависимости полной энергии фрагмента МКП с зарядовым центром меди от зарядового состояния  $n$ . Синими отрезками показаны разности полной энергии, соответствующие потенциалам ионизации и поясняющие расчет электронного одночастичного спектра (а). Хартри–Фока-подобный электронный одночастичный энергетический спектр участков МКП, полученный методом ТФП (б). Красным цветом изображены занятые уровни, а зеленым — незанятые.

туры этого участка МКП использовались сведения из базы данных рентгеноструктурного анализа Кембриджского центра кристаллографии (The Cambridge Crystallographic Data Centre, CCDC). Для определения электрического сопротивления этого участка МКП он был разделен на два фрагмента — зарядовый центр, состоящий из проводящих бензольных колец, терпиридина и атома меди, и непроводящий — бутан-содержащий участок с присоединенными атомами кислорода, который выступает в качестве туннельного барьера. В этой работе эффективный потенциальный барьер был определен геометрическим образом по непроводящему участку (бутан и атомы кислорода) между зарядовыми центрами. Отсутствие возможности делокализации на этом участке определяется наличием только одинарных ковалентных химических связей и соответствующим одночастичным электронным спектром.

Для каждого такого фрагмента звена МКП программным комплексом NWChem [23] нами были вычислены электронные одночастичные энергетические спектры с помощью метода теории функционала плотности (ТФП). Для этих целей значение полной энергии  $E(n)$  для ряда зарядовых состояний  $n = -3 \dots +3$ , где  $n > 0$  — недостаток электронов, а  $n < 0$  — избыток электронов во фрагменте. В расчетах ТФП использовался функционал B3LYP и атомный базис 6-31G для всех атомов фрагментов. Согласно теореме Купманса [24],  $i$ -ый потенциал ионизации фрагмента, который также является химическим потенциалом в соответствующем зарядовом состоянии, может быть определен как

$$I_n = \mu_n = E(n) - E(n-1). \quad (5)$$

Значения  $I_n$  для отрицательных  $n$  определяют сродство к электрону:

$$A_{-n+1} = I_n, \quad \text{для } n \leq 0. \quad (6)$$

Согласно теореме Купманса, если за уровень отсчета энергии принять континуум, то положение  $i$ -го одночастичного уровня в спектре может быть представлено как

$$\varepsilon_i = -I_i. \quad (7)$$

Если фрагмент молекулы находится в состоянии с наименьшей мультиплетностью, то одночастичный электронный энергетический уровень  $\varepsilon_1$  одновременно является верхним заполненным одночастичным электронным состоянием  $\varepsilon_1 = \varepsilon_{\text{НОМО}}$ . Энергетический уровень  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\text{ЛУМО}}$  соответствует нижнему незаполненному энергетическому состоянию. Значение эффективной емкости в зарядовом состоянии  $n$  определяется как [19]

$$C_n = \frac{e^2}{\mu_{n+1} - \mu_n} = \frac{e^2}{E_{n+1} + E_{n-1} - 2E_n}. \quad (8)$$

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассчитанные значения полной энергии фрагментов звена МКП с зарядовым центром представлены на рис. 3а. На этом рисунке можно видеть, что точки зависимости  $E(n)$  имеют характерный перегиб в точке  $n = 0$ , что связано с тем, что два верхних заполненных одночастичных валентных энергетических уровня фрагмента с зарядовым центром связаны с локализованными состояниями на ионе меди. Незанятые уровни соответствуют лигандной оболочке. Рассчитанные



одночастичные электронные энергетические спектры молекулярного фрагмента зарядового центра и туннельного барьера представлены на рис. 3б. Положение верхнего занятого энергетического уровня фрагмента с зарядовым центром относительно континуума  $\epsilon_{\text{НОМО}} = -4.2$  эВ. Представленный вид электронного одночастичного спектра фрагмента с зарядовым центром относительно одночастичного электронного спектра непроводящего фрагмента позволяет оценить высоту эффективного потенциального барьера для электрона, туннелирующего с одного иона меди на другой. Из представленного спектра видно, что у непроводящего фрагмента нет близлежащих одночастичных состояний вблизи уровня  $\epsilon_{\text{НОМО}}$ . Нижний заполненный уровень этого фрагмента  $\epsilon_{\text{НОМО}}^{\text{ТБ}} = -8$  эВ, верхний незаполненный уровень  $\epsilon_{\text{ЛУМО}}^{\text{ТБ}} = +3$  эВ, поэтому наиболее вероятным механизмом переноса заряда будет туннелирование электрона через туннельный барьер высотой  $U_0 \sim 4.2$  эВ, определенный непроводящим лигандом без локализации (“посещения”) на промежуточных одночастичных состояниях.

Используя выражение (4), известные значения высоты  $U_0 \approx 4.2$  эВ и ширины туннельного барьера  $a \approx 3.9$  нм, которая приблизительно равна длине непроводящего фрагмента МКП, можно оценить прозрачность звена МКП. Сделанная нами оценка для проницаемости эффективного туннельного барьера составила  $\tau = 6 \cdot 10^{-3}$ . Эффективное сопротивление одного звена МКП по формуле (3) составляет  $R_0 \approx 4.3$  МОм, что говорит о том, что сопротивление между двумя зарядовыми центрами с очень хорошим запасом соответствует условию малости квантовых флуктуаций заряда для возможности одноэлектронного туннелирования [25].

Для вычисления собственной эффективной емкости зарядового центра на ионе меди воспользуемся выражением (1) и полученным хартри-фока-подобным энергетическим спектром зарядового центра (рис. 3б). Величина щели НОМО-ЛУМО для фрагмента МКП с зарядовым центром составляет  $E_C = \epsilon_{\text{ЛУМО}} - \epsilon_{\text{НОМО}} \approx 4.9$  эВ позволяет оценить эффективную емкость зарядового центра и радиус локализации дополнительного электрона  $C \approx 3.8 \cdot 10^{-20}$  Ф и  $r_C = C/4\pi\epsilon_0 = e^2/4\pi\epsilon_0 E_C \approx 3.4$  Å соответственно. Указанная оценка радиуса локализации  $r_C$  сделана для проводящей сферы, имеющей электрическую емкость равную эффективной емкости зарядового центра. Для сравнения на рис. 2 на фрагмент МКП с металлическим зарядовым центром наложен круг радиуса 3.4 Å.

Полученное выражение кулоновской энергии более чем на два порядка превышает среднюю

энергию тепловых флуктуаций при комнатной температуре

$$E_C \approx 4.9 \text{ эВ} \gg k_B T \approx 26 \text{ мэВ} \quad (9)$$

и, следовательно, гарантированно удовлетворяет условию малости тепловых флуктуаций и обеспечивает существование кулоновских эффектов в таких системах при такой температуре [25].

Кроме того, на основе результатов полученных расчетов нами была проведена оценка величины туннельного матричного элемента, который фигурирует в выражении для золотого правила Ферми [22] для темпов туннелирования

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} |T|^2 \delta(E_f - E_i - \Delta F), \quad (10)$$

где  $\Gamma$  — темп туннелирования,  $E_i$  и  $E_f$  — энергия начального и конечного состояния туннелирующего электрона,  $\Delta F$  — изменение свободной энергии системы в процессе туннелирования. Определить  $\Gamma$  в этом выражении можно на основе оценки частоты движения электрона в области с характерным размером порядка радиуса локализации дополнительного электрона  $r_C$  на зарядовом центре и прозрачности туннельного барьера

$$\Gamma \sim \nu \tau. \quad (11)$$

Оценку на частоту обращения нерелятивистского электрона можно сделать на основе энергии размерного квантования в яме с размером  $2r_C$ :

$$\nu = \frac{\hbar}{4mr_C^2} \approx 2.5 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}. \quad (12)$$

Оценка на темп туннелирования при такой частоте обращения:

$$\Gamma \sim \nu \tau \approx 1.5 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}. \quad (13)$$

Окончательно величину туннельного матричного элемента можно определить как

$$|\tilde{T}| \sim \hbar \Gamma \approx 1 \text{ мэВ}. \quad (14)$$

Полученная оценка позволяет определить, насколько уширены валентные уровни в металлическом зарядовом центре из-за квантовых флуктуаций заряда. Можно заметить, что  $|\tilde{T}| \ll k_B T$  при комнатной температуре, следовательно, основной вклад в уширение валентных энергетических уровней зарядового центра будут вносить тепловые флуктуации.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученное сопротивление одного звена МКП  $R_0 = 4.3$  МОм позволяет определить сопротивление всей цепочки МКП. Для цепочки минимальной длины, соединяющей соседние нанoeлектроды  $i$  и  $j$  и состоящей из 15 звеньев, это со-

противление составляет  $R_{ij} = 64.5$  МОм. Цепочка МКП, которая может замкнуть дальние электроды резервуарной сети и может содержать 80 и более звеньев, обладает сопротивлением  $R_{ij} \geq 344$  МОм. Исходя из размера и межэлектродного сопротивления, измеренного в эксперименте с одноэлектронной резервуарной сетью, с опорой на теоретическое значение одного звена МКП был произведен расчет возможного числа каналов проводимости (количество проводящих цепочек). Количество каналов проводимости в рассматриваемой системе (см. рис. 1) с длиной 45 нм составило 4 штуки, а для 100 нм — 10 штук соответственно.

Наблюдаемость одноэлектронных эффектов в системе на основе координационного соединения, в котором в качестве органического лиганда выступает сложное соединение терпиридина, бензола, кислорода и бутана, а в качестве металлических центров — ионы меди, при комнатной температуре подтверждается экспериментально [20]. Проведенные нами в этой работе расчеты подтверждают эту возможность теоретически.

Таким образом, в данной работе с помощью метода теории функционала плотности были получены одночастичные спектры фрагментов соединения на основе терпиридина с двумя выделенными одноатомными зарядовыми центрами. Были исследованы свойства проводимости этого соединения: рассчитана прозрачность эффективного туннельного барьера, обусловленного непроводящим бутан-содержащим участком. Для одного звена МКП было определено электрическое сопротивление и на его основе сделана оценка сопротивления цепочек МКП разной длины. Для зарядового центра на основе атома меди было получено значение эффективной емкости и радиуса локализации дополнительного электрона на нем. Теоретически предсказана наблюдаемость одноэлектронных эффектов в системе на основе рассматриваемого соединения при комнатной температуре. Для многоэлектродной наноэлектронной системы, замкнутой группой одномерных цепочек МКП, состоящих из исследуемых соединений-звеньев, были получены оценки количества проводящих цепочек разных длин.

Данное исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета “Фотонные и квантовые технологии. Цифровая медицина”. В работе использовалось оборудование Учебно-методического центра литографии и микроскопии МГУ им. М.В. Ломоносова. Авторы благодарят д.х.н. профессора Белоглазкину Е.К. и д.ф.-м.н. Крупенина В.А. за консультации и полезное обсуждение этой работы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Likharev K.K.* // Proc. IEEE. 1999. V. 87. No. 4. P. 606.
2. *Gubin S.P., Gulayev Y.V., Khomutov G.B. et al.* // Nanotechnology. 2002. V. 13. No. 2. P. 185.
3. *Shorokhov V.V., Presnov D.E., Amitonov S.V. et al.* // Nanoscale. 2017. V. 9. No. 2. P. 613.
4. *Bose S.K., Lawrence C.P., Liu Z. et al.* // Nature Nanotechnol. 2015. V. 10. No. 12. P. 1048.
5. *Chen T., Gelder J., Ven B. et al.* // Nature. 2020. V. 577. No. 7790. P. 341.
6. *Грибачев В.* // Комп. технол. 2006. № 61. P. 100.
7. *Cheetham A.K., Rao C.N.R., Feller R.K.* // Chem. Commun. 2006. No. 46. P. 4780.
8. *Beloglazkina E.K., Barskaya E.S., Majouga A.G. et al.* // Mendelev Commun. 2015. V. 2. No. 25. P. 148.
9. *Allendorf M.D., Schwartzberg A., Stavila V. et al.* // Chem. Eur. J. 2011. V. 17. No. 41. P. 11372.
10. *Liang W., Shores M.P., Bockrath M. et al.* // Nature. 2002. V. 417. No. 6890. P. 725.
11. *Морозова Е.К., Лялина А.М., Санков И.В. и др.* // Инфокомм. и радиоэлектрон. технол. 2019. Т. 2. № 2. С. 204.
12. *Urtizberea A., Natividad E. Alonso P.J. et al.* // Adv. Funct. Mater. 2018. V. 28. No. 31. Art. No. 1801695.
13. *Zadrozny J.M., Gallagher A.T., Harris T.D. et al.* // J. Amer. Chem. Soc. 2017. V. 139. No. 20. P. 7089.
14. *Yamabayashi T., Atzori M., Tesi L. et al.* // J. Amer. Chem. Soc. 2018. V. 140. No. 38. Art. No. 12090.
15. *Degen C.L., Reinhard F., Cappellaro P.* // Rev. Mod. Phys. 2017. V. 89. No. 3. Art. No. 035002.
16. *Doty F.P., Bauer C.A., Skulan A.J. et al.* // Adv. Mater. 2009. V. 21. No. 1. P. 95.
17. *Wang Y., Liu X., Li X. et al.* // J. Amer. Chem. Soc. 2019. V. 141. No. 20. P. 8030.
18. *Fuller C.W., Padayatti P.S., Abderrahim H. et al.* // Proc. National Acad. Sci. USA. 2022. V. 119. No. 5. Art. No. e2112812119.
19. *Шорохов В.В., Солдатов Е.С., Губин С.П.* // Радиотехн. и электрон. 2011. Т. 56. № 3. С. 352.
20. *Pankratov S.A., Bozhev I.V., Shorokhov V.V. et al.* // Proc. ICMNE-2021 (Moscow, 2021). Art. No. O1-03-13.
21. *Landauer R.* // IBM J. Res. Dev. 1957. V. 1. No. 3. P. 223.
22. *Burstein E., Lundqvist S.* Tunneling phenomena in solids. N.Y.: Plenum Press, 1967. P. 427.
23. *Apra E., Bylaska E.J., Jong W.A. et al.* // J. Chem. Phys. 2020. V. 152. No. 18. Art. No. 184102.
24. *Politzer P., Abu-Awwad F.* // Theor. Chem. Acc. 1998. V. 99. No. 2. P. 83.
25. *Averin D.V., Likharev K.K.* // J. Low Temp. Phys. 1986. V. 62. No. 3. P. 345.

## Calculation of the number of conduction channels in a single-electron reservoir network on metal-organic framework polymers

S. A. Pankratov<sup>a, b, \*</sup>, A. A. Parshintsev<sup>a, b, c</sup>, D. E. Presnov<sup>a, b, d</sup>, V. V. Shorokhov<sup>a, b</sup>

<sup>a</sup>*Lomonosov Moscow State University, Physics Faculty, Moscow, 119991 Russia*

<sup>b</sup>*Lomonosov Moscow State University, Quantum Technology Centre, Moscow, 119991 Russia*

<sup>c</sup>*Bernardo O'Higgins University, Santiago, 8370993 Chile*

<sup>d</sup>*Lomonosov Moscow State University, Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Moscow, 119991 Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: pankratov.sa18@physics.msu.ru*

Single-particle energy spectra of one-dimensional metal-organic framework chain's fragments were obtained with the density functional theory method. An effective resistance of an organic part of the polymer, coulomb energy and effective capacitance of a charge center were calculated. The number of conductive channels in an experimentally studied reservoir network based on the observed polymer chains was estimated.

УДК 519.24:534.8:681.884

## ВОССТАНОВЛЕНИЕ СТРУКТУРЫ ОБЪЕКТА С ПОМОЩЬЮ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ОБРАБОТКИ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ АКТИВНЫХ ШУМОВЫХ ИСТОЧНИКОВ

© 2023 г. К. В. Дмитриев\*

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, физический факультет, Москва, Россия

\*E-mail: kdmtrie@lanat.ru

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Предложен итерационный алгоритм для восстановления акустических характеристик неоднородной среды на основе значений матриц когерентности, полученных при нескольких ракурсах облучения с использованием шумовых сигналов. Моделирование показывают хорошее качество и быструю сходимость получаемых оценок.

DOI: 10.31857/S0367676522700144, EDN: JSCWBG

Методы определения внутренней структуры и параметров упругой неоднородной среды по данным измерений акустического поля представляют большой интерес. “Классическая” постановка задачи акустической томографии состоит в облучении исследуемого объекта заданными полями с разных ракурсов и в приеме рассеянных сигналов с последующей их обработкой. Таким методам посвящена обширная литература, например, [1–4]. В последнее время получили развитие подходы, в которых акустическое поле создается естественными или антропогенными источниками шумового типа. Например, в гидроакустике [5, 6] такие источники могут быть связаны с судходством или с естественными шумами моря; в геоакустике [7] — с микросейсмами; в медицинской термотомографии [3, 8] — с тепловым акустическим шумом среды и полями дополнительной “подсветки”. При этом алгоритмы обработки регистрируемых шумовых сигналов используют в качестве входных данных статистические характеристики этих сигналов, например, матрицу когерентности, в отличие от алгоритмов “классической” томографии, обычно основанных на обработке фазы и амплитуды.

В настоящей работе предлагается метод корреляционной обработки сигналов в томографической схеме с использованием шумовых зондирующих сигналов. Пусть исследуемая неоднородность занимает конечную область пространства  $\mathfrak{R}$ , вне которой находится однородная непоглощающая среда со скоростью звука  $c_0$ . Внутри  $\mathfrak{R}$

фазовая скорость звука и амплитудный коэффициент поглощения равны  $c(\vec{z})$  и  $\alpha(\vec{z})$ , соответственно. Кроме этого, внутри  $\mathfrak{R}$  присутствуют неизвестные некоррелированные случайные источники поля  $F(\vec{z})$ .

Томографическая схема содержит  $N$  элементов малого размера, расположенных в точках  $\vec{z}_i \in \mathfrak{R}$ . Каждый из элементов последовательно выступает в роли источника сигнала, в то время как остальные — в роли приемников. Это обеспечивает  $N$  ракурсов томографирования. Еще один (нулевой) “ракурс” реализуется, когда ни один из элементов не излучает, и все они регистрируют только поля источников  $F(\vec{z})$ . При заданной геометрии возможны два режима работы такой томографической схемы. Первый режим, монохроматический, предполагает использование гармонических зондирующих сигналов с частотой  $\omega$ . На всех приемниках регистрируется поле акустического давления  $p^{(n)}(\vec{z})$  при каждом  $n$ -м ракурсе излучения. Во втором режиме, шумовом, излучаются случайные узкополосные сигналы со средней частотой  $\omega$ , и регистрируются значения функции когерентности поля  $\Gamma^{(n)}(\vec{z}_i; \vec{z}_j) = \langle p^{(n)}(\vec{z}_i) \{p^{(n)}(\vec{z}_j)\}^* \rangle$  для каждой пары приемников  $(i; j)$ . Здесь символ  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по реализациям, а звездочкой обозначено комплексное сопряжение. Временная зависимость полей в каждом из режимов выбирается в виде  $\sim \exp(-i\omega t)$  и для краткости здесь и далее опускается.

Для описания волновых процессов в среде вводится запаздывающая функция Грина  $G(\vec{z}; \vec{z}')$ . Она удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда на бесконечности и уравнению Гельмгольца

$$\nabla_{\vec{z}}^2 G(\vec{z}; \vec{z}') + k^2(\vec{z})G(\vec{z}; \vec{z}') = \delta(\vec{z} - \vec{z}'), \quad (1)$$

где  $k^2(\vec{z}) = \omega^2/c^2(\vec{z}) + 2i\omega\alpha(\vec{z})/c(\vec{z})$  — квадрат волнового числа  $k(\vec{z})$ . При  $n$ -м ракурсе излучения источники поля представлены суммой  $F(\vec{z}) + F^{(n)}\delta(\vec{z}_n - \vec{z})$  неизвестных случайных источников  $F(\vec{z})$  и текущего зондирующего источника  $F^{(n)}\delta(\vec{z}_n - \vec{z})$ . Для нулевого ракурса при этом полагается  $F^{(0)} = 0$ . Тогда поле акустического давления в каждом из случаев равно

$$p^{(n)}(\vec{z}) = \int_{\mathfrak{R}} G(\vec{z}; \vec{z}') F(\vec{z}') d\vec{z}' + F^{(n)} G(\vec{z}; \vec{z}_n). \quad (2)$$

Функция когерентности принимает вид

$$\Gamma^{(n)}(\vec{z}_i; \vec{z}_j) = \int_{\mathfrak{R}} G(\vec{z}_i; \vec{z}) G^*(\vec{z}_j; \vec{z}) I(\vec{z}) d\vec{z} + G(\vec{z}_i; \vec{z}_n) G^*(\vec{z}_j; \vec{z}_n) I^{(n)}; \quad i, j = \overline{1, N}; \quad i, j \neq n,$$

где учтено, что все источники некоррелированные, и введены их плотность мощности и мощность, соответственно:  $\langle F(\vec{z}) F^*(\vec{z}') \rangle = I(\vec{z}) \delta(\vec{z} - \vec{z}')$  и  $\langle F^{(n)} \{ F^{(n)} \}^* \rangle = I^{(n)}$ .

В монохроматическом режиме работы первое слагаемое в (2) является помехой, а второе — полезным сигналом. Поэтому целесообразно выбирать частоту  $\omega$  и мощность  $I^{(n)}$  так, чтобы второе слагаемое преобладало. Тогда при известных амплитудах  $F^{(n)}$  вычисляются значения  $G(\vec{z}_i; \vec{z}_n)$  функций Грина, где  $i = \overline{1, N}; i \neq n$ . В шумовом режиме работы при известных мощностях  $I^{(n)}$  вычисляются значения

$$Q^{(n)}(\vec{z}_i; \vec{z}_j) = \{ \Gamma^{(n)}(\vec{z}_i; \vec{z}_j) - \Gamma^{(0)}(\vec{z}_i; \vec{z}_j) \} / I^{(n)} = G(\vec{z}_i; \vec{z}_n) G^*(\vec{z}_j; \vec{z}_n), \quad (3)$$

где  $i, j = \overline{1, N}; i, j \neq n$ . Величины  $G(\vec{z}_i; \vec{z}_n)$  и  $Q^{(n)}(\vec{z}_i; \vec{z}_j)$  не зависят от источников  $F(\vec{z})$  и служат входными данными для одного из возможных алгоритмов решения обратной задачи рассеяния. В рамках этой задачи определяется  $k(\vec{z})$ , а значит, и функция Грина  $G(\vec{z}; \vec{z}')$  для всех значений своих аргументов. Восстановление  $F(\vec{z})$  при известной функции Грина  $G(\vec{z}; \vec{z}')$  — обратная задача излучения, которая является некорректной, и ее решение не единственно [1–3]. Эта задача не рассматривается в настоящей работе.

Если предположить, что область  $\mathfrak{R}$  заполнена фоновой средой с известным волновым числом  $k_{bg}(\vec{z})$  (нижний индекс “bg” — сокращение от

“background”, т.е. “фоновый”), то акустические поля будут определяться запаздывающей функцией Грина  $G_{bg}(\vec{z}; \vec{z}')$  для этой среды. Такая функция Грина удовлетворяет уравнению (1), в котором следует положить  $k_{bg}(\vec{z})$  вместо  $k(\vec{z})$ . Для описания различия между исследуемой средой и фоновой средой вводится функция рассеивателя  $\epsilon_{bg}(\vec{z}) = k_{bg}^2(\vec{z}) - k^2(\vec{z})$ . Тогда для функций Грина этих двух сред справедливо уравнение Липпмана–Швингера [1–3]:

$$G_{sc}(\vec{z}; \vec{z}') \equiv G(\vec{z}; \vec{z}') - G_{bg}(\vec{z}; \vec{z}') = \int_{\mathfrak{R}} G_{bg}(\vec{z}; \vec{z}'' ) \epsilon_{bg}(\vec{z}'') G(\vec{z}''; \vec{z}') d\vec{z}''. \quad (4)$$

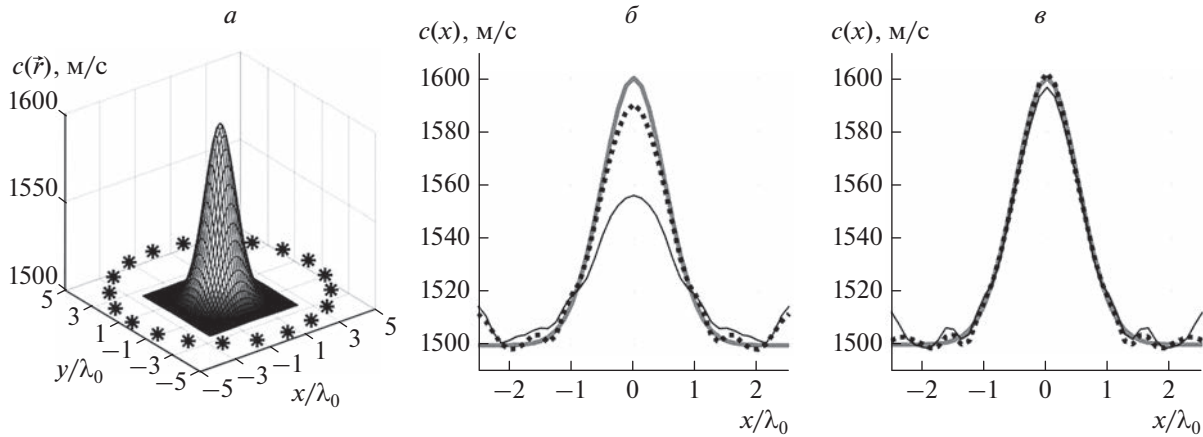
Здесь  $G_{sc}(\vec{z}; \vec{z}')$  — функция, определяющая рассеянное поле. В частном случае, когда фоновая среда однородная и занимает все пространство, т.е.  $k_{bg}(\vec{z}) = k_0 \equiv \omega/c_0$ , ее функция Грина известна аналитически и равна  $G_{bg}(\vec{z}; \vec{z}') = G_0(\vec{z}; \vec{z}')$ . Для функции рассеивателя, вычисляемой относительно такой среды, вводится обозначение без нижнего индекса “bg”:  $\epsilon(\vec{z}) = k_0^2 - k^2(\vec{z})$ .

Решение уравнение (4) относительно  $\epsilon_{bg}(\vec{z})$  — трудная задача, поскольку в правую его часть наряду с неизвестной функцией  $\epsilon_{bg}(\vec{z})$  входит неизвестная функция Грина неоднородной среды  $G(\vec{z}; \vec{z}')$ . Для слабых рассеивателей (для них везде выполнено  $G_{sc}(\vec{z}; \vec{z}') \ll G_{bg}(\vec{z}; \vec{z}')$ ) в правой части (4) можно заменить  $G(\vec{z}; \vec{z}')$  на  $G_{bg}(\vec{z}; \vec{z}')$  (борновское приближение). Тогда это уравнение упрощается и может быть решено численно путем дискретизации и сведения его к системе линейных уравнений. Для рассеивателей средней силы (для них везде выполнено  $G_{sc}(\vec{z}; \vec{z}') < G_{bg}(\vec{z}; \vec{z}')$ ) борновского приближения недостаточно, но можно применить итерационную процедуру [1, 4]. Она состоит в следующем:

1. На нулевой итерации ( $m = 0$ ) фоновая среда полагается однородной с волновым числом, равным  $k_0$ , и задается априорная оценка рассеивателя  $\epsilon_0(\vec{z}) = k_0^2(\vec{z}) - k_{apriori}^2(\vec{z})$ . Если такой информации нет, то полагается  $\epsilon_0(\vec{z}) = 0$ .

2. Пусть в результате предыдущей,  $(m - 1)$ -й, итерации была получена оценка рассеивателя  $\epsilon_{m-1}(\vec{z})$ . Тогда на первом шаге  $m$ -й итерации решается прямая задача рассеяния и находится функция Грина среды  $G_m(\vec{z}; \vec{z}')$ . С этой целью можно, например, воспользоваться уравнением (4), где произведены замены функций Грина  $G(\vec{z}; \vec{z}')$  на  $G_m(\vec{z}; \vec{z}')$ ;  $G_{bg}(\vec{z}; \vec{z}')$  на  $G_0(\vec{z}; \vec{z}')$  и функции  $\epsilon_{bg}(\vec{z}'')$  на  $\epsilon_{m-1}(\vec{z}'')$ :

$$G_m(\vec{z}; \vec{z}') = G_0(\vec{z}; \vec{z}') + \int_{\mathfrak{R}} G_0(\vec{z}; \vec{z}'') \epsilon_{m-1}(\vec{z}'') G_m(\vec{z}''; \vec{z}') d\vec{z}''.$$



**Рис. 1.** Моделируемая зависимость скорости звука  $c(\vec{r})$  от координат внутри неоднородности – рассеивателя средней силы; звездочками условно обозначены позиции элементов томографической схемы (а). Значения скорости звука на прямой  $y = 0$  для моделируемой зависимости и для результатов ее восстановления после  $m = 10$  итераций (б) и после  $m = 100$  итераций (в). Тонкая черная сплошная линия соответствует результатам восстановления в монохроматическом режиме; толстая черная пунктирная линия – в шумовом режиме. Толстая серая линия соответствует исходной неоднородности.

3. На втором шаге  $m$ -й итерации среда, заданная функцией рассеивателя  $\epsilon_{m-1}(\vec{z})$ , считается фоновой. Тогда уравнение (4) в борновском приближении имеет вид

$$G(\vec{z}_i; \vec{z}_n) - G_m(\vec{z}_i; \vec{z}_n) = \int_{\mathcal{R}} G_m(\vec{z}_i; \vec{z}) \epsilon_{bg}(\vec{z}) G_m(\vec{z}; \vec{z}_n) d\vec{z}, \quad (5)$$

где вместо произвольных точек  $\vec{z}$  и  $\vec{z}'$  указаны координаты  $\vec{z}_i$  и  $\vec{z}_n$  элементов томографической схемы. Значения функции Грина  $G(\vec{z}_i; \vec{z}_n)$  считаются заданными, поэтому такое уравнение решается относительно  $\epsilon_{bg}(\vec{z})$ , и делается новая оценка  $\epsilon_m(\vec{z}) = \epsilon_{m-1}(\vec{z}) + \epsilon_{bg}(\vec{z})$ .

Наконец, если рассеиватель сильный (в некоторых точках  $G_{sc}(\vec{z}; \vec{z}') > G_0(\vec{z}; \vec{z}')$ ), его восстановление представляет наибольшую сложность, и описанная процедура может не приводить к верному решению задачи.

В шумовом режиме работы величины  $G(\vec{z}_i; \vec{z}_n)$  неизвестны. Поэтому нужно модифицировать третий шаг описанного итерационного алгоритма. Для этого выполняется подстановка (4) в (3) и получается

$$\begin{aligned} Q^{(n)}(\vec{z}_i; \vec{z}_j) - G_{bg}(\vec{z}_i; \vec{z}_n) G_{bg}^*(\vec{z}_j; \vec{z}_n) = \\ = G_{bg}(\vec{z}_i; \vec{z}_n) \int_{\mathcal{R}} G_{bg}^*(\vec{z}_j; \vec{z}') \epsilon_{bg}^*(\vec{z}') G^*(\vec{z}'; \vec{z}_n) d\vec{z}' + \\ + G_{bg}^*(\vec{z}_j; \vec{z}_n) \int_{\mathcal{R}} G_{bg}(\vec{z}_i; \vec{z}') \epsilon_{bg}(\vec{z}') G(\vec{z}'; \vec{z}_n) d\vec{z}' + \\ + \iint_{\mathcal{R}} \epsilon_{bg}(\vec{z}') \epsilon_{bg}^*(\vec{z}'') G_{bg}(\vec{z}_i; \vec{z}') G_{bg}^*(\vec{z}_j; \vec{z}'') \times \\ \times G(\vec{z}'; \vec{z}_n) G^*(\vec{z}'', \vec{z}_n) d\vec{z}' d\vec{z}'' . \end{aligned}$$

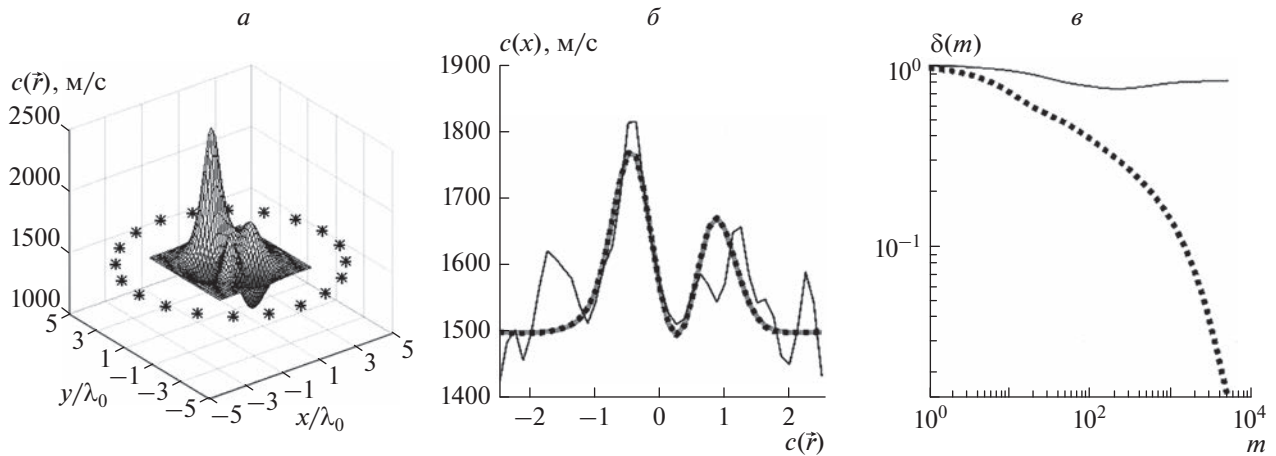
Это уравнение сходно с уравнением Липпмана–Швингера (4), но содержит квадратичный относительно  $\epsilon_{bg}(\vec{z})$  член в правой части. Считая  $\epsilon_{bg}(\vec{z})$  малым и ограничиваясь в правой части только слагаемыми, линейными по  $\epsilon_{bg}(\vec{z})$ , можно записать

$$\begin{aligned} Q^{(n)}(\vec{z}_i; \vec{z}_j) - G_m(\vec{z}_i; \vec{z}_n) G_m^*(\vec{z}_j; \vec{z}_n) = \\ = G_m(\vec{z}_i; \vec{z}_n) \int_{\mathcal{R}} G_m^*(\vec{z}_j; \vec{z}') \epsilon_{bg}^*(\vec{z}') G_m^*(\vec{z}'; \vec{z}_n) d\vec{z}' + \\ + G_m^*(\vec{z}_j; \vec{z}_n) \int_{\mathcal{R}} G_m(\vec{z}_i; \vec{z}') \epsilon_{bg}(\vec{z}') G_m(\vec{z}'; \vec{z}_n) d\vec{z}' . \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнение (6) можно использовать вместо уравнения (5) в модифицированном алгоритме, который пригоден для обработки данных в шумовом режиме.

В качестве иллюстрации, проводилось численное моделирование процесса восстановления для неоднородностей скорости звука в шумовом и, для сравнения, в монохроматическом режимах. Томографическая схема состояла из  $N = 20$  элементов, которые располагались вокруг неоднородности равномерно по окружности радиусом  $R = 5\lambda_0$ , где  $\lambda_0 = 2\pi c_0/\omega$  – длина волны в фоновой среде. Шаг дискретизации при моделировании полагался равным  $\lambda_0/8$ .

В первом случае моделируемая двумерная неоднородность задавалась функцией  $c(\vec{r})$ , которая представлена на рис. 1а и имеет радиально-симметричную гауссову форму. Для такой неоднородности численно рассчитанная величина  $|G_{sc}(\vec{z}; \vec{z}')/G_{bg}(\vec{z}; \vec{z}')|$  достигает максимального зна-



**Рис. 2.** Моделируемая зависимость скорости звука  $c(\vec{r})$  от координат внутри неоднородности — сильного рассеивателя; звездочками условно обозначены позиции элементов томографической схемы (а). Значения скорости звука, на прямой  $y = x$  для моделируемой зависимости и для результатов ее восстановления (б). Зависимость относительной погрешности восстановления неоднородности от номера итерации (в). Тонкая черная сплошная линия соответствует результатам восстановления в монохроматическом режиме; толстая черная пунктирная линия — в шумовом режиме. Толстая серая линия соответствует исходной неоднородности и практически совпадает с толстой черной пунктирной линией (б).

чения  $\approx 0.65 < 1$ , и поэтому она относится к классу рассеивателей средней силы. На рис. 1б и 1в представлены результаты ее восстановления в каждом из режимов после  $m = 10$  и  $m = 100$  итераций, соответственно. Можно видеть, что при большом  $m$  итерационный процесс в итоге сходится к искомой зависимости в каждом из случаев, но скорость сходимости для шумового режима значительно выше.

Во втором случае моделируемая зависимость  $c(\vec{r})$  представлена на рис. 2а. Такая неоднородность относится к классу сложных для восстановления сильных рассеивателей, поскольку для нее рассчитанная величина  $|G_{sc}(\vec{z}; \vec{z}') / G_{bg}(\vec{z}; \vec{z}')|$  превышает  $\approx 1.9 > 1$ . На рис. 2б представлены результаты восстановления, полученные после  $m = 5000$  итераций в каждом из режимов, а на рис. 2в изображены зависимости относительной погрешности восстановления  $\delta(m)$ , которые вычисляются для каждой  $m$ -й итерации как  $\delta(m) = \|\epsilon_m(\vec{r}) - \epsilon(\vec{r})\| / \|\epsilon(\vec{r})\|$ .

Можно видеть, что, результат, полученный при обработке данных в шумовом режиме, сходится к моделируемой зависимости, и  $\delta(m)$  стремится к нулю с увеличением  $m$  (рис. 2б и 2в). В монохроматическом режиме результат итераций сильно отличается от моделируемой зависимости. Однако проверка показывает, что он удовлетворяет уравнению (4). Это иллюстрирует неединственность решения уравнения (4) при небольшом  $N$ . Можно предположить, что нахождение истинного решения при шумовом режиме обусловлено большим объемом данных,

который равен в этом случае  $N^2(N-1)/2 \sim N^3$ , в то время как при монохроматическом режиме — только  $N(N-1)/2 \sim N^2$ . Потенциально данное обстоятельство может дать шумовому режиму преимущество. Однако этот вопрос требует отдельного изучения, особенно в отношении наличия линейных зависимостей между компонентами  $Q^{(n)}(\vec{z}_i; \vec{z}_j)$ .

При моделировании исследовалось влияние помех в исходных данных. Эти помехи вводились в виде нормально распределенной случайной добавки к функциям Грина  $G(\vec{z}_i; \vec{z}_n)$  со стандартным отклонением в 1–2% от среднего значения  $G(\vec{z}_i; \vec{z}_n)$ , вычисленного по всем элементам антенной решетки. Такая добавка существенно ухудшает результат восстановления, как в монохроматическом, так и в шумовом режимах, что является проявлением неустойчивости решения обратной задачи при восстановлении сильных рассеивателей. С учетом наличия помехи результат восстановления в шумовом режиме по-прежнему оказался лучше, чем результат восстановления в монохроматическом режиме.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Москвы (проект № 21-32-70003).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горюнов А.А., Сасковец А.В. Обратные задачи рассеяния в акустике. М.: Изд-во МГУ, 1989.



2. *Devaney A.J.* Mathematical foundations of imaging, tomography and wavefield inversion. Cambridge, N.Y.: Cambridge Univ. Press, 2012.
3. *Буров В.А., Румянцева О.Д.* Обратные волновые задачи акустической томографии. Ч. 1. Обратные задачи излучения в акустике. М.: ЛЕНАНД, 2020.
4. *Буров В.А., Румянцева О.Д.* Обратные волновые задачи акустической томографии. Ч. 2. Обратные задачи акустического рассеяния. М.: ЛЕНАНД, 2020.
5. *Буров В.А., Сергеев С.Н., Шуруп А.С.* // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 1. С. 51.
6. *Тихоцкий С.А., Преснов Д.А., Собисевич А.Л., Шуруп А.С.* // Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 1. С. 107.
7. *Жостков Р.А., Преснов Д.А., Шуруп А.С., Собисевич А.Л.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2017. Т. 81. №. 1. С. 72; *Zhostkov R.A., Presnov D.A., Shurup A.S., Sobisevich A.L.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2017. V. 81. No. 2. P. 64.
8. *Буров В.А., Дмитриев К.В., Румянцева О.Д.* // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 5. С. 591.

## Object structure reconstruction using correlation processing of the acoustic field of active noise sources

**K. V. Dmitriev\***

*Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia*

*\*e-mail: kdmtrie@lanat.ru*

The iterative algorithm is proposed for reconstructing the acoustic characteristics of an inhomogeneous medium based on the values of the coherence matrices obtained at several exposure angles using noise signals. Numerical simulations show good quality and fast convergence of the resulting estimates.

УДК 534.6.08

## ОСОБЕННОСТИ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ ВИЗУАЛИЗАЦИИ СЛОИСТЫХ ОБЪЕКТОВ

© 2023 г. Ю. С. Петронюк<sup>1, 2, \*</sup>, С. А. Титов<sup>2</sup>, А. Н. Богаченков<sup>1</sup>, В. М. Левин<sup>1</sup>, И. Г. Григорьева<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки “Институт биохимической физики имени Н.М. Эмануэля Российской академии наук”, Москва, Россия

<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки “Научно-исследовательский центр уникального приборостроения Российской академии наук”, Москва, Россия

<sup>3</sup>Общество с ограниченной ответственностью “Оптиграф”, Берлин, Германия

\*E-mail: jps7@mail.ru

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Методами импульсной акустической микроскопии (100–200 МГц) исследованы слои пиролитического графита на стеклянной подложке толщиной (40 мкм), сравнимой с длиной волны зондирующего звука. Проанализирован механизм естественного усиления акустического контраста при визуализации структур такого типа. Интерпретация изображений неоднородной структуры контакта слоя с подложкой подкреплена количественной оценкой акустических импедансов.

DOI: 10.31857/S0367676522700156, EDN: JSHCMF

### ВВЕДЕНИЕ

В современных технологиях широко применяются функциональные покрытия, многослойные системы и композитные структуры. В частности, в аэрокосмической отрасли для повышения эксплуатационных характеристик используются армированные ламинаты, в микроэлектронике миниатюризация изделий осуществляется за счет многослойных технологий. Функционирование этих устройств зависит не только от свойств материала слоев, но также от качества адгезии между ними. В этой связи существует очевидная потребность в неразрушающих методах контроля качества контакта, определения его межслоевой прочности [1, 2]. Одним из таких методов является акустическая визуализация высокого разрешения [3–7], которая уже достаточно давно применяется и развивается в качестве безопасного и информативного инструмента для изучения структуры и упругих свойств новых материалов [8], для неразрушающего контроля качества контакта на межслоевых границах [9]. Длина волны зондирующего ультразвука в современных системах визуализации варьируется в диапазоне от нескольких микрон (1 ГГц) до нескольких сотен микрон (25 МГц), что позволяет наблюдать и исследовать структуру толстых пленок и объемных покрытий (>10 мкм) [10]. В открытом доступе есть работы по изучению алмазоподобных [11] и полимерных покрытий микронной толщины [12]. Высокочастотный

фокусированный звук как гигагерцового, так мегагерцового диапазона по необходимости применяется в микроэлектронике для контроля качества многослойных изделий, контактов и сварных соединений [13, 14]. Акустическая микроскопия медленно расширяет свой инструментарий [15–17], в том числе одним из самых интересных направлений является наблюдение биологических тканей *in situ* [18] и культур клеток на подложке [19]. Нужно отметить, что волновые процессы, возникающие в слое, неразрывно связаны со структурными особенностями материала, его упругими свойствами, геометрическими параметрами, а также с условиями на его границах. В этой связи формирование контраста в процессе акустической визуализации требует комплексного рассмотрения механизмов контраста и корректной интерпретации изображений.

В данной работе рассмотрен один из эффективных механизмов формирования акустического контраста, обусловленного многократным преотражением ультразвукового импульса в слое в условиях, близких к резонансным, при существенном различии акустических импедансов смежных сред на границах слоя. Показано, что при наличии таких условий обеспечивается возможность оценивать качество контакта в различных областях области соединения, обнаруживать и визуализировать отслоения в слоистых структу-

рах, толщина слоев в которых даже меньше длины волны зондирующего звука.

### ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ

В акустических системах визуализации высокого разрешения применяются высокочастотные импульсы фокусированного ультразвука (от 25 МГц и выше). Для послойной объемной визуализации применяются короткие импульсы — один-два периода колебаний на основной частоте, чтобы максимально эффективно разделять эхосигналы по времени задержки и, таким образом, отображать отдельные слои в объеме [7]. Фокусировка ультразвукового зондирующего пучка (половина апертурного угла) в таких системах, как правило, не превышает  $15^\circ$ . Такой подход обеспечивает существенную длину фокальной перетяжки и волновой фронт зондирующего излучения, близкий к плоскому внутри фокальной области [16, 20]. Узкая угловая апертура позволяет также свести к минимуму возможность возбуждения поверхностных упругих волн [21]. Таким образом, в условиях малой угловой апертуры в изотропном образце (слое) возбуждаются продольные упругие волны, которые распространяются вдоль нормали к поверхности.

Модель принимаемого акустической линзой сигнала может быть представлена в виде последовательности эквидистантно задержанных и ослабленных импульсных откликов измерительной системы  $p_n(t)$ :

$$s(t) = A \left[ h_0 p_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} h_n p_n \left( t - n \frac{2d}{C_L} \right) \exp(-\alpha n 2d) \right], \quad (1)$$

где  $A$  — приемопередаточная характеристика измерительной системы,  $2d/C_L$  — время двойного прохождения волны через слой толщиной  $d$  со скоростью продольного звука  $C_L$ ,  $h_n$  — амплитудный коэффициент, обусловленный последовательным переотражением зондирующего сигнала из слоя при его  $n$ -ом переотражении и равный:

$$h_0 = R_{12}; \quad h_n = T_{12} T_{21} R_{23} (R_{21} R_{23})^n, \quad (2)$$

где  $T_{12}$ ,  $T_{21}$  — коэффициенты прохождения волны через верхнюю границу слоя,  $R_{12}$  — амплитудный коэффициент отражения волны, падающей из иммерсии на переднюю границу слоя,  $R_{21}$  и  $R_{23}$  — коэффициенты отражения волн, падающих из слоя на верхнюю и нижнюю границы, соответственно, а индексы 1, 2, 3 относятся к иммерсионной среде (воде), слою и подложке, соответственно;  $\alpha$  — коэффициент затухания в материале исследуемого слоя.

В том случае, когда  $\alpha d \ll 1$ , т.е. потери за счет поглощения оказываются пренебрежимо малы-

ми, а также для слоев, толщина которых сравнима с длиной волны зондирующего ультразвука, отношение амплитуд импульсов, возникающих при многократном последовательном отражении упругих волн в слое, спадает в соответствии с выражением (1) по экспоненциальному закону  $\gamma^n = (R_{21} R_{23})^n$  и в значительной степени определяется потерями ультразвуковой энергии на границах слоя. Такая ситуация особенно характерна для слоев с идеальной кристаллической структурой, как в рассматриваемом случае с высокорентрированным графитом. Акустическое поглощение этого материала в ходе измерений его упругих свойств [22, 23] оказалось незначительным, что подтверждается при наблюдении эффектов фоновой фокусировки методами акустической микроскопии [24, 25]. В этих экспериментах в широком диапазоне частот от 50–200 МГц и до 1 ГГц наблюдались эффекты множественной реверберации коротких зондирующих импульсов в пластинках толщиной до 10 мм. Амплитуда эхосигналов уменьшалась по мере возрастания порядкового номера эхоимпульса в соответствии с расчетными данными для акустических потерь за счет переизлучения сигнала в иммерсионную жидкость.

При определенной толщине взаимодействие упругих волн в слое приводит к возникновению резонанса:

$$2d = m\lambda = mC_L/f, \quad (3)$$

где  $m$  — целое число,  $\lambda$  — длина волны упругой волны в слое,  $f$  — частота упругих колебаний. В этом случае, при максимальном коэффициенте  $\gamma$  возникают условия для естественного усиления контраста на акустических изображениях.

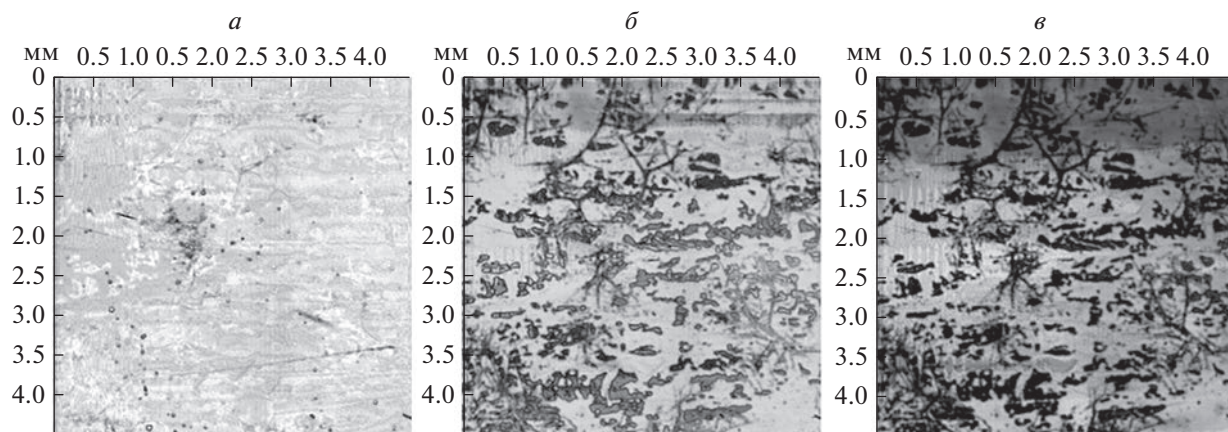
Коэффициенты отражения  $R_{21}$ ,  $R_{23}$  выражаются через акустические импедансы смежных сред  $Z$  по известной формуле [26]:

$$R_{21} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_2 + Z_1}; \quad R_{23} = \frac{Z_3 - Z_2}{Z_2 + Z_3}. \quad (4)$$

Их величина критически зависит от наличия пустот на границе смежных слоев.

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ

Для экспериментального наблюдения эффектов реверберации упругих волн в тонком слое использовался образец графитовой пленки толщиной 40 мкм на оптически полированной стеклянной подложке (N-BK7, Laser Components GmbH). Высокоориентированный пиролитический графит (high-oriented pyrolytic graphite, HOPG) представляет собой высококачественный синтетический тип углерода, который уже более двух десятилетий успешно используется для изготовления различной дисперсионной рентгеновской опти-



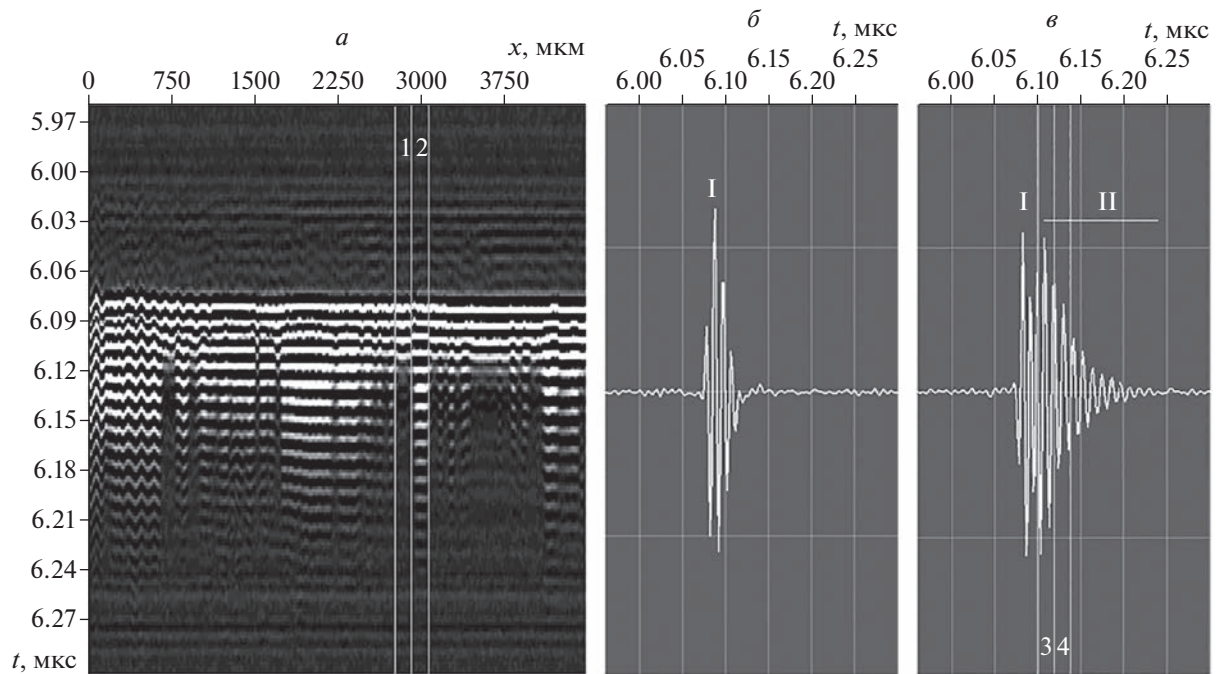
**Рис. 1.** Акустические изображения пленки пиролитического графита толщиной 40 мкм на стеклянной подложке: *а* — поверхность, *б* и *в* — изображение границы слоя с подложкой при разном положении электронных ворот по глубине: 6.10–6.12 и 6.12–6.14 мкс, соответственно (цифры 3 и 4 на рис. 2в).

ки [27]. Пленка представляла собой мозаичный кристалл, который состоит из множества отдельных слабо разориентированных совершенных кристаллитов. Характеризация кристаллов НОРГ выполнялась с помощью высокоточной рентгеновской дифракционной установки, дифрактометра (Huber Diffraktionstechnik GmbH & Co.), позволяющих обнаруживать возможные неоднородности и измерять соответствующие параметры кристалла, такие как пиковая и интегральная отражательная способность, мозаичный разброс и толщина [28]. Ось симметрии в графите была ориентирована вдоль толщины слоя. В этом направлении поверхность медленностей продольных объемных волн в графите имеет плоский участок [24]. Такая форма поверхности обратных скоростей приводит к тому, что все наклонные компоненты ультразвукового пучка, падающего из жидкости на поверхность пленки, в пределах угловой апертуры после преломления на верхней границе слоя распространяются в виде коллимированного пучка.

Для акустической визуализации высокого разрешения использовался метод импульсной акустической микроскопии [7]. В эксперименте применялся иммерсионный акустический объектив с номинальной частотой 200 МГц и апертурным углом  $11^\circ$ . В качестве иммерсии использовалась капля дистиллированной воды. С помощью акустического микроскопа, разработанного в ИБХФ РАН, были сформированы акустические изображения структуры образцов площадью  $5 \times 5 \text{ мм}^2$  и шагом сканирования 15 мкм (рис. 1). Для формирования изображений на различной глубине использовались электронные ворота, которые позволяют выделить часть эхосигнала с нужной временной задержкой и отображать его амплитуду внутри площади сканирования грациями серо-

го цвета — чем более светлый тон, тем большая величина коэффициента отражения. Таким образом, акустическое изображение границ раздела образца представляет собой распределение коэффициента отражения и прохождения зондирующего звука внутри площади сканирования. На рис. 1а электронные ворота установлены в интервале времен задержки 6.07–6.09 мкс на первом максимуме сигнала, что соответствует поверхности графитовой пленки, структура которой выглядит довольно однородной. На двух других изображениях (рис. 1б и 1в) показана граница контакта пленки с подложкой. Электронные ворота в этом случае установлены на второй и третий максимумы эхосигнала, первое и второе отражение от границы раздела пленки с подложкой, которые находятся в интервалах 6.10–6.12 и 6.12–6.14 мкс, соответственно (цифры 3, 4 на рис. 2в). Естественный контраст изображений отличается и, как это ни странно, становится ярче для импульса с меньшей амплитудой и большей задержкой (рис. 1в). Такой эффект наблюдается, потому что локальные области с коэффициентом отражения  $R_{23}$  близким к 1 (контакт с воздухом) соседствуют с областями, где реверберация отсутствует (контакт со стеклом).

На рис. 2а приведена временная развертка эхо-сигналов вдоль поперечного сечения образца (В-скан). Вертикальная шкала изображения соответствует времени задержки импульсов, отраженных от границ графитового слоя. На изображении цифрами отмечены две типичные области, которые наблюдались при сканировании: 1 — локальная область с малым числом ревербераций в зоне идеальной адгезии пленки к подложке, 2 — область с наличием множественных переотражений, зона с высокой разницей в акустических импедансах пленки  $Z_2$  и подложки  $Z_3$ , и соответству-



**Рис. 2.** Временная развертка акустических эхо-сигналов вдоль поперечного сечения образца: В-скан, вертикальная шкала изображения соответствует времени задержки импульсов от границ графитового слоя, горизонтальная шкала — перемещение линзы вдоль образца (*a*); 1 и 2 — области с отсутствием (А-скан) (*б*) и наличием ревербераций (А-скан) (*в*); 3, 4 — положение электронных ворот по глубине для изображений границы слоя с подложкой на рис. 1б и 1в.

ющая зоне потери контакта между ними. На рис. 2б и 2в показаны эхосигналы, характерные для этих локальных зон. Первое колебание в эхосигнале — отражение от передней поверхности слоя (импульс I), имеет максимальную амплитуду и время задержки  $20 \pm 2$  нс, что соответствует пробегу волны “туда и обратно” по толщине графитового слоя; затем следуют множественные отражения от границы слоя со стеклянной подложкой (импульсы II, рис. 2в). Поскольку толщина слоя 40 мкм близка к длине волны в графите — 20 мкм для номинальной частоты излучателя 200 МГц, в случае потери адгезии мы наблюдаем не отдельные импульсы от границ слоя, а эффекты близкие к резонансным — длительную реверберацию (рис. 2в) с периодом колебаний определенным формулой (3). В эксперименте период реверберации получился  $11 \pm 2$  нс. Точность определения этого времени задается частотой дискретизации (500 МГц). Кроме того, измерения проводились по точкам нулевой амплитуды, что обеспечивает высокую точность измерений. Затухание периодических осцилляций на А-сканах зависит от соотношения импедансов на обеих границах слоя, их величина падает в соответствии с выражением (2), что может быть использовано, например, для определения импеданса неизвестного слоя на известной подложке.

В эксперименте период ревербераций волн в графитовом слое (11 нс) соответствует распространению объемных упругих волн продольной поляризации перпендикулярно атомным плоскостям в графите со скоростью  $C_L = 4$  км  $\cdot$  с $^{-1}$  [24]. Акустический импеданс слоя при этом оказывается равен  $Z_2 = \rho C_L \approx 2.25 \cdot 4 = 9 \cdot 10^6$  кг  $\cdot$  м $^{-2}$   $\cdot$  с $^{-1}$ . Считая, что импеданс воды равен  $Z_1 = 1.5 \cdot 10^6$  кг  $\cdot$  м $^{-2}$   $\cdot$  с $^{-1}$ , а стеклянной подложки  $Z_3 = 15 \cdot 10^6$  кг  $\cdot$  м $^{-2}$   $\cdot$  с $^{-1}$  [26], получаем оценку коэффициента ослабления за счет многократного переотражения для случая контакта со стеклянной подложкой —  $\gamma = 0.2$ . В случае отсутствия контакта коэффициент отражения на границе с воздухом  $|R_{23}| = 1$ , тогда коэффициент ослабления оказывается равным  $\gamma = 0.71$ . Полученное значение соответствует величине  $\gamma = 0.7$ , полученной экспериментальным путем из отношения амплитуд в соседних точках огибающей эхосигнала, оценивалось по пяти точкам все и варьировалось от 0.65 до 0.78.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен механизм усиления акустического контраста при формировании изображений контактных поверхностей слоев и покрытий методом импульсной акустической микроскопии. Показано, что наличие отслоений приводит к значитель-

ным реверберационным эффектам, которые усиливаются в условиях близких к геометрическому резонансу. Данное явление может использоваться для корректной интерпретации наблюдаемых изображений структуры покрытий и выявления областей потери адгезии, а также для оценки акустических импедансов слоев на подложке.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Du B., Yang R., He Y., Wang F., Huang S. // *Renew Sust. Energy Rev.* 2017. V. 78. P. 1117.
2. Haldren H., Yost W.T., Perey D. et al. // *Ultrasonics*. 2022. V. 120. Art. No. 106641.
3. Lemons R.A., Quate C.F. // In: *Physical acoustics*. London: Academic Press, 1979.
4. Березина С.И., Лямов В.Е., Солодов И.Ю. // *Вестн. МГУ. Сер. физ. и астроном.* 1977. Т. 18. № 1. С. 3.
5. Briggs A. *Acoustic microscopy*. Oxford, 2010.
6. Zinin P.V. *Handbook of elastic properties of solids, liquids and Gases*. Academic Press, 2001.
7. Закутайлов К.В., Левин В.М., Петронюк Ю.С. // *Завод. лаб. и диагн. матер.* 2009. Т. 75. № 8. С. 28; Zakutailov K.V., Levin V.M., Petronyuk Y.S. // *Inorg. Mater.* 2010. V. 46. No. 15. P. 655.
8. Levin V., Petronyuk Y., Morokov E. et al. // *Phys. Stat. Sol. B*. 2016. V. 253. P. 1952.
9. Петронюк Ю.С., Морокков Е.С., Левин В.М. // *Изв. РАН. Сер. физ.* 2015. Т. 79. № 10. С. 1425; Petronyuk Y.S., Morokov E.S., Levin V.M. // *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.* 2015. V. 79. P. 1268.
10. Briggs A., Kolosov O. *Acoustic microscopy*. Oxford Univ. Press, 2009.
11. Zinin P.V., Kutuza I.B., Titov S.A. // *J. Surf. Invest. X-Ray. Synchrotron. Neutron. Technol.* 2018. V. 12. No. 6. P. 1285.
12. Ngwa W., Luo W., Kamanyi A. et al. // *J. Microscopy*. 2005. V. 218. No. 3. P. 208.
13. Brand S., Vogg, G., Petzold M. // *Microsyst. Technol.* 2018. V. 24. P. 779.
14. Петронюк Ю.С., Морокков Е.С., Левин В.М., и др. // *Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та*. 2014. № 5. С. 145335.
15. Chen J., Bai X., Yang K. et al. // *Ultrasonics*. 2015. V. 56. P. 505.
16. Титов С.А., Левин В.М., Петронюк Ю.С. // *Акуст. журн.* 2017. Т. 63. № 6. С. 692; Titov S.A., Levin V.M., Petronyuk Y.S. // *Acoust. Phys.* 2017. V. 63. No. 6. P. 744.
17. Yang X., Wang C., Sun A. et al. // *Appl. Acoustics*. 2020. V. 159. Art. No. 107090.
18. Ким Е.В., Петронюк Ю.С., Гусейнов Н.А. и др. // *Бюлл. экпер. биол. и мед.* 2020. Т. 170. № 9. С. 352; Kim E.V., Petronyuk Y.S., Guseynov N.A. et al. // *Bull. Exp. Biol. Med.* 2021. V. 170. No. 3. P. 356.
19. Hozumi N., Yoshida S., Kobayashi K. // *Ultrasonics*. 2019. V. 99. Art. No. 105966.
20. Petronyuk Y.S., Levin V.M., Titov S.A. // *Phys. Procedia*. 2015. V. 70. P. 626.
21. Петронюк Ю.С., Левин В.М. // *Кристаллография*. 2005. Т. 50. № 4. С. 744; Petronyuk Y.S., Levin V.M. // *Crystallogr. Rep.* 2005. V. 50. No. 4. P. 690.
22. Blakslee O.L., Proctor D.G., Seldin E.J. et al. // *J. Appl. Phys.* 1970. V. 41. No. 8. P. 3389.
23. Spence G.B., Seldin E.J. // *J. Appl. Phys.* 1970. V. 41. No. 8. P. 3383.
24. Levin V.M., Maev R.G., Maslov K.I. et al. *Acoustical imaging*. V. 19. London: Plenum Press, 1991. P. 651.
25. Levin V. *Acoustical imaging*. V. 20. Boston: Springer, 1993. P. 233.
26. Birks A.S., Green R.E., McIntire P. *Ultrasonic testing. Nondestructive testing handbook*. The McGraw-Hill Companies, 1991.
27. Grigorieva I.G., Antonov A.A. // *X-Ray Spectrometry*. 2003. V. 32. No. 1. P. 64.
28. Gerlach M., Anklamm L., Antonov A. et al. // *J. Appl. Crystallogr.* 2015. V. 48. No. 5. P. 1381.

## Features of ultrasonic visualization of layered objects

Y. S. Petronyuk<sup>a, b, \*</sup>, S. A. Titov<sup>b</sup>, A. N. Bogachenkov<sup>a</sup>, V. M. Levin<sup>a</sup>, I. G. Grigorieva<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Emanuel Institute of Biochemical Physics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119334 Russia

<sup>b</sup>Scientific and Technological Center of Unique Instrumentation of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 117342 Russia

<sup>c</sup>Optigraph GmbH, Berlin, 12489 Germany

\*e-mail: jps7@mail.ru

Pulsed acoustic microscopy (100–200 MHz) was used to study layers of pyrolytic graphite on a glass substrate with a thickness comparable to wavelength of the probing sound. Mechanism of natural amplification of acoustic contrast in visualization process of such structures is shown. Images interpretation of the inhomogeneous structure of the layer-substrate contact is supported by a quantitative assessment of acoustic impedances.



УДК 534.2

## КЛИНОВЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ТРЕЩИНЕ, ЗАПОЛНЕННОЙ ТЕКУЧЕЙ СРЕДОЙ

© 2023 г. В. Г. Можжев\*  
\*E-mail: vgmogzhaev@mail.ru

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, физический факультет, Москва, Россия

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Существование клиновых акустических мод особого жидкостного типа в твердых телах демонстрируется при помощи лучевой теории распространения медленных волн Крауклиса в заполненной текучей средой клиновидной трещине. Обнаружено, что при малых углах раскрытия трещины фазовые скорости мод пропорциональны квадратному корню от угла. Число локализованных мод в модели полубесконечной трещины не ограничено.

DOI: 10.31857/S0367676522700168, EDN: JTCYYT

### ВВЕДЕНИЕ

Волны, локализованные вблизи и бегущие вдоль ребра упругого твердого клина, принято называть клиновыми. Они относятся к фундаментальным типам акустических волн, существующим в твердых телах. Большинство из таких типов обнаружено более века тому назад. Тем не менее, клиновые волны были найдены на удивление поздно — лишь в 1972 г. [1–3]. С тех пор опубликовано уже более 200 статей, посвященных их теоретическому и экспериментальному изучению. Такие исследования продолжаются и в настоящее время — см., например, [4–9]. В клиньях со свободными гранями и углом при вершине  $\theta_w$  обсуждаемые моды существуют лишь в ограниченном угловом диапазоне  $\theta_w < \pi$ . Как локализованные они отсутствуют, в частности, вблизи вершины трещины с плоскопараллельными берегами [10]. Такая геометрия соответствует предельному случаю клина с углом, равным  $2\pi$ .

Целью настоящей работы является демонстрация новой возможности существования локализованных волн в твердом клине с углом, близким к  $2\pi$ . Правомочность этого утверждения о новизне следует из представленного ниже сравнения полученных результатов с литературными данными. Для реализации указанной возможности необходимо, чтобы вне твердого клина находился газ или жидкость. Такая геометрия соответствует клиновидной трещине, заполненной текучей средой. Для решения задачи применим простую и наглядную лучевую теорию, подобную той, что

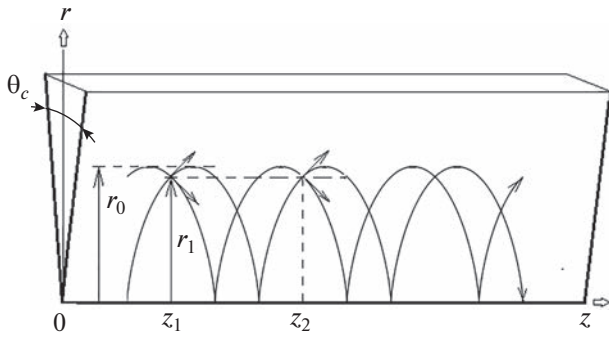
была раньше разработана для остроугольного клина со свободной поверхностью [11, 12]. Используемый подход позволяет, с одной стороны, получить компактные приближенные аналитические выражения для фазовой скорости клиновых мод. С другой стороны, картина волновых лучей, рассчитанная для изучаемой задачи, демонстрирует степень локализации клиновых мод разных номеров у вершины клина, а также объясняет причины их появления.

### СКОРОСТИ КЛИНОВЫХ МОД

Геометрия рассматриваемой задачи показана на рис. 1. Считаем, что в неограниченном изотропном твердом теле имеется узкий клиновидный вырез (который будем называть также выемкой) полуограниченной протяженности  $r \geq 0$  с малым углом при вершине  $\theta_c$ , заполненный идеальной (невязкой) текучей средой. Границы выемки полагаются плоскими. В такой задаче нет геометрических параметров, с которыми можно было бы сравнивать длину волн. Поэтому геометрическая дисперсия для изучаемых мод отсутствует. Линию пересечения граней выемки будем считать совпадающей с осью  $z$  цилиндрической системы координат.

Если угол выемки достаточно мал, то бегущие в ней волны можно локально аппроксимировать решениями для нормальных мод в плоскопараллельном слое текучей среды толщиной  $h$ , разделяющем два одинаковых изотропных полупространства. Нулевая симметричная мода в такой сло-





**Рис. 1.** Геометрия задачи. Лучевые траектории волноводных мод в заполненной текучей средой клиновидной щели в твердом теле.

истой структуре, как показал Крауклис в 1962 г. [13], является аномально медленной. Ее фазовая скорость  $v$  согласно результатам статей [13, 14] в пределе малых  $h$  стремится к нулю по закону  $v \approx (\gamma \omega h)^{1/3}$ , где  $\gamma = (1 - v_t^2/v_l^2)\mu/\rho_f$ ,  $v_t$  и  $v_l$  — скорости поперечной и продольной объемных волн в твердом теле,  $\mu$  — модуль сдвига,  $\rho_f$  — плотность текучей среды. В противоположном пределе  $h \rightarrow \infty$  обсуждаемая мода разделяется на две несвязанные синфазные волны Шолте–Гоголадзе равной амплитуды, локализованные у противоположных границ текучего слоя с твердым телом. Комбинация этих асимптотик дает простое аналитическое выражение для квадрата волнового числа  $k^2$  симметричной моды, достаточно точное во всем диапазоне возможных значений  $h$

$$k^2 = \frac{\omega^{4/3}}{(\gamma h)^{2/3}} + k_{SG}^2. \quad (1)$$

Здесь  $k_{SG}$  — волновое число волны Шолте–Гоголадзе. Локальную толщину  $h$  клиновидного выреза свяжем с расстоянием  $r$  до его вершины соотношением

$$h = r \tan(\theta_c/2). \quad (2)$$

Волновое поле определяется интерференцией двух лучей, распространяющихся под углом  $\alpha$  к оси  $z$ . Их волновые множители зависят от обеих координат и в однородной среде выглядели бы так:  $\exp(ik_z z \pm ik_r r)$ , где  $k_z = k \cos \alpha$  и  $k_r = k \sin \alpha$  — проекции волнового вектора на соответствующие оси системы координат. Но в клиновидном слое из-за зависимости волнового числа  $k$  от  $r$  радиальный набег фазы определяется не произведением  $k_r r$ , а интегралом  $\int k_r dr$ . При этом под  $\alpha$  следует понимать локальное значение угла, обеспечивающее сохранение проекции  $k_z$  при изменении  $r$ .

С другой стороны, строгое решение волновой задачи описывает изменение фазы лишь при движении по координате  $z$ . Для согласования лучевого и точного волнового подходов необходимо нивелировать набег фазы, связанный с изменением радиальной координаты для равноудаленных от вершины клина точек (расположенных, например, на расстоянии  $r_1$  на рис. 1). Для этого достаточно потребовать, чтобы данный набег был кратен  $2\pi$ . Следует, однако, учитывать, что его полное значение включает в себя два дополнительных слагаемых. Одно из них — это сдвиг фазы на каустике в точке поворота лучей, равный, как известно,  $(-\pi/2)$ . Второе — сдвиг фазы волны при отражении от вершины выреза. Для оценки последнего воспользуемся следующими соображениями. При приближении волны к вершине выреза расстояние между противоположными границами стремится к нулю. Соответственно, стремится к нулю и скорость симметричной моды в слое текучей среды. В результате на краю выреза возникает скачок локальной скорости от нулевого значения для волноводной моды до конечной величины, относящейся к объемным волнам. Отношение эффективных импедансов для таких смежных сред равно бесконечности. Данная ситуация эквивалентна случаю отражения объемных волн от абсолютно жесткой границы со сдвигом фазы  $(-\pi)$ . Это значение и будем использовать далее для изучения мод.

Из изложенных соображений и симметрии движения лучей от ребра клина до точки поворота и обратно вытекает следующее условие квантования радиального набег фазы

$$\int_0^{r_0} k_r dr = \pi \left( \frac{3}{4} + n \right), \quad (3)$$

$n$  — ноль или целое число,  $r_0$  — значение радиальной координаты в точках поворота лучей. В этих точках проекция  $k_r$  обращается в ноль. При выполнении (3) проекция  $k_z$  играет роль волнового числа клиновых волн, а  $n$  определяет номер разных мод. Интеграл в формуле (3) после замены  $k_r = \sqrt{k^2 - k_z^2}$  и подстановки выражений (1) и (2) приобретает простой вид и вычисляется точно

$$b \int \sqrt{r^{-2/3} - a^2} dr = -\frac{b}{a^2} \left( 1 - a^2 r^{2/3} \right)^{3/2}, \quad (4)$$

где  $a^2 = (k_z^2 - k_{SG}^2)/b^2$ ,  $b = \omega^{2/3}/[\gamma \tan(\theta_c/2)]^{1/3}$ . Первообразная в формуле (4) на верхнем пределе  $r = r_0$  обращается в ноль, а на нижнем  $r = 0$  равна

$-b/a^2$ , что дает  $b/a^2 = \pi(3/4 + n)$ . Отсюда находим  $k_z$ , а затем и скорость клиновых волн  $v_w = \omega/k_z$

$$\begin{aligned} v_w &= v_0 / \sqrt{1 + v_0^2 / v_{SG}^2}, \\ v_0^2 &= \pi \left( \frac{3}{4} + n \right) \gamma^2 \operatorname{tg}(\theta_c / 2), \\ v_{SG} &= \omega / k_{SG}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (5) следует, что при стремлении угла выреза  $\theta_c$  к нулю

$$v_w^2 \approx \pi \left( \frac{3}{4} + n \right) \gamma \theta_c, \quad (6)$$

а при  $\theta_c \rightarrow \pi$   $v_w \rightarrow v_{SG}$ , т.е. клиновые моды трансформируются в волны Шолте–Гоголадзе той же симметрии. Скорость клиновых мод тем больше, чем выше их номер. На рис. 2 представлены графики зависимостей относительных фазовых скоростей  $v_w/v_{SG}$  для трех низших клиновых волн жидкостного типа с номерами  $n = 0, 1, 2$  от угла выреза  $\theta_c$ , измеряемого в радианах. Графики относятся к случаю, когда отношение плотности твердого тела  $\rho_s$  к плотности текучей среды составляет  $\rho_s/\rho_f = 4$ , а отношения скоростей равны  $v_t^2/v_{SG}^2 = 2$ ,  $v_l^2/v_t^2 = 3$ . Для высших мод, как и для трех низших, представленных на рис. 2, фазовые скорости согласно (5) увеличиваются монотонно с ростом  $\theta_c$ , выходя на предельное значение  $v_{SG}$  при разворачивании поверхности клина в плоскость. Таким образом, никаких отсечек (и излучения) для высших мод в рассматриваемой модели полубесконечного по координате  $r$  клина нет.

## ЛУЧЕВЫЕ ТРАЕКТОРИИ

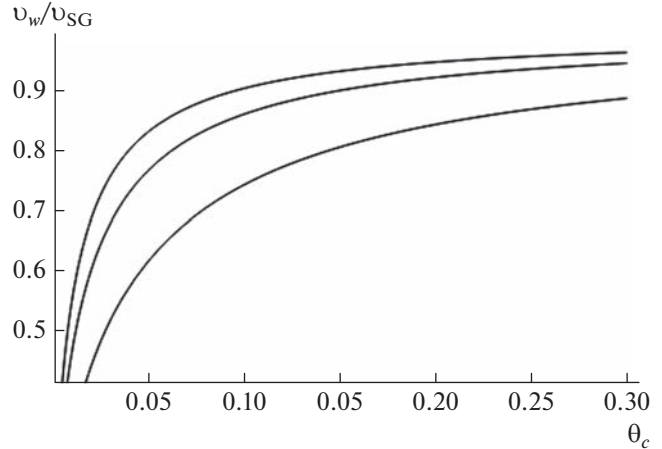
Перейдем к расчету траектории волновых лучей. Тангенс касательной к ней равен производной  $dz/dr$ . С другой стороны, тот же тангенс можно выразить через отношение проекций  $k_z/k_r$ . Приравняв друг другу эти выражения и заменив  $k_r$  через  $k_z$  ( $k_r = \pm \sqrt{k^2 - k_z^2}$ ), получаем уравнение для нахождения лучевых траекторий

$$dz/dr = \pm k_z / \sqrt{k^2(h) - k_z^2}. \quad (7)$$

Интегрирование (7) дает связь координат на пути движения волновых лучей

$$z = \mp k_z \sqrt{1 - a^2 r^{2/3}} \left( 2 + a^2 r^{2/3} \right) / (b a^4) + C. \quad (8)$$

Обратим внимание на следующее отличие лучевых траекторий для рассматриваемой задачи в сравнении с изгибными волнами в клиновидных пластинах [11, 12]. В последнем случае периодичность траекторий возникает естественным обра-



**Рис. 2.** Зависимости относительных фазовых скоростей  $v_w/v_{SG}$  для трех низших клиновых мод жидкостного типа ( $n = 0, 1, 2$ ) от угла  $\theta_c$  (в радианах) выреза в твердом теле для случая  $v_t^2/v_{SG}^2 = 2$ ,  $v_l^2/v_t^2 = 3$ ,  $\rho_s/\rho_f = 4$ .

зом из-за входящей в решение функции синус. Изменение значения константы интегрирования  $C$  для описания периодичности при этом не требовалось. Иное дело клиновые волны жидкостного типа. В решении (8) для них периодические тригонометрические функции отсутствуют, а фиксированное значение  $C$  определяет только один цикл лучевой траектории. Для нахождения следующих циклов необходимо поэтому многократно изменять константу интегрирования. В итоге эта константа принимает ряд дискретных значений, образующих эквидистантную последовательность.

Результат численного расчета универсальных лучевых траекторий показан на рис. 1. В качестве координат  $r$  и  $z$  здесь использованы эффективные безразмерные значения  $\tilde{r} = a^3 r$  и  $\tilde{z} = (z - C) b a^4 / k_z$ , связанные между собой соотношением

$$\tilde{z} = \mp \sqrt{1 - \tilde{r}^{2/3}} \left( 2 + \tilde{r}^{2/3} \right). \quad (9)$$

Обращение в ноль квадратного корня в (8) и (9) соответствует точке поворота лучей  $r_0$ . Отсюда находим эту точку  $r_0 = \pi(3/4 + n)v_0/\omega$ . В итоге  $r_0$ , а, значит, и область локализации волн с увеличением номера моды  $n$  возрастает пропорционально  $(3/4 + n)^{3/2}$ . Однако ни к каким последствиям типа появления отсечек это возрастание не приводит, поскольку здесь рассматривается модель полубесконечного клина.

## СРАВНЕНИЕ С ИМЕЮЩИМИСЯ ДАННЫМИ

В отношении предшествующих публикаций по изучаемой теме следует упомянуть статью [15]. В ней экспериментально и численно методом конечных элементов исследовано распространение поверхностных акустических волн в пластине с заполненной жидкостью клиновидной выемкой конечной глубины. Были обнаружены локализация энергии в выемке, существование в изучаемой геометрии двух мод с отсечкой по углу жидкого клина и падение скорости волн с уменьшением угла. Однако причины этих особенностей так и не были объяснены. Кроме того, авторы статьи [15] не идентифицировали изучаемые ими акустические волны как самостоятельный тип, называя их поверхностными. Такое название подразумевает, что доминирующим на свойства этих волн считается влияние основной граничной плоскости пластины, а не граней клина. Для выемки конечной глубины имеются дополнительные причины локализации поверхностных акустических волн, существующих на основной плоской поверхности пластины. Во-первых, это два твердотельных клина, образованных пересечением поверхностной выемки и пластины. В каждом из них существуют свои локализованные клиновые моды. Причем эти моды взаимодействуют друг с другом через слой текучей среды. Во-вторых, грани ограниченной по глубине выемки имеют конечную ширину, образуя волновод для бегущих вдоль них граничных возмущений. В спектре таких волноводных поверхностных мод можно ожидать наличие не только однородных, но и неоднородных волн с меньшими скоростями, соответствующими локализации поля вблизи выемки. Отмеченные усложнения затрудняют анализ задачи и интерпретацию полученных в [15] результатов численного и натурного экспериментов. В настоящей работе в отличие от [15] изучаются волны в заполненной текучей средой клиновидной выемке бесконечной глубины. Выявление локализации поля именно в такой геометрии и позволяет утверждать, что это отдельный самостоятельный тип волн, принципиально отличающийся от поверхностных мод плоских границ твердых тел.

## ВОЗМОЖНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Обсудим научные области, для которых результаты проведенного исследования могут представлять интерес. В начале текущего века зародилось перспективное научное направление, которое можно кратко назвать микрожидкостной акустоэлектроникой. См. об этом, в частности, обзор [16]. Практической целью исследований в данном направлении является создание нового класса микроэлектронных устройств типа “лабо-

раторий на чипах”, альтернативно называемых также “биочипами”. В качестве вынуждающей силы для перемещения малых капель растворов и манипулирования ими в таких устройствах в основном используются поверхностные акустические волны. Альтернативой или дополнением могут служить клиновые моды, изучаемые в настоящей работе. К их плюсам относится отсутствие дифракционных потерь, так же, как и ложных сигналов, вызываемых дифракцией. Клиновидная выемка могла бы тогда одновременно использоваться в качестве и волновода акустических волн, и канала для акустического перемещения жидкости.

Низкая скорость клиновых мод может представлять интерес для их применений в акустооптике. Эффективность взаимодействия света и звука определяется коэффициентом акустооптического качества, обратно пропорциональным кубу фазовой скорости акустических волн. Для изучаемых мод данный коэффициент должен сильно возрастать в области малых углов клина  $\theta_c \ll 1$ , где резко падает скорость. Значительное замедление изучаемых волн по сравнению со скоростью звука в воздухе наталкивает на мысль о возможности их применения для создания новых музыкальных инструментов. Та же низкая скорость делает эти волны более чувствительными к внешним воздействиям и перспективными для создания акустических датчиков различного рода, в частности датчиков расхода воды в клиновидных сливах и каналах и измерителей уровня жидкостей.

Сильную концентрацию энергии у вершины клина и связь с вязкими волнами можно было бы использовать для разработки и создания звукопоглотителей нового типа, основанных на клиновых волнах. Такая концентрация облегчает реализации высокоэффективных нелинейных взаимодействий акустических сигналов при небольших амплитудах внешних электрических возбуждений, что можно использовать в акустоэлектронных устройствах обработки сигнальной информации.

Другим предполагаемым применением представленных результатов является изучение медленной динамики твердых тел ограниченных размеров. Если тело покрыто сеткой мелких клиновидных трещин, заполненных воздухом или влагой, то они могут служить волноводными каналами для передачи акустических сигналов. Причем скорости сигналов будут значительно меньше, чем у объемных волн и в твердом теле, и в заполняющей трещины текучей среде.

Возможны также применения представленной теории для изучения динамики геологических объектов значительно больших масштабов, таких как клиновидные узкие горные каньоны, магматические камеры, подледные озера, ледовый по-

кров, разломы земной коры на суше и морском дне, океанические впадины. Например, у Марианского желоба глубоководная часть имеет форму поперечного сечения, близкую к острому клину, что предполагает существование в нем рассмотренных выше клиновых волн жидкостного типа.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, развитая теория предсказывает существование множества локализованных клиновых мод. Их скорость  $v_w$  стремится к нулю при уменьшении угла жидкого клина  $\theta_c$  по корневому закону  $v_w \propto \sqrt{\theta_c}$ , а не линейному, как для изгибных клиновых волн в остроугольных клиновидных пластинах.

Причиной появления таких мод является рефракция волновых лучей из-за зависимости скорости волноводных мод от локальной толщины клина. В рамках используемой модели этот механизм формирования локализованного поля описывается с помощью неоднородного профиля скорости волноводных мод как функции расстояния до ребра клина. Интересной особенностью данного профиля является частотная зависимость, принципиально отличающая его от статических профилей в традиционных задачах распространения волн в неоднородных средах. Именно эта зависимость приводит к полной компенсации возможных изменений с частотой скоростей клиновых волн, т.е. к отсутствию дисперсии. Данное свойство согласуется с отсутствием в рассматриваемой задаче каких-либо геометрических параметров, кроме длины волны.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Maradudin A.A., Wallis R.F., Mills D.L., Ballard R.L.* // Phys. Rev. B. 1972. V. 6. No. 4. P. 1106.
2. *Lagasse P.E.* // Electron. Lett. 1972. V. 8. No. 15. P. 372.
3. *Mason I.M., Motz M.D., Chambers J.* // Electron. Lett. 1972. V. 8. No. 17. P. 429.
4. *Агафонов А.А., Кокшайский А.И., Тоцов Е.А.* // Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та. 2015. № 4. С. 154329.
5. *Jia J., Jiang X., Han Q., Shan M.* // Proc. SPIE. 2019. V. 11333. P. 97.
6. *Pupyrev P.D., Lomonosov A.M., Nedospasov I.A., Mayer A.P.* // Appl. Phys. Lett. 2021. V. 119. No. 2. Art. No. 021902.
7. *Nazarov A., Nazarov S., Zavorokhin G.* // Eur. J. Appl. Math. 2022. V. 33. No. 2. P. 201.
8. *Pupyrev P.D., Lomonosov A.M., Mayer A.P.* // In: Advanced problem in mechanics. APM 2020. Lecture notes in mechanical engineering. Cham: Springer, 2022. P. 426.
9. *Ватутлян А.О., Парунова Л.И.* // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2022. № 2. С. 50; *Vatulyan A.O., Parinova L.I.* // Mech. Solids. 2022. V. 57. No. 2. P. 244.
10. *Achenbach J.D., Gautesen A.K.* // J. Sound Vibr. 1977. V. 53. No. 3. P. 407.
11. *Можжаев В.Г.* // В сб.: Матер. конф. "Акустоэлектронные устройства обработки информации" (Черкассы, 1988). С. 55.
12. *Можжаев В.Г.* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 1989. Т. 30. № 5. С. 40; *Mozhaev V.G.* // Moscow Univ. Phys. Bull. 1989. V. 44. No. 5. P. 38.
13. *Крауклис П.В.* // Прикл. матем. мех. 1962. Т. 26. № 6. С. 1111; *Krauklis P.V.* // J. Appl. Math. Mech. 1962. V. 26. No. 6. P. 1685.
14. *Korneev V.* // Geophys. 2008. V. 73. No. 1. P. N1.
15. *Liu F., Peng S., Jia H., Ke M., Liu Z.* // Appl. Phys. Lett. 2009. V. 94. No. 2. Art. No. 023505.
16. *Можжаев В.Г.* // Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та. 2014. № 4. С. 144323.

### Wedge acoustic waves in a fluid-filled crack

V. G. Mozhaev\*

*Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Moscow, 119991 Russia*

\*e-mail: *vgmozhaev@mail.ru*

The existence of wedge acoustic modes of a special fluidic type in solids is demonstrated using the ray theory of slow Krauklis-wave propagation in a fluid-filled wedge-shaped crack. It is found that the phase velocities of the modes at small crack opening angles are proportional to the square root of the angle. The number of localized modes in the semi-infinite crack model is not limited.

УДК 532.65

## ДВУМЕРНОЕ ВОЛНОВОЕ ДВИЖЕНИЕ В ВЯЗКОЙ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

© 2023 г. А. А. Очиров<sup>1, 2, \*</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
“Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского Российской академии наук”, Москва, Россия

<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова”, Ярославль, Россия

\*E-mail: otchirov@mail.ru

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Исследовано распространение двумерных периодических капиллярно-гравитационных волн в вязкой однородной жидкости со свободной поверхностью в диапазоне частот от  $5 \cdot 10^{-2}$  до  $5 \cdot 10^4$  Гц. Получены дисперсионные соотношения, а также выражения для фазовых и групповых скоростей для поверхностных волн в физически наблюдаемых переменных. Показано, что существует еще один класс решений, который не наблюдается в модели идеальной жидкости.

DOI: 10.31857/S036767652270017X, EDN: JTPIDR

### ВВЕДЕНИЕ

Процесс исследования распространения волн вдоль поверхности жидкости имеет давнюю историю и берет свое начало еще с работ Эйлера, Лагранжа, Даламбера, Стокса и других. Обобщение этих исследований можно найти в большом количестве обзорных работ и монографий [1–3]. Волны могут оказывать влияние на перераспределение поверхностно-активных веществ вдоль поверхности жидкости [4, 5], меняют морфологию дна в море, реках и каналах [6]. Короткие капиллярные волны на склонах гравитационных волн [7], меняют шероховатость контактной поверхности, определяющую взаимодействие океана и атмосферы, (расчеты распространения капиллярных волн по сферической поверхности проведены в [8]) а также могут служить причиной усиления гравитационных волн в присутствии поверхностно-активных веществ [9]. В экспериментальных исследованиях капельных течений можно заметить сложность картины волнового переноса вещества, включающего образование вихрей, и тонких волокон [10].

Настоящая работа посвящена анализу и исследованию волновой компоненты решения дисперсионного уравнения, возникающего при распространении волн по свободной поверхности вязкой однородной жидкости.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о распространении поверхностных волн в вязкой однородной жидкости с кинематической вязкостью  $\nu$ , плотностью  $\rho_0$ , коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ , находящуюся в поле сил тяжести  $\vec{g}$ . В декартовой системе координат  $Oxyz$ , в которой ось  $Oz$  направлена вертикально вверх, а плоскость  $Oxy$  совпадает с равновесным положением свободной поверхности жидкости. Будем считать, что жидкость неограничена и занимает нижнее полупространство  $z < 0$ , а вдоль свободной поверхности распространяется бегущая волна, задающая отклонение свободной поверхности от равновесного значения, которое описывается функцией  $z = \zeta(x, y, t)$ . Также будем рассматривать задачу в плоской постановке, т.е. будем полагать, что движение жидкости не зависит от горизонтальной координаты  $y$ . Математическая формулировка задачи базируется на упрощенной системе фундаментальных уравнений [11], в которой пренебрегается эффектами, связанными с переносом вещества, тепла и стратификацией:

$$z < \zeta: \begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nu \Delta \vec{u} - \frac{1}{\rho_0} \nabla P + \vec{g} \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Здесь символом  $P$  обозначено гидродинамическое давление, а поле скоростей в двумерном случае представляется в виде  $\vec{u} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_z$ . Задача (1) должна быть дополнена граничными условиями на свободной поверхности жидкости  $z = \zeta$ :

$$z = \zeta: \frac{\partial(z - \zeta)}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla(z - \zeta) = 0, \quad (2)$$

$$P - P_0 - \sigma \nabla \cdot \vec{n} - 2\rho_0 v \vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot \nabla \vec{u}) = 0, \quad (3)$$

$$\vec{\tau} \cdot (\vec{n} \cdot \nabla \vec{u}) + \vec{n} (\vec{\tau} \cdot \nabla \vec{u}) = 0, \quad (4)$$

$$\vec{n} = \frac{\nabla(z - \zeta)}{|\nabla(z - \zeta)|} = \frac{-\partial_x \zeta \vec{e}_x + \vec{e}_z}{\sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2}}, \quad \vec{\tau} = \frac{\vec{e}_x + \partial_x \zeta \vec{e}_z}{\sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2}}.$$

Здесь  $P_0$  — атмосферное давление, а символами  $\vec{n}$  и  $\vec{\tau}$  обозначены вектор нормали и касательной к свободной поверхности соответственно. В случае двумерного движения можно ввести функцию тока  $\psi$  такую, что  $u = \partial_z \psi$ , а  $v = -\partial_x \psi$ . В линейном приближении по малому параметру, имеющему смысл отношения амплитуды к длине волны после проведения процедуры снесения граничных условий на равновесную поверхность  $z = 0$  задача запишется в виде:

$$z < 0: \partial_t \Delta \psi - v \Delta \Delta \psi = 0, \quad (5)$$

$$z = 0: \partial_t \zeta + \partial_x \psi = 0, \quad (6)$$

$$v \partial_{tz} \Delta \psi - \partial_{tzz} \psi + g \partial_{xx} \psi + 2v \partial_{txxz} \psi - \gamma \partial_{xxxx} \psi = 0, \quad (7)$$

$$\partial_{zz} \psi - \partial_{xx} \psi = 0. \quad (8)$$

Здесь символом  $\gamma = \sigma/\rho_0$  обозначен нормированный на плотность коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Будем искать решение задачи первого порядка малости по амплитуде волны (5)–(8) в виде бегущей волны:

$$\psi = A_+ e^{k_z z + i k_x x - i \omega t} + A_- e^{k_z z - i k_x x - i \omega t}. \quad (9)$$

Подстановка (9) в (5) приводит к дисперсионным соотношениям между компонентами волнового числа  $k_x$  и  $k_z$ :

$$(k_x^2 - k_z^2)(v(k_x^2 - k_z^2) - i\omega) = 0, \quad (10)$$

Которое естественным образом распадается на два решения:

$$k_z^2 = k_x^2, \quad k_l^2 = k_x^2 + i\omega/v. \quad (11)$$

В выражении (11) введено переобозначение компоненты волнового вектора  $k_z$  на  $k_l$  для одного из решений для отличия корней друг от друга.

С учетом выражений (11) решение задачи необходимо искать в виде:

$$\psi = (A_+ e^{i k_x x - i \omega t} + A_- e^{-i k_x x - i \omega t}) (e^{k_z z} + B e^{k_l z}). \quad (12)$$

Подстановка (12) в граничные условия (6), (8) приводит к соотношениям:

$$\zeta = (A_- e^{-i k_x x - i \omega t} - A_+ e^{i k_x x - i \omega t}) (1 + B) k_x / \omega, \quad (13)$$

$$B = -\frac{k_x^2 + k_z^2}{k_x^2 + k_l^2} = -\frac{2k_x^2}{2k_x^2 + i\omega/v}. \quad (14)$$

Подстановка (12) в динамическое граничное условие (7) приводит к дисперсионному уравнению, связывающему компоненты волнового вектора с частотой волнового движения и другими параметрами задачи:

$$\gamma k_x^4 - 3iv\omega k_x^2 k_{z,l} + g k_x^2 + k_{z,l} (iv k_{z,l}^2 - \omega) \omega = 0. \quad (15)$$

С учетом (11) дисперсионные уравнения (15) принимают вид:

$$\begin{aligned} \gamma k_z^3 - 2iv\omega k_z^2 + g k_z - \omega^2 &= 0, \\ \gamma (k_l^2 - i\omega/v)^2 - 2iv\omega (k_l^2 - i\omega/v) k_l + \\ + g (k_l^2 - i\omega/v) + \omega k_l (iv k_l^2 - \omega) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Традиционно дисперсионное уравнение представляют в виде зависимости частоты от волнового числа и верхнее дисперсионное уравнение выглядит следующим образом:

$$\omega^2 = \gamma k_z^3 - 2iv\omega k_z^2 + g k_z. \quad (17)$$

В предельном переходе к идеальной жидкости  $v \rightarrow 0$  верхнее дисперсионное уравнение в (16) перейдет в дисперсионное уравнение для идеальной жидкости, а нижнее — исчезнет:

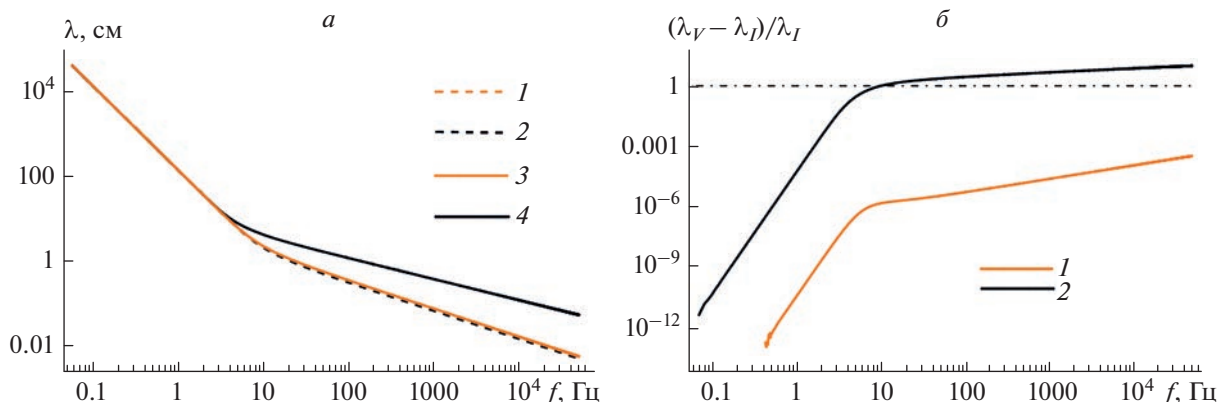
$$\gamma k_z^3 + g k_z - \omega^2 = 0 \quad (18)$$

или в более привычном виде:

$$\omega = \sqrt{g k_z (1 + \gamma k_z^2 / g)}. \quad (19)$$

Это позволяет говорить о том, что корень  $k_z$  дисперсионного уравнения (16) отвечает за обобщение волнового движения идеальной жидкости на случай конечной вязкости, а корень  $k_l$  — принципиально новая структура, возникающая из-за учета конечной вязкости. В настоящем исследовании подробно будет рассмотрен только корень, отвечающий за волновое движение вдоль поверхности жидкости.

Для простоты анализа корней безразмерим дисперсионное уравнение. В качестве масштаба длины выберем  $\sqrt[3]{v^2/g}$ , а в качестве масштаба времени —  $\gamma/vg$ . Тогда размерные компоненты вол-



**Рис. 1.** Зависимость длины волны от частоты волнового движения (а). 1 – Кривая в модели идеальной жидкости с параметрами воды, 2 – в модели идеальной жидкости с параметрами глицерина, 3 – в модели вязкой жидкости с параметрами воды, 4 – в модели вязкой жидкости с параметрами глицерина. Разность между моделями вязкой и невязкой жидкости от частоты (б). 1 – Кривая для жидкости с параметрами воды, 2 – для жидкости с параметрами глицерина.

нового вектора и частоты запишутся через безразмерные в виде:

$$\omega = \omega_* v g / \gamma, \quad k_z = k_{z*} \sqrt[3]{g / v^2}, \quad (20)$$

а дисперсионное уравнение (16) перепишется:

$$\begin{aligned} k_{z*}^3 - 2i\varepsilon^2 \omega_* k_{z*}^2 + \varepsilon k_{z*}^3 - \varepsilon^3 \omega_*^2 &= 0, \\ \varepsilon &= \sqrt[3]{v^4 g / \gamma^3}, \\ k_{l*}^4 - \varepsilon^2 \omega_* (2ik_{l*}^3 + i + \omega) - \\ - \varepsilon^3 \omega_* k_{l*} (1 + 3\omega_*) + \varepsilon k_{l*}^2 (1 - 2i\omega) &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Для физически реализуемых корней должно выполняться условие затухания движения с глубиной. Следовательно, решения дисперсионных уравнений (21) должны удовлетворять критериям отбора корней:

$$\operatorname{Re}(k_{z,l}) \geq 0. \quad (22)$$

В явном виде решения (21) здесь не приводятся из-за громоздкости выражений. Решение  $k_l$  отвечает за сопутствующее высокоградиентное течение. Решение  $k_z$  отвечает за волновую компоненту движения. Далее подробно будет рассмотрено только волновое решение  $k_z$ .

### ДИСПЕРСИОННЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Традиционно дисперсионные соотношения представляют в виде зависимости частоты от волнового числа. Но частота волнового движения несет в себе энергетический смысл, следовательно, должна определяться действительной положительной величиной. Волновое число, учитывающее пространственное затухание можно определять как комплексную величину. Действительная часть  $k_x$  и мнимая часть  $k_z$  отвечают за волновое

движение, а мнимая часть  $k_x$  и действительная часть  $k_z$  характеризуют затухание движения с удалением волн от источника. Выбор описания и набора базовых параметров бегущих волн наиболее адекватно описывающего физически реализуемую ситуацию нуждается в экспериментальном обосновании.

Поскольку волновой вектор – это градиент фазы волны, то кажется логичным при построении выражения использовать только те компоненты, которые отвечают за волновое движение и не учитывают затухание:

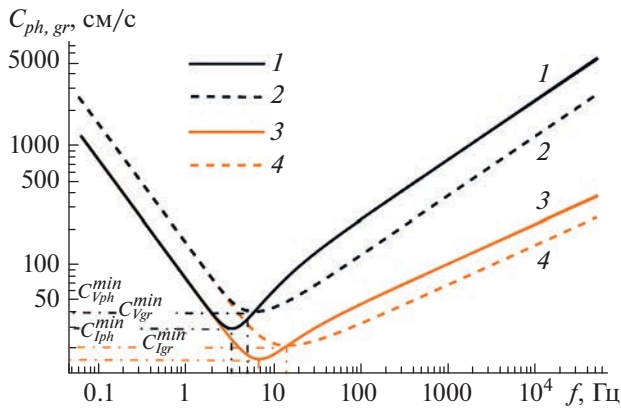
$$|k| = \sqrt{\operatorname{Re}(k_x)^2 + \operatorname{Im}(k_z)^2}. \quad (23)$$

Длина волны в таком случае задается соотношением:

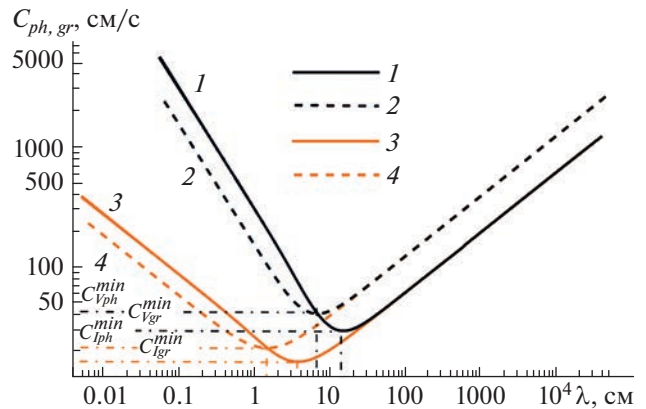
$$\lambda = 2\pi / \sqrt{\operatorname{Re}(k_x)^2 + \operatorname{Im}(k_z)^2}. \quad (24)$$

Подставляя решение дисперсионного уравнения (16) в (24) с учетом (11) можно получить зависимость длины волны от частоты волнового движения. На рис. 1а представлены соответствующие зависимости для жидкостей с параметрами воды (кривые 1 и 3)  $\rho_0 = 1 \text{ г/см}^3$ ,  $g = 981 \text{ см/с}^2$ ,  $\sigma = 72 \text{ дин/см}$ ,  $v = 0.01 \text{ см}^2/\text{с}$  и жидкости с параметрами глицерина (кривые 2 и 4)  $\rho_0 = 1.26 \text{ г/см}^3$ ,  $g = 981 \text{ см/с}^2$ ,  $\sigma = 64.7 \text{ дин/см}$ ,  $v = 11.746 \text{ см}^2/\text{с}$ . Пунктирными линиями (кривые 1 и 2) на рисунке изображены зависимости, полученные в модели с пренебрежением вязкостью. Сплошными линиями изображены линии в модели, учитывающей конечную вязкость. Из рисунка видно, что для жидкости с параметрами воды зависимости совпадают друг с другом с точностью до толщины линии. Для глицерина отличия





**Рис. 2.** Зависимость групповой (1 и 3) и фазовой (2 и 4) скорости от частоты волнового движения в моделях вязкой (1 и 2) и невязкой (3 и 4) жидкости.



**Рис. 3.** Зависимость групповой (1 и 3) и фазовой (2 и 4) скорости от длины волны в моделях вязкой (1 и 2) и невязкой (3 и 4) жидкости.

заметны в области капиллярных волн. На рис. 1б показана невязка между длиной волны, рассчитанной в модели вязкой жидкости  $\lambda_v$  и невязкой жидкости  $\lambda_l$  в отношении к длине волны в идеальной жидкости  $(\lambda_v - \lambda_l)/\lambda_l$  в зависимости от частоты. Литерой (1) обозначена зависимость для жидкости с параметрами воды, а литерой (2) — для жидкости с параметрами глицерина. Для гравитационных волн отличие в моделях несущественно как для слабовязких, так и для сильновязких жидкостей (порядка долей процентов), однако, с увеличением частоты отличие растет и для жидкости с большой вязкостью достигает 100% при частоте около 10 Гц и при дальнейшем увеличении частоты растет и становится заметной даже для слабовязких жидкостей.

Скорость распространения фазового фронта и скорость распространения энергии также являются интересным предметом исследования и анализа. Для сравнения с экспериментом может быть удобно представление в виде зависимости от частоты или от длины волны. На рис. 2 и 3 изображены зависимости фазовой и групповой скорости волнового движения от частоты и длины волны соответственно. Зависимости, обозначенные литерой (1) и (2) построены в модели, учитывающей конечность вязкости, а зависимости с литерой (3) и (4) — в модели невязкой жидкости. Сплошными линиями обозначены зависимости групповой скорости (отвечающей за перенос энергии группой волн), а пунктирными — фазовой скорости. Из рисунков видно, что у гравитационных волн  $\left(\lambda \gg \delta_g^y = \sqrt{\frac{\gamma}{g}}\right)$  фазовая скорость опережает групповую, тогда как у капиллярных волн  $(\lambda \ll \delta_g^y)$  — наоборот. Расчеты показывают, что групповая и фазовая скорости сравниваются то-

гда, когда фазовая скорость принимает свое минимальное значение  $C_{ph}^{min}$ . Для жидкости с параметрами воды это значение  $C_{ph}^{min} = 23.05$  см/с достигается при частоте  $f_{ph}^{min} = 13.5$  Гц и длине волны  $\lambda_{ph}^{min} = 1.71$  см. Для жидкости с параметрами глицерина это значение  $C_{ph}^{min} = 40.85$  см/с достигается при частоте  $f_{ph}^{min} = 6.2$  Гц и длине волны  $\lambda_{ph}^{min} = 6.59$  см.

Также стоит отметить, что учет в модели конечной вязкости, во-первых, приводит к смещению характерных скоростей (минимальной групповой и минимальной фазовой скорости) в область больших длин волн (и меньших частот), а во-вторых, увеличиваются значения характерных скоростей.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен анализ распространения поверхностных капиллярно-гравитационных волн в вязкой однородной жидкости в плоской постановке в физически наблюдаемых переменных.

Показано, что учет вязкости приводит к увеличению минимальных скоростей распространения фазового фронта волны и скорости распространения энергии.

Установлено, что с учетом вязкости характерные значения скорости смещаются в область больших по сравнению с моделью идеальной жидкости длин волн и меньших частот.

Показано, что в вязкой жидкости помимо поверхностных волн существует еще один режим течения, не наблюдающийся в модели идеальной жидкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-19-00598).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лэмб Г. Гидродинамика. М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. 928 с.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе И.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 585 с.
3. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. Пер. с англ. М.: Мир, 1981. 598 с.
4. Белоножко Д.Ф., Очиров А.А. // Изв. РАН. Сер. физ. 2018. Т. 82. № 1. С. 47; *Belonozhko D.F., Ochirov A.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2018. V. 82. No. 1. P. 40.
5. *Belonozhko D., Ochirov A.* // J. Phys. Conf. Ser. 2022. V. 2231. No. 1. Art. No. 012013.
6. *Потапов И.И., Силакова Ю.Г.* // Изв. РАН. Физ. атмосферы и океана. 2021. Т. 57. № 2. С. 212; *Potapov I.I., Silakova Y.G.* // Izv. Atmos. Ocean. Phys. 2021. V. 57. No. 2. P. 192.
7. *Hung L.-P., Tsa W.-T.* // J. Phys. Oceanogr. 2009. V. 39. No. 2. P. 263.
8. *Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д.* // Изв. РАН. Физ. атмосферы и океана. 2018. Т. 54. № 2. С. 206; *Kislovich A.V., Chashechkin Yu.D.* // Izv. Atmos. Ocean. Phys. 2018. V. 54. No. 2. P. 182.
9. *Ермаков С.А.* // Изв. РАН. Физ. атмосферы и океана. 2010. Т. 46. № 2. С. 228; *Ermakov S.A.* // Izv. Atmos. Ocean. Phys. 2010. V. 46. No. 2. P. 208.
10. *Чашечкин Ю.Д.* // Изв. РАН. Физ. атмосферы и океана. 2022. Т. 58. № 2. С. 218; *Chashechkin Yu.D.* // Izv. Atmos. Ocean. Phys. 2022. V. 58. No. 2. P. 188.
11. *Chashechkin Y.D.* // Axioms. 2021. V. 10. No. 4. P. 286.

## Two-dimensional wave motion in a viscous homogeneous liquid

A. A. Ochirov<sup>a, b, \*</sup>

<sup>a</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia*

<sup>b</sup>*Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, 150000 Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: otchirov@mail.ru*

The propagation of two-dimensional periodic capillary-gravitational waves in a viscous homogeneous liquid with a free surface in the frequency range from  $5 \cdot 10^{-2}$  to  $5 \cdot 10^4$  Hz is investigated. Dispersion relations are obtained, as well as expressions for phase and group velocities for surface waves in physically observable variables. It is shown that there is another class of solutions that is not observed in the ideal fluid model.

УДК 532.5

## ВОЛНЫ И ПУЗЫРИ ИМПАКТА КАПЛИ

© 2023 г. А. Ю. Ильиных\*

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
“Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского Российской академии наук”,  
Лаборатория механики жидкостей, Москва, Россия

\*E-mail: [ilynykh@ipmnet.ru](mailto:ilynykh@ipmnet.ru)

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Методами скоростной видеорегистрации визуализирован широкий набор тонких быстрых течений (капиллярные волны, лигаменты, вихревые структуры), обусловленных процессами конверсии поверхностной энергии в другие формы (флуктуации давления и температуры, формирование и движение новых компонентов) при уничтожении контактных поверхностей в зоне слияния свободно падающей капли с принимающей жидкостью.

DOI: 10.31857/S0367676522700181, EDN: JTTFMV

### ВВЕДЕНИЕ

Импакт капли — совокупность гидродинамических и акустических процессов, сопровождающих перенос вещества и энергии погружающейся капли в принимающую жидкость — имеет место во многих технологических, технических и природных процессах. Механизмы переноса вещества и энергии капли играют важную роль в процессах перемешивания в фармакологической, химической, нефтехимической и биохимической промышленности, в биодизельных двигателях, в системах охлаждения, пожаротушения и для профилактики возгораний [1]. Большое внимание уделяется анализу механизмов эрозии, капельного обмена минеральными и органическими веществами, биоматериалами (вирусами, микробами) между атмосферой и гидросферой [2].

Импакт капли сопровождается набором структурных компонентов как крупных (каверна, венец, всплеск, каскады вихревых колец, последовательности вторичных капель), так и мелкомасштабных (пелена мелких струек и брызг, капиллярные волны, вихревые петли, лигаменты). Набор компонентов, их геометрические и физические параметры зависят от режима импакта, который задается параметрами задачи (энергетикой капли, физическими и термодинамическими параметрами сред) [3].

В систему уравнений задачи помимо начальных и граничных условий входят уравнения переноса массы, импульса и энергии, а также потенциал Гиббса, включающий дополнительные члены для поверхностного и приповерхностного

слоев [4]. Механизмы переноса — предмет актуальных теоретических и экспериментальных исследований. Перенос вещества капли в принимающую жидкость осуществляется посредством вихрей, волн и лигаментов — нитей, связывающих волны и вихри. Генерация групп коротких капиллярных волн на всех основных структурных элементах (капля, каверны, венец, струи и, собственно, поверхность принимающей жидкости) сопровождает весь процесс погружения капли. Рассматриваются макроскопические механизмы переноса энергии течением со скоростью  $\bar{u}$  и волнами с групповой скоростью  $c_g$ , а также микроскопический атомно-молекулярный перенос, как медленный диссипативно-диффузионный, так и быстрый, при уничтожении свободных поверхностей сливающихся жидкостей и конверсии доступной потенциальной поверхностной энергии (ДППЭ) в другие формы [5].

Целью настоящей работы является экспериментальное исследование условий образования и эволюции волн капиллярного масштаба, образующихся на разных стадиях погружения капли в глубокую жидкость.

### ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ

В число размерных параметров задачи входят условия эксперимента (диаметр  $D = 0.3\text{--}0.5$  см и высота  $H = 1\text{--}200$  см падения капли, скорость в момент контакта  $U = 0.34\text{--}5.2$  м/с), ускорение свободного падения  $\bar{g}$  и физические свойства взаимодействующих сред: плотности  $\rho_{d,t,a}$  кине-

матические  $v_{d,t,a}$  и динамические  $\eta_{d,t,a}$  вязкости, коэффициенты поверхностного натяжения  $\sigma_d^a$ ,  $\sigma_t^a$ , их отношения и нормированные на плотность капельной жидкости значения  $\gamma_{d,t}^a = \frac{\sigma_{d,t}^a}{\rho_{d,t}}$ , где индекс  $d$  соответствует капле,  $t$  — принимающей жидкости,  $a$  — среде, в которой происходит импакт (воздух). В работе оценивались кинетические  $E_k = MU^2/2$  и поверхностные  $E_\sigma = \sigma S_d$  энергии капель, их плотности и отношения.

В опытах использовались водные растворы али-зариновых чернил различной концентрации, окрашенного этанола и солей (перманганат калия, медный и железный купорос, натриевые соли).

Отношения размерных параметров задачи задают наборы безразмерных комбинаций, включающие традиционные числа: Рейнольдса, Фруда, Вебера (для данной серии опытов имели широкий диапазон значений  $Re \sim 10^3 - 10^4$ ,  $Fr \sim 1 - 10^2$ ,  $We \sim 1 - 10^3$ ), Бонда и Онезорге (значения которых менялись слабо  $Bo \sim 1$ ,  $Oh \sim 10^{-3}$  ввиду близости физических параметров использованных в опытах жидкостей).

Пространственные и временные масштабы задачи также оцениваются из отношений размерных параметров и лежат в широком диапазоне — для воды наибольший и наименьший масштабы длины составили от  $\delta\delta_{min}^{v-6}$  см,  $\tau\tau_{min}^{v-10}$  с (диссипативно-капиллярные масштабы) до  $\delta\delta_{gmax}^y$  см (капиллярно-гравитационный),  $\tau\tau_{vmax}^D$  с.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Эволюция картины переноса вещества капли в принимающую жидкость исследована методами фото- и высокоскоростной видеорегистрации с учетом собственных масштабов задачи в широком диапазоне параметров. Опыты выполнены на стенде для визуализации тонкоструктурных компонентов быстропротекающих процессов в жидкости (ТБП), входящем в состав Гидрофизического комплекса для моделирования гидродинамических процессов “УИУ ГФК ИПМех РАН” (входит в список Уникальных исследовательских установок).

В состав стенда входит высокоскоростная камера со скоростью съемки до 40000 кадров/с и цифровой фотоаппарат с датчиком отрыва капли и линией управляемой задержки (шаг задержки  $\Delta = 1$  мкс), наборы оптических кювет с плоским и профилированным дном, наборы светодиодных и студийных осветителей, дозатор для капель, соединенный с резервуаром для капельной жидко-

сти, размещен на штативе, который позволяет изменять высоту свободного падения капли до 260 см. Оптическая система стенда позволяет разрешать структуры с линейным размером  $\sim 10$  мкм, вести съемки под углом от  $0^\circ$  до  $75^\circ$  к горизонту как “на просвет”, так и в отраженном от экранов свете.

## ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ И РЕЖИМЫ СЛИЯНИЯ

Поверхностная энергия, обусловленная анизотропией действия атомно-молекулярных сил на контактных границах, равномерно распределена в тонком шаровом слое толщиной порядка размера молекулярного кластера  $\delta_\sigma \sim 10^{-6}$  см.

В момент контакта за короткое время  $\Delta t_s \sim 10^{-10}$  с происходит уничтожение тонкого слоя (толщиной  $\delta_s \sim 10^{-8}$  см), где среда может распадаться на ионные кластеры, а затем — слияние жидкостей (уничтожение приповерхностных слоев) на масштабе  $\delta_\sigma$ , и выброс из области слияния отдельных тонких стримеров. За время  $\Delta t_\sigma = \delta_\sigma/U \sim 10^{-8}$  с в выражении для термодинамического потенциала Гиббса  $dg_s = -sdT + VdP + \sigma dS_b + \mu_n dN_n$  исчезают дополнительные члены  $\sigma dS_b$  (пропорциональный изменению площадей контактирующих поверхностей) и  $\mu_n dN_n$  [6], зависящие от химического потенциала и концентрации соответствующих компонентов.

Высвобождение ДППЭ в области контакта жидкости приводит к формированию новых компонентов течений, что сопровождается генерацией групп коротких волн капиллярного масштаба в широком временном диапазоне процесса. Для глубокой жидкости дисперсионное соотношение для случая коротких длин волн (порядка нескольких сантиметров и менее) записывается в виде

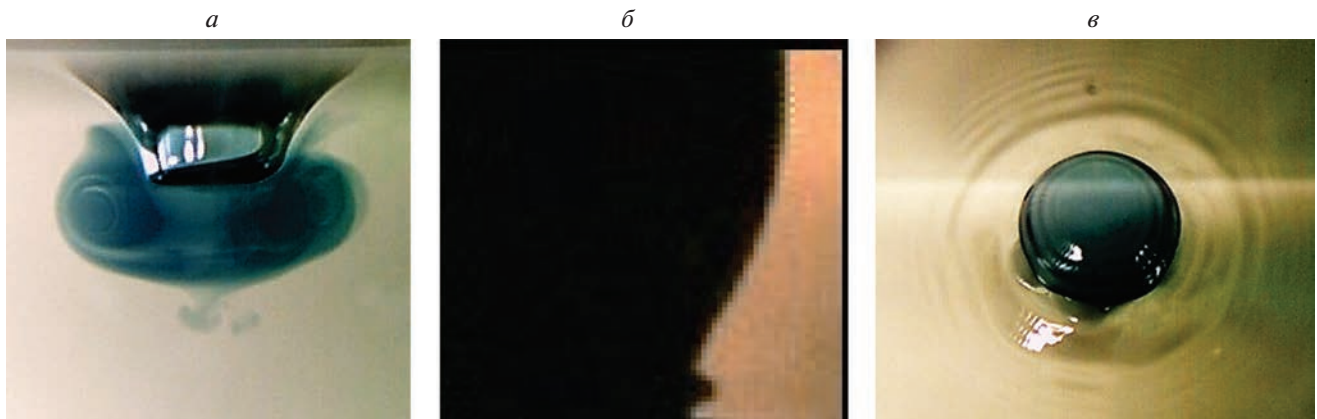
$$\omega = \pm \sqrt{k^3 \frac{\sigma}{\rho}}, \quad (1)$$

откуда фазовая скорость капиллярных волн ( $c^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$ ) находится по формуле

$$c = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{(\rho\lambda)}}, \quad (2)$$

где  $\lambda$  — длина волны.

Отношение кинетической и потенциальной энергии определяет режим течения: интрузивный для  $E_k < E_\sigma$  и режим всплеска при  $E_k > E_\sigma$  [7], где в случае смешивающихся жидкостей отмечен дискретный характер распределения вещества капли по поверхности каверны — лигаменты формируют полосы и сетку. Число ярусов сетки и концен-



**Рис. 1.** Погружение капли водного раствора чернил (концентрация 1 : 200,  $\rho = 1 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ ,  $\sigma = 73 \text{ г} \cdot \text{с}^{-2}$ ,  $\nu = 0.01 \text{ г} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ ) в режиме интрузии: а) задержка формирования каверны, б) пелена в области слияния капли с принимающей жидкостью (вид сбоку), в) капиллярные волны на поверхности капли и принимающей жидкости (вид сверху). Скорость капли  $U = 0.34 \text{ м/с}$ ,  $E_\sigma = 4 \text{ мкДж}$ ,  $E_k = 2.24 \text{ мкДж}$ ,  $Re = 1450$ ,  $Fr = 2.8$ ,  $We = 6.7$ ,  $Bo = 2.5$ ,  $Oh = 0.0018$ .

трация вещества капли в структуре зависят кинетической энергии капли [8].

### ИНТРУЗИВНЫЙ РЕЖИМ

В проведенных экспериментах режим интрузии наблюдался при погружении капель, свободно падающих с высот  $H = 1\text{--}5 \text{ см}$ , достигая при этом скорости в момент контакта  $U = 0.34\text{--}1 \text{ м/с}$ . Для интрузивного режима характерно формирование в принимающей жидкости сплошного объема капельной жидкости в форме погружающегося с постоянной скоростью вихря, формирование каверны начинается с задержкой 10–15 мс (рис. 1а) [7]. Энергии дисковой пелены, сформированной в области слияния жидкостей при контакте, недостаточно для развития эжекты и венца, диск быстро втягивается в интрузию (рис. 1б). Поскольку интрузивный режим наблюдается при малых скоростях погружения капли, короткие кольцевые капиллярные волны, сформированные у контактной линии слияния жидкостей, наблюдаются как на поверхности принимающей жидкости (их длина плавно увеличивается по мере погружения капли и достигает  $\lambda_c = 12 \text{ мм}$ ), так и на поверхности погружающейся капли от области контакта к ее вершине длиной  $\lambda_c = 1\text{--}6 \text{ мм}$  (рис. 1в). Над поверхностью жидкости растекающаяся капля образует коническую область с перемычкой, отделяющей остаток капли от формируемой интрузии (отскок капли). Далее процесс может многократно повторяться с длительными задержками вторичной капли на поверхности принимающей жидкости [9].

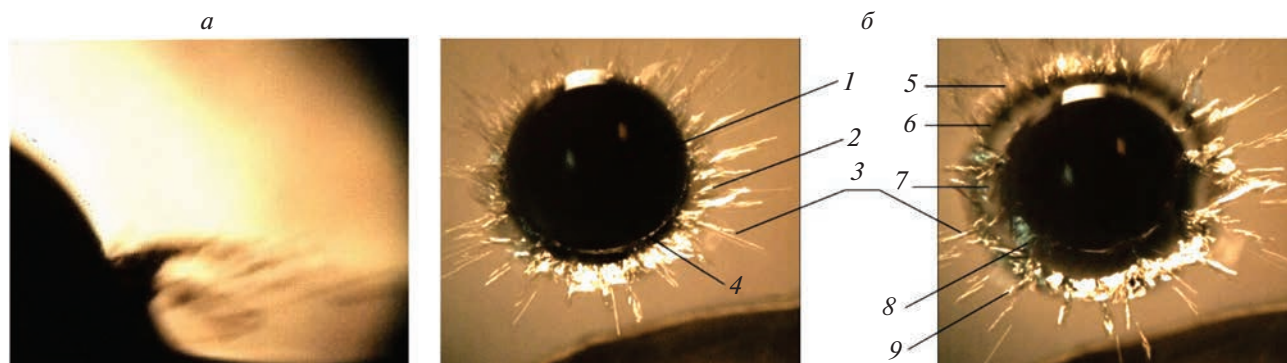
### РЕЖИМ ВСПЛЕСКА

Для режима всплеска характерно значительно большее количество групп капиллярных волн на разных фазах процесса. В данной серии опытов режим задавался установкой высоты свободного падения капли от 10 до 200 см (скорость в момент контакта  $U = 1.4\text{--}5.2 \text{ м/с}$ ). Сверхкороткие капиллярные волны наблюдаются уже у линии контакта погружающейся капли (на дне формирующейся каверны) на временах порядка 0.2–0.5 мс от соприкосновения. На начальном этапе слияния жидкостей при уничтожении поверхностных слоев происходит трансформация выделенной ДППЭ в сверхбыструю эжекту (скорость вылета брызг из области слияния в 4–5 раз превосходит скорость капли), ориентированную радиально по периметру зоны слияния, и эшелоны брызг, отделяющиеся от эжекты в радиальном направлении. Множественность брызг указывает на множественность и дискретность их источников (рис. 2а).

Тонкие брызги, формирующие пелену и, далее, шеврон венца, ориентированы в широком диапазоне углов, что предопределяет удар части из них по поверхности погружающейся капли (рис. 2б). Попадание мелких брызг на поверхность погружающейся капли определяется относительной разностью коэффициентов поверхностного натяжения жидкостей  $R_\sigma = \frac{(\sigma_t \sigma_d)}{(\sigma_t + \sigma_d)}$  и может приводить к генерации групп капиллярных волн, периодически расположенных по линии контакта жидкостей при  $R_\sigma \leq 0$ . Длины волн в таких группах, как правило, порядка  $\lambda_c \sim 0.1 \text{ мм}$ .

В процессе эволюции импакта капли увеличивается как угол вылета брызг и капель (от  $5^\circ\text{--}6^\circ$





**Рис. 2.** Слияние капли водного раствора ализариновых чернил в режиме всплеска: распад контактной поверхности на множественные брызги (*а*), формирование структуры тонких течений (*б*) при погружении капли раствора ализариновых чернил в воду: 1 – капля, 2 – изрезанная кромка пелены, 3 – брызги, 4 – линия контакта сливающихся жидкостей с капиллярными волнами, 5 – тонкая пелена, 6, 7 – поверхности венца и каверн, 8 – группы капиллярных волн на поверхности капли, 9 – шипы венца.  $U = 3.5$  м/с,  $E_G = 4$  мкДж,  $E_k = 238$  мкДж,  $Re = 15000$ ,  $Fr = 290$ ,  $We = 730$ ,  $Bo = 2.5$ ,  $Oh = 0.0018$ .

при первичном контакте до  $90^\circ$  на этапе схлопывания каверны), так и их линейный размер (капли до 1 мм) [10]. Структура распада контактной границы включает обилие компонентов течений (рис. 2), геометрия которых рассматривалась в [11].

По мере развития тонких приповерхностных течений вещество капли распределяется дискретным образом, собирается в тонких линейчатых и сетчатых элементах – волокнах (рис. 3*а* и 3*б*). В верхнем ряду венца волокна шириной порядка гравитационно-капиллярного масштаба образуют периодическую вертикальную линейчатую структуру. Группы волокон сливаются на кромке венца и продолжают в виде шипов, с вершин которых выбрасываются мелкие вторичные капли. На поверхности каверны выражена сетчатая структура, включающая трех-, четырех- и пятиугольные ячейки с диффузной областью на дне и перфорацией на дне и в узлах сетки.

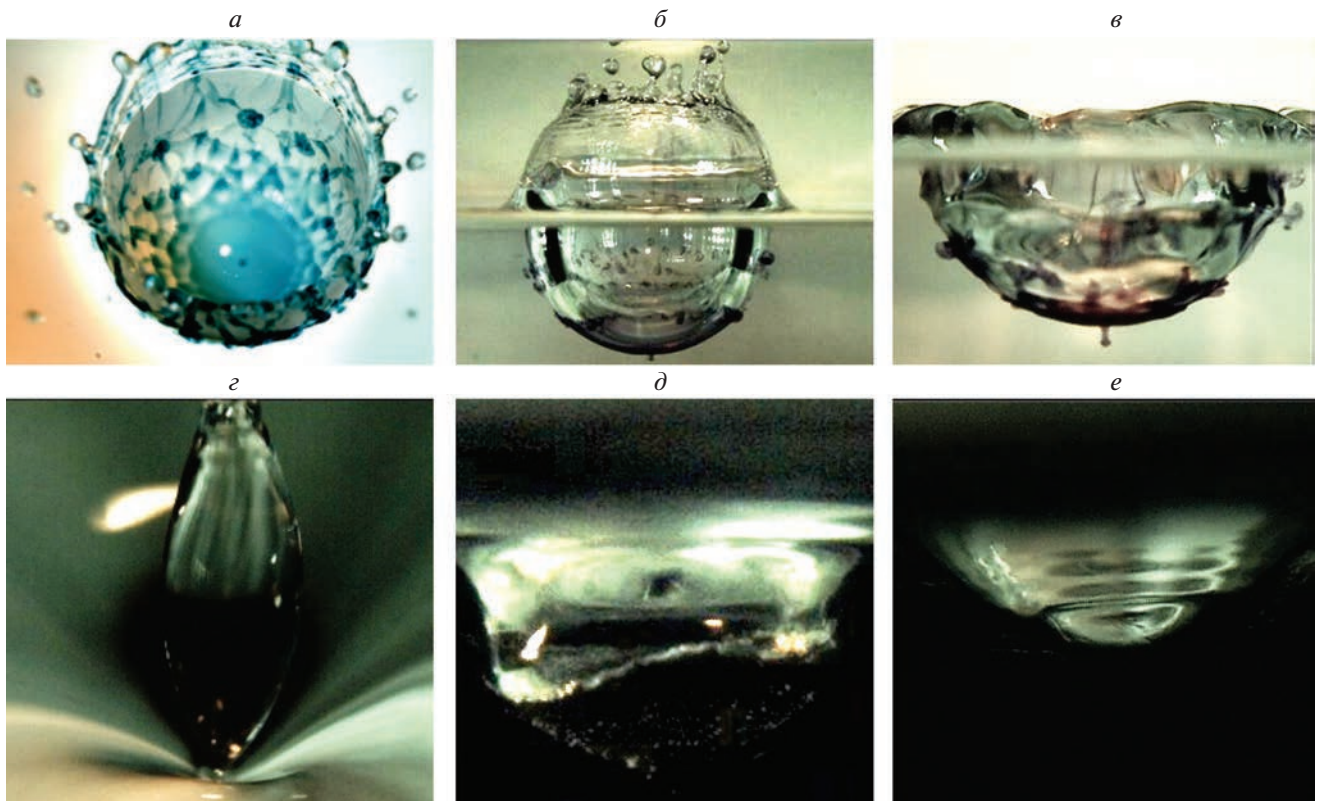
Линейчатые структуры устойчиво воспроизводятся, наблюдаются во всех фазах процесса слияния капли: на растущей каверне и венце, а также на заполняющейся каверне и погружающемся венце, сохраняются до распада кумулятивной струи [12]. Положение и пространственная ориентация волокон со временем меняются.

В узлах сетчатой картины распределения вещества капли по поверхности каверны ярусно формируются вихри, развивающиеся внутри принимающей жидкости (перфорация стенок каверны). Трансформация приповерхностных вихрей в петли происходит на этапе схлопывания каверны, который сопровождается генерацией на поверхности каверны волн, длина и амплитуда которых растет со временем (рис. 3*в*). Наибольшие

угловые и линейные трансформации вихрей происходят на гребнях волн [13].

Одновременно с заполнением каверны происходит спадание венца. При этом с его вершины по поверхности сбегает капиллярные волны, длина которых растет со временем и лежит в диапазоне  $\lambda_c = 2\text{--}5$  мм. По мере заполнения каверны жидкостями и разрушения венца капиллярные волны сбегает по их поверхностям к центру, где формируется центральная (кумулятивная) струя – всплеск. Поверхность каверны при этом искажена крупными капиллярными волнами  $\lambda_c = 6\text{--}10$  мм большой амплитуды, наличие которых выражается в дискретном характере роста длин и углов пространственного положения вихревых петель, образующихся из вихрей в узлах сетчатых структур. Система кольцевых капиллярных волн движется радиально и от области контакта жидкостей, рассмотрена подробно в [14]. Их длина в данных опытах плавно возрастала от  $\lambda_c \approx 0.5\text{--}1$  мм и достигала 12 мм.

Боковая поверхность струи между каустиками покрыта короткими кольцевыми капиллярными волнами длиной  $\lambda_c \sim 0.1$  мм. Капиллярные волны наблюдаются позднее на вершине струи при отрыве вторичных капель (длиной  $\lambda_c \sim 0.5$  мм) и на заостренном основании струи при ее отрыве от деформированной принимающей жидкости ( $\lambda_c = 0.1\text{--}0.15$  мм, рис. 3*г*). За отрывом струи следует частичное сжатие струи и формирование вторичной каверны в принимающей жидкости, в которую погружается струя. Для второй каверны характерно наличие двух локальных максимумов глубины, обусловленных сложным характером взаимодействия погружающегося всплеска с де-



**Рис. 3.** Режим всплеска при погружении капли водного раствора чернил в воду: дискретные структуры импакта при  $U = 3.5$  м/с (а) и при  $U = 5.2$  м/с (б);  $E_\sigma = 4.2$  мкДж,  $E_k = 562$  мкДж,  $Re = 22300$ ,  $Fr = 640$ ,  $We = 1600$ ,  $Bo = 2.5$ ,  $Oh = 0.0018$ ; крупные капиллярные волны на поверхности каверны (в), погружающегося всплеска (г) и заполняющейся вторичной каверны (д); облако мелких пузырей, формируемое при быстром схлопывании вторичной каверны (е):  $U = 3.5$  м/с.

формированной поверхностью принимающей жидкости, в которой сохраняются тонкие течения, сопровождающие эволюцию первичной каверны.

Погружение струи и мгновенное заполнение ею полости каверны обуславливают формирование в принимающей жидкости газовых полостей и пузырей широкого диапазона размеров. При этом облако пузырей воспроизводит первичную форму каверны (рис. 3д). На поверхности остатка заполняющейся каверны наблюдаются короткие капиллярные волны длиной  $\lambda_c = 0.1\text{--}0.2$  мм (рис. 3е). Подробно динамика захлопывания второй и последующих каверн описана в [15].

Формирование третьей каверны связано с прохождением верхней кромки всплеска через свободную поверхность. Она отличается заостренной формой с острыми складками, обусловленными сильными взаимодействиями погружающейся жидкости с остаточными течениями в принимающей жидкости. Схлопывание третьей каверны и, в частных случаях, второй каверны сопровождается отделением крупных пузырей эволюционирующей формы. Осциллирующие пузыри непра-

вильной формы являются источниками пакетов акустических сигналов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты большого числа опытов показали наличие устойчиво воспроизводимого, обширного набора тонких течений, образующихся в зоне слияния свободно падающей капли с поверхностью принимающей жидкости, среди которых выделяются быстрые струи, переносящие вещество капли волокна (лигаменты), капиллярные волны, зубцы, шипы, брызги, периодически возмущенную структуру поверхности венца и резкие границы ячеек. Генерация быстрых компонентов импакта капли обусловлена процессами конверсии доступной потенциальной поверхностной энергии в другие формы (флуктуации давления и температуры, движение новых компонентов с образованием новых поверхностей) в зоне слияния при уничтожении контактных поверхностей. Дальнейшая эволюция тонких течений включает формирование венца и каверны с дискретным распределением вещества, выброс брызг, а также генерацию коротких капиллярных волн на вновь образованных компонентах течений.



Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-19-00598). Эксперименты выполнены на стенде ТБП Гидрофизического комплекса для моделирования гидродинамических процессов (УИУ “ГФК ИПМех РАН”).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lan M., Wang X., Zhu P., Chen P.* // Energy Procedia. 2015. V. 66. P. 173.
2. *Bhagat R.K., Wykes M.S.D., Dalziel S.B., Linden P.F.* // J. Fluid Mech. 2020. V. 903. Art. No. F1.
3. *Ray B., Biswas G., Sharma A.* // Commun. Comput. Phys. 2012. V. 11. No. 4. P. 1386.
4. *Chashechkin Yu.D.* // Mathematics. 2021. V. 9. No. 6. P. 586.
5. *Чашечкин Ю.Д.* // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Ест. науки. 2021. No. 1(94). С. 73.
6. *Teschke O., de Souza E.F.* // Phys. Chem. 2005. V. 7. No. 22. P. 3856.
7. *Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю.* // ДАН. Физ. тех. науки. 2021. Т. 496. № 1. С. 45; *Chashechkin Y.D., Ilinykh A.Y.* // Dokl. Phys. 2021. V. 66. No. 1. P. 20.
8. *Ильиных А.Ю.* // ПММ. 2019. Т. 83. № 3. С. 413; *Ilinykh A.Y.* // Fluid Dynam. 2019. V. 54. No. 7. P. 927.
9. *Chashechkin Y.D., Ilinykh A.Y.* // FDMP. 2020. V. 16. No. 4. P. 801.
10. *Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю.* // ДАН. Физ. тех. науки. 2020. Т. 494. С. 42; *Chashechkin Y.D., Ilinykh A.Y.* // Dokl. Phys. 2020. V. 65. No. 10. P. 366.
11. *Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю.* // ДАН. Физ. тех. науки. 2021. Т. 497. С. 31; *Chashechkin Y.D., Ilinykh A.Y.* // Dokl. Phys. 2021. V. 66. No. 4. P. 101.
12. *Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю.* // ДАН. Физ. тех. науки. 2018. Т. 481. № 2. С. 145; *Chashechkin Y.D., Ilinykh A.Y.* // Dokl. Phys. 2018. V. 63. No. 7. P. 282.
13. *Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю.* // ДАН. Физ. тех. науки. 2021. Т. 499. № 1. С. 48; *Chashechkin Y.D., Ilinykh A.Y.* // Dokl. Phys. 2021. V. 66. No. 8. P. 234.
14. *Zhu G.Z., Li Z.H., Fu D.Y.* // Chin. Sci. Bull. 2008. V. 53. P. 1634.
15. *Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю.* // ДАН. Физ. тех. науки. 2022. Т. 502. С. 36; *Chashechkin Y.D., Ilinykh A.Y.* // Dokl. Phys. 2022. V. 67. No. 1. P. 15.

## Waves and bubbles of drop impact

**A. Yu. Ilinykh\***

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia*

*\*e-mail: ilinykh@ipmnet.ru*

High-speed video recording methods have been used to visualize a wide range of thin fast flows (capillary waves, ligaments, vortex structures) caused by the processes of surface energy conversion into other forms (pressure and temperature fluctuations, formation, and movement of new components) during the destruction of contact surfaces in confluence of a freely falling drop with a target fluid.

УДК 537.9:538.91

## ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТНОЙ ГЕТЕРОСТРУКТУРЫ MgO/CoFeB/Ta ГАРМОНИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

© 2023 г. А. С. Трушин<sup>1</sup>, Г. А. Кичин<sup>1</sup>, \*, К. А. Звездин<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup>Общество с ограниченной ответственностью “Новые спинтронные технологии”,  
Российский квантовый центр, Сколково, Россия

<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Федеральный исследовательский центр  
“Институт общей физики имени А.М. Прохорова Российской академии наук”, Москва, Россия

\*E-mail: g.kichin@nst.tech

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Изучена структура типа тяжелый металл/ферромагнетик MgO/CoFeB/Ta с плоскостной намагниченностью и высокой спиновой поляризацией. Метод адиабатического гармонического напряжения Холла использован для исследования эффективного коэффициента затухания, а также для оценки значений величин эффективных полей, которые возникают в подобных структурах под действием спин-поляризованного тока.

DOI: 10.31857/S0367676522700193, EDN: JTZHOL

Управление намагниченностью наноустройств без использования внешних магнитных полей, представляет большой интерес, поскольку такой подход открывает широкие возможности для разработки новых спинтронных и логических устройств, которые можно просто и эффективно интегрировать в классические электронные схемы. Управление намагниченностью в таких структурах возможно за счет протекания спин-поляризованного тока перпендикулярно поверхности границы раздела слоев структуры [1].

Также возможно переключение намагниченности за счет эффектов, которые связаны со спин-орбитальным взаимодействием. Сюда относят такие эффекты как спиновый эффект Холла [2] и эффект Рашбы–Эдельштейна [3, 4]. Спиновый эффект Холла заключается в том, что при пропускании тока через систему с большим спин-орбитальным взаимодействием, на границе между магнитным материалом и немагнитным материалом с большим спин-орбитальным моментом аккумулируются спин-поляризованные электроны. Далее эти электроны диффундируют в магнитный слой, что приводит к переключению намагниченности. Эффект Рашбы–Эдельштейна связан с нарушением симметрии поверхностных состояний на границе раздела двух слоев и с возникновением нескомпенсированного электрического поля, что приводит к появлению эффективного магнитного поля, непосредственно

действующего на намагниченность магнитного слоя.

В обоих случаях создается эффект, схожий с возникновением дополнительного “эффективного магнитного поля”, которое влияет на намагниченность. Для оценки этого “эффективного магнитного поля” нами был использован метод адиабатического (низкочастотного) гармонического напряжения Холла. Такой подход впервые был предложен в работе [5], а подобная теория была разработана в первую очередь в статье [6].

Нами была исследована структура с намагниченностью, ориентированной в плоскости образца. Для описания динамики намагниченности используется уравнение Ландау–Лифшица–Гильберта:

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = -\gamma \vec{M} \cdot \vec{H}_{eff} + \alpha \vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}, \quad (1)$$

где  $\vec{M}$  — намагниченность образца,  $\gamma$  — гиромагнитное отношение,  $\alpha$  — константа затухания Гильберта,  $\vec{H}_{eff}$  — эффективное магнитное поле. В эффективное поле входят внешнее постоянное поле, поле размагничивания, анизотропии, а также дополнительное поле, которое связано с протекающим в образце спин-поляризованным током. Данная составляющая имеет вид:

$$\Delta \vec{H}_{sc} = a_J (\vec{m} \cdot \vec{p}) + b_J \vec{p}, \quad (2)$$

где  $a_J$  — коэффициент затухания,  $b_J$  — полевой член,  $\vec{m}$  — единичный вектор намагниченности,

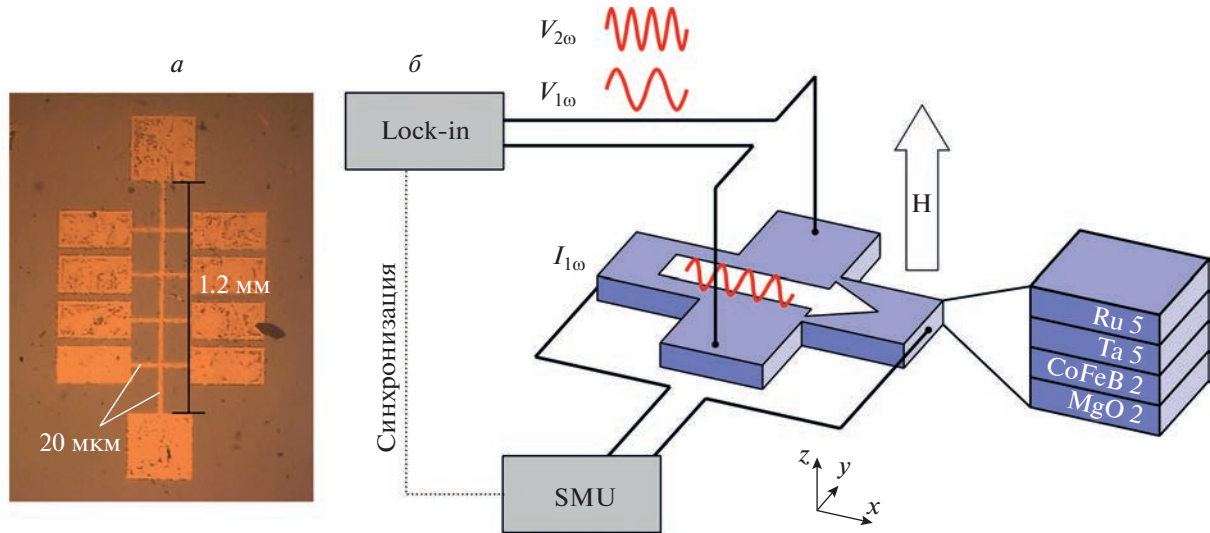


Рис. 1. Микрофотография образца (а) и схема эксперимента (б).

$\vec{p}$  — единичный вектор направления поляризации немагнитного слоя структуры. При больших значениях тока как раз член  $\Delta H_{sc}$  играет ключевую роль в переключении намагниченности. Гармонический метод позволяет эффективно измерять компоненты поля  $\Delta H_{sc}$ . Для вектора  $\vec{p}$ , направленного по оси  $y$ , где за ось  $x$  принимается направление протекания тока.  $\Delta H_{sc}$  имеет вид:

$$\Delta H_{sc} = (\Delta H_x, \Delta H_y, \Delta H_z) = (-a_J \cos \theta_0, b_J, a_J \sin \theta_0 \cos \varphi_H), \quad (3)$$

где  $\theta_0$  — это полярный угол равновесного положения намагниченности образца, а  $\varphi_H$  азимутальный угол направления внешнего поля. Для образца, с намагниченностью в плоскости, верно, что  $\theta_0 \approx \frac{\pi}{2}$ . Дальнейшее теоретическое рассмотрение полагается на варьирование магнитной энергии образца по углам отклонения намагниченности от состояния равновесия, в предположении малости этого угла [6]. Это обстоятельство накладывает естественные ограничения на направление и величину внешнего поля, которое должно быть направлено приблизительно по нормали к образцу и, в конкретно данном методе, не выводить намагниченность из плоскости.

Формула для поля, порожденного коэффициентом затухания, имеет вид:

$$H_{DL} = \Delta H_z = -2 \left( \frac{\partial V_{2\omega}^{xx}}{\partial H} \right) / \left( \frac{\partial^2 V_{\omega}^{xx}}{\partial H^2} \right), \quad (4)$$

а для поля, порожденного полевым членом:

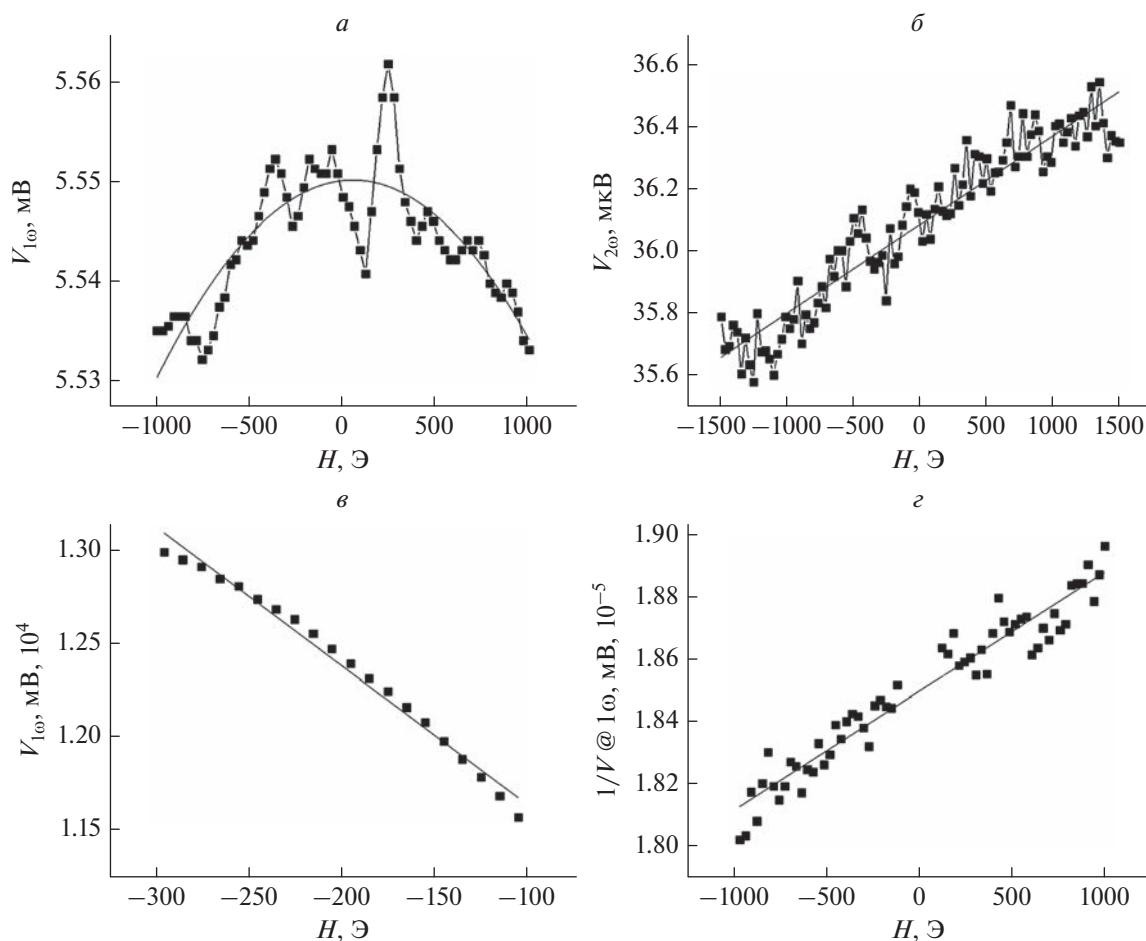
$$H_{FL} = \Delta H_y = \frac{\sin 2\theta_H}{2\xi H_K} \left[ \left( \frac{\partial V_{\omega}}{\partial H} \right) \left( \frac{\partial (1/V_{2\omega})}{\partial H} \right) \right]^{-1}, \quad (5)$$

где  $\xi = \frac{\Delta R_p}{\Delta R_A}$  — отношение изменения сопротивления, вызванного планарным эффектом Холла и вызванного аномальным эффектом Холла.

$H_K = \frac{K_{eff}}{M_s}$ , где  $K_{eff}$  — эффективная энергия внеплоскостной анизотропии,  $M_s$  — намагниченность насыщения.

Нами был изучен образец, представляющий собой наноразмерную магнитную гетероструктуру, Структура слоев: MgO (2)|CoFeB (2)|Ta (5)|Ru (5) (в скобках указаны толщины слоев в нм). В качестве подложки использовался оксид магния(II). Намагниченность ориентирована в плоскости образца. Образец имеет крестообразную форму длиной 1.2 мм и шириной 20 мкм (см. рис. 1а).

Схема эксперимента показана на рис. 1б. Для генерации тока был использован источник-измеритель SMU NI-PXIe-4137. Данная модель имеет встроенную функцию генератора сигналов произвольной формы, что позволяет формировать в том числе синусоидальный сигнал тока с частотами вплоть до ~5 кГц. Такая возможность позволяет использовать данный прибор совместно с синхронным детектором, чтобы делать измерения продольного и холловского напряжения на первой и на второй гармониках. Сразу после SMU дополнительно был установлен фильтр высоких частот, убирающий лишний высокочастотный шум, что важно для эффективного детектирования сигнала на второй гармонике. Сигнал с



**Рис. 2.** Первая гармоника отклика и аппроксимация при продольном подключении (а); вторая гармоника отклика и аппроксимация при продольном подключении (б); первая гармоника отклика и аппроксимация при поперечном подключении (в); обратная второй гармонике отклика величина и аппроксимация при поперечном подключении (г).

SMU подавался на образец, а также синхронизировался с синхронным усилителем Stanford Research 830. Через образец пропускался ток с максимальной плотностью  $0.5 \cdot 10^7 \text{ A} \cdot \text{cm}^{-2}$ . Подключение приборов к образцу производилось при помощи контактных зондов. Сам образец был помещен в постоянное магнитное поле, направленное перпендикулярно плоскости его поверхности. Поле варьировалось в пределах от  $-1500$  до  $1500$  Э. В эксперименте измерялось как продольное напряжение, так и поперечное, холловское напряжение. Результаты исследования сравнивались с результатами, полученными в работе [7], а также с данными работ [6, 8–10], где порядок слов был инвертирован (Ta|CoFeB|MgO).

Результаты эксперимента представлены на рис. 2: рис. 2а и 2б – продольное напряжение, измеренное на первой и на второй гармонике, рис. 2в и 2г – поперечное (холловское) напряжение и величина, обратная амплитуде второй гармоники. Последнее представлено в таком виде для удобства аппроксимации и подстановки в

формулу (5). Значение сигнала на первой гармонике при продольном подключении аппроксимируется параболой. Остальные величины аппроксимируются линейными зависимостями. В результате измерений для нашей структуры было получено значение ослабляющей компоненты поля  $H_{DL} = 17$  Э, что согласуется со значением, полученным в работе [8], где для схожих параметров было получено  $H_{DL} = 15$  Э.

Для получения значения полевого члена магнитное поле необходимо дополнительно немного отклонять от вертикали. Для этих целей был использован постоянный магнит, который создавал продольное поле величиной  $\sim 5$  Э. В связи с этим, при малых величинах перпендикулярной компоненты поля (менее  $100$  Э) нарушалось условие  $\theta_H \ll 1$ , используемое в выводе формул, что приводило к повышенной погрешности результатов измерений. Эти области были исключены из итоговых графиков. Помимо этого, в силу приближения  $H_K \gg H$ , где  $H_K$  оценивается примерно в

2000 Э [3], развертка по полю для первой гармоники ограничена по модулю 300 Э. Положительная область графика не рассматривается в силу наличия в этой области пиков, схожих по форме с пиками, которые получаются при измерении первой гармоники при продольном подключении. Оба этих графика аппроксимированы линейными зависимостями. Отношение планарного эффекта Холла к аномальному составляет 0.1. В результате исследований получено значение в  $H_{FL} = 440$  Э, что несколько меньше чем в работе [8], где  $H_{FL}$  составляло 500 Э. Полученные в эксперименте значения несколько отличаются от значений, которые были получены в работе [7] и больше схожи со значениями из работы [4], где слои структуры были выращены в обратном порядке. Численные результаты в этих работах сопоставимы. Отклонение результатов в меньшую сторону мы связываем с особенностями технологии производства и точностью определения  $H_K$ , которое следует измерять отдельно, например, с помощью вибрационного магнитометра.

Получаемые в результате эксперимента величины напрямую связаны с фундаментальными физическими параметрами материалов, поэтому сразу возникает желание вычислить угол спин-холла. Однако, как показывает работа [8], стоит рассматривать полученные значения полей, создаваемых спиновым током, лишь как эффективные для данной конкретной структуры в целом, а не для входящих в нее отдельных немагнитных материалов. Так же стоит отметить, что имеет место зависимость параметров  $H_{FL}$  и  $H_{DL}$  от толщин слоев MgO и Ta, входящих в структуру, а также от температуры и подаваемой плотности тока. Первое обстоятельство связано с тем, что переходный слой между слоями структуры не идеально ровный и поэтому сильно влияет на создаваемое эффективное поле. Для извлечения корректных зна-

чений, относящихся не ко всей структуре в целом, а к отдельным ее слоям, необходимо проводить дополнительные исследования.

Таким образом, нами было продемонстрировано использование гармонического метода Холла для измерения и оценки эффективных магнитных полей, которые создаются спиновым током. Полученные результаты хорошо согласуются с описанными в литературе. Исследование структуры показало, что в начальном приближении прямой и обратный порядок следования слоев в структуре незначительно влияет на значение  $H_{FL}$  и  $H_{DL}$ . Метод показал свою эффективность и удобство использования.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 19-12-00432).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brataas A., Kent A.D., Ohno H. // Nature Mater. 2012. V. 11. P. 372.
2. Ralph D.C., Stiles M.D. // J. Magn. Magn. Mater. 2008. V. 320. P. 1190.
3. Bychkov Y.A., Rashba E.I. // J. Phys. C. 1984. V. 17. P. 6039.
4. Edelstein V.M. // Solid State Commun. 1990. V. 73. P. 233.
5. Pi U.H., Kim K.W., Bae J.Y. et al. // Appl. Phys. Lett. 2010. V. 97. Art. No. 162507.
6. Hayashi M., Kim J., Yamanouchi M., Ohno H. // Phys. Rev. B. 2014. V. 89. Art. No. 144425.
7. Wong Q.Y., Gan W.L., Luo F.L. et al. // J. Phys. D. 2018. V. 51. Art. No. 115004.
8. Cecot M., Karwacki Ł., Skowroński W. et al. // Sci. Rep. 2017. V. 7. Art. No. 968.
9. Gamou H., Du Y., Kohda M., Nitta J. // Phys. Rev. B. 2019. V. 99. Art. No. 184408.
10. Kim G.W., Cuong D.D., Kim Y.J. et al. // NPG Asia Mater. 2021. V. 13. Art. No. 60.

## Study of magnetic heterostructure MgO/CoFeB/Ta using the harmonic method

A. S. Trushin<sup>a</sup>, G. A. Kichin<sup>a, \*</sup>, K. A. Zvezdin<sup>a, b</sup>

<sup>a</sup>New Spintronics Technologies LLC, Russian Quantum Center, Skolkovo, 143026 Russia

<sup>b</sup>Prokhorov Institute of General Physics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119333 Russia

\*e-mail: g.kichin@nst.tech

The heavy metal/ferromagnet type MgO/CoFeB/Ta structure with in-plane magnetization and high spin polarization was studied. We use the adiabatic harmonic Hall voltage method to study the effective damping coefficient and to estimate the values of the effective fields that arise in such structures under the action of a spin-polarized current.

УДК 538.955

## ЭВОЛЮЦИЯ МОД МАГНИТНОГО ТУННЕЛЬНОГО ПЕРЕХОДА ПРИ ИЗМЕНЕНИИ НАПРАВЛЕНИЯ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

© 2023 г. М. Д. Шканакина<sup>1,2,\*</sup>, Г. А. Кичин<sup>1</sup>, П. Н. Скирдков<sup>1,3</sup>, М. Г. Путря<sup>2</sup>, К. А. Звездин<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Общество с ограниченной ответственностью

“Новые спинтронные технологии”, Российский квантовый центр, Сколково, Россия

<sup>2</sup>Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

“Национальный исследовательский университет “Московский институт электронной техники”, Москва, Россия

<sup>3</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Федеральный исследовательский центр

“Институт общей физики имени А.М. Прохорова Российской академии наук”, Москва, Россия

\*E-mail: m.shkanakina@nst.tech

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Выполнено экспериментальное исследование влияния величины и направления внешнего магнитного поля на динамику намагниченности свободного слоя в магнитных туннельных переходах диаметром 100, 150 и 250 нм. В образцах малого диаметра (100 нм) обнаружены две моды свободного слоя. Первая мода является менее чувствительной к величине и направлению внешнего магнитного поля по отношению ко второй моде, которая смещается в частотной области. С увеличением геометрических размеров магнитных туннельных переходов наблюдалась неоднородность намагниченности свободного слоя в малых полях, а также идентифицирована мода, не чувствительная к направлению внешнего магнитного поля. Проведено макроспиновое моделирование поведения однородной моды свободного слоя формы: диска и эллипса, при фиксированной величине и различных направлениях внешнего магнитного поля.

DOI: 10.31857/S036767652270020X, EDN: JTZPNY

### ВВЕДЕНИЕ

Спинтроника представляет собой быстро развивающееся перспективное направление нанoeлектроники. В спинтронных устройствах, наряду с зарядом, используется спиновая степень свободы электрона, что предоставляет новые функциональные возможности для обработки и передачи информации. На сегодняшний день спинтронные устройства уже применяются в магниторезистивных считывающих головках жестких дисков [1], сенсорах магнитного поля [2], в магниторезистивной оперативной памяти [3–5]. В основе таких устройств лежит магнитный туннельный переход (МТП) [6], состоящий из двух ферромагнитных слоев, разделенных диэлектриком MgO. Нижний ферромагнитный слой обладает фиксированной ориентацией намагниченности и называется опорным, а верхний ферромагнитный слой, имеющий переменную ориентацию намагниченности, называется свободным. В настоящее время большой интерес исследователей вызывают спинтронные микроволновые приборы, такие как наногенераторы [7] и спин-диодные детекторы [8]. В спин-трансферных диодах, при подаче переменного сверхвысокочастотного (СВЧ) тока на

верхний электрод МТП с частотой, близкой к частоте его ферромагнитного резонанса, в свободном слое наблюдается динамическое возбуждение намагниченности, что ведет к выпрямлению входящего радиочастотного сигнала. Данный процесс имеет сложный многомодовый характер и может быть изучен с помощью экспериментальной методики ST-FMR (англ. spin-torque ferromagnetic resonance; ферромагнитный резонанс с переориентацией спина) [8]. В данной работе экспериментально и теоретически исследовано возбуждение намагниченности свободного слоя МТП сверхвысокочастотным спин-поляризованным током в зависимости от направления и величины внешнего магнитного поля.

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Исследуемые образцы представляют из себя многослойную структуру: CoFe<sub>30</sub> (1.8, опорный слой)/MgO (туннельный барьер)/CoFe<sub>40</sub>B<sub>20</sub> (2)/Ta (0.2)/NiFe (7) (в скобках указана толщина слоя в нм и его тип; последние три слоя составляют свободный слой). Магнитные туннельные переходы изготовлены в International Iberian Nano-

**Таблица 1.** Характеристики исследуемых образцов

| Образец             | S1  | S2  | S3  | S4  |
|---------------------|-----|-----|-----|-----|
| Диаметр образца, нм | 100 | 100 | 150 | 250 |
| ТМС, %              | 119 | 77  | 94  | 83  |

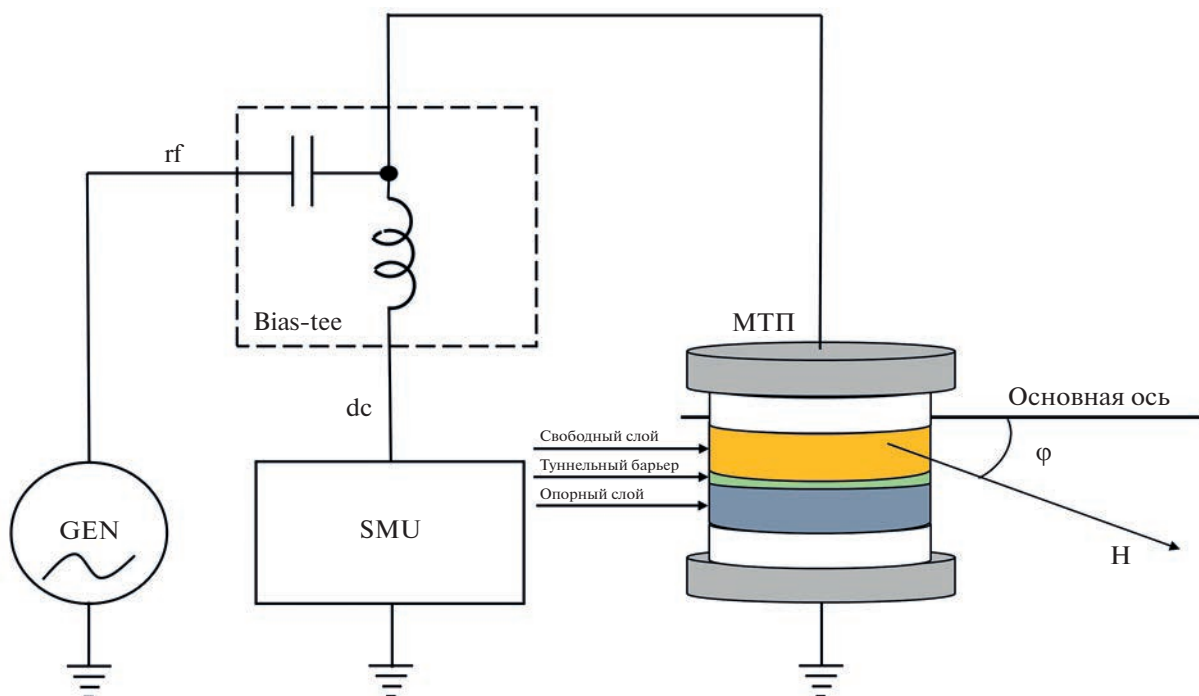
technology Laboratory. По окончании нанесения стека слоев, образцы отжигаются при температуре 330°C в магнитном поле в течение двух часов, тем самым магнитные слои приобретают намагниченность в плоскости и монокристаллическую структуру. Подробная информация о размерах и ТМС (туннельном магнетосопротивлении) [8, 9] образцов представлена в табл. 1.

Для изучения динамики намагниченности ферромагнитных слоев в магнитных туннельных переходах была использована экспериментальная методика ST-FMR (рис. 1). С использованием генератора Pxl-5652 на образцы подавался переменный ток мощностью 10 дБм, частота которого варьировалась в диапазоне от 2 до 6 ГГц. Частотный диапазон был выбран так, чтобы минимизировать влияние низкочастотного шума на форму мод. Напряжение на выходе образцов регистрировалось с помощью прецизионного источника-измерителя PXle-4137.

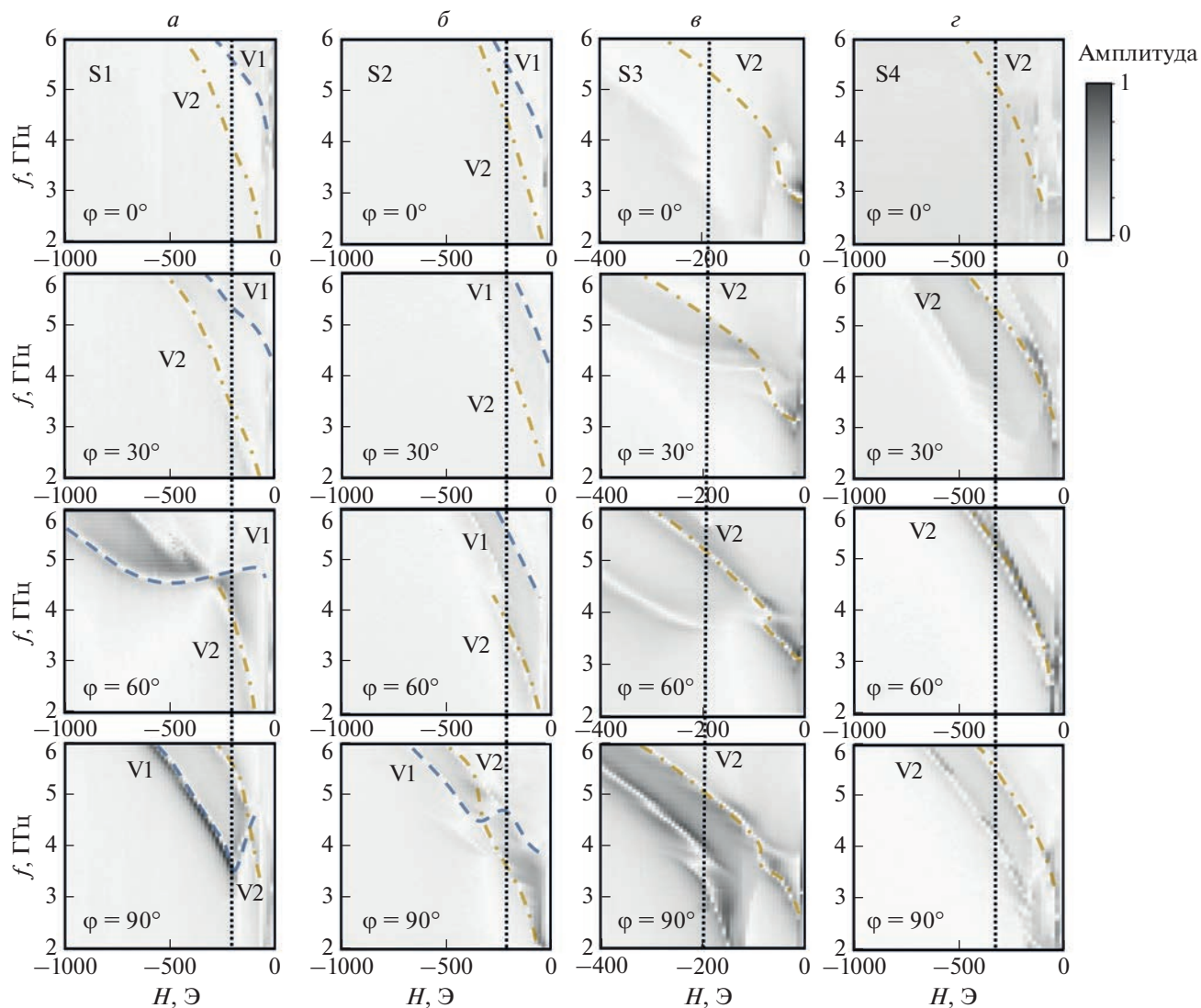
Измерения проводились при различных направлениях внешнего магнитного поля относительно основной оси намагниченности  $\varphi \in [0^\circ; 90^\circ]$  образца, и в диапазонах величин внешнего магнитного поля  $(-1000; 0 \text{ Э})$ ,  $(-1000; 0 \text{ Э})$ ,  $(-1000; 0 \text{ Э})$  для образцов S1, S2, S4,  $(-400; 0 \text{ Э})$  для образца S3. Погрешность угла не превышала  $1^\circ$ . Все результаты приведены для образцов, имеющих начальное состояние – антипараллельное, когда вектора намагниченности свободного и опорного слоев противоположно направлены.

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

В результате проведения эксперимента (рис. 2а) над образцом S1 было обнаружено две моды: V1 и V2, существующие на частотах выше 4 и 2 ГГц соответственно. При изменении направления поля  $\varphi$  ферромагнитный резонанс (ФМР) V1 смещается вниз в частотной области, и при  $\varphi = 60^\circ$  пересекает моду V2, образуя минимум на частоте 4.5 ГГц. Впоследствии увеличения  $\varphi$  до  $90^\circ$ , минимум моды V1 смещается по частотной области вниз до 3.5 ГГц, что свидетельствует о значительной чувствительности ФМР V1 к направлению поля, по сравнению с модой V2. В то же время ферромагнитный резонанс V2 смещается вверх по частотной области на 1 ГГц при фикс-

**Рис. 1.** Схема эксперимента ST-FMR.





**Рис. 2.** Трехмерная карта зависимости положения ферромагнитных резонансов в частотной области в зависимости от величины и направления  $\varphi$  внешнего магнитного поля для образцов: S1 (а); S2 (б); S3 (в) и S4 (г). Контурные моды V1 и V2 выделены синим и оранжевым соответственно. Шкала представляет из себя нормализованную амплитуду постоянного сигнала. Штриховая линия позволяет при фиксированной величине поля следить за смещением ферромагнитного резонанса в частотной области для различных направлений поля.

сированном значении поля при изменении  $\varphi$  от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ .

Обнаружив в образце S1 слабо чувствительную моду к направлению внешнего магнитного поля, мы проверили ее наличие в таком же образце S2. На спектрах (рис. 2б) образца S2, наблюдаются две моды V1 и V2, существующие на частотах выше 3 и 2 ГГц соответственно. С изменением направления внешнего поля от  $0^\circ$  до  $90^\circ$  мода V1 смещается вниз по частоте и при  $\varphi = 90^\circ$  деформируется посредством пересечения моды V2, в то же время конфигурация моды V1 не претерпевает значительных изменений с увеличением угла по-

ля. Зафиксировав величину поля и изменяя его направление (рис. 2б), наблюдается перемещение ФМР V2 в частотной области вниз на 1 ГГц. Исходя из этого, мода V1 является более чувствительной к направлению поля по сравнению с модой V2.

С увеличением геометрических размеров образцов намагниченность свободного слоя становится более неоднородной, тем самым на спектрах (рис. 2в и 2г) наблюдается многомодовость [9, 10]. Неоднородные моды входят в классификацию краевых и оказывают серьезное воздействие на динамику переключения образца [11], тем самым влияя на работу спинтронных

устройств. Наибольшая концентрация таких мод приходится на около нулевые поля. Среди многообразия мод в S3 и S4 удалось идентифицировать моду V2, которая с изменением направления поля  $\varphi$  от  $0^\circ$ – $90^\circ$  не смещается в частотной области при фиксированном значении поля.

### МАКРОСПИНОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДИНАМИКИ НАМАГНИЧЕННОСТИ СВОБОДНОГО СЛОЯ МАГНИТНОГО ТУННЕЛЬНОГО ПЕРЕХОДА И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Динамика намагниченности свободного слоя магнитного туннельного перехода в макроспиновом приближении описывается уравнением Ландау-Лифшица–Гильберта (ЛЛГ) (1). Под макроспиновым приближением предполагается, что пространственным изменением намагниченности можно пренебречь и весь магнитный момент свободного слоя может быть представлен одним средним вектором  $\vec{M}$  “макроспином”. Такой вектор прецессирует вокруг эффективного поля  $H_{eff}$ , возникающего благодаря вкладу всех энергий  $E$  единицы объема.

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\gamma[\vec{M} \cdot \vec{H}_{eff}] + \vec{T}_{STT} + \frac{\alpha}{M_s} \left[ \vec{M} \cdot \frac{d\vec{M}}{dt} \right], \quad (1)$$

где  $\gamma$  – гиромагнитное отношение,  $\alpha$  – константа затухания Гильберта,  $M_s$  – намагниченность насыщения,  $\vec{T}_{STT}$  – вращающий момент, создаваемый эффектом переноса спина.  $T_{STT}$  состоит из двух компонент: вращающий момент Слончевского (ST) (2) и полевой вращающий момент (FLT) (3). Параметры, используемые в моделировании в системе СГС:  $\alpha = 0.01$ ,  $M_s = 920$  ед. СГС/см<sup>2</sup>.

$$T_{ST} = \gamma \frac{ja_j}{M_s} \vec{M} \cdot [\vec{m} \cdot \vec{M}], \quad (2)$$

$$T_{FLT} = \gamma b_j [\vec{M} \cdot \vec{m}], \quad (3)$$

где  $\vec{m}$  – нормализованный вектор намагниченности опорного слоя  $m_y \approx m_z \ll 1$ ,  $m_x = 1$ ,  $j$  – плотность тока вдоль, проходящего через магнитный туннельный переход, амплитуда ST определяется как  $a_j = \hbar P / 2eM_s$ , где  $\hbar$  – постоянная Планка,  $P$  – степень поляризации тока,  $h$  – толщина свободного слоя в см,  $e$  – заряд электрона. Параметры, используемые в моделировании в системе СГС:  $\alpha = 0.01$ ,  $M_s = 920$  ед. СГС/см<sup>2</sup>,  $P = 0.4$ ,  $h = 9 \cdot 10^{-7}$  см.

В данном случае энергия представляет из себя сумму энергии Зеемана (4), зависящей от направления внешнего магнитного поля  $\varphi$ , и магнито-

статической энергии (5), возникающей за счет анизотропии формы образца.

$$E_z = M_x H \cos(\varphi) + M_y H \sin(\varphi), \quad (4)$$

$$E_{sha.} = \frac{1}{2} (N_x M_x^2 + N_y M_y^2 + N_z M_z^2). \quad (5)$$

Где размагничивающие факторы  $N_x + N_y + N_z = 4\pi$ ,  $H$  – величина внешнего магнитного поля.

Предположим, что на образец подается переменный ток с амплитудой  $I_{ac}$  и частотой  $f$ , близкой к частоте его ферромагнитного резонанса, что приводит к динамике намагниченности свободного слоя и изменению сопротивления структуры, тогда на выходе магнитного туннельного перехода наблюдаются постоянная и переменная компоненты напряжения [6]. Для определения постоянного смещения необходимо усреднить по времени (6) в диапазоне от  $500T$  до  $1000T$ , где  $T$  – период переменного тока  $T = 1/f$ .

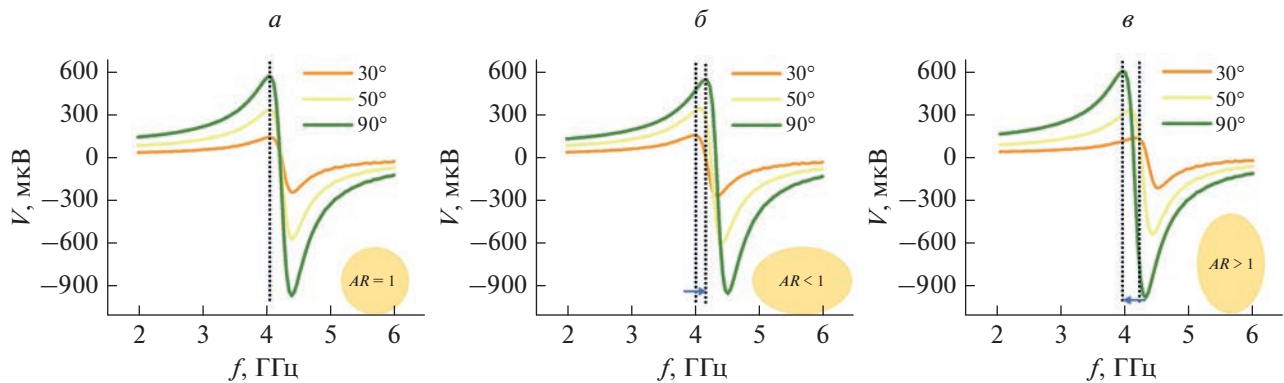
$$V_{rectified} = I_{ac} (\sin(2\pi f) (R_p + (1 - \vec{M} \cdot \vec{m}) dR/2)), \quad (6)$$

где  $dR = R_{ap} - R_p$ ,  $R_p$  ( $R_{ap}$ ) – сопротивление структуры, когда вектора намагниченности свободного и опорного слоев сонаправлены (противоположно направлены).

Определение смещения ферромагнитного резонанса в частотной области при различных  $\varphi$  промоделировано для трех случаев:

1. Аспектное соотношение полуосей образца ( $AR$ ) равно 1, при этом  $N_x = N_y = 0$ ,  $N_z = 4\pi$ ;
2.  $AR < 1$ , при этом  $N_y = 0$ ,  $N_x > 0$ ,  $N_x \ll N_z$ ;
3.  $AR > 1$ , при этом  $N_x = 0$ ,  $N_y > 0$ ,  $N_y \ll N_z$ .

На рис. 3а представлено влияние направления внешнего магнитного поля на ферромагнитный резонанс однородной моды идеально в идеально круглом образце. По результатам моделирования на фиксированной величине поля  $H = -200$  Э и различных направлениях поля наблюдается ФМР пик на частоте 4.04 ГГц, который с изменением направления поля не изменяет своего положения в частотной области. Данное поведение однородной моды схоже с поведением моды V2 в образцах S3 и S4, а значит образцы имеют идеально круглую форму. В образцах S1–S2 под влиянием направления внешнего магнитного поля ФМР смещается в частотном диапазоне. Данный сдвиг может быть связан с формой образца, которая при технологических этапах, например травлении пленки опорного слоя, могла приобрести эллиптичность, с аспектным соотношением радиусов немного больше (меньше) 1. Влияние технологи-



**Рис. 3.** Кривые ферромагнитного резонанса при фиксированной величине внешнего магнитного поля  $-200$  Э для: круглого образца с аспектным соотношением  $AR = 1$  (а); эллиптического образца с аспектным соотношением  $AR < 1$  (б); эллиптического образца с аспектным соотношением  $AR > 1$  (в). Штриховыми линиями обозначен ФМР-пик, а стрелкой — направление его смещения в частотной области при увеличении  $f$ .

ческих дефектов может быть существенным при создании элементов субмикронных размеров. Мы проверили данную гипотезу с помощью моделирования, добавив образцу эллиптичность. Зафиксировав поле  $-200$  Э (рис. 3б и 3в), мы обнаружили смещение ФМР-пика в частотной области сторону больших (меньших частот) для аспектного соотношения меньше (больше) единицы. Таким образом, мода V2 является однородной модой свободного слоя для образцов S1 и S2.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучены ST-FMR спектры для серии круглых образцов МТП различных размеров в зависимости от направления и величины внешнего магнитного поля. В образцах с диаметром 100 нм обнаружены две моды, одна из которых деформировалась с изменением направления поля, а ферромагнитный резонанс второй незначительно смещался в частотной области при изменении направления поля. Установлено, что данные моды устойчивы в широком диапазоне полей, что делает нетривиальным вопрос об их природе. Для разрешения этого вопроса были исследованы образцы более крупных размеров, на спектрах которых также была идентифицирована мода, нечувствительная к направлению поля и неоднородность намагниченности в малых полях — многомодовость. С помощью моделирования установлено, что мода, нечувствительная к направлению поля, является объемной модой свободного слоя, а сдвиги ее ФМР-пиков в образцах субмикронных размеров вызваны неидеальной формой МТП. Таким образом, краевые моды наблюдаются в динамике намагниченности магнитных слоев МТП

не только в малых полях, как описано в [10, 11], но и в больших полях, для образцов субмикронных размеров. Данный эффект наблюдается как в эксперименте, так и компьютерном моделировании.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 19-12-00432).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lenz J., Edelstein A.S. // IEEE Sens. J. 2006. No. 6. P. 631.
2. Kiselev S.I., Sankey J.C., Krivorotov I.N. et al. // Nature. 2003. V. 425. P. 380.
3. Katine J.A., Albert F.J., Buhrman R.A. et al. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. No. 14. P. 3149.
4. Hosomi M., Yamagishi H., Yamamoto T. et al. // Proc. IEDM'06 Tech. Dig. (San Francisco, 2006) P. 473.
5. Houssameddine D., Ebels U., Delaët B. et al. // Nature Mater. 2007. V. 6. P. 447.
6. Skirdkov P.N., Zvezdin K.A. // Annu. Phys. 2020. V. 532. No. 6. Art. No. 1900460.
7. Kawahara T., Takemura R., Miura K. et al. // Proc. ISSCC 2007 Tech. Dig. (San Francisco, 2007) P. 480.
8. Fang B., Carpentieri M., Louis S. et al. // Phys. Rev. Appl. 2019. No. 11. Art. No. 014022.
9. Sankey J.C., Cui J.-T., Sun J.Z. et al. // Nature Phys. 2008. V. 4. P. 67.
10. Zeng Z., Cheung K.H., Jiang H.W. et al. // Phys. Rev. B. 2010. V. 82. No. 10. Art. No. 100410(R).
11. Helmer A., Cornelissen S., Devolder T. et al. // Phys. Rev. B. 2010. V. 81. No. 9. Art. No. 094416.

## Evolution of magnetic tunnel junction's modes for different directions of an external magnetic field

M. D. Shkanakina<sup>a, b, \*</sup>, G. A. Kichin<sup>a</sup>, P. N. Skirdkov<sup>a, c</sup>, M. G. Putrya<sup>b</sup>, K. A. Zvezdin<sup>a, c</sup>

<sup>a</sup>*New Spintronic Technologies LLC, Russian Quantum Center, Skolkovo, 143026 Russia*

<sup>b</sup>*National Research University "Moscow Institute of Electronic Technology", Moscow, 124498 Russia*

<sup>c</sup>*Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119333 Russia*

*\*e-mail: m.shkanakina@nst.tech*

We present the investigation of the behavior of magnetic tunnel junction's (MTJ) modes for the different magnitude and the directions of the external magnetic field by the ST-FMR method. We have found an insensitive mode of MTJ to the direction of the external magnetic field. Using macrospin modeling, we show that the behavior of the uniform mode of a free layer of MTJ is like the insensitive mode.

УДК 517.957

# ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТИ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В СИСТЕМАХ СО СЛОЖНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ АТТРАКТОРА

© 2023 г. Е. В. Евстифеев<sup>1</sup>, \*, О. И. Москаленко<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского”,  
Саратов, Россия

\*E-mail: evstifeev@mail.ru

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

При помощи метода расчета локальных ляпуновских показателей установлено, что мультистабильность вблизи границы обобщенной синхронизации может возникать в системах со сложной топологией аттрактора при однонаправленной и взаимной связи.

DOI: 10.31857/S0367676522700211, EDN: JULDIX

## ВВЕДЕНИЕ

Обобщенная хаотическая синхронизация — одно из наиболее интересных явлений радиофизики [1, 2]. Данное явление характеризуется существованием связи между состояниями взаимодействующих осцилляторов в виде функционального соотношения (в общем виде — функционала) [2, 3]. Примечательно, что данная синхронизация наблюдается в системах самой различной природы и может возникать при однонаправленной и взаимной связи.

Обобщенная синхронизация обладает широким потенциалом для применения в различных сферах человеческой деятельности, от исследования взаимодействия систем различной природы [4] до скрытой передачи информации [5] и разработки медицинского оборудования [6].

В контексте данной работы явление мультистабильности заключается в том, что при фиксированных значениях управляющих параметров при определенных значениях безразмерного времени (в случае потоковых систем), либо при определенной итерации (в случае дискретных отображений) в зависимости от начальных условий обобщенная синхронизация может как наблюдаться, так и отсутствовать. Это возможно в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации [7], характеризующейся чередованием временных интервалов синхронной и асинхронной динамики при фиксированных значениях управляющих параметров. Таким образом, мультистабильность следует рас-

сматривать в контексте синхронизации, не связывая с определениями стабильности (устойчивости) фазовых траекторий.

На данный момент мультистабильность находится в процессе тщательного изучения. В нашей прошлой работе было показано, что данное явление наблюдается в хаотических системах с простой топологией аттрактора (с аттрактором ленточного типа) [8]. Целью данной работы является исследование возможности существования мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в хаотических системах со сложной (двулистной) топологией аттрактора [9].

## МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

В качестве исследуемой модели было выбрано множество пар систем Лоренца, связанных как однонаправленно, так и взаимно, описываемое следующей системой уравнений [10, 11]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2}^i &= \sigma(y_{1,2}^i - x_{1,2}^i) + \varepsilon_{1,2}(x_{2,1}^i - x_{1,2}^i), \\ \dot{y}_{1,2}^i &= (r_1 + \delta_{1,2}^i)x_{1,2}^i - y_{1,2}^i - x_{1,2}^iz_{1,2}^i, \\ \dot{z}_{1,2}^i &= -bx_{1,2}^i + x_{1,2}^iy_{1,2}^i, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $i = 1, 2, \dots, N$  — индекс пары систем ( $N \approx 4000$ ),  $\sigma = 10$ ,  $b = 2$ ,  $r_1 = 40$ ,  $r_2 = 35$ ,  $\delta_1^i = 0$ ,  $\delta_2^i \in [0, 10^{-10}]$  — случайные числа, распределенные равномерно в указанном отрезке, характе-

ризующие малую расстройку введенную между вторыми системами каждой пары. Расстройка  $\delta_2^i$  введена для того, чтобы избежать ловушку численного счета. Параметры связи  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon$  в случае однонаправленной связи, и  $\varepsilon_{1,2} = \varepsilon$  при взаимной связи. Значения этих параметров выбраны таким образом, чтобы после переходного процесса режим обобщенной синхронизации всегда возникал при некоторой критической величине параметра связи вне зависимости от начальных условий. Начальные условия для первых систем пары всегда выбирались одинаковыми, а для вторых — всегда разными, равномерно распределенными по аттракторам второй системы.

Данная система уравнений решалась при помощи классической интегрирующей схемы Рунге—Кутты (4 порядка) с шагом 0.001.

Обычно для исследования обобщенной синхронизации используется метод вспомогательной системы [12] в связи с простотой его реализации и достаточно высокой точностью. Недостатком данного подхода является невозможность его применения в случае взаимной связи [13]. В связи с этим, для исследования был использован более универсальный метод — расчет локальных показателей Ляпунова [14, 15].

Данный подход характеризуется расчетом показателей Ляпунова в скользящем ограниченном интервале безразмерного времени, что позволяет в зависимости от его размера устанавливать либо более точные значения показателей, соответствующие аттракторам систем в целом, либо следить за временной динамикой, что и требовалось в данном случае. В данной работе интервал был установлен равным 3500, как наибольший компромисс между точностью и динамикой исследуемой величины.

В качестве исследуемой величины выступает величина второго по старшинству локального ляпуновского показателя (условного, зависящего от параметра связи, при однонаправленной связи, либо обычного при взаимной). Обобщенная синхронизация наступает в момент, когда указанный показатель переходит из положительной области в отрицательную, тем самым указывая, что между системами наблюдается более устойчивая динамика.

На практике, в связи с небольшой погрешностью, обусловленной ограниченным временным интервалом и численным расчетом, используется менее строгий критерий. Системы можно считать синхронизованными, в контексте обобщенной синхронизации, если величина второго старшего локального показателя  $\Lambda_2^i$  не превышает наперед заданную небольшую константу  $\Delta$ :  $\Lambda_2^i < \Delta$ ,  $\Delta = 0.005$ .

Для оценки мультистабильности по аналогии с работой [8] была рассчитана ее мера как вероятность детектирования асинхронных (в смысле обобщенной синхронизации) участков временной динамики, определяемая по формуле:

$$P_a \approx 1 - \sum_{i=1}^M \frac{n(\Lambda_2^i)}{M(M-1)}, \quad (2)$$

где  $M \gg 1$  — число осцилляторов, участвующих в рассмотрении,  $n(\Lambda_2^i)$  — количество систем, находящихся в синхронизме с  $i$ -м осциллятором.

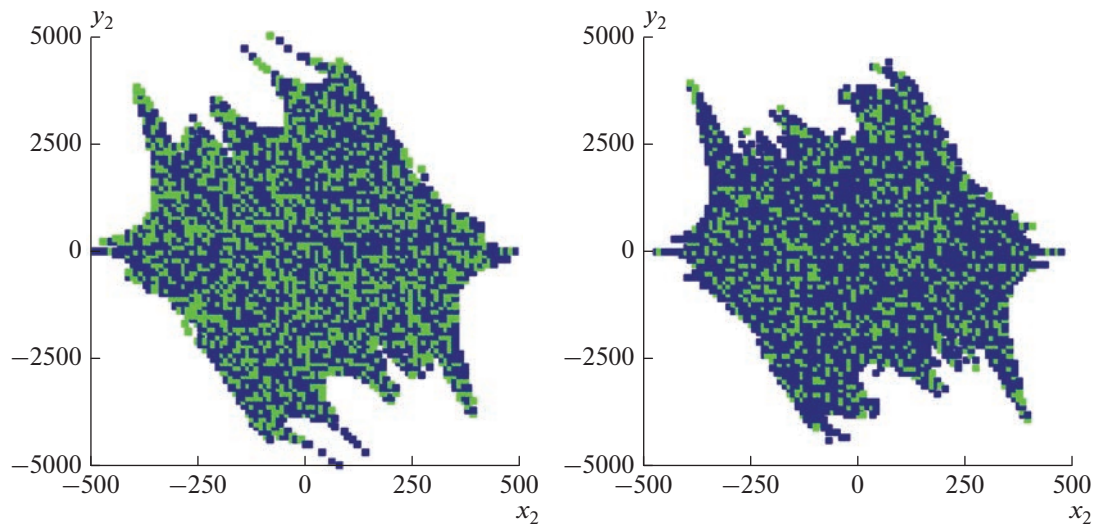
Данная характеристика позволяет оценить степень асинхронной динамики, наблюдаемой при определенном значении безразмерного времени. Если при любых начальных условиях обобщенная синхронизация не возникает (например, при значении параметра связи  $\varepsilon = 0$ ), то  $P_a = 1$ . Напротив, если вне зависимости от начальных условий после переходного процесса всегда наблюдается синхронная динамика, то  $P_a = 0$ . При ситуации, когда только какая-то часть начальных условий демонстрирует синхронную динамику, будет выполняться условие  $1 > P_a > 0$ . Таким образом, в последнем случае будет наблюдаться явление мультистабильности, что и позволяет использовать данную характеристику в качестве оценки ее меры.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

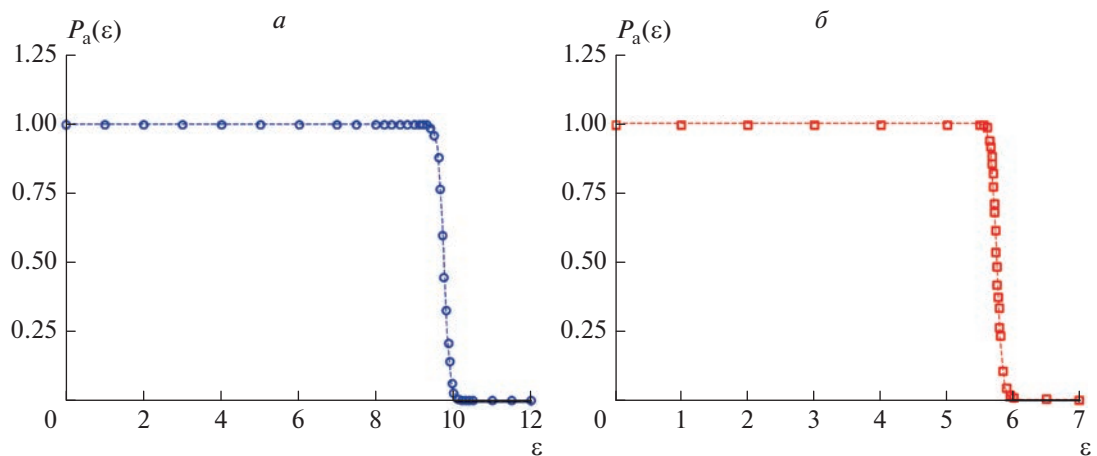
Сперва были рассчитаны бассейны притяжения второй системы Лоренца (см. рис. 1). Данная характеристика строилась следующим образом. При фиксированных значениях управляющих параметров и начальных условий первой системы изменялись начальные условия второй системы ( $x_2$  и  $y_2$ ). Затем, после переходного процесса при некотором значении безразмерного времени определялось наличие, либо отсутствие обобщенной синхронизации.

Из рис. 1 видно, что в зависимости от начальных условий обобщенная синхронизация может как присутствовать, так и отсутствовать, что подтверждает существование мультистабильности. Причем это утверждение справедливо как при однонаправленном типе связи, так и при взаимном.

Стоит отметить, что все же имеются различия в динамике указанной характеристики в зависимости от типа связи. При однонаправленной связи при небольшом отклонении параметра связи от критического значения с изменением безразмерного времени можно наблюдать чередование бассейнов, демонстрирующих преимущественно синхронную динамику, и бассейнов, характеризующихся в большей мере асинхронной динамикой.



**Рис. 1.** Бассейны притяжения второй системы Лоренца: случай однонаправленной связи,  $\varepsilon = 9.94$  (а); случай взаимной связи,  $\varepsilon = 5.8$  (б). Белый цвет соответствует вылету фазовой траектории на бесконечность, темный — установлению обобщенной синхронизации, светлый — асинхронной динамике.



**Рис. 2.** Зависимость меры мультистабильности  $P_a$ , усредненной по времени, от параметра связи  $\varepsilon$  в случае однонаправленной (а) и взаимной (б) связи. Маркерами отмечены рассчитанные значения, пунктирными линиями — аппроксимирующие функции вида  $\frac{1}{1 + \exp\left(\frac{x-a}{b}\right)}$  (спадающий сигмоид), где параметры  $a = 9.74$ ,  $b = 0.08$  при однонаправленной связи и  $a = 5.749$ ,  $b = 0.04$  при взаимной.

В то же время, при взаимной связи этого не наблюдается. При увеличении безразмерного времени соотношение начальных условий, демонстрирующих асинхронную и синхронную динамику, остается практически неизменным. Это выражается в том, что получить при таком типе связи бассейны притяжения, меняющие в целом свою динамику в контексте обобщенной синхронизации, не предоставляется возможным для данной модели.

Наконец, в работе была численно рассчитана зависимость меры мультистабильности (2), усредненной по времени, от параметра связи при однонаправленной и взаимной связи (см. рис. 2).

Видно, что при определенных значениях параметра связи (например,  $\varepsilon > 10.2$  и  $\varepsilon > 6$  в случае однонаправленной и взаимной связи, соответственно) мера мультистабильности  $P_a \approx 0$ , что соответствует режиму, когда практически при любых значениях начальных условий после переходного



процесса устанавливается режим обобщенной синхронизации и, соответственно, мультистабильность отсутствует. Кроме того, имеются интервалы значений параметра связи, при которых наблюдается мультистабильность, когда  $0 \leq P_a \leq 1$ :  $\varepsilon \in [9.3; 10.0]$  и  $\varepsilon \in [5.55; 6]$  при однонаправленной и взаимной связи, соответственно. Это подтверждает выводы, сделанные после расчета бассейнов притяжения.

Данная характеристика также хорошо аппроксимируется функцией спадающего сигмоида вида

$$\frac{1}{1 + \exp\left(\frac{x-a}{b}\right)}, \text{ где } a, b - \text{некоторые вещественные}$$

параметры (см. пунктирные линии на рис. 2). В нашем случае параметры  $a = 9.74$ ,  $b = 0.08$  при однонаправленной связи и  $a = 5.749$ ,  $b = 0.04$  при взаимной.

Примечательно сходство между собой кривых в обоих случаях связи. Если для характеристики, соответствующей взаимной связи, уменьшить масштаб оси на 1.7, а затем аппроксимировать полученную зависимость, то ее коэффициенты будут  $a = 9.774$ ,  $b = 0.068$ . Отметим, что при оценке коэффициентов аппроксимации ошибки не превысили 0.0015, а остаточная сумма квадратов оказалась не больше 0.011, что говорит о достоверности проведенной оценки. Сравнив между собой эти коэффициенты с параметрами аппроксимации, полученными в случае однонаправленной связи, можно убедиться, что данные кривые отличаются между собой незначительно и только численно. Однако, стоит отметить, что данный вывод справедлив конкретно для данной рассматриваемой модели и указанная характеристика может сильно отличаться в зависимости от типа связи при рассмотрении других нелинейных систем.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, на примере систем Лоренца при помощи метода локальных ляпуновских показателей установлено, что мультистабильность в контексте обобщенной синхронизации может возникать не только в системах с относительно простой (однолистной) топологией аттрактора (с аттрактором ленточного типа) [8], но и в системах со сложной (двулистной) структурой, причем как при однонаправленной связи, так и при взаимной. Сделанный вывод подтверждается численно рассчитанными характеристиками: бассейнами притяжения второй системы Лоренца и зависимостью меры мультистабильности, усредненной по времени, от параметра связи.

Из полученных результатов также следует, что тип перемежаемости вблизи границы обобщен-

ной синхронизации не зависит от типа связи между системами (однонаправленной или взаимной), но определяется топологией аттракторов (простой или сложной) взаимодействующих систем. В системах со сложной топологией наблюдается перемежаемость перескоков [11], а в случае систем с простой топологией — “on-off” перемежаемость [8].

Полученные данные согласуются с результатами других работ, например критическое значение параметра связи соответствует значению, получаемому из спектра ляпуновских показателей [16].

Полученные результаты могут быть использованы при изучении систем со сложной топологией аттрактора на предмет наличия мультистабильности. Стоит отметить, что полученные выкладки можно также использовать при построении схемы для скрытой передачи информации, основанной на системах с взаимной связью. Если подобрать управляющие параметры так, чтобы при любых начальных условиях возникала обобщенная синхронизация, то при добавлении полезного сигнала к состоянию одного из осцилляторов (передатчика) в моменты  $P_a = 0$ , по состоянию второго осциллятора (приемника) имелась бы возможность однозначного декодирования сигнала, который в необработанном виде выглядел бы как шум.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых и по государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации (проект № МД-18.2022.1.2).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Boccaletti S., Kurths J., Osipov G. et al. // Phys. Rep. 2002. V. 366. No. 1–2. P. 1.
2. Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S. et al. // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. No. 2. Art. No. 980.
3. Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Hramov A.E. // Phys. Rev. E. 2011. V. 84. No. 3. Art. No. 037201.
4. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. // Fluct. Noise Lett. 2004. V. 4. No. 1. Art. No. L53.
5. Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E. // Phys. Lett. A. 2010. V. 374. P. 2925.
6. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Ponomarenko V.I. et al. // Phys. Rev. E. 2006. V. 73. Art. No. 026208.
7. Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Pivovarov A.A. et al. // Phys. Rev. E. 2020. V. 102. Art. No. 012205.
8. Евстифеев Е.В., Москаленко О.И. // Изв. РАН. Сер. физ. 2022. Т. 86. № 2. С. 282; Evstifeev E.V., Moskalenko O.I. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2022. V. 86. No. 2. P. 216.
9. Ханадеев В.А., Москаленко О.И., Короновский А.А. // Изв. РАН. Сер. физ. 2021. Т. 85. № 2. С. 265;

- Khanadeev V.A., Moskalenko O.I., Koronovskii A.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2021. V. 85. No. 2. P. 192.
10. *Lorenz E.N.* // J. Atmos. Sci. 1963. V. 20. No. 2. P. 130.
11. *Москаленко О.И., Короновский А.А., Ханадеев В.А.* // ЖТФ. 2019. Т. 89. № 3. С. 338; *Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Khanadeev V.A.* // Tech. Phys. 2019. V. 64. No. 3. P. 302.
12. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. No. 5. Art. No. 4528.
13. *O.I. Moskalenko, Koronovskii A.A., Hramov A.E.* // Phys. Rev. E. 2013. V. 87. Art. No. 064901.
14. *Abarbanel H.D.I., Brown R., Kennel M.B.* // J. Nonlin. Sci. 1991. V. 1. P. 175.
15. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K.* // Phys. Rev. E. 2008. V. 78. Art. No. 036212.
16. *Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Pivovarov A.A. et al.* // Phys. Rev. E. 2020. V. 102. Art. No. 012205.

## **Study of the possibility of existence of multistability near the boundary of generalized synchronization in systems with a complex attractor topology**

**E. V. Evstifeev<sup>a, \*</sup>, O. I. Moskalenko<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*Saratov State University, Saratov, 410012 Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: evstifeev@mail.ru*

Using the local Lyapunov exponents approach it was found that multistability near boundary of generalized synchronization can occur in systems with a complex attractor topology both in unidirectional and mutual coupling cases.

УДК 517.957

# ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТИ В РЕЖИМЕ ПЕРЕМЕЖАЮЩЕЙСЯ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В АНСАМБЛЕ ОДНОНАПРАВЛЕННО СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ РЕССЛЕРА

© 2023 г. В. А. Ханадеев<sup>1</sup>, \*, А. Д. Плотникова<sup>1</sup>, О. И. Москаленко<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского”,  
Саратов, Россия

\*E-mail: v.a.hanadeev@gmail.com

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Изучен вопрос о возможности существования мультистабильности вблизи границы фазовой синхронизации в однонаправленно связанных хаотических системах. Рассмотрены случаи относительно большой и относительно малой расстройки между ними, показано, что мультистабильность присутствует в обоих случаях. Введена в рассмотрение количественная характеристика степени мультистабильности и показано, что ее зависимость от времени в режиме перемежающейся фазовой синхронизации может использоваться для определения длительностей характерных фаз поведения систем.

DOI: 10.31857/S0367676522700223, EDN: JULHVU

## ВВЕДЕНИЕ

Одним из распространенных явлений, характерных как для физических, так и биологических систем, является перемежаемость [1]. Как правило, под этим явлением понимается чередование двух различных режимов, например, периодических колебаний и хаотических, двух различных хаотических режимов, фаз синхронного и асинхронного поведения и др. Перемежаемость характерна как для автономных, так и связанных систем, при этом в контексте связанных систем перемежающееся поведение встречается, как правило, вблизи границ возникновения синхронных режимов [2–6]. Различают перемежающиеся полную синхронизацию, синхронизацию с запаздыванием, обобщенную синхронизацию, фазовую синхронизацию, синхронизацию временных масштабов и т.д. При этом, стоит учитывать, что механизмы возникновения и статистические характеристики у всех типов перемежаемости оказываются различными.

Для корректного определения характеристик и механизмов возникновения перемежаемости важную роль играют методы выделения характерных фаз динамики систем. Самым распространенным методом, который можно использовать для изучения перемежающейся обобщенной син-

хронизации в однонаправленно связанных системах, является метод вспомогательной системы [4, 7]. С помощью данного метода можно достаточно точно определять наличие и характерные длительности ламинарных и турбулентных фаз, а следовательно, и тип перемежаемости, реализуемый в исследуемой системе. Однако, недавно было установлено, что при анализе перемежающегося поведения на границе обобщенной синхронизации важную роль играет выбор начальных условий для ведомой и вспомогательной систем: при одном и том же состоянии ведущей системы в зависимости от выбора начальных условий ведомой системы в один и тот же момент времени может диагностироваться как синхронная, так и асинхронная динамика, т.е. иметь место мультистабильность [8].

Поскольку различные типы синхронного поведения, наблюдающиеся в однонаправленно и взаимно связанных хаотических системах, являются частными проявлениями режима синхронизации временных масштабов [9], можно предположить, что мультистабильность [10] будет иметь место и на границах других типов хаотической синхронизации. В настоящей работе данный вопрос исследуется в контексте режима перемежающейся фазовой синхронизации в однонаправленно связанных хаотических системах [2, 5]. В

работе предлагается метод выделения характерных фаз поведения систем, основанный на вычислении вероятности наблюдения синхронного режима по ансамблю связанных систем, аналогично методу, предложенному в работе [11] для режима перемежающейся обобщенной синхронизации. Метод основан на рассмотрении относительно большого ансамбля связанных систем и вычислении вероятности наблюдения ламинарной фазы поведения в зависимости от времени.

## ОБЪЕКТ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В качестве объекта исследования выбран ансамбль однонаправленно связанных систем Ресслера, находящихся в режиме ленточного хаоса:

$$\begin{aligned}\dot{x}_d^i &= -\omega_d y_d^i - z_d^i, \\ \dot{y}_d^i &= \omega_d x_d^i + a y_d^i, \\ \dot{z}_d^i &= p + z_d^i (x_d^i - c), \\ \dot{x}_r^i &= -\omega_r y_r^i - z_r^i + \varepsilon (x_d^i - x_r^i), \\ \dot{y}_r^i &= \omega_r x_r^i + a y_r^i, \\ \dot{z}_r^i &= p + z_r^i (x_r^i - c),\end{aligned}\quad (1)$$

где индексы  $d$  и  $r$  относятся к ведущей и ведомой системам, соответственно, индекс  $i = 1 \dots N$  соответствует рассматриваемой паре осцилляторов,  $a = 0.15$ ,  $p = 0.2$ ,  $c = 10$ ,  $\omega_d = 0.93$  и  $\omega_r = 0.95$  — управляющие параметры, значения которых выбраны фиксированными, а управляющий параметр  $\omega_d$ , характеризующий собственную частоту колебаний ведущей системы, принимал значения равные 0.93 и 0.99, определяя относительно слабую и относительно большую расстройку между взаимодействующими системами,  $\varepsilon$  — параметр связи. Начальные условия для ведущей системы всегда выбирались фиксированными, а для ведомых систем — всегда различными. Как показали проведенные расчеты, независимо от выбора начальных условий ведомых систем при выбранных значениях управляющих параметров в случае относительно малой расстройки режим фазовой синхронизации в системе (1) наблюдается при  $\varepsilon \geq 0.041$ , в случае относительно большой расстройки — при  $\varepsilon \geq 0.118$ .

Для диагностики фазовой синхронизации и определения характеристик перемежающегося поведения, имеющего место вблизи ее границы, необходимо ввести в рассмотрение фазы хаотических сигналов и найти разность между каждой парой взаимодействующих систем. Фазы могут быть введены в рассмотрение традиционным

способом как углы в полярной системе координат на плоскости  $(x^i, y^i)$  [12]:

$$\varphi_{d,r}^i = \arctg \frac{y_{d,r}^i}{x_{d,r}^i}, \quad (2)$$

тогда разность фаз между каждой парой систем будет определяться выражением

$$\Delta\varphi^i = \varphi_d^i - \varphi_r^i, \quad (3)$$

причем, полученная таким образом разность фаз должна быть сведена к диапазону шириной  $2\pi$ , аналогично тому, как это делалось в работе [13]. Критерием наличия фазовой синхронизации в системе является ограниченность разности фаз

$$|\Delta\varphi^i| < \text{const}, \quad (4)$$

где величина константы определяется эмпирически. В режиме фазовой синхронизации разность фаз будет ограничена всегда, в то время как вблизи ее границы участки фазового захвата (ламинарные фазы) будут сменяться турбулентными всплесками, где условие (4) выполняться не будет.

Получив разности фаз для каждой пары ансамбля взаимодействующих однонаправленно связанных систем, можно рассчитать временную зависимость вероятности наблюдения ламинарной фазы поведения, значение которой может рассматриваться как количественная характеристика степени мультистабильности. Пусть в момент времени  $t$  в ансамбле из  $N$  пар осцилляторов только в  $m$  парах диагностируются ламинарные фазы. Тогда вероятность  $p$  обнаружить ламинарную фазу в момент времени  $t$  выражается как

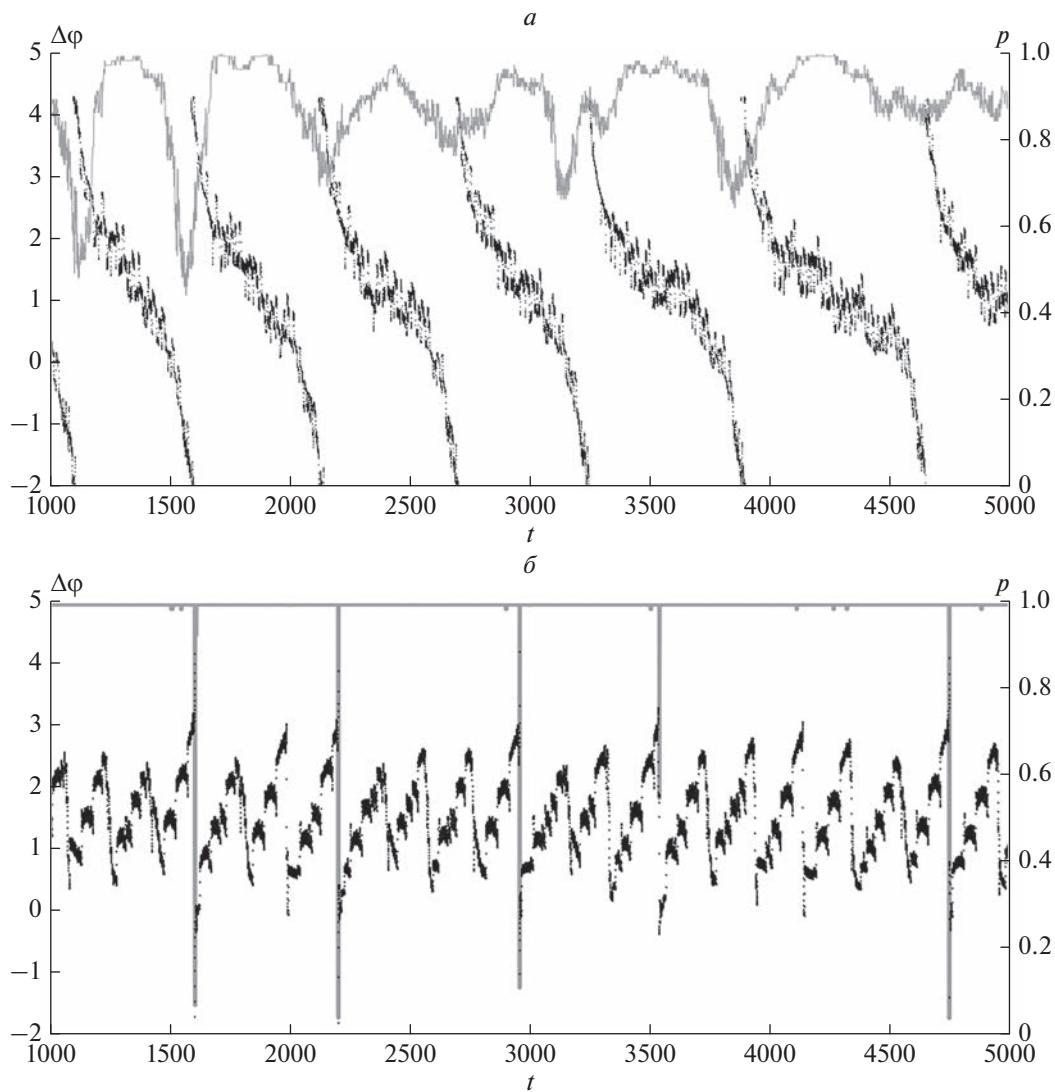
$$p = \frac{m}{N}. \quad (5)$$

Тогда, средняя вероятность наблюдения ламинарной фазы в ансамбле осцилляторов на временном интервале  $T$  составляет:

$$P = \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T p(t) dt, \quad (6)$$

где  $T_0$  — время переходного процесса.

Понятно, что, когда в исходной системе диагностируется режим фазовой синхронизации, в любой момент времени вероятность  $p(t) = 1$ , а следовательно, будет равна 1 и средняя вероятность детектирования ламинарной фазы. В режиме перемежающейся фазовой синхронизации средняя вероятность  $P$  будет чуть меньше 1, а зависимость  $p(t)$  будет содержать участки синхронной и асинхронной динамики, чередующиеся друг с другом.



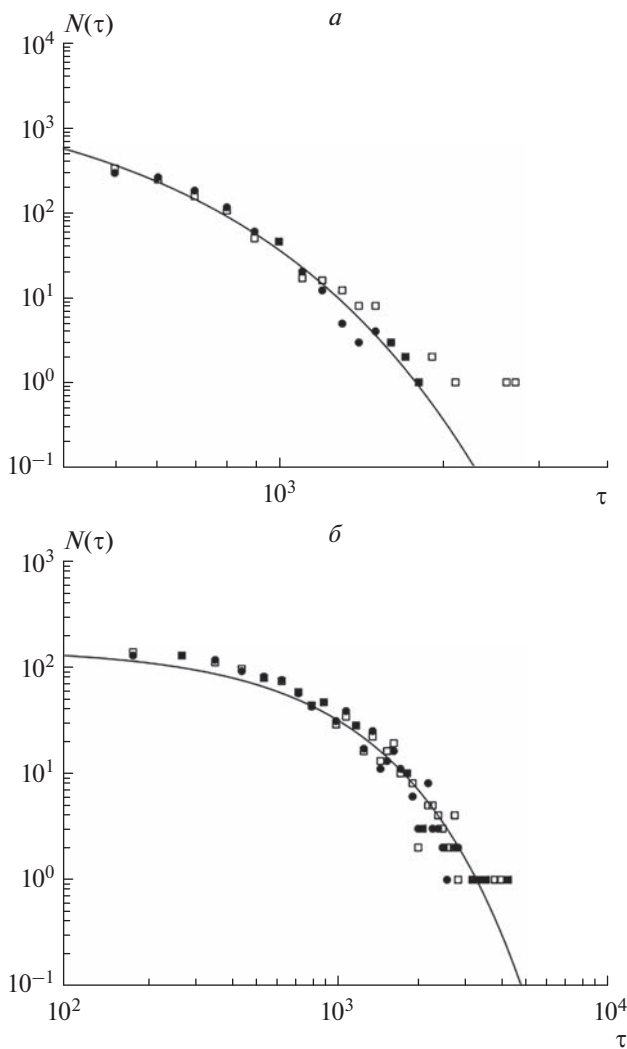
**Рис. 1.** Временные зависимости разности фаз  $\Delta\varphi$  (черные кривые) одной пары систем Ресслера и вероятности нахождения ламинарных фаз  $p$  (серые линии) для ансамбля однонаправленно связанных систем Ресслера при малой расстройке  $\omega_d = 0.93$  и силе связи  $\varepsilon = 0.03$  (а), большой расстройке  $\omega_d = 0.99$  и силе связи  $\varepsilon = 0.116$  (б).

## РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

На рис. 1 представлены результаты расчета вероятности нахождения ламинарных фаз при малой и большой расстройке для  $N = 100$  однонаправленно связанных систем Ресслера (1). Также на рис. 1 приведены временные зависимости разности фаз одной из пар систем Ресслера в том же временном промежутке, что и вероятности нахождения ламинарных фаз. Видно, что в обоих случаях по характеру приведенных зависимостей можно достаточно легко определить начало и конец ламинарных и турбулентных фаз поведения систем. На зависимости разности фаз от времени ламинарные фазы сосредоточены в диапазоне  $[-4; 0]$  (для большой расстройки – в диапазоне  $[0.5; 3.5]$ ),

а выход разности фаз за пределы этого диапазона означает начало турбулентной фазы. Количественная характеристика степени мультистабильности показывает, что во время ламинарных фаз поведения вероятность близка к 1, в то время как во время турбулентных фаз она меняется в достаточно широком диапазоне. В частности, из рис. 1а заметно, что минимальное значение вероятности приходится примерно на середину турбулентной фазы, в то время как по мере удаления/приближения от/к ламинарной фазы значение вероятности начинает монотонно уменьшаться/расти.

Для того, чтобы по зависимости  $p(t)$  определить длительности характерных фаз поведения систем и рассчитать статистические характеристики перемежаемости, были выбраны пороги-



**Рис. 2.** Распределения длительностей ламинарных фаз  $N(\tau)$  в случае малой расстройки  $\omega_d = 0.93$  при силе связи  $\varepsilon = 0.03$  (а) и большой расстройки  $\omega_d = 0.99$  при силе связи  $\varepsilon = 0.116$  (б). Квадратами ( $\square$ ) обозначены распределения длительностей ламинарных фаз, полученные по ансамблю из 100 однонаправленно связанных систем Ресслера (1), а кружками ( $\bullet$ ) — аналогичные распределения, полученные по зависимости разности фаз от времени в одной паре однонаправленно связанных систем Ресслера. Сплошной линией показаны аппроксимации полученных распределений экспоненциальным законом (7).

вые значения, выше которых фаза считалась ламинарной: для малой расстройки —  $\Delta = 0.7$ , для большой —  $\Delta = 0.5$ . В случае малой расстройки (рис. 2а) параметр связи был выбран  $\varepsilon = 0.03$ , а большой (рис. 2б) —  $\varepsilon = 0.116$ , соответственно. На рис. 2 показаны полученные распределения длительностей ламинарных фаз в случае ансамбля, состоящего из 100 осцилляторов. На тех же ри-

сунках изображены аналогичные распределения, полученные для одной пары систем Ресслера по временной зависимости разности фаз при помощи метода, предложенного в [13]. Можно заметить, что полученные распределения практически в точности совпадают друг с другом. Также на рис. 2 приведены теоретические аппроксимации полученных распределений экспоненциальным законом

$$N(\tau) = \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right), \quad (7)$$

(где  $T$  — средняя длительность ламинарных фаз), характерным как для перемежаемости “игольного ушка”, так и перемежаемости “кольца” [5, 13]. Видно, что в обоих случаях расстройки данные численного моделирования хорошо аппроксимируются экспоненциальным законом (7).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, показано наличие мультистабильности на границе фазовой синхронизации как при относительно большой, так и относительно малой расстройке частот взаимодействующих систем. Введена в рассмотрение количественная характеристика степени мультистабильности и показано, что ее зависимость от времени для ансамбля однонаправленно связанных систем позволяет определить длительности ламинарных фаз поведения и получить статистические характеристики перемежаемости. Установлено, что распределения длительностей ламинарных фаз, полученные по зависимости вероятности от времени, практически в точности совпадают с аналогичными распределениями, полученными по временной зависимости разности фаз, и подчиняются экспоненциальным законам, что говорит о возможности применения разработанного подхода на практике для определения статистических характеристик перемежаемости.

Несмотря на то, что в рамках данной работы результаты проиллюстрированы только на одной системе, можно ожидать, что они будут справедливы и для других систем, способных демонстрировать перемежающееся поведение вблизи границы фазовой синхронизации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых и по государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации (проект № МД-18.2022.1.2). Отдельные результаты исследования поддержаны Минобрнауки России в рамках программы развития регионального научно-образовательного математического центра “Математика технологий будущего” (соглашение № 075-02-2022-885).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
2. Pikovsky A.S., Osipov G.V., Rosenblum M.G. et al. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. No. 1. P. 47.
3. Boccaletti S., Valladares D.L. // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. No. 5. P. 7497.
4. Hramov A.E., Koronovskii A.A. // Europhys. Lett. 2005. V. 70. No. 2. P. 169.
5. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K. et al. // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. Art. No. 114101.
6. Zhuravlev M.O., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I. et al. // Phys. Rev. E. 2011. V. 83. Art. No. 027201.
7. Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M. // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. No. 5. P. 4528.
8. Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Selskii A.A. et al. // Chaos. 2021. V. 31. No. 8. Art. No. 083106.
9. Hramov A.E., Koronovskii A.A. // Chaos. 2004. V. 14. No. 3. P. 603.
10. Sevilla-Escoboza R., Buldú J.M., Pisarchik A.N. et al. // Phys. Rev. E. 2015. V. 91. No. 3. Art. No. 032902.
11. Москаленко О.И., Короновский А.А., Сельский А.О. и др. // Письма в ЖТФ. 2022. Т. 48. № 2. С. 3.
12. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. No. 22. P. 4193.
13. Журавлев М.О., Куровская М.К., Москаленко О.И. // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36. № 10. С. 31.

**Investigation of the possibility of the existence of multistability  
in the regime of intermittent phase synchronization in ensemble  
of unidirectionally coupled Rössler systems**

**V. A. Khanadeev<sup>a,\*</sup>, A. D. Plotnikova<sup>a</sup>, O. I. Moskalenko<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*Saratov State University, Saratov, 410012 Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: v.a.khanadeev@gmail.com*

The question of the possibility of the existence of multistability near the boundary of phase synchronization in unidirectionally coupled chaotic systems is studied. The cases of relatively large and relatively small detuning between them are considered. The multistability is shown to be observed in both cases. A quantitative characteristic of the degree of multistability is introduced and it is shown that its time dependence in the regime of intermittent phase synchronization can be used to determine the lengths of the characteristic phases of the system behavior.



УДК 612.08

## АНАЛИЗ КОГНИТИВНОЙ НАГРУЗКИ В ЗАДАЧЕ СТЕРНБЕРГА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОКУЛОГРАФИИ

© 2023 г. Н. А. Брусинский<sup>1, \*</sup>, А. А. Бадарин<sup>1, 2</sup>, А. В. Андреев<sup>1, 2</sup>,  
В. М. Антипов<sup>1, 2</sup>, С. А. Куркин<sup>1, 2</sup>, А. Е. Храмов<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
“Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта”,  
Балтийский центр нейротехнологий и искусственного интеллекта, Калининград, Россия

<sup>2</sup>Автономная некоммерческая организация высшего образования  
“Университет Иннополис”, Лаборатория нейронауки и когнитивных технологий,  
Центр технологий компонентов робототехники и мехатроники, Иннополис, Россия

\*E-mail: nikita@brusinskii.ru

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Изучены физиологические и поведенческие характеристики человека во время продолжительного решения когнитивной задачи, основанной на парадигме Стернберга. Выявлена взаимосвязь между субъективной усталостью испытуемого и такими физиологическими характеристиками как длительность морганий и диапазон движения размера зрачка во время решения задачи.

DOI: 10.31857/S0367676522700235, EDN: JUNVSW

### ВВЕДЕНИЕ

Изучение принципов и физических закономерностей работы головного мозга является одной из наиболее важных и активно исследуемых задач современной науки [1–4]. Одним из наиболее перспективных и мощных инструментов для изучения активности головного мозга является окулография (eyetracking) [5, 6]. Глазодвигательная активность является важным компонентом психических процессов человека, благодаря которым происходит получение, преобразование и использование зрительной информации. Регистрация и анализ движений глаз позволяет получить доступ к внутренним формам активности, которые протекают быстро и неосознанно. Сегодня одним из основных направлений исследований с помощью системы трекинга взгляда является изучение быстрых движений глаз (саккад) и морганий. В недавнем исследовании группы профессора Мартина Рольфса было показано, что визуальная информация внутри саккад (след объекта на сетчатке) информирует о характеристиках объекта и позволяет быстро выполнить коррекцию взгляда [6]. В другом исследовании с предъявлением неоднозначного стимула было показано, что моргания и микросаккады не способствуют переключению восприятия, более того, обнаружено, что переключению восприятия, напротив, предшествует уменьшение движения глаз [7].

Также с использованием технологии слежения за взглядом были выявлены факторы, определяющие высокий уровень обучения младенцев [8].

Данная работа посвящена изучению когнитивной нагрузки, вызванной продолжительным монотонным решением когнитивных задач, требующих высокого уровня внимания. Представлены результаты изучения поведенческой и глазодвигательной активности, а также их корреляций, в процессе продолжительного решения когнитивных задач.

### МЕТОДЫ

Был проведен нейрофизиологический эксперимент, в котором принимали участие условно здоровые волонтеры без истории нейрофизиологических заболеваний в возрасте от 19 до 21 г. (всего 15 человек). Основная экспериментальная часть начинается и заканчивается записью фоновой активности в течение 60 с. Эксперимента состоит из четырех одинаковых блоков заданий, перед и после каждого блока заданий испытуемый проходит тест на визуальную субъективную оценку усталости [9]. Каждый блок состоит из 72 заданий в форме теста Стернберга [10]. Тест Стернберга был реализован в следующей форме. Каждое задание начинается с черного экрана, на котором затем в течение 1.5–2.5 с демонстрируется белый крест, привлекающий внимание испы-

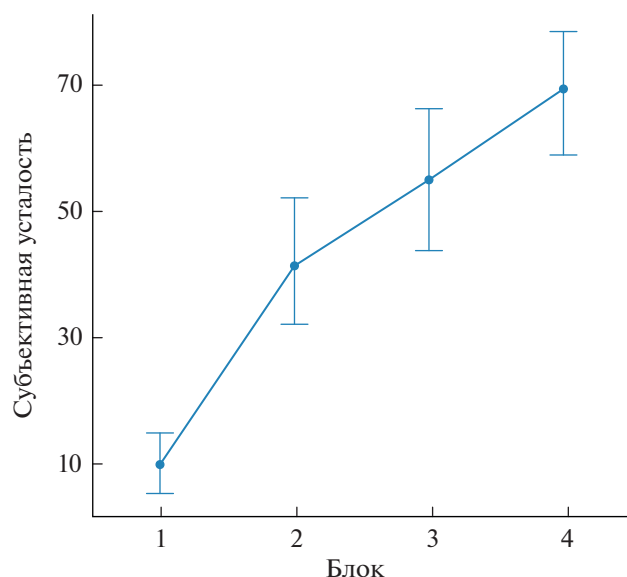


Рис. 1. Зависимость степени субъективной усталости от стадии эксперимента.

туемого. Далее появляется стимул в виде набора из 7 символов, в котором от 2 до 7 символов представляют собой заглавные буквы кириллицы, а остальные — “\*”. Предъявление набора букв происходит в течение 1.5–2.5 с, при этом испытуемому необходимо запомнить показанные буквы. Затем в течение 3–7 с демонстрируется черный экран, после чего на экране предъявляется одна строчная буква и испытуемому необходимо ответить, была ли эта буква в показанном ранее наборе или нет. Отметим, что показ строчной буквы необходим, для того чтобы удостовериться, что испытуемый запомнил семантическое значение буквы, а не ее визуальный образ. Ответ испытуемому предлагается дать с помощью двух одинаковых пультов, предварительно ассоциированных с наличием и отсутствием буквы в наборе. В каждом блоке содержится всего 72 задания, которые разделены в равной степени между шестью сложностями в зависимости от количества букв в наборе от 2 до 7 букв.

В качестве оборудования для регистрации движения глаз использовался EyeLink 1000 Plus.

Для анализа морганий они были разбиты на 4 категории: короткие длительностью 50–150 мс, средние — 150–350 мс, длинные — 350–700 мс, и моргания, которые были классифицированы как микросон — 700–2000 мс. Для среднего размера зрачка и для пробы, и для набора букв была проведена процедура коррекции базовой линии, чтобы устранить различия между испытуемыми.

Были выделены две сложности, определяемые количеством букв в демонстрируемом наборе. Легкой сложности соответствовали наборы букв, содержащие от 2 до 4 букв, а сложной — содержащие от 5 до 7 букв.

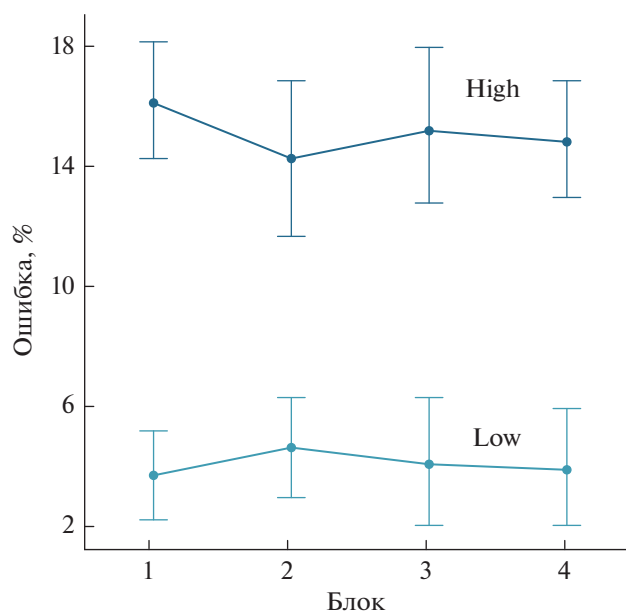


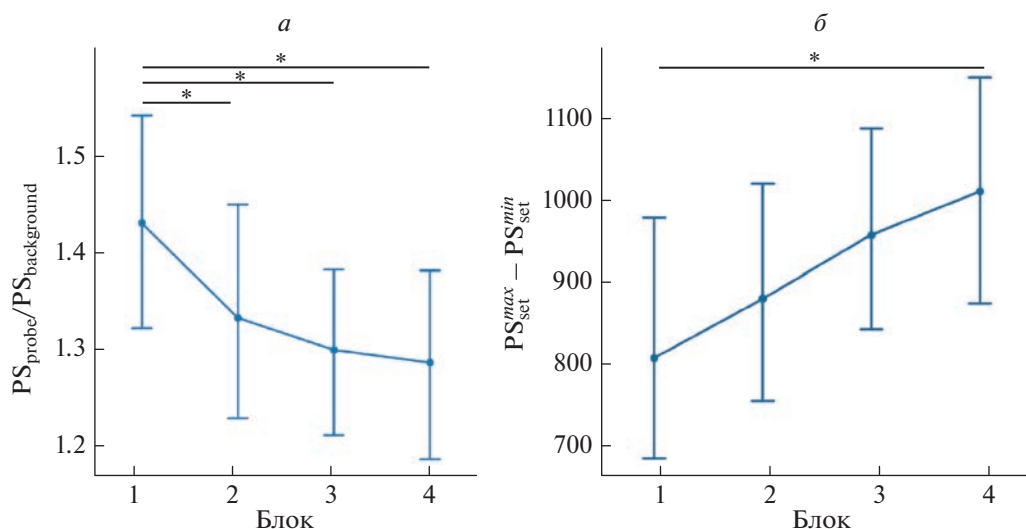
Рис. 2. Зависимость процента совершаемых ошибок от стадии эксперимента для высокой (High) и низкой (Low) сложности.

Изменения в рассматриваемых поведенческих и физиологических характеристиках в ходе эксперимента оценивались с помощью дисперсионного анализа с повторными измерениями (RM ANOVA). Post-hoc анализ проводился с помощью парного выборочного *t*-теста с поправкой Холма для множественных сравнений; корреляция на групповом уровне между наблюдаемыми изменениями в субъективной оценке усталости и различными регистрируемыми физиологическими характеристиками была определена с помощью метода корреляции повторных мер (RM CORR) [11] в статистическом пакете Pingouin для Python.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Проведено исследование поведенческих характеристик испытуемых в процессе прохождения эксперимента. Обнаружено, что с течением эксперимента человек сильнее уставал (рис. 1), что было подтверждено с помощью RM-Anova с высокой достоверностью ( $p < 0.01$ ). Post-hoc анализ показал значимые различия между всеми фазами эксперимента ( $p < 0.01$ ).

Был проведен анализ процента совершаемых ошибок, с целью изучения их зависимости — от сложности и в течении эксперимента. В результате было выяснено, что в случае высокой сложности процент ошибок значительно выше, чем при решении задач низкой сложности ( $p < 0.0001$ ). (рис. 2). Однако статистически значимого изменения процента ошибок с ходом эксперимента обнаружено не было.



**Рис. 3.** Зависимость среднего размера зрачка, нормированного на средний размер зрачка во время записи фона, от стадии эксперимента (а). Зависимость амплитуды колебаний зрачка от стадии эксперимента (б).  $PS_{probe}$  — средний размер зрачка во время демонстрации пробы;  $PS_{background}$  — средний размер зрачка во время демонстрации фона;  $PS_{set}^{max}$  — максимальный размер зрачка во время демонстрации набора букв;  $PS_{set}^{min}$  — минимальный размер зрачка во время демонстрации набора букв; символом “\*” выделены статистически значимые различия между условиями в post-hoc анализе ( $p < 0.05$ ).

Анализ морганий показал, что все выделенные типы морганий различаются между собой. В тоже время, изменение количества морганий в течение эксперимента обнаружено только для длинных и средних морганий, а именно их количество в каждом блоке в течении эксперимента возросло ( $p < 0.05$ ).

Проведено изучение динамики зрачка, а именно изменение его среднего размера и амплитуды в течение эксперимента. Выявлено, что средний размер зрачка во время демонстрации пробы уменьшался в течении эксперимента ( $p < 0.05$ ). В тоже время, во время показа набора букв такой зависимости обнаружено не было. Обнаружено, что амплитуда колебаний зрачка во время демонстрации набора букв и пробы растет в течение эксперимента ( $p < 0.05$ , рис. 3).

Проведен анализ взаимосвязи рассматриваемых физиологических и поведенческих характеристик. Обнаружены статистически значимые корреляции субъективной усталости со следующими характеристиками: количеством коротких морганий ( $r = 0.3$ ), количеством средних морганий ( $r = 0.46$ ), количеством длинных морганий ( $r = 0.53$ ), средним размером зрачка во время демонстрации пробы ( $r = -0.54$ ), средним размером зрачка во время демонстрации набора букв ( $r = -0.35$ ), амплитудой колебаний размера зрачка во время демонстрации пробы ( $r = 0.52$ ), амплитудой колебаний размера зрачка во время демонстрации набора букв ( $r = 0.54$ ).

Полученные результаты хорошо согласуются с известными ранее. В частности, известно, что увеличение усталости сопровождается ростом амплитуды колебаний размера зрачка и ростом длительности моргания и соответственно увеличением количества длинных морганий [12].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, были обнаружено, что продолжительная монотонная когнитивная нагрузка вызывает сильный рост субъективной усталости в ходе эксперимента, что сопровождается увеличением количества морганий средней и длинной длительности в ходе эксперимента. Показано, что количество совершаемых ошибок зависит от сложности задания. Обнаружено, что в течение эксперимента наблюдается уменьшение среднего размера зрачка во время демонстрации пробы и увеличение амплитуды колебаний зрачка, как во время демонстрации набора букв, так и пробы.

В дальнейшем планируется исследовать быстрые движения глаз (саккады) и фиксации зрачка, и провести поиск их взаимосвязей с уже полученными в данной статье результатами.

Работы по разработке методов и проведению нейрофизиологических экспериментов выполнены при поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации (проект № МК-2142.2022.1.2). Работы по анализу данных поддер-

жаны Российским научным фондом (проект № 21-72-10121).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hramov A.E., Maksimenko V.A., Pisarchik A.N.* // Phys. Reports. 2021. V. 918. P. 1.
2. *Maksimenko V., Khorev V., Grubov V. et al.* // Proc. SPIE. 2020. V. 11459. Art. No. 1145903.
3. *Badarin A.A., Antipov V.M., Grubov V.V. et al.* // Comput. Biophys. Nanobiophoton. 2022. V. 12194. P. 142.
4. *Бадарин А.А., Грубов В.В., Андреев А.В. и др.* // Изв. вузов. Прикл. нелинейн. динам. 2022. Т. 30. № 1. С. 96.
5. *Hessels R.S., Hooge I.T.* // Dev. Cogn. Neurosci. 2019. V. 40. Art. No. 100710.
6. *Schweitzer R., Rolfs M.* // Sci. Adv. 2021. V. 7 Art. No. 30.
7. *Brys M., Murali S., Händel B.* // Front. Psychol. 2021. V. 12. Art. No. 647256.
8. *Poli F., Serino G., Mars R.B., Hunnius S.* // Sci. Adv. 2020. V. 6. No. 39. Art. No. eabb5053.
9. *Lee K.A., Hicks G., Nino-Murcia G.* // Psychiatry Res. 1991. V. 36. No. 3. P. 291.
10. *Klabes J., Babilon S., Zandi B. et al.* // Vision. 2021. V. 5. P. 21.
11. *Bakdash J.Z., Marusich L.R.* // Front. Psychol. 2017. V. 8. P. 456.
12. *Zargari Marandi R., Madeleine P., Omland Ø. et al.* // Sci. Reports. 2018. V. 8. Art. No. 13148.

### Analysis of cognitive load in the Sternberg problem: eye-tracker study

**N. A. Brusinsky<sup>a,\*</sup>, A. A. Badarin<sup>a, b</sup>, A. V. Andreev<sup>a, b</sup>, V. M. Antipov<sup>a, b</sup>,  
S. A. Kurkin<sup>a, b</sup>, A. E. Hramov<sup>a, b</sup>**

<sup>a</sup>*Immanuel Kant Baltic Federal University, Center for Neurotechnology and Machine Learning, Kaliningrad, 236041 Russia*

<sup>b</sup>*Innopolis University, Neuroscience and Cognitive Technology Laboratory, Innopolis, 420500 Russia*

\*e-mail: nikita@brusinskii.ru

We studied physiological and behavioral characteristics of a person during prolonged solution of a cognitive task based on Sternberg paradigm. We found that evaluation of subjective fatigue and physiological characteristics such as blink duration and pupil size range of motion during the task solution are correlated to each other.

УДК 577.354

## НОВЫЙ ЭЛЕКТРОЭНЦЕФАЛОГРАФИЧЕСКИЙ МАРКЕР ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕШЕНИЯ КОГНИТИВНОЙ ЗАДАЧИ

© 2023 г. Н. М. Смирнов<sup>1, 2, \*</sup>, А. А. Бадарин<sup>1, 2</sup>, С. А. Куркин<sup>1, 2</sup>, А. Е. Храмов<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup>Автономная некоммерческая организация высшего образования “Университет Иннополис”, Иннополис, Россия

<sup>2</sup>Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
“Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта”, Калининград, Россия

\*E-mail: n.smirnov@innopolis.university

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Выявлен универсальный биомаркер, основанный на вычислении дисперсии соотношения энергий альфа- и бета-ритмов в регистрируемых электроэнцефалографических сигналах и отражающий уровень составляющих когнитивного ресурса обучающегося. Показано на примере теста Бурдона (корректирующая проба), что данный биомаркер значимо коррелирует с основными показателями успешности и эффективности выполнения стандартизированных когнитивных заданий.

DOI: 10.31857/S0367676522700247, EDN: JUSBOZ

### ВВЕДЕНИЕ

Система образования не может существовать без методов оценки эффективности. Данный контроль позволяет проводить анализ качества методов преподавания и своевременно вносить коррективы в систему обучения. Сама процедура контроля в том или ином виде существует на каждом этапе обучения. Классическим подходом является проверка усвоения знаний, навыков и умений, а также оценка и анализ психических и личностных качеств учащихся [1, 2], что позволяет в некоторой мере индивидуализировать подход при обучении. Важно заметить, что персонализация обучения стала возможной благодаря аналитике когнитивных способностей обучаемых. Тем не менее у традиционных подходов в этой сфере есть ряд ограничений, одним из которых является сложность создания индивидуальных методов тестирования.

Развитием классических подходов к оценке когнитивных характеристик человека является анализ активности головного мозга с применением устройств для регистрации электроэнцефалограмм (ЭЭГ). Сама технология не обладает высокой стоимостью, а данные могут анализироваться в режиме реального времени. У ЭЭГ есть две основные проблемы, которые ограничивают внедрение этой технологии на практике: долгий процесс подготовки (монтаж электродов) и необходимость использования специальных проводящих гелей. Однако данные барьеры уже являются частично преодолимыми за счет специальных ша-

почек для монтажа, технологий сухих электродов и портативных электроэнцефалографов [3]. Как следствие, возможности использования систем типа “интерфейсы мозг–компьютер”, основанных на регистрации ЭЭГ, в повседневной жизни значительно расширяются [4].

Известно много работ, посвященных исследованиям с помощью ЭЭГ особенностей когнитивных способностей [5–11], однако, большинство из них не подразумевает внедрения полученных результатов в процесс образования с помощью персонализированных интерфейсов. Одной из важных проблем здесь является отсутствие простых и надежных метрик для оценки когнитивной характеристик обучающегося [12]. В данной работе мы представляем новый биомаркер для оценки когнитивной нагрузки с помощью вычисления стандартного отклонения отношения стандартных ритмов мозга.

### МЕТОДОЛОГИЯ

Для проведения исследования была собрана группа из 12 учеников второго класса без проблем со здоровьем. Добровольцы (и их представители – родители) были заранее ознакомлены с процедурой проведения эксперимента и возможными вызванными ей неудобствами, имели возможность задать интересующие вопросы и получить на них удовлетворительные ответы. Для каждого испытуемого его законный представитель заполнил и подписал бланк информированного согласия на

участие в эксперименте. Все экспериментальные работы были проведены в соответствии с требованиями Хельсинской декларации и одобрены комиссией по этике АНО ВО “Университет Иннополис”. Участники исследования проходили тест Бурдона (корректирующая проба) с помощью бланка с рядами кириллических букв. Бланк состоял из 20 строчек, в каждой из которых присутствовал случайный набор из 30 букв. В начале каждого ряда была обозначена буква, которую следует отмечать. В каждой строчке искомый символ встречался от одного до шести раз. Сам тест выполнялся на электронном планшете, где с помощью стилуса отмечались нужные буквы. При проведении теста записывалось время ответа и выбранная буква. Основной метрикой являлось среднее время ответа, которое высчитывалось независимо от правильности ответа. Таким образом, данная характеристика является показателем среднего количества просматриваемых символов за единицу времени, что также является одной из оцениваемых величин в практике [13]. Для записи ЭЭГ был использован энцефалограф actiCHamp, ЭЭГ записывалась с 31 канала с помощью электродов ActiCap с Ag/AgCl датчиками. Electroды размещались по международной схеме “10-10”, заземляющий электрод находился на лбу, один референсный электрод располагался в области правого сосцевидного отростка. Частота дискретизации сигналов ЭЭГ при записи составляла 250 Гц. Сигналы фильтровались полосовым фильтром от 0.16 до 70 Гц и режекторным фильтром 50 Гц для исключения шума от электросетей. Удаление артефактов производилось с помощью метода ICA.

Для получения частотно-временного спектра к сигналам было применено вейвлетное преобразование; в качестве материнского вейвлета был выбран вейвлет Морле [14]. Вейвлетное преобразование осуществлялось следующим образом:

$$W(n, s) = \sum_{n' = n - \left\lfloor \frac{T(s)}{h} \right\rfloor}^{n + \left\lceil \frac{T(s)}{h} \right\rceil} x_{n'} \psi^* \left( \frac{(n' - n)h}{s} \right), \quad (1)$$

где  $\psi^*$  — материнский вейвлет Морле:

$$\psi^*(\eta) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{2\pi i \eta} e^{-\frac{\eta^2}{2}}. \quad (2)$$

Вейвлетное преобразование было выполнено в частотном диапазоне 8–30 Гц, что соответствует диапазонам альфа и бета ритмов. Поскольку материнский вейвлет является комплексной функцией, к полученной комплексной поверхности было поэлементно применено следующее преобразование:

$$\frac{1}{s} |W(n, s)|^2 \quad (3)$$

для оценки мощности сигнала на каждом временном масштабе  $s$ , где множитель  $1/s$  вводили для нормировки вейвлетного спектра [14]. Во избежание краевых эффектов с обоих концов временных рядов было исключено по 125 точек (0.5 с).

Из частотно-временного вейвлетного спектра были рассчитаны усредненные по частоте энергии в альфа (8–15 Гц) и бета (15–30 Гц) диапазонах. Для вычисления предложенного биомаркера (средней дисперсии отношения ритмов) было проанализировано два подхода: 1) разделение временного ряда энергий в выбранных диапазонах на окна с выбранной шириной и 2) деление временного ряда на определенное количество окон. Это было сделано с целью подбора наиболее подходящей ширины окна. В окнах проводилось усреднение по времени. Получившийся ряд значений энергий в альфа-диапазоне был затем поэлементно поделен на энергии в бета-диапазоне, после чего было рассчитано стандартное отклонение значений получившегося ряда для всех окон. Данное число является характеристикой каждого участника эксперимента. Полученные значения были затем скоррелированы со значениями среднего времени ответа следующим образом:

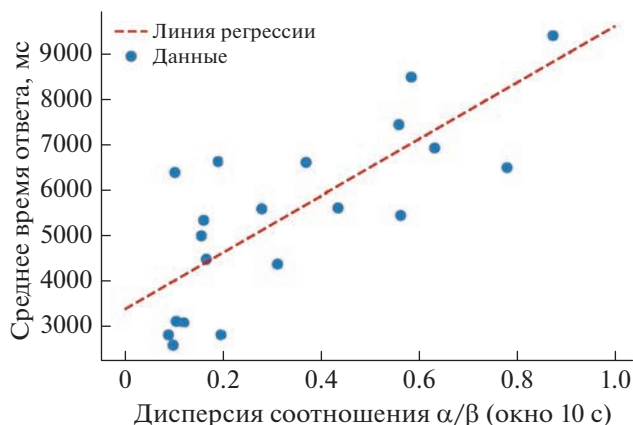
$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (4)$$

где  $n$  — количество участников эксперимента,  $x_i$  — среднее время ответа участника с номером  $i$ ,  $\bar{x}$  — общее среднее время ответа,  $y_i$  — среднее значение стандартного отклонения соотношения энергий в альфа- и бета-диапазонах участника с номером  $i$ ,  $\bar{y}$  — общее среднее отклонение.

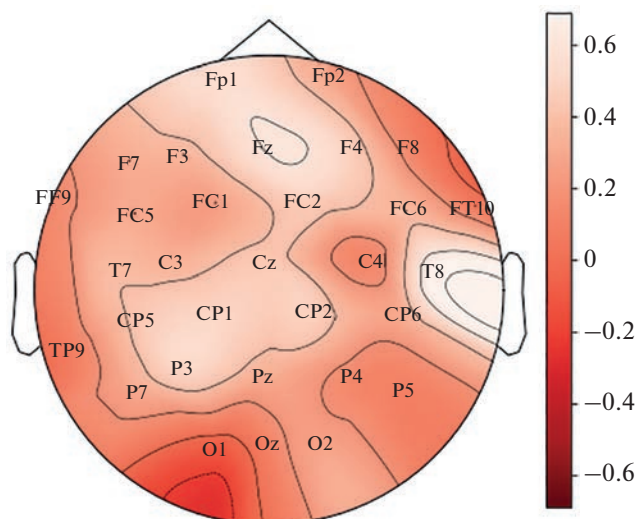
Для проверки нулевой гипотезы, что данные не скоррелированы, была использована следующая функция плотности вероятности индекса  $r$  [15]:

$$f(r) = \frac{(1 - r^2)^{n/2-2}}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2} - 1\right)}, \quad (5)$$

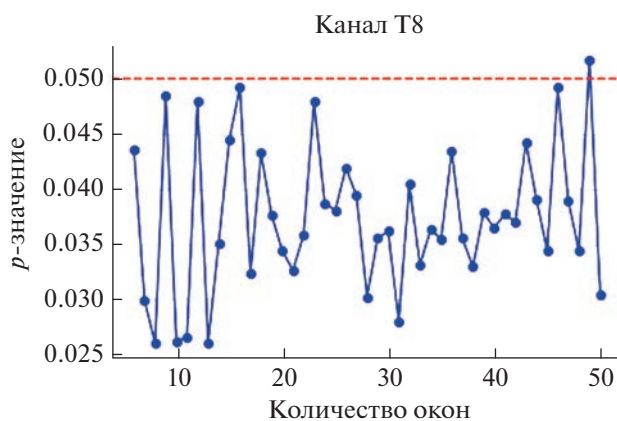
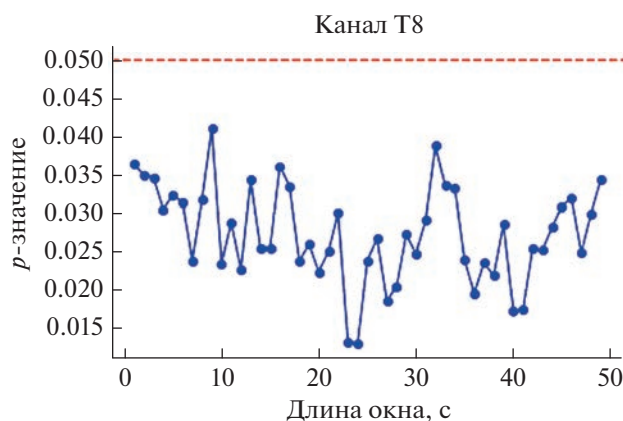
где  $B$  — это  $\beta$ -функция. Важно заметить, что данная функция не является точным представлением плотности вероятности  $r$ . Вместо этого используется аппроксимация с помощью бета-распределения. Само тестирование проводилось следующим образом: с помощью функции (5) численно была рассчитана функция распределения вероятности, после чего были рассчитаны критические значения индекса  $r$ , соответствующие уровню значимости 0.05. Данные считались значимыми, если их индекс выше или ниже рассчитанного порогового значения при положительном и отрицательном значении индекса, соответственно. Данные на каждом канале электро-



**Рис. 1.** Точечный график данных дисперсии и среднего времени ответа при ширине окна 24 с и линейная регрессия для этих данных (красная линия). Значение  $r$  индекса = 0.65,  $p$ -значение = 0.0234.



**Рис. 2.** Топограмма коэффициентов корреляции при размере окна 24 с.



**Рис. 3.** Значимость корреляции при окнах с фиксированной шириной (слева) и при фиксированном количестве окон (справа).

энцефалограммы тестировались отдельно друг от друга.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Была обнаружена значимая корреляция между величиной дисперсии и средним временем, затрачиваемым на поиск одной буквы в корректурной пробе (рис. 1). Анализ распределения уровня значимости корреляции по каналам показал, что для данного типа задания ряд каналов оказывается значимым (см. светло-красные области на рис. 2), при этом минимумы  $p$ -значения располагаются на каналах центрально-теменной области, лобного полюса и правой височной доли. Было также исследовано влияние ширины окна по времени, либо количества окон, на которое разбивается время выполнения задания, на максимальный

уровень значимости корреляции (см. рис. 3). Выявлено, что он существенно не зависит от длительности окна (по крайней мере, при  $1 < t_w < 50$  с). Таким образом, наиболее удобным для реализации системы является выбор ширины окна  $t_w$ , равным периоду оценки поведенческих характеристик при выполнении задания, поскольку в таком случае проще устанавливать корреляцию между величиной дисперсии и эффективностью решения задачи.

Было также проведено изучение влияния нормировки ЭЭГ сигналов на фоновую активность на уровень корреляции. Выявлено, что нормировка ЭЭГ-данных на сигналы фоновой активности (тип нормировки — “относительное изменение”) делает корреляцию незначимой. Таким образом, более перспективной является работа с исходными ЭЭГ данными (после их предвари-



тельной обработки, направленной на удаление артефактов).

## ОБСУЖДЕНИЕ

Результаты анализа распределений уровней значимости корреляции по каналам позволяют выделить оптимальную и минимально необходимую конфигурацию регистрирующих электродов, которая содержит наиболее значимую информацию о состоянии обучающегося. В нее, прежде всего, входят теменные электроды, центрально-теменные, а также электроды лобного полюса. Полученные результаты открывают возможности существенного уменьшения количества используемых электродов в интерфейсе мозг-компьютер, который может использоваться в образовательном процессе (от 2 до 8 электродов — в зависимости от требуемой точности работы системы). Это является принципиально важным при реализации алгоритма детектирования, работающего в реальном времени, поскольку существенно уменьшает объем обрабатываемых данных, а также удешевляет стоимость нейрогарнитуры и увеличивает скорость монтажа электродов.

Поскольку было обнаружено, что предложенная характеристика значимо коррелирует с основными показателями успешности и эффективности выполнения стандартизированных когнитивных заданий, ее можно использовать в качестве биомаркера когнитивного состояния обучающегося, связанного с решением поставленных задач и обучением. Мы предполагаем, что данный биомаркер отражает уровень составляющих когнитивного ресурса обучающегося (уровень внимания, когнитивная усталость, загруженность рабочей памяти и др.), определяющих эффективность выполнения им задания. Это открывает новые возможности для развития способов повышения эффективности процесса обучения, основанных на нормализации соотношения энергий мозговых ритмов (и, соответственно, дисперсии), вероятно, с помощью выполнения специальных упражнений в перерывах между заданиями, направленных на корректировку ритмов, или с использованием биологической обратной связи. Поскольку корректурная проба задействует многие элементарные когнитивные функции (например, визуальный поиск, рабочую память, распознавание и обработку букв и др.), полученные результаты могут быть перенесены на широкий класс различных когнитивных заданий.

При разработке эксперимента первоначально предполагалось использовать в качестве основной поведенческой метрики процент правильно выполненных задания каждым участником. Однако это оказалось сопряжено с некоторыми ограничениями, которые возникают из-за часто возникающей ситуации полностью правильного

выполнения теста, вследствие чего растет смещение в экспериментальной выборке в сторону ситуации со 100% правильно выполненным заданием. Вместе с этим увеличение объема теста ведет к изменению уровня усталости со временем, что может негативно сказываться на результатах.

Важно заметить и то, что связь между скоростью решения теста и выбранной метрикой может быть результатом работы более сложных функциональных сетей, активирующихся в головном мозге при выполнении задания. Рассмотрение данного вопроса планируется в продолжении начатых исследований.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, выявлен универсальный биомаркер, основанный на вычислении дисперсии соотношения энергий альфа- и бета-ритмов в регистрируемых ЭЭГ-сигналах и отражающий уровень составляющих когнитивного ресурса обучающегося. На примере корректурной пробы показано, что данный биомаркер значимо коррелирует с основными показателями успешности и эффективности выполнения стандартизированных когнитивных заданий.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-29-14101). С.А.К. благодарит за поддержку Совет по грантам Президента Российской Федерации (проект № МД-590.2022.1.2).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bernacki M.L., Walkington C.* // J. Educ. Psychol. 2018. V. 110. No. 6. P. 864.
2. *Выготский Л.С.* Мышление и речь. М.: Лабиринт, 1999. 352 с.
3. *Li G.-L., Wu J.-T., Xia Y.-H. et al.* // J. Neural Engin. 2020. V. 17. No. 5. Art. No. 051004.
4. *Hramov A.E., Maksimenko V.A., Pisarchik A.N.* // Phys. Reports. 2021. V. 918. P. 1.
5. *Lin F.-R., Kao C.-M.* // Comput. Educ. 2018. V. 122. P. 63.
6. *Babiker A., Faye I., Mumtaz W. et al.* // Multimed Tools Appl. 2019. V. 78. Art. No. 16261.
7. *Aulet L.S., Lourenco S.F.* // Cognition. 2021. V. 210. Art. No. 104610.
8. *Klimesch W.* // Brain Res. Rev. 1999. V. 29. No. 2–3. P. 169.
9. *Antonenko P., Paas F., Grabner R., van Gog T.* // Educ. Psychol. Rev. 2010. V. 22. No. 4. P. 425.
10. *Maksimenko V.A., Runnova A.E., Zhuravlev M.O. et al.* // PLoS One. 2018. V. 13. No. 9. Art. No. e0197642.
11. *Куркин С.А., Грубов В.В., Максименко В.А. и др.* // Информ.-упр. сист. 2020. Т. 5. С. 50.

12. Букина Т.В., Храмова М.В., Куркин С.А. // Изв. вузов. Прикл. нелинейн. динам. 2021. Т. 29. № 3. С. 449.
13. Семаго Н.Я., Семаго М.М. Руководство по психологической диагностике: Дошкольный и младший школьный возраст. Метод. пособие. Изд: АПК и ПРО РФ, 2000.
14. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Makarov V.A. et al. Wavelets in neuroscience. SSSYN. Berlin, Heidelberg: Springer, 2015.
15. Benesty J., Chen J., Huang Y., Cohen I. Noise reduction in speech processing. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009.

## A new electroencephalography marker of the cognitive task performance

N. M. Smirnov<sup>a, b, \*</sup>, A. A. Badarin<sup>a, b</sup>, S. A. Kurkin<sup>a, b</sup>, A. E. Hramov<sup>a, b</sup>

<sup>a</sup>*Innopolis University, Innopolis, 420500 Russia*

<sup>b</sup>*Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, 236041 Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: n.smirnov@innopolis.university*

Universal biomarker based on the calculation of the dispersion of the ratio of alpha- and beta-rhythms energy in the registered electroencephalography signals and reflecting the level of the components of the cognitive resource of the learner was revealed. Using the Bourdon test (proofreading test) as an example, it is shown that this biomarker significantly correlates with the main indicators of success and performance of standardized cognitive tasks.

УДК 53.05

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТРУКТУРЫ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ АВРОРАЛЬНОГО ХИССА И СРАВНЕНИЕ С РЕЗУЛЬТАТАМИ НАЗЕМНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

© 2023 г. А. С. Никитенко<sup>1, \*</sup>, Ю. В. Федоренко<sup>1</sup>, Ю. Маннинен<sup>2</sup>, О. М. Лебедь<sup>1</sup>, Е. Б. Бекетова<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное научное учреждение  
“Полярный геофизический институт”, Апатиты, Россия

<sup>2</sup>Геофизическая обсерватория Соданкюля, Соданкюля, Финляндия

<sup>3</sup>Филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования  
“Мурманский арктический государственный университет” в г. Апатиты, Апатиты, Россия

\*E-mail: alex.nikitenko91@gmail.com

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Представлены результаты моделирования распространения аврорального хисса от источника до земной поверхности и их сравнения с результатами наблюдений. Проанализированы условия распространения волн, способные объяснить локальность наблюдаемой на земле области засветки аврорального хисса. Показано, что квазиэлектростатические волны со случайными амплитудами, фазами и направлениями волновых нормалей, представляющие собой авроральный хисс, распространяясь к земле, образуют два пучка в меридиональной плоскости. Рассеяние этих волн на высотах 800–1300 км может быть причиной наблюдаемой локальности области засветки.

DOI: 10.31857/S0367676522700259, EDN: JVARNR

### ВВЕДЕНИЕ

Авроральный хисс — один из типов магнито-сферных излучений, регистрируемых у земной поверхности в высоких широтах. Его спектр занимает широкий диапазон с максимальной интенсивностью на частотах 8–10 кГц [1].

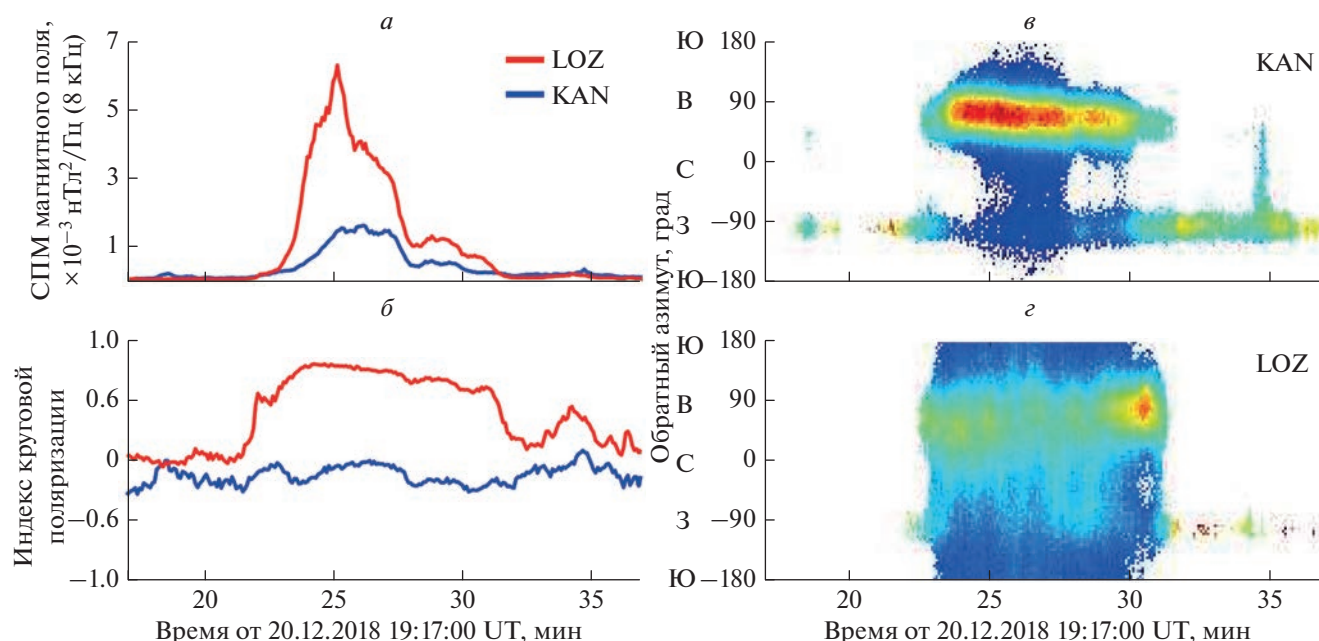
Авроральный хисс возникает за счет механизма некогерентного черенковского излучения при равенстве проекций фазовой скорости волны и скорости электрона на силовую линию [1, 2]. Генерируемые волны набирают энергию в результате развития неустойчивости на резонансе Ландау [3]. В генерации участвуют электроны с энергиями 0.1–10 кэВ. При этом на спутниках наблюдается корреляция аврорального хисса с потоками электронов, имеющих энергию около 1 кэВ [4–6]. Гирочастота электронов и их плазменная частота уменьшаются с высотой, поэтому верхний предел высоты, на которой возможна генерация хисса, определяется наименьшей из этих двух частот.

Волновые нормали генерируемых волн лежат вблизи резонансного конуса, определяемого как конус углов по отношению к внешнему магнитному полю, на котором показатель преломления стремится к бесконечности [7]. В таких волнах электрическое поле доминирует над магнитным,

в связи с чем их принято называть квазиэлектростатическими [8].

Из-за больших углов падения квазиэлектростатические волны отражаются либо в верхней ионосфере, где частота волны становится равной локальной частоте нижнегибридного резонанса (НГР отражение) [9], либо в нижней ионосфере, где происходит их полное внутреннее отражение из-за резкого уменьшения показателя преломления. Земной поверхности способны достичь только волны с волновыми нормальными в пределах конуса выхода, определяемого из закона Снеллиуса [7]. Преодоление высоты НГР отражения и выход волн к земной поверхности происходит за счет рассеяния квазиэлектростатических волн на неоднородностях электронной концентрации с масштабами много меньше длины волны (<100 м) [9]. Рассеянные волны имеют широкий пространственный спектр, часть которого попадает в конус выхода и, таким образом, может достичь земной поверхности.

Последние наземные наблюдения аврорального хисса в разнесенных точках демонстрируют локальность области, засвеченной на земной поверхности (далее область засветки), по широте и долготе [10–12]. В данной работе исследуются условия выхода аврорального хисса к наземному



**Рис. 1.** Из работы [11] *а*) временные вариации горизонтальной компоненты магнитного поля  $H_t$  (*а*), индекса круговой поляризации  $P_c$  (*б*) и распределения плотности потока энергии по обратному азимуту вектора Пойнтинга  $p(\varphi)$  (*в*) на частоте 8 кГц на станциях KAN и LOZ для события 20 декабря 2018 г. 19:17–19:37 UT.

наблюдателю и особенности распространения этого излучения, способные повлечь за собой наблюдаемые локальность и малые размеры области засветки.

### НАЗЕМНЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ АВРОРАЛЬНОГО ХИССА

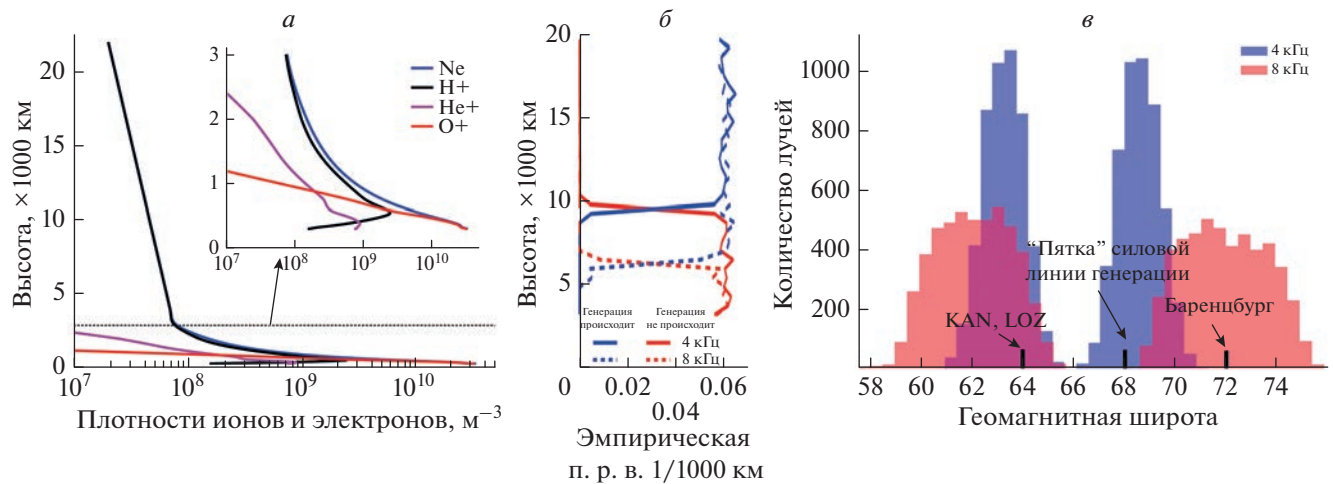
В данной работе мы исследовали факторы, способные обусловить обсуждаемую в работе [11] локальность области засветки аврорального хисса. Из 22 событий, зарегистрированных на станциях Ловозеро (LOZ, Россия, географические координаты:  $\varphi = 67.97^\circ$  с.ш.,  $\lambda = 35.02^\circ$  в.д., исправленные геометрические координаты:  $\Phi = 64.7^\circ$ ,  $\Lambda = 113.1^\circ$ ) и Каннуслахто (KAN,  $\varphi = 67.74^\circ$  N,  $\lambda = 26.27^\circ$  в.д.,  $\Phi = 64.6^\circ$ ,  $\Lambda = 105.6^\circ$ ) за два сезона наблюдений, отмечено 5 событий с размерами области засветки меньше расстояния между станциями, равного 400 км.

Рассмотрим типичный пример регистрации аврорального хисса в LOZ и KAN при локальной области засветки 20 декабря 2018 г. 19:17–19:37 UT. На рис. 1 представлены временные вариации горизонтальной компоненты магнитного поля  $H_t$ , индекса круговой поляризации  $P_c$  и распределения плотности потока энергии по азимутальным углам прихода  $p(\varphi)$ , рассчитанные для рассматриваемого интервала времени на частоте 8 кГц (из работы [11]).

В LOZ амплитуда горизонтальной компоненты ( $H_t$ ) примерно в 5 раз выше, чем в KAN. Индекс круговой поляризации  $P_c$  составляет около 0.8, означая регистрацию волн с правой, близкой к круговой, поляризацией [10, 12, 13]. Волны с такой поляризацией наблюдаются при расположении точки наблюдений в окрестности центра области засветки (другое название “область выхода”) [10, 12, 14]. Плотность потока энергии распределена практически равномерно по диапозону углов прихода  $0^\circ$ – $360^\circ$ , что также указывает на расположение точки LOZ в окрестности центра области засветки [10, 12].

В KAN индекс круговой поляризации близок к нулю, что говорит о линейной поляризации регистрируемых волн. Распределение плотности потока энергии по углам прихода в KAN имеет выраженный максимум в направлении прихода волн с востока (со стороны LOZ), а разброс по углам составляет 60–80 градусов. Линейная поляризация волн в KAN означает расположение этой точки далеко от центра области засветки [14], что также подтверждается малым относительно LOZ разбросом по углам в распределении  $p(\varphi)$ . Согласно оценкам в работах [10, 12], это расстояние может достигать 400–500 км.

Наблюдаемые отличия в амплитуде магнитного поля и поляризации в LOZ и KAN объясняются локальностью области засветки [10–12, 15, 16]. Уменьшение разброса в плотности потока энер-



**Рис. 2.** Профили концентрации электронов и ионов для события 20 декабря 2018 г. 19:17–19:37 UT (а); эмпирические плотности распределения высот, на которых возможна (синие кривые) и не возможна (красные) генерация аврального хисса на частотах 4 (сплошные линии) и 8 кГц (пунктирные линии) (б); эмпирические плотности распределения широт, на которых произошло НГР отражение (в).

гии по углам прихода более чем в два раза дает основание полагать, что размеры области засветки были меньше расстояния между станциями.

### МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ АВРАЛЬНОГО ХИССА ОТ ИСТОЧНИКА К ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В работе [9] в рамках DE (diffusive equilibrium) модели ионосферы [17] авторы моделировали рассеяние квазиэлектростатических волн на высотах порядка 3000 км. Однако, при расположении области рассеяния на этой высоте невозможно обеспечить близкую к наблюдаемой локальность области засветки на земной поверхности за счет предполагаемого уменьшения области рассеяния. В наших предыдущих работах при моделировании распространения волн, рассеянных на высотах 2000 [12] и 3000 км [10], также было показано, что в этом случае размеры области засветки превышают расстояние между станциями KAN и LOZ.

В современной модели ионосферы IRI-2016 [18] высота НГР отражения в окрестности максимума интенсивности аврального хисса (8 кГц) и в окрестности нижней границы его спектра (4 кГц) находится ниже 800 км и ниже 1200 км, соответственно. Таким образом, область рассеяния квазиэлектростатических волн может располагаться гораздо ниже 3000 км. Для выяснения связи размера области засветки с высотой области рассеяния мы провели моделирование распространения аврального хисса от области генерации до наземного наблюдателя. Мы рассматривали частоты 4 и 8 кГц и высоты области рассеяния от 800 до 2000 км с использованием профилей электронной

и ионной концентрации из модели IRI-2016 для события 20 декабря 2018 г. 19:17–19:37 UT (рис. 2а).

Электромагнитное поле аврального хисса на земной поверхности по своим свойствам весьма близко к свойствам многомерного гауссова случайного поля. Его свойства являются следствием суперпозиции множества случайных актов генерации и рассеяния квазиэлектростатических волн. Электрическое поле в области рассеяния есть сумма электрических полей квазиэлектростатических волн со случайными амплитудами, фазами и волновыми векторами. Эти волны генерируются на случайных расстояниях от области рассеяния электронами со случайными энергиями. Поток электронов имеет конечную ширину, поэтому акты генерации распределены не только по высоте, но и по широте и долготе. Эти свойства процессов генерации и распространения аврального хисса заданы в описываемой здесь модели в виде плотности распределений высоты и широты актов генерации, энергии электронов, направления перпендикулярной к силовой линии компоненты волнового вектора генерируемой волны  $\vec{k}_\perp$  и амплитуд и фаз квазиэлектростатических волн. Распределение актов генерации по высоте  $g(h)$  считалось равномерным в промежутке от 3000 до 20000 км, распределение плотности электронов пучка было задано в виде гауссова распределения с центром на силовой линии магнитного поля, пересекающей земную поверхность на геомагнитной широте 68 градусов, и среднеквадратичным отклонением 0.25 градуса. Скорость электронов  $v_\parallel$  рассчитывалась из максвелловского распределения по энергиям  $p(E) \propto E \exp(-E/E_0)$ ,  $E_0 = 5$  кэВ.

Для описания геомагнитного поля мы использовали дипольную модель. Частота столкновений электронов и ионов с нейтралами рассчитывалась согласно работам [19, 20]. Концентрации нейтралов получены с помощью модели NRLMSIS 2.0 [21]. Чтобы получить концентрации на высотах до 20000 км, мы экстраполировали экспонентой профили электронной и ионных концентраций, предоставляемые IRI-2016, от высоты 3000 км так, чтобы  $N_e = 10^6 \text{ м}^{-3}$  на высоте 22000 км. Область моделирования ниже высоты рассеяния разбивалась на слои, толщина которых определялась скоростью изменения концентрации электронов.

Моделирование распространения аврорально-го хисса к земной поверхности проходило в два этапа. На первом этапе с помощью методов геометрической оптики проводился расчет распространения квазистатических волн с высоты генерации (5–20 тыс. км) до высот 800–2000 км. Для этого мы использовали двумерную модель, в которой положение волнового пакета описывается с помощью замкнутой системы трех дифференциальных уравнений [22], описывающих изменения координат луча и угла между волновым вектором и нормалью к земной поверхности по времени.

На произвольной высоте из условия черенковского резонанса [1, 2]  $k_{||} = k_0 \frac{v_{||}}{c}$ , где  $k_0 = \frac{\omega}{c}$ ,  $\omega = 2\pi f$ ,  $k_{||}$ ,  $v_{||}$  – проекции волнового вектора генерируемой волны и скорости электрона на направление силовой линии магнитного поля, соответственно, мы рассчитывали продольные компоненты  $k_{||}$  волновых векторов квазистатических волн, а поперечные компоненты  $k_{\perp}$  определялись из дисперсионного соотношения  $\det(n^2 I - \vec{n} \vec{n}^T - \hat{\epsilon}) = 0$  [7, 23], где  $I$  – единичная матрица,  $\vec{n}$  – вектор показателя преломления,  $\hat{\epsilon}$  – тензор диэлектрической проницаемости, символ  $T$  означает транспонирование вектора  $\vec{n}$ . Вследствие цилиндрической симметрии задачи азимутальные координаты вектора  $\vec{k}$  не определены и считались равномерно распределенными в интервале  $[0, 2\pi)$ .

На втором этапе проводился расчет рассеяния квазистатических волн на мелкомасштабных неоднородностях. Для этого мы использовали борновское приближение [24, 25] и учитывали однократное рассеяние волн. В рамках этого приближения поле рассеянных волн считается малым по сравнению с полем первичной волны, полученной на первом этапе. Неоднородности задавались корреляционной функцией с радиусом корреляции несколько десятков метров. Пространственное ограничение области с неоднородностями

описывалось двумерной гауссовой функцией. Подробное описание метода приведено в работе [10].

Из-за резкого уменьшения показателя преломления в нижней ионосфере (100–120 км) применение методов геометрической оптики для моделирования распространения рассеянных волн к земной поверхности невозможно. Для расчета распространения с высот 800–2000 км до земной поверхности проводился поиск решения волнового уравнения в плоскостойкой среде (full-wave метод) [23]. На данном этапе для удобства расчетов мы переходили к системе координат, в которой ось  $\hat{z}$  оси  $z$  направлен вертикально вверх поперек ионосферным слоям.

В качестве граничных условий на верхнем слое выступали рассчитанные компоненты электрического и магнитного полей, обусловленные током, возбуждаемым полем первичной волны в неоднородностях. Граничные условия на нижнем слое задавались как коэффициенты отражения волн от земной поверхности с вектором электрического поля в плоскости падения и поперек этой плоскости. Земная поверхность представлена в виде слоя с проводимостью  $\sigma = 2 \cdot 10^{-5} \text{ См}$  и относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 10$ , характерных для LOZ и KAN [26]. Более подробно детали расчетов представлены в работе [10].

## ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

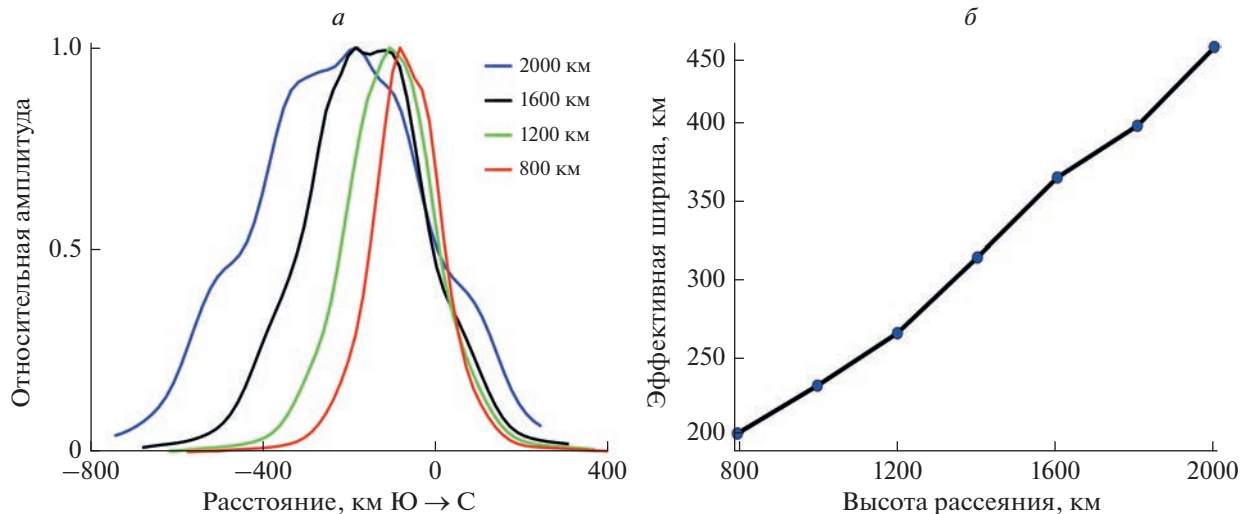
### *Анализ траекторий лучей*

Для выбранной модели ионосферы на частотах 4 и 8 кГц максимальное значение резонансного угла (на высотах около 20000 км) составляет примерно 70° и 80°, соответственно. При этом на высотах 3 тыс. км этот угол уже около 85° и 88° для этих частот. В случае генерации волн электронами с энергией 5 кэВ разница между углом волновой нормали к силовой линии геомагнитного поля и резонансным углом не превышает одного градуса.

На частотах 4 и 8 кГц 60 и 80 процентов запущенных лучей соответственно достигают высоты НГР отражения. На рис. 2б приведены эмпирические плотности распределения высот, на которых происходит генерация на частотах 4 и 8 кГц и на которых генерация невозможна при данных условиях. Видно, что минимально возможная высота генерации на 4 кГц составляет около 10000 км и около 6000 км на 8 кГц. Ниже генерация не происходит из-за того, что условие черенковского резонанса выполняется для волновых нормалей вне резонансного конуса или на данных высотах фазовая скорость волны становится равной нулю.

Для частот 4 и 8 кГц при данных условиях НГР отражение наступает на высотах ~1300 и ~800 км соответственно. На рис. 2в приведены эмпириче-





**Рис. 3.** Модельные распределения напряженности магнитного поля у земной поверхности в меридиональной плоскости при рассеянии квазиэлектростатических волн на области с неоднородностями шириной 50 км, расположенной на высоте 800 (красный), 1200 (зеленый), 1600 (черный) и 2000 км (а); зависимость эффективной ширины области засветки от высоты рассеяния (б).

ские плотности распределения широт, на которых произошло отражение лучей. В меридиональной плоскости при распространении к Земле формируется два пучка волн к югу и северу от силовой линии, на которой происходила генерация. Данный эффект наблюдается только при распространении пучка квазиэлектростатических волн с равномерным распределением азимутального угла перпендикулярной к геомагнитному полю компоненты волнового вектора  $k_{\perp}$ . Ширина распределения широт, на которых произошло отражение лучей (рис. 2в), зависит от распределений высоты актов генерации и энергии электронов и уменьшается при уменьшении ширины этих распределений. При фиксированной энергии электронов и генерации на фиксированной высоте распределение широт в меридиональной плоскости приобретает вид двух дельта функций, одна из которых соответствует направлению компоненты  $k_{\perp}$  на юг, другая — на север.

Для частоты 8 кГц разброс по широте, на которой происходит отражение, и отклонение лучей от силовой линии генерации и больше по сравнению с частотой 4 кГц. Такой эффект вызван тем, что показатель преломления волн на частоте 4 кГц больше, чем на 8 кГц.

Наличие двух пучков позволяет интерпретировать обсуждаемые в работе [12] результаты одновременных наблюдений всплесков аврорального хисса 03 февраля 2019 18:30–20:00 UT на станциях LOZ, KAN и обсерватории Баренцбург (Архипелаг Шпицберген), расположенной севернее этих точек примерно на 1000 км. Проведенный авторами [12] анализ углов прихода и поля-

ризации всплесков показал, что при похожих вариациях магнитного поля на трех станциях наблюдаемые всплески не могут быть объяснены существованием одной области с неоднородностями. В KAN и LOZ регистрируются волны, рассеянные на области, центр которой находится на широте  $\Phi \sim 63^\circ$ . Волны, наблюдаемые в обсерватории Баренцбург, рассеивались на другой области, расположенной на широте  $\Phi \sim 72^\circ$ . При этом центры этих двух областей находились на близких геомагнитных меридианах ( $\Lambda = 92^\circ$  и  $\Lambda = 97^\circ$ ). Исходя из результатов моделирования, можно предположить, что в рассматриваемом событии квазиэлектростатические волны от одного источника, расположенного на широте  $\Phi = 67^\circ\text{--}69^\circ$ , рассеивались на двух пространственно-разнесенных областях с неоднородностями.

#### *Распространение рассеянных волн к земной поверхности*

Для исследования влияния высоты рассеяния волн на пространственную структуру поля у земной поверхности мы рассчитали эти поля на частоте 8 кГц, рассеянные на области с неоднородностями, заданной двумерной гауссовой функцией со среднеквадратичным отклонением 50 км, помещенной на высотах 800, 1200, 1600 и 2000 км.

На рис. 3а представлены рассчитанные распределения напряженности магнитного поля у земной поверхности в меридиональной плоскости  $p(\Phi)$ . Из рисунка видно, что с ростом высоты рассеяния растет ширина засвечиваемой области и увеличивается расстояние между подножием силовой линии, которая проходит через центр об-



ласти с неоднородностями, и максимумом распределения поля у земной поверхности.

Отклонение положения максимума области засветки от подножия силовой линии, по-видимому, вызвано тем, что на высоте рассеяния конус выхода мал и не превышает 7–10 град на частоте 8 кГц. Это приводит к практически вертикальной ориентации волновых нормалей рассеянных волн, попадающих в этот конус. Распространяясь до высот F-слоя ионосферы (300–400 км), рассеянные волны попадают в среду с увеличивающейся электронной концентрацией и, соответственно, увеличивающимся показателем преломления. В этом случае направление волновой нормали не будет претерпевать существенных изменений, и полученное отклонение будет определяться только высотой рассеяния.

Стоит отметить, что ширина области засветки увеличивается практически линейно с ростом высоты, на которой произошло рассеяние. На рис. 3б представлена зависимость эффективной ширины области засветки от высоты рассеяния. Мы определяли эффективную ширину как основание прямоугольника, площадь которого равна площади под кривой  $p(\Phi)$  и высотой, равной значению максимума распределения  $p(\Phi)$ . При увеличении высоты рассеяния на 200 км эффективная ширина увеличивается примерно на 40 км. При рассеянии на высотах НГР отражения (800–1300 км) для используемой модели ионосферы эффективная ширина области засветки составляет 200–300 км, что способно обусловить временные вариации параметров поля в событии 20 декабря 2018 г. 19:17–19:37 UT (рис. 1).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе сравнения экспериментальных и модельных данных мы исследовали особенности распространения аврорального хисса от области генерации до земной поверхности, обуславливающие наблюдаемую в обсерваториях Ловозеро и Каннукслехто локальность и малые по сравнению с расстоянием между станциями размеры области засветки аврорального хисса.

Выявлено, что для выбранной модели ионосферы наименьшая возможная высота генерации различается для разных частот. Для 4 кГц она составляет около 10000 км и около 6000 км для 8 кГц. При учете случайного характера генерации квазиэлектростатических волн в меридиональной плоскости формируется два пучка лучей к югу и северу от силовой линии, на которой произошла генерация. Ширина пучков по широте и отклонение лучей от силовой линии генерации на частоте 8 кГц на высоте НГР отражения выше по сравнению с частотой 4 кГц. Возникновение двух пучков волн позволяет объяснить исследованные в

работе [12] результаты одновременных наблюдений аврорального хисса в LOZ, KAN и обсерватории Баренцбург (Архипелаг Шпицберген) 03 февраля 2019 18:30–20:00 UT, когда регистрация всплесков была обусловлена существованием двух областей рассеяния с центрами на геомагнитных широтах 63° и 72° практически на одном меридиане.

Показано, что с ростом высоты рассеяния квазиэлектростатических волн в конус выхода ширины области засветки растет практически линейно. Кроме того, увеличивается расстояние между положением максимума распределения напряженности магнитного поля на земной поверхности и подножием силовой линии, на которой произошла генерация. Сравнение результатов моделирования с результатами наземных наблюдений аврорального хисса в KAN и LOZ 20 декабря 2018 года 19:17–19:37 UT показало, что рассеяние квазиэлектростатических волн на высотах НГР отражения (800–1200 км) могло вызвать наблюдаемые вариации параметров поля.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jørgensen T.S. // J. Geophys. Res. 1968. V. 73. No. 3. P. 1055.
2. Lim T.L., Laaspere T. // J. Geophys. Res. 1972 V. 77. No. 22. P. 4145.
3. Sazhin S.S., Bullough K., Hayakawa M. // Planet. Space Sci. 1993. V. 41. No. 2. P. 153.
4. Hoffman R.A., Laaspere T. // J. Geophys. Res. 1972. V. 77. No. 4. P. 640.
5. Mosier S.R., Gurnett D.A. // J. Geophys. Res. 1972. V. 77. No. 7. P. 1137.
6. Beghin C., Rauch J.L., Bosqued J.M. // J. Geophys. Res. 1989 V. 94. No. A2. P. 1159.
7. Stix T.H. Waves in plasmas. N.Y.: Amer. Inst. Phys., 1992. 579 p.
8. Bell T.F., Ngo H.D. // J. Geophys. Res. 1988. V. 93. No. A4. P. 2599.
9. Sonwalkar V.S., Harikumar J. // J. Geophys. Res. 2000. V. 105. No. A8. Art. No. 18867.
10. Лебедь О.М., Федоренко Ю.В., Маннинен Ю. и др. // Геомагн. и аэроном. 2019. Т. 59. № 5. С. 618; Lebed O.M., Fedorenko Yu.V., Manninen J. et al. // Geomagn. Aeron. 2019. V. 59. No. 5. P. 577.
11. Никитенко А.С., Маннинен Ю., Федоренко Ю.В. и др. // Геомагн. и аэроном. 2022. Т. 62. № 3. С. 336; Nikitenko A.S., Manninen J., Fedorenko Yu.V. et al. // Geomagn. Aeron. 2022. V. 62. No. 3. P. 209.
12. Никитенко А.С., Лебедь О.М., Федоренко Ю.В. и др. // Изв. РАН. Сер. физ. 2021. Т. 85. № 3. С. 398; Nikitenko A.S., Lebed O.M., Fedorenko Yu.V. et al. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2021. V. 85. No. 3. P. 287.
13. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1976.
14. Yearby K.H., Smith A.J. // J. Atmos. Terr. Phys. 1994. V. 56. No. 11. P. 1499.
15. Machida S., Tsuruda K. // J. Geophys. Res. Space Phys. 1984. V. 89. No. A3. P. 1675.

16. *Tsuruda K., Machida S., Terasawa T. et al.* // J. Geophys. Res. Space Phys. 1982. V. 87. No. A2. P. 742.
17. *Inan U.S., Bell T.F.* // J. Geophys. Res. Space Phys. 1977. V. 82. No. 19. P. 2819.
18. [https://ccmc.gsfc.nasa.gov/modelweb/models/iri2016\\_vitmo.php](https://ccmc.gsfc.nasa.gov/modelweb/models/iri2016_vitmo.php).
19. *Davies A., Lester M., Robinson T.R.* // Ann. Geophys. 1997. V. 15. No. 12. P. 1557.
20. *Banks P.* // Planet. Space Sci. 1966. V. 14. No. 11. P. 1085.
21. <https://kawaii.ccmc.gsfc.nasa.gov/instantrun/msis>.
22. *Walter F.* Nonducted VLF propagation in the magnetosphere. Stanford: Stanford University, 1969. 143 p.
23. *Lehtinen N.G., Inan U.S.* // J. Geophys. Res. 2008. V. 113. No. A6. P. 63.
24. *Lehtinen N.G., Marshall R.A., Inan U.S.* // J. Geophys. Res. 2010. V. 115. No. A7. Art. No. A00E40.
25. *Рытов С.М., Крацов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. М.: Наука, 1978.
26. *Korja T., Engels M., Zhamaletdinov A. et al.* // Earth Planet. Sci. Lett. 2002. V. 54. P. 535.

## Modeling of the auroral hiss spatial structure and comparison with the observed results

**A. S. Nikitenko<sup>a,\*</sup>, Yu. V. Fedorenko<sup>a</sup>, J. Manninen<sup>b</sup>, O. M. Lebed<sup>a</sup>, E. B. Beketova<sup>c</sup>**

<sup>a</sup>*Polar Geophysical Institute, Apatity, 184209 Russia*

<sup>b</sup>*Sodankylä Geophysical Observatory, Sodankylä, FIN-99600 Finland*

<sup>c</sup>*Murmansk Arctic State University, Branch in Apatity, Apatity, 184209 Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: alex.nikitenko91@gmail.com*

We present the results of the auroral hiss propagation modeling from the source region to the ground and its comparison with the observed results. We analyzed propagation conditions explaining locality of the auroral hiss illuminated area observed on the ground. It is shown that quasioleostatic waves with random amplitudes, phases and wavenormals directions representing the auroral hiss propagating to the ground form two wave beams in the meridional plane. The scattering of these waves at altitudes of 800–1300 km can cause the observed locality of the illuminated area.

УДК 551.594

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГЛОБАЛЬНОГО ИОНОСФЕРНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ, СОЗДАВАЕМОГО ГРОЗАМИ

© 2023 г. В. В. Денисенко<sup>1, 2, \*</sup>, М. Дж. Райкрофт<sup>3</sup>, Р. Дж. Харрисон<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения Российской академии наук – обособленное подразделение Федерального государственного бюджетного научного учреждения Федеральный исследовательский центр “Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук”, Красноярск, Россия

<sup>2</sup>Калининградский филиал Федерального государственного бюджетного учреждения науки “Институт земного магнетизма ионосферы и распространения радиоволн имени Н.В. Пушкова Российской академии наук”, Калининград, Россия

<sup>3</sup>Цезарь консалтинг, Кембридж, Великобритания

<sup>4</sup>Университет Рэдинга, Факультет метеорологии, Рэдинг, Великобритания

\*E-mail: denisen@icm.krasn.ru

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Данные об атмосферном электрическом поле хорошей погоды, полученные во время круиза VII миссии Карнеги, представлены в виде диаграммы в координатах универсальное время и месяцы, чтобы показать как суточные, так и сезонные вариации. Максимум поля наблюдается в момент времени около 18 UT в январе. Для этого момента времени создана модель ионосферной части глобальной электрической цепи, связанной с грозами. Построенная токовая система состоит из среднеширотной части и экваториальных электроструй, дневных и ночных, направленных на запад и восток, с силой тока до 120 А.

DOI: 10.31857/S0367676522700260, EDN: JVCZXA

### ВВЕДЕНИЕ

Существует несколько физических процессов, создающих ионосферное электрическое поле. Токи, создаваемые всеми этими генераторами, называются глобальной электрической цепью (ГЭЦ) [1]. Здесь мы изучаем только ту часть ГЭЦ, которая генерируется токами, поднимающимися из атмосферы. Хотя связанная с грозами часть ГЭЦ анализируется в многочисленных статьях, ее ионосферная часть все еще недостаточно изучена. Цель настоящей статьи – представить нашу модель электрических полей и токов, являющихся ионосферным проявлением части ГЭЦ, связанной с грозами. Первые результаты нашего моделирования были представлены в [2] с исправлением опечаток в [3]. Важной особенностью глобальных ионосферных токов является их концентрация вблизи геомагнитного экватора. Для ГЭЦ это было показано в [4]. Здесь мы кратко опишем модель [2] и представим новые результаты, полученные с использованием модели глобального распределения гроз [5], полученной на основе данных Всемирной наземной сети определения местоположения молнии (WWLLN) [6].

### МОДЕЛЬ ГЛОБАЛЬНОГО ИОНОСФЕРНОГО ПРОВОДНИКА

Наша модель глобального проводника, состоящего из атмосферы, ионосферы, магнитосферы и литосферы, построенная для описания ГЭЦ с допустимыми упрощениями, детально описана в статье [2]. Мы рассматриваем атмосферу, ионосферу и магнитосферу как единый проводник, ограниченный снизу идеальным проводником, включающим океаны и сушу. Основными уравнениями для стационарного электрического поля  $\vec{E}$  и плотности тока  $\vec{j}$  являются закон Фарадея, закон сохранения заряда и закон Ома с тензором проводимости  $\hat{\sigma}$ . Вводится электрический потенциал  $V$ , для которого система уравнений сводится к уравнению электропроводности

$$-\text{div}(\hat{\sigma} \text{grad} V) = Q. \quad (1)$$

Мы используем сферические геомагнитные координаты  $\theta_m, \varphi_m$ , геомагнитную широту  $\lambda_m = \frac{\pi}{2} - \theta_m$  и высоту над средним уровнем моря  $h$ . Проводимость ионосферы Земли представляет собой гиротропный тензор, одна ось которого

определяется направлением магнитной индукции  $\vec{B}$ . Мы используем компоненты векторов, параллельных и нормальных к  $\vec{B}$ , которые отмечаем символами  $\parallel$  и  $\perp$ , при этом  $B = \vec{B}$ . Тогда закон Ома имеет вид

$$\vec{j}_{\parallel} = \sigma_{\parallel} \vec{E}_{\parallel}, \quad \vec{j}_{\perp} = \sigma_P \vec{E}_{\perp} - \sigma_H [\vec{E}_{\perp} \times \vec{B}] / B, \quad (2)$$

с проводимостью Холла ( $\sigma_H$ ), Педерсена ( $\sigma_P$ ) и продольной ( $\sigma_{\parallel}$ ). Проводимости рассчитываются с использованием эмпирических моделей IRI-2016, MSIS 1990 E и IGRF. Поскольку в ионосфере продольная проводимость  $\sigma_{\parallel}$  на несколько порядков больше, чем  $\sigma_P, \sigma_H$ , можно свести трехмерную модель к двумерной [7]. Проинтегрировав закон Ома (2) вдоль магнитной силовой линии, получаем суммарную плотность тока через магнитную силовую линию  $j_{\perp}$ . Если бы силовые линии были параллельными прямыми линиями, то  $\vec{E}_{\perp}$  было бы постоянным при этом интегрировании, и

$$\vec{J}_{\perp} = \begin{pmatrix} \Sigma_P & \Sigma_H \\ -\Sigma_H & \Sigma_P \end{pmatrix} \vec{E}_{\perp}, \quad (3)$$

с интегральными проводимостями Педерсена и Холла  $\Sigma_P, \Sigma_H$ , которые получены из локальных проводимостей Педерсена и Холла  $\sigma_P, \sigma_H$  интегрированием вдоль магнитной силовой линии. Магнитные силовые линии не являются параллельными прямыми, и это вносит некоторые геометрические факторы в интегрирование. Мы также используем проводимость Каулинга  $\Sigma_C = \Sigma_P + \Sigma_H^2 / \Sigma_P$ , которая наиболее важна в низких широтах.

Закон сохранения заряда (1) в двумерной модели выполняется в проинтегрированном вдоль магнитной силовой линии виде. Для численного решения задачи полезно построить некоторую опорную область на плоскости с декартовыми координатами  $x, y$ , точки которой идентифицируют все рассматриваемые силовые линии магнитного поля. В приближении дипольного геомагнитного поля двумерное уравнение электропроводности в такой области может быть записано в виде

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \Sigma_P \frac{\partial V}{\partial x} + \Sigma_H \frac{\partial V}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( -\Sigma_H \frac{\partial V}{\partial x} + \Sigma_P \frac{\partial V}{\partial y} \right) = Q, \quad (4)$$

где  $Q$  определяется атмосферными токами, входящими в ионосферу через концы магнитной силовой линии в Северном и Южном полушариях. Для реального геомагнитного поля коэффициенты в (4) имеют более сложный вид [7].

Рассмотрение проводников в магнитосфере [8] показывает, что авроральные зоны эквива-

лентны почти идеальным проводникам, поскольку они соединены параллельно как между собой, так и с хорошими магнитосферными проводниками. Мы считаем их идеальным проводником с нулевым электрическим потенциалом  $V = 0$ , что дает граничное условие Дирихле. Вторую границу проводника образуют самые нижние магнитные силовые линии, рассматриваемые как ионосферные. На них задан ток из атмосферы. Получается смешанная краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных (4), которое является уравнением эллиптического типа. Она имеет единственное решение [9].

## МОДЕЛЬ ГЛОБАЛЬНОГО ГРОВОГО ГЕНЕРАТОРА

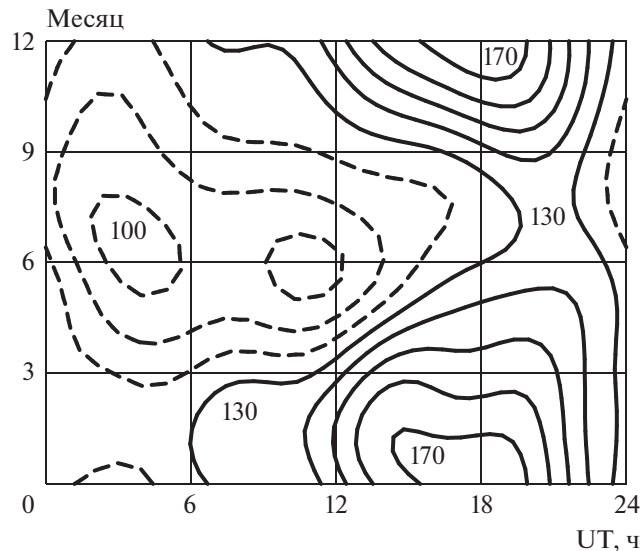
Генератором ГЭЦ является совокупность всех гроз на Земле [10]. Их единым параметром является суммарный электрический ток в ионосферу. К сожалению, нет способа измерить этот ток. Поэтому приходится использовать процедуру [5], которая кратко описана ниже.

Сначала, по диаграмме Карнеги, описанной в следующем разделе, мы берем напряженность электрического поля хорошей погоды вблизи поверхности океана для исследуемого момента времени. Это поле  $E_0$  и одномерная модель атмосферной проводимости дают разность потенциалов между поверхностью Земли и ионосферой  $U_0$ . Затем мы получаем токи хорошей погоды на всем земном шаре и путем интегрирования получаем суммарный ток хорошей погоды, текущий из ионосферы на землю  $I_0$ . Параметр  $R = U_0 / I_0$  представляет собой полное сопротивление атмосферы.

Сохранение заряда в стационарном случае означает, что такой же ток течет из грозовых областей в ионосферу  $I_{storm} = I_0$ . Поскольку распределение грозового тока по Земле неизвестно, мы заменяем его глобальным распределением молниевой активности, предполагая, что ток в ионосферу и количество вспышек молнии линейно пропорциональны некоторому скрытому параметру, который характеризует грозовую активность. Мы используем модель [5] глобального распределения грозовой активности, построенную на основе данных Всемирной наземной сети определения местоположения молнии (WWLLN) [6].

## ДИАГРАММА КРУИЗА VII МИССИИ КАРНЕГИ

В статье [11] построены аппроксимации кривых Карнеги, т.е. зависимостей  $E_0$  от UT, полученных для разных сезонов во время круиза VII.



**Рис. 1.** Вертикальное электрическое поле  $E_0$  над поверхностью океана, полученное из данных VII круиза Карнеги [11]. Линии  $E_0 = \text{const}$  в зависимости от времени (UT) и месяца года построены с интервалом  $10 \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}$ . Штриховые линии соответствуют значениям  $E_0 \leq 120 \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}$ .

Аппроксимирующие функции были выбраны в виде

$$E_0(t) = A_0 + \sum_{n=1}^4 A_n \sin(nt15^\circ + \varphi_n), \quad (5)$$

где  $E_0$  — напряженность направленного вниз электрического поля над поверхностью океана,  $t$  — универсальное время (UT) в часах, значения коэффициентов  $A_n$  и фаз  $\varphi_n$  приведены в табл. 4 в [11] с усреднением по тройкам месяцев. Из них мы используем четыре тройки: NDJ (ноябрь, декабрь, январь) и аналогично обозначаемые FMA, MJJ, ASO.

Сезонную зависимость удобно анализировать, если от этих четырех функций времени  $E_0(t)$  перейти к единой функции  $E_0(m, t)$ , где параметр  $m$  описывает время в течение года, например, в месяцах. Параметр  $m$  мы считаем не дискретным, а непрерывно меняющимся в интервале  $0 < m < 12$ . Все функции считаем периодически продолженными вне этого интервала.

Для определения  $E_0(m, t)$  следует определить зависимость параметров (5) от  $m$ , например,  $A_0(m)$ . Естественно предполагать, что приведенные в [11] значения параметров (5) получены как средние для этих сезонов, например:

$$\begin{aligned} A_0^{\text{NDJ}} &= \frac{1}{3} \int_{-2}^1 A_0(m) dm, & A_0^{\text{FMA}} &= \frac{1}{3} \int_1^4 A_0(m) dm, \\ A_0^{\text{MJJ}} &= \frac{1}{3} \int_4^7 A_0(m) dm, & A_0^{\text{ASO}} &= \frac{1}{3} \int_7^{10} A_0(m) dm. \end{aligned} \quad (6)$$

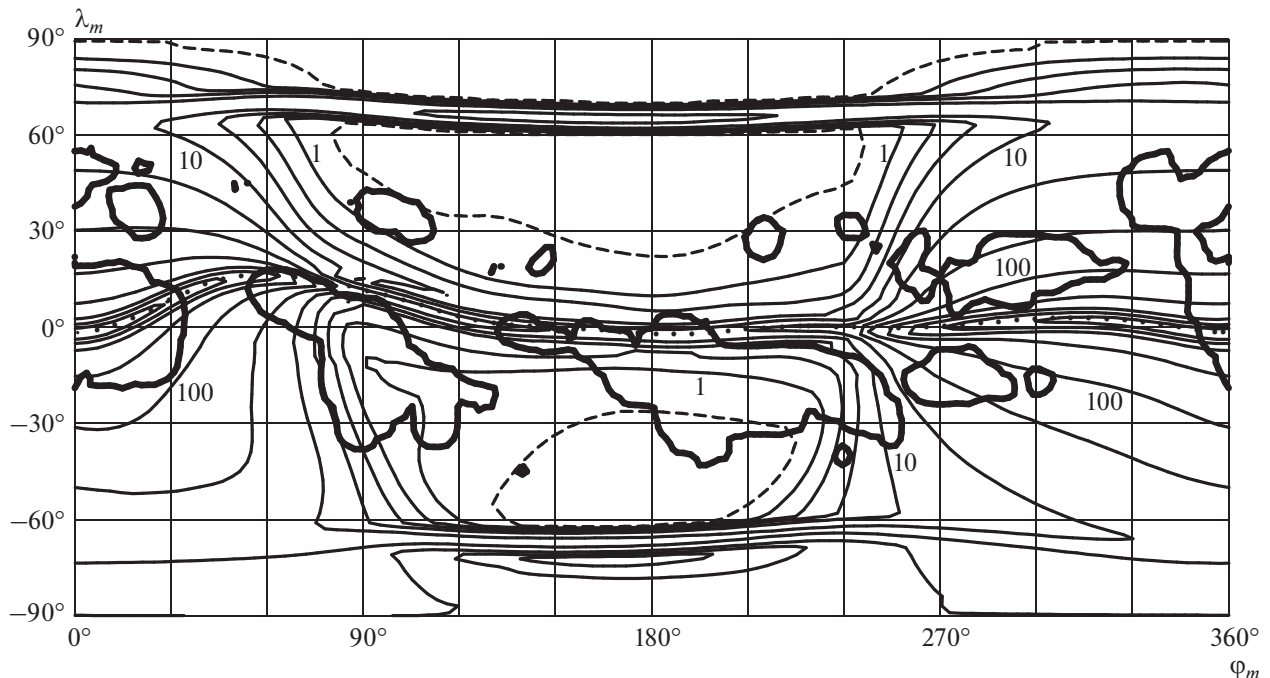
Искомая аппроксимирующая функция  $A_0(m)$  должна удовлетворять этим уравнениям. Можно использовать тригонометрический полином

$$\begin{aligned} A_0(m) &= a + b \cos(2\pi(m - 0.5)/12) + \\ &+ c \sin(2\pi(m - 0.5)/12) + \\ &+ e \cos(4\pi(m - 0.5)/12). \end{aligned} \quad (7)$$

Сдвиг на полмесяца соответствует сдвигу в усреднениях (6) и позволяет не включать в (7) еще один член  $\sin(4\pi(m - 0.5)/12)$ , поскольку его средние значения по всем четырем интервалам (6) равны нулю. Средние значения функции (7) по каждому интервалу несложно вычислить. Подставив их в уравнения (6), получаем четыре линейных алгебраических уравнения для четырех неизвестных  $a, b, c, e$ . Их решением являются

$$\begin{aligned} a &= (A_0^{\text{NDJ}} + A_0^{\text{FMA}} + A_0^{\text{MJJ}} + A_0^{\text{ASO}})/4, \\ b &= (A_0^{\text{NDJ}} - A_0^{\text{MJJ}})\pi/(4\sqrt{2}), \\ c &= (A_0^{\text{FMA}} - A_0^{\text{ASO}})\pi/(4\sqrt{2}), \\ e &= (A_0^{\text{NDJ}} - A_0^{\text{FMA}} + A_0^{\text{MJJ}} - A_0^{\text{ASO}})\pi/16. \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогично вычисляем коэффициенты полиномов вида (7) для остальных восьми функций. Подставив полученные девять функций  $A_0(m), \dots, \varphi_4(m)$  в представление (5), получаем искомую функцию  $E_0(m, t)$ . Ее линии уровня показаны на рис. 1. По построению, ее усреднение за три месяца дает кривую Карнеги для этого периода. Рисунок 1 можно назвать диаграммой Карнеги VII. Она дает наглядное представление не только



**Рис. 2.** Глобальное распределение проводимости Каулинга  $\Sigma_C$  в 18:00 UT 1 января при низкой солнечной активности. Жирными контурами выделены области грозы, где  $J_{atm} > 0$ . Точками показан геомагнитный экватор.

УТ вариаций, как кривая Карнеги, но и вариации в течение года.

Как видно по рис. 1, напряженность электрического поля в атмосфере над океаном минимальна (около 100 В/м) в период 02–12 UT в июне-июле и максимальна (до 170 В/м) в период 15–19 UT в январе. Последним обстоятельством определяется выбор 1 января для детального представления результатов моделирования в настоящей статье.

## РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Описанным выше способом мы получили глобальное распределение грозовых токов в ионосферу для первого дня года, когда диаграмма Карнеги на рис. 1 показывает абсолютный максимум  $E_0 = 177 \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}$  в момент времени 18 UT. Затем мы добавили токи хорошей погоды, которые имеют противоположное направление,  $J_{atm} < 0$ . Жирные контуры на рис. 2 выделяют грозовые области, в которых  $J_{atm} > 0$ .

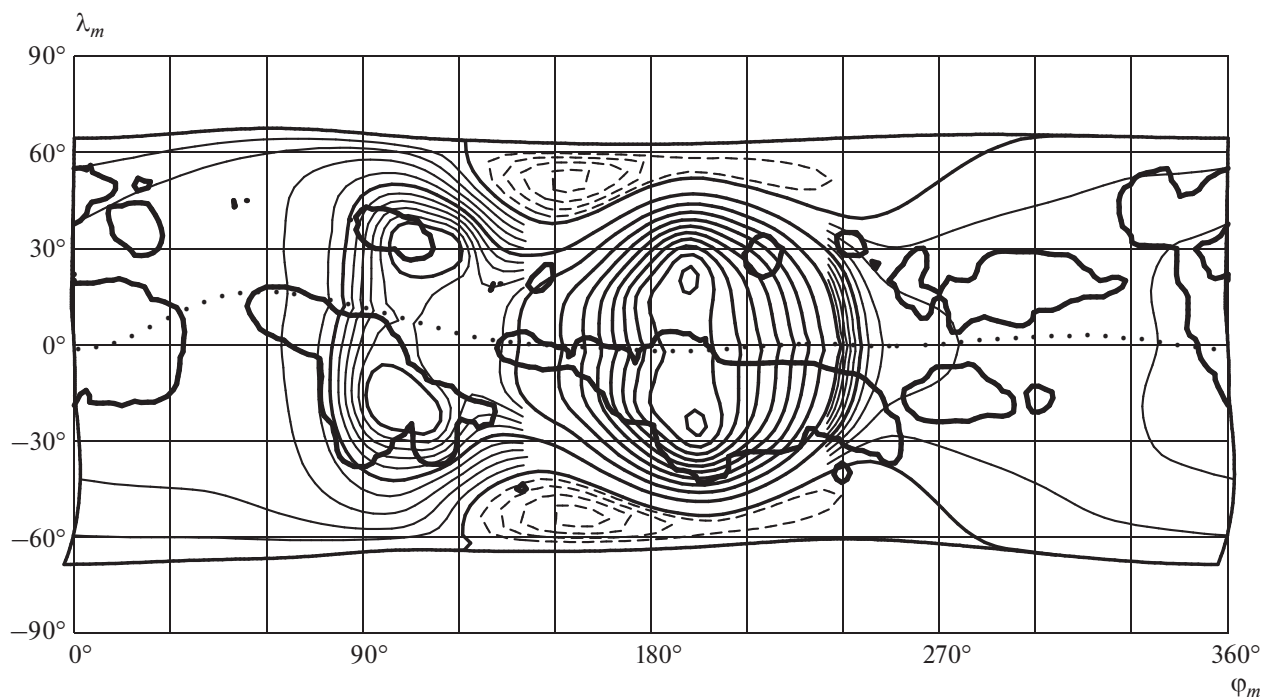
Поскольку диаграмма Карнеги представляет измерения над океаном, мы используем соответствующие значения атмосферных параметров  $\sigma(0) = 3.09 \cdot 10^{-14} \text{ См} \cdot \text{м}^{-1}$  и  $\Sigma(\lambda, \varphi) = 1.09 \cdot 10^{-17} \text{ См}$  в соответствии с моделью [2]. Для  $E_0 = 177 \text{ В/м}$  получаем  $U_0 = 502 \text{ кВ}$  и  $I_{storm} = 2.79 \text{ кА}$  при  $R =$

$= 180 \text{ Ом}$ . Если мы используем параметры, соответствующие суше,  $\sigma(0) = 1.54 \cdot 10^{-14} \text{ См} \cdot \text{м}^{-1}$  и  $\Sigma(\lambda, \varphi) = 0.80 \cdot 10^{-17} \text{ См}$  для того же  $E_0$ , мы получим  $U_0 = 340 \text{ кВ}$  и  $I_{storm} = 1.89 \text{ кА}$ .

Решение смешанной краевой задачи для уравнения (4) в основной части ионосферы в 18 ч UT представлено на рис. 3. Распределение электрического потенциала  $V(\varphi_m, \lambda_m)$  на высоте  $h = 120 \text{ км}$  в ионосфере показано с помощью эквипотенциалей, построенных с интервалом 20 В. Для малых значений  $V < 40 \text{ В}$  интервал взят равным 4 В; на рис. 3 они показаны тонкими линиями, штриховые линии соответствуют отрицательным значениям.

Максимальная разность потенциалов в ионосфере составляет около 220 В. Это на три порядка меньше, чем напряжение между землей и ионосферой, которое в этой модели составляет 502 кВ. Соответствующая напряженность электрического поля также невелика. Его горизонтальная составляющая не превышает  $90 \text{ мкВ} \cdot \text{м}^{-1}$ . Тем не менее, именно это небольшое электрическое поле обеспечивает распределение ионосферных токов, которые замыкают токи из атмосферы и в атмосфере.

Положение области максимального значения ионосферного потенциала  $V = 205 \text{ В}$  соответ-



**Рис. 3.** Распределение электрического потенциала на высоте 120 км в ионосфере. Эквипотенциалы построены с интервалом 20 В, дополнительно тонкими линиями для  $V < 40$  В с интервалом 4 В. Штриховые линии соответствуют отрицательным значениям потенциала. Жирными контурами выделены области грозы, где  $J_{atm} > 0$ . Карта рассчитана для 18:00 UT 1 января при низкой солнечной активности. Точками показан геомагнитный экватор.

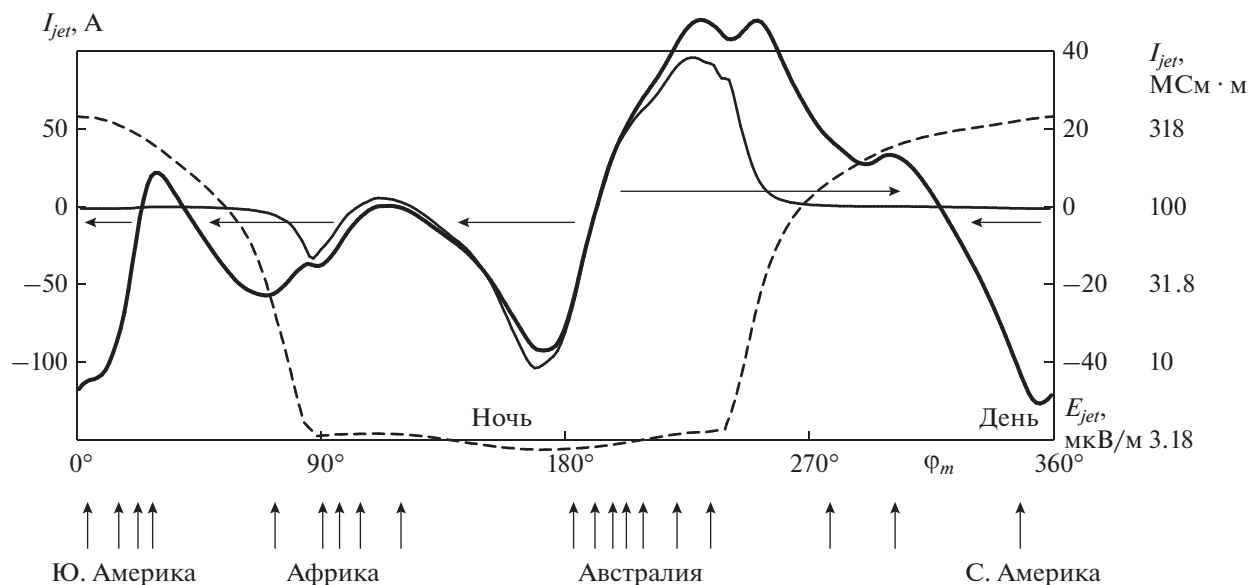
ствует большому грозовому генератору над Северо-Западной Австралией. Видны лишь незначительные возрастания потенциала над другими грозовыми областями из-за высокой дневной ионосферной проводимости (вблизи экватора местный полдень наступает при  $\phi_m = 340^\circ$ ). Рисунок 3 демонстрирует естественное свойство напряженности электрического поля: она намного больше в ночной ионосфере, поскольку там мала проводимость.

Теперь обратим внимание на окрестность геомагнитного экватора, на котором магнитное поле  $\vec{B}$  по определению имеет нулевую вертикальную составляющую. Геомагнитный экватор показан точками на рис. 2 и 3. Эквипотенциалы примерно перпендикулярны геомагнитному экватору. Строго говоря, они параллельны магнитному полю  $\vec{B}$ , а направление  $\vec{E}$  точно перпендикулярно геомагнитному экватору только для дипольного поля. Мы видим изменение потенциала вдоль геомагнитного экватора на рис. 3, что означает ненулевую составляющую  $E_\phi$  напряженности электрического поля.

Из-за существенного увеличения проводимости на геомагнитном экваторе  $E_\phi$  создает эквато-

риальные электроструи [12]. Строго говоря, нам нужна составляющая  $E_{jet}$ , которая нормальна к магнитному полю и не сильно отличается от  $E_\phi$ . Это поле незначительно меняется с высотой на силовых линиях магнитного поля, вершины которых находятся ниже 200 км. Как видно на рис. 4, оно не превышает  $40 \text{ мкВ} \cdot \text{м}^{-1}$ . Ток электроструи  $I_{jet}$  может быть получен численным интегрированием по силовым линиям магнитного поля с вершинами в интервале высот  $90 < H < 135 \text{ км}$  [12]. Интегрирование проводимости Каулинга по той же области дает полную проводимость области электроструи  $A_{jet}$ . Ток электроструй показан жирной линией на рис. 4. Направления электроструй также показаны горизонтальными стрелками (положительный ток направлен на восток). Вертикальными стрелками отмечены токи, поднимающиеся в ионосферу из основных грозовых областей, каждая стрелка соответствует 100 А в данном секторе. Большая часть этого тока возникает в огромной грозовой области, включающей Северо-Западную Австралию и Юго-Восточную Азию. Именно эта область порождает основную восточную электрострую к востоку от нее (до 120 А) и сильную западную электрострую к западу от нее





**Рис. 4.** Ток электроструй  $I_{jet}(\phi_m)$  (жирная линия), компонента  $E_{jet}(\phi_m)$  электрического поля (тонкая линия), проводимость области электроструи  $A_{jet}(\phi_m)$  в логарифмическом масштабе (штриховая линия). Горизонтальные стрелки показывают направления экваториальных электроструй в ионосфере. Вертикальные стрелки характеризуют токи, поступающие в ионосферу из грозовых областей; каждая стрелка соответствует 100 А вблизи этого меридиана.

(до 90 А). Такие направления означают, что заряды, доставляемые в ионосферу из атмосферы, разносятся ионосферными токами, в том числе, этими электроструями.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Создана модель ионосферной части ГЭЦ, связанной с грозами, для январского вечера (18 UT). Эта токовая система содержит четыре экваториальных электроструи, дневные и ночные, направленные на запад и на восток, с токами, достигающими 120 А. Они создают магнитные возмущения на земле, которые, по оценкам, находятся в диапазоне 0.1 нТл. В принципе, эти магнитные возмущения можно было бы измерить на геомагнитном экваторе ночью, когда они не замаскированы сильными электроструями, порождаемыми всеми ионосферными и магнитосферными генераторами.

Данные миссии Карнеги представлены в виде диаграммы в координатах UT и время года, чтобы показать как суточные, так и сезонные вариации. Рисунок 1 построен для VII круза Карнеги.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-17-00208).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hays P.B., Roble R.G. // J. Geophys. Res. 1979. V. 84. No. A7. P. 3291.
2. Denisenko V.V., Rycroft M.J., Harrison R.G. // Surv. Geophys. 2019. V. 40. No. 1. P. 1.
3. Denisenko V.V., Rycroft M.J., Harrison R.G. // Surv. Geophys. 2019. V. 40. No. 1. P. 37.
4. Denisenko V.V., Rycroft M.J. // J. Atmos. Terr. Phys. 2021. V. 221. No. 3. Art. № 105704.
5. Денисенко В.В., Ляхов А.Н. // Солн.-земн. физ. 2021. Т. 7. № 4. С. 111; Denisenko V.V., Lyakhov A.N. // Sol.-Terr. Phys. 2021. V. 7. No. 4. P. 104.
6. Rodger C.J., Brundell J.B., Dowden R.L., Thomson N.R. // Ann. Geophys. 2004. V. 22. P. 747.
7. Denisenko V.V., Biernat H.K., Mezentssev A.V. et al. // Ann. Geophys. 2008. V. 26. P. 2111.
8. <http://arxiv.org/abs/1802.07955>.
9. Денисенко В.В. // Сибир. мат. журн. 1994. Т. 35. № 3. С. 554; Denisenko V.V. // Siberian Math. J. 1994. V. 35. No. 3. P. 495.
10. Мареев Е.А. // УФН. 2010. Т. 180. С. 527; Mareev E.A. // Phys. Usp. 2010. V. 53. No. 5. P. 504.
11. Harrison R.G. // Surv. Geophys. 2013. V. 34. P. 209.
12. Richmond A.D. // J. Atmos. Terr. Phys. 1973. V. 3. No. 6. P. 1083.

## Mathematical model of the global ionospheric electric field generated by thunderstorms

V. V. Denisenko<sup>a, b, \*</sup>, M. J. Rycroft<sup>c</sup>, R. G. Harrison<sup>d</sup>

<sup>a</sup>*Institute of Computational Modelling of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Krasnoyarsk, 660036 Russia*

<sup>b</sup>*West Department of Pushkov Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere and Radio Wave Propagation of the Russian Academy of Sciences, Kaliningrad, 236016 Russia*

<sup>c</sup>*CAESAR Consultancy, Cambridge, CB3 9HW United Kingdom*

<sup>d</sup>*University of Reading, Department of Meteorology, Reading, RG6 6BB United Kingdom*

*\*e-mail: denisen@icm.krasn.ru*

A model is created for the thunderstorm-related ionospheric part of the global electric circuit in January. This current system consists of both mid-latitude currents and equatorial electrojets, day-time and night-time, westward and eastward, up to 120 A. Data on the atmospheric fair weather electric field obtained during Carnegie cruise VII are plotted as a two dimensional map in Universal Time and month coordinates to show both time and seasonal variations.

УДК 539.172.13

## ОСОБЕННОСТИ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТА ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ПРОТОН-ПРОТОННЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ В РЕАКЦИИ $d + {}^1\text{H} \rightarrow n + p + p$

© 2023 г. В. В. Мицук<sup>1, \*</sup>, А. А. Афонин<sup>1</sup>, А. А. Каспаров<sup>1</sup>, В. М. Лебедев<sup>2</sup>,  
М. В. Мордовской<sup>1</sup>, А. В. Спасский<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт ядерных исследований Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

“Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”,

Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д.В. Скобельцына, Москва, Россия

\*E-mail: vyacheslav.mitsuk@phystech.edu

Поступила в редакцию 29.07.2022 г.

После доработки 15.08.2022 г.

Принята к публикации 22.08.2022 г.

Рассмотрен метод определения энергии синглетного квазисвязанного  $pp$ -состояния в реакции  $d + {}^1\text{H} \rightarrow n + p + p$ . Представлены процедура получения экспериментальных данных по измерению длины  $pp$ -рассеяния, а также процедура извлечения из экспериментальных данных величины энергии протон-протонного состояния с использованием метода минимума  $\chi^2$ .

DOI: 10.31857/S0367676522120237, EDN: JGLINF

### ВВЕДЕНИЕ

Важной проблемой для современной ядерной физики является изучение нарушения зарядовой симметрии (НЗС). Примером НЗС является различие синглетных длин  $nn$ - и  $pp$ -рассеяния. Протон-протонную длину рассеяния получают из прямого эксперимента по рассеянию протонов на водородной мишени [1]. Нейтрон-нейтронную длину рассеяния из-за отсутствия нейтронной мишени получают только из реакций с двумя нейтронами в конечном состоянии, например  $d + {}^2\text{H} \rightarrow p + p + n + n$  и  $n + {}^2\text{H} \rightarrow n + n + p$ . Однако в работе [2] показано, что на извлекаемую величину длины  $nn$ -рассеяния может влиять взаимодействие  $nn$ -пары с протоном и протонной парой. Можно предположить, что аналогичное влияние на извлекаемую величину протон-протонной длины рассеяния (или энергии синглетного  $pp$ -состояния) в реакциях с тремя или четырьмя частицами  $d + {}^2\text{H} \rightarrow p + p + n + n$  и  $d + {}^1\text{H} \rightarrow n + p + p$  может оказать нейтрон или нейтронная пара. В ИЯИ РАН в настоящее время проводятся работы по исследованию реакции  $d + {}^1\text{H} \rightarrow n + p + p$ , целью которых является исследование влияния  $3N$ -сил на извлекаемые величины низкоэнергетических характеристик  $pp$ -состояния (длины рассеяния и энергии виртуального  ${}^1S_0$  уровня)

[3–5]. Данное исследование проводится в рамках изучения нуклон-нуклонных корреляций в нескольких реакциях [6–8]. В настоящей работе мы рассмотрим процедуру получения экспериментальных данных по измерению длины  $pp$ -рассеяния, а также процедуру извлечения из экспериментальных данных низкоэнергетических характеристик протон-протонного взаимодействия с использованием метода минимума  $\chi^2$  при сравнении экспериментальных данных с результатами моделирования.

### КИНЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Для определения оптимальных параметров эксперимента было проведено кинематическое моделирование реакции  $d + {}^1\text{H} \rightarrow n + p + p$ . Моделирование реакции проведено в два этапа. На первом этапе при энергии пучка дейтронов 15 МэВ рассматривалась двухчастичная реакция  $d + {}^1\text{H} \rightarrow (pp) + n$  с затравочной массой двухпротонной системы  $m_{2p} = 2m_p + E_{pp}$ . Поскольку искомого значения энергии виртуального уровня в рассматриваемой реакции неизвестно, при моделировании оно бралось в широком интервале  $E_{pp} = 0.2\text{--}0.6$  МэВ. С учетом экспериментальных условий (угол установки детектора заряженных частиц должен быть не менее  $15^\circ$ ) были определе-

ны оптимальные углы вылета нейтрона ( $38^\circ \pm 2^\circ$ ) и  $pp$ -пары ( $-18^\circ \pm 1.5^\circ$ ), соответствующие максимально возможным в эксперименте энергиям протонов. Положительным и отрицательным углам соответствуют углы вылета налево и направо от оси пучка, соответственно.

На втором этапе рассматривалась трехчастичная реакция  $d + {}^1\text{H} \rightarrow n + p + p$ , при этом углы регистрации протона и нейтрона берутся близкими к значениям углов вылета нейтрона и  $pp$ -пары, определенными на первом этапе моделирования. Для каждого моделированного события относительная энергия системы двух протонов  $\epsilon$ , т.е. превышение полной энергии  $pp$ -системы над ее массой, рассчитывается через кинетические энергии вторичных протонов и угол их разлета в лабораторной системе [9]. Отбор событий со значениями относительной энергии  $pp$ -системы  $\epsilon$  в интервале  $E_{pp} \pm \Delta E_{pp}$  приводит к структуре в энергетическом спектре протонов (рис. 1). Величина  $\Delta E_{pp}$  определяет ширину интервала энергии  $\epsilon$  и выбирается таким образом, чтобы разбить рассматриваемый диапазон величины  $\epsilon$  на несколько равных промежутков (отбор событий производится для каждого такого промежутка).

Наличие двух пиков в энергетическом спектре протонов объясняется тем, что в реакциях с образованием и развалом виртуального  $pp$ -состояния при условии детектирования протона под углом близким к углу вылета  $pp$ -системы, попасть в детектор могут только частицы от развала  $pp$ -состояния, вылетающие в системе центра масс или вперед ( $\sim 0^\circ$ ), или назад ( $\sim 180^\circ$ ). При этом разность между пиками в энергетическом спектре зависит от энергии  $pp$ -состояния. Кинематическое моделирование показало, что при определенных кинематических условиях имеется прямая зависимость формы энергетического распределения “развальной” частицы от энергии квазисвязанного состояния, позволяющая определить эту важную характеристику нуклон-нуклонного взаимодействия. Поэтому сравнение энергетических спектров протонов, полученных в ходе моделирования со спектрами, полученными из эксперимента, должно позволить определить энергию квазисвязанного  $pp$ -состояния в трехчастичной реакции. Кинематическое моделирование позволило определить диапазон измерения энергии протонов (0.5–8 МэВ), доступный для исследования  $E_{pp}$  в интервале 200–600 кэВ.

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ СХЕМА

По результатам моделирования была создана экспериментальная установка для исследования реакции  $d + {}^1\text{H} \rightarrow n + p + p$  (рис. 2). Измерения

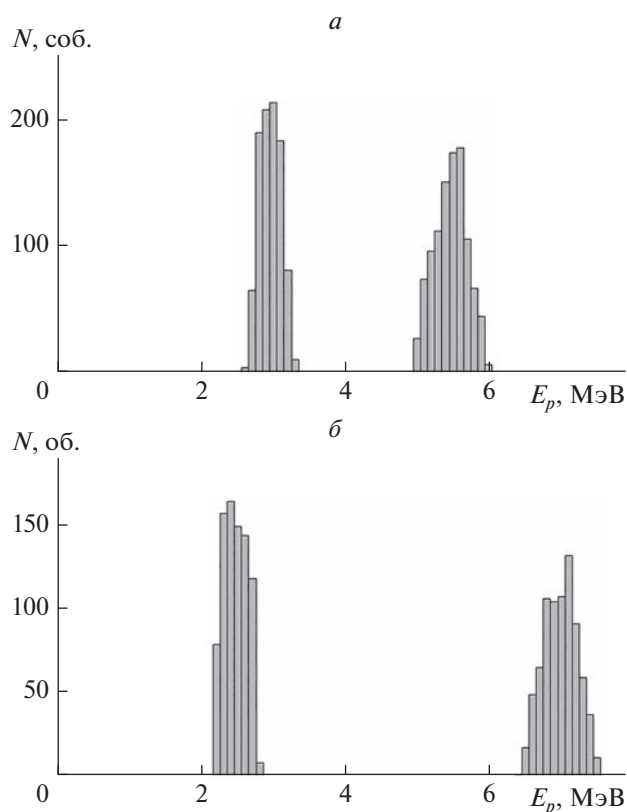
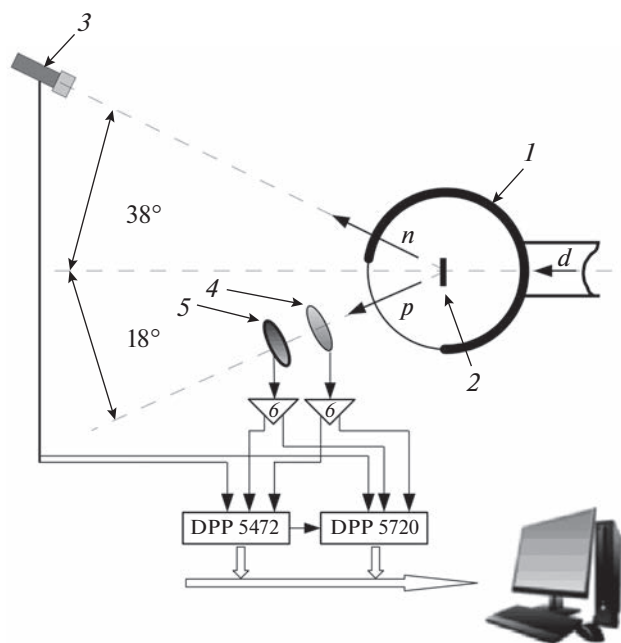


Рис. 1. Энергетические спектры протонов, образующиеся в реакции  $d + {}^1\text{H} \rightarrow n + p + p$  для различных значений  $\epsilon$ :  $200 \pm 50$  (а),  $600 \pm 50$  кэВ (б).

проводятся совместно с НИИЯФ МГУ на пучке дейтронов ускорителя У-120 при энергии 15 МэВ. Схема включает в себя вакуумную камеру рассеяния, мишень  $\text{CH}_2$ , нейтронный детектор, кремниевые  $\Delta E$ - и  $E$ -детекторы с толщинами 24 и 500 мкм, соответственно, а также систему, состоящую из предусилителя и усилителя для каждого детектора, и цифровые сигнальные процессоры (ЦСП) DT 5720 и DT 5742, используемые для оцифровки медленных (амплитудных) и быстрых (временных) сигналов, соответственно.

В данном эксперименте пучок дейтронов облучает водородосодержащую мишень, помещенную в вакуумную камеру диаметром  $\sim 23$  см с выходным окном из лавсана толщиной  $\sim 20$  мкм. Наличие тонкого выходного окна позволяет устанавливать детекторы заряженных частиц снаружи камеры.

В эксперименте будут регистрироваться в совпадении один из протонов и нейтрон под углами близкими к углам вылета двухпротонной системы и нейтрона в двухчастичной реакции. Для определения типа и измерения энергии заряженной частицы используется телескоп кремниевых  $\Delta E$ – $E$  детекторов. Второе плечо регистрации со-



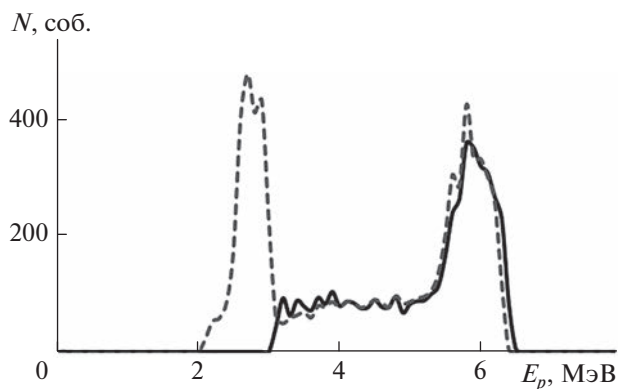
**Рис. 2.** Схема экспериментальной установки для исследования реакции  $d + {}^1\text{H} \rightarrow n + p + p$ : 1 – вакуумная камера рассеяния, 2 – мишень  $\text{CH}_2$ , 3 – детектор нейтронов, 4 – кремниевый тонкий  $\Delta E$ -детектор (24 мкм), 5 – кремниевый  $E$ -детектор (500 мкм), 6 – усилительные тракты.

держит жидкий водородсодержащий сцинтилляционный детектор нейтронов EJ-301.

Сигналы с детекторов подаются через соответствующие тракты усиления на ЦСП DT 5720 и DT 5742. В качестве стартового сигнала времяпролетной системы используется быстрый сигнал предусилителя  $E$ -детектора заряженных частиц. Через буферную память ЦСП оцифрованные сигналы передаются в основной компьютер. Обработка информации ведется в режиме off-line и заключается в определении амплитуд и площадей импульсов, определении времен возникновения сигналов в детекторах, определении энергии нейтрона по времени пролета, цифровом анализе формы импульсов для  $n$ - $\gamma$  разделения, отборе совпадающих событий и получении энергетических и временных спектров.

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОХОЖДЕНИЯ ПРОТОНОВ ЧЕРЕЗ ДЕТЕКТИРУЮЩУЮ СИСТЕМУ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ СПЕКТРА ПРОТОНОВ

Рассмотрим моделирование прохождения протонов через  $\Delta E$ – $E$ -систему. Заряженные частицы проходят ряд слоев вещества: мишень  $\text{CH}_2$  (30 мкм), пленка из лавсана (20 мкм), слой воздуха между пленкой и  $\Delta E$ -детектором (22.5 мм),



**Рис. 3.** Пунктирная линия – исходный энергетический спектр протонов, соответствующий  $\epsilon = 300 \pm 50$  кэВ с добавлением событий из фоновых реакций; сплошная линия – восстановленный спектр.

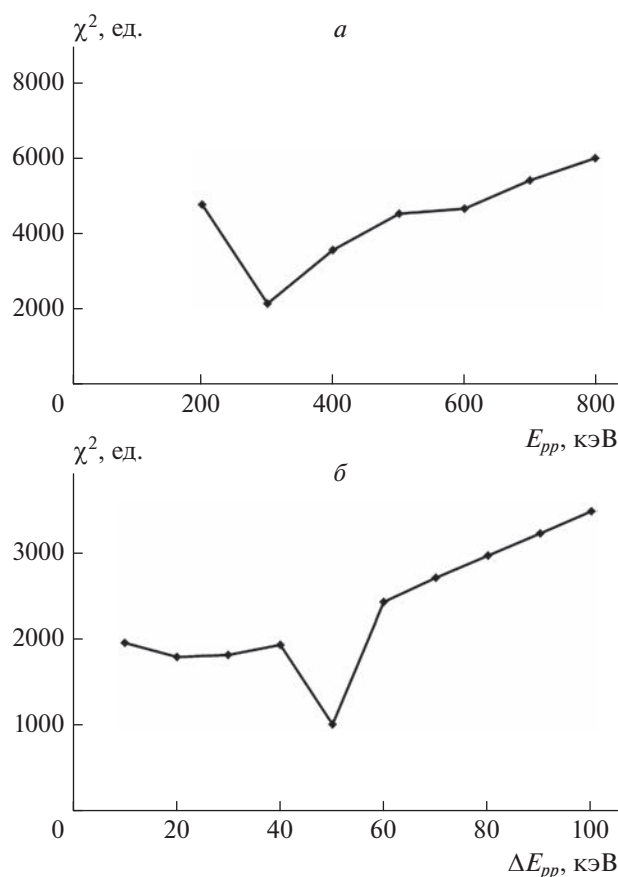
кремниевый  $\Delta E$ -детектор (24 мкм), слой воздуха между  $\Delta E$ - и  $E$ -детектором (10 мм), кремниевый  $E$ -детектор (500 мкм). Последовательно рассчитываются ионизационные потери частиц в каждом из слоев, а затем восстанавливается исходная энергия частиц по формуле  $E_0 = f(\Delta E + E)$ , где  $E_0$  – энергия налетающих частиц,  $\Delta E$  и  $E$  – потери частиц в  $\Delta E$ - и  $E$ -детекторах, соответственно.

На рис. 3 представлен результат восстановления энергетического спектра протонов с  $\epsilon = 300 \pm 50$  кэВ после прохождения  $\Delta E$ – $E$ -системы. При этом в исходный спектр добавлена часть событий из фоновых реакций  $d + {}^1\text{H} \rightarrow n + p + p$  (без отбора по  $E_{pp}$ ) и  $d + {}^{12}\text{C} \rightarrow n + p + {}^{12}\text{C}$ .

Из рис. 3 видно, что для извлечения величины  $E_{pp}$  будет использован только правый пик восстановленного энергетического спектра, поскольку протоны с энергиями меньше 3 МэВ не долетают до  $E$ -детектора.

Полученный в результате восстановления спектр  $E_p$  был использован для процедуры определения величины  $E_{pp}$  по методу минимума  $\chi^2$ . Процедура заключается в сравнении восстановленного энергетического спектра протонов, соответствующего  $\epsilon = 300 \pm 50$  кэВ с добавлением событий из фоновых реакций, и различных исходных энергетических спектров для разных значений  $\epsilon = E_{pp} \pm \Delta E_{pp}$ . На рис. 4а показана зависимость величины  $\chi^2$  от различных  $E_{pp}$  при  $\Delta E_{pp} = 50$  кэВ, а на рис. 4б показана зависимость величины  $\chi^2$  от различных  $\Delta E_{pp}$  при  $E_{pp} = 300$  кэВ.

Диаграммы на рис. 4а и 4б показывают, что из экспериментального спектра, полученного в реальных измерениях, можно извлечь значение энергии синглетного виртуального  $pp$ -состояния.



**Рис. 4.** Зависимость величины  $\chi^2$  от различных  $E_{pp}$  при  $\Delta E_{pp} = 50$  кэВ (а); зависимость величины  $\chi^2$  от различных  $\Delta E_{pp}$  при  $E_{pp} = 300$  кэВ (б).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен метод определения энергии синглетного квазисвязанного  $pp$ -состояния в реакции  $d + {}^1\text{H} \rightarrow n + p + p$ . Проведенное кинематическое моделирование реакции показало, что при определенных кинематических условиях имеется прямая зависимость формы энергетического распределения “развальной” частицы от энергии квазисвязанного синглетного  $pp$ -состояния. Спроектирована схема экспериментальной установки для исследования реакции  $d + {}^1\text{H} \rightarrow n + p + p$ . Проведено моделирование прохождения протонов через детектирующую  $\Delta E$ – $E$  систему с учетом всех слоев веществ (мишень, выходное окно камеры рассеяния, воздух, кремний). Проведено рассмотрение процедуры извлечения энергии виртуального  $pp$ -состояния с использованием метода минимума  $\chi^2$ .

Можно предполагать, что анализ полученных в ходе проводимых измерений данных позволит судить о влиянии  $3N$ -сил на низкоэнергетические характеристики  $pp$ -взаимодействия, извле-

каемые в реакции с тремя частицами в конечном состоянии.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stoks V.G.J., Klomp R.A.M., Terheggen C.P.F. et al. // Phys. Rev. C. 1994. V. 49. No. 6. P. 2950.
2. Конобеевский Е.С., Зуев С.В., Каспаров А.А. и др. // ЯФ. 2018. Т. 81. № 5. С. 555; Konobeevski E.S., Zuyev S.V., Kasparov A.A. et al. // Phys. Atom. Nucl. 2018. V. 81. No. 5. P. 595.
3. Мицук В.В., Мордовской М.В. // Ядерн. физ. и инжиниринг. 2017. Т. 8. № 6. С. 552; Mitcuk V.V., Mor-dovskoy M.V. // Phys. Atom. Nucl. 2018. V. 81. No. 10. P. 1471.
4. Конобеевский Е.С., Афонин А.А., Зуев С.В. и др. // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 4. С. 492; Konobeevski E.S., Afonin A.A., Zuyev S.V. et al. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2020. V. 84. No. 4. P. 378.
5. Конобеевский Е.С., Афонин А.А., Каспаров А.А. и др. // Изв. РАН. Сер. физ. 2021. Т. 85. № 5. С. 685; Konobeevski E.S., Afonin A.A., Kasparov A.A. et al. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2021. V. 85. No. 5. P. 530.

6. Конобеевский Е.С., Зуев С.В., Каспаров А.А. и др. // ЯФ. 2015. Т. 78. № 7–8. С. 687; Konobeevski E.S., Zuyev S.V., Kasparov A.A. et al. // Phys. Atom. Nucl. 2015. V. 78. No. 5. P. 643.
7. Зуев С.В., Каспаров А.А., Конобеевский Е.С. и др. // Изв. РАН. Сер. физ. 2016. Т. 80. № 3. С. 254;
8. Конобеевский Е.С., Кукулин В.И., Зуев С.В. и др. // Изв. РАН. Сер. физ. 2014. Т. 78. № 5. С. 521; Konobeevski E.S., Zuyev S.V., Mordovskoy M.V. et al. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2014. V. 78. No. 5. P. 341.
9. Robson D. // Nucl. Phys A. 1973. V. 204. No. 3. P. 523.

## Features of data processing of the study experiment of proton-proton correlations in the $d + {}^1\text{H} \rightarrow n + p + p$ reaction

V. V. Mitsuk<sup>a,\*</sup>, A. A. Afonin<sup>a</sup>, A. A. Kasparov<sup>a</sup>, V. M. Lebedev<sup>b</sup>, M. V. Mordovskoy<sup>a</sup>, A. V. Spassky<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Institute for Nuclear Research of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 117312 Russia*

<sup>b</sup>*Skobeltsyn Research Institute of Nuclear Physics, Moscow State University, Moscow, 119991 Russia*

\*e-mail: vyacheslav.mitsuk@phystech.edu

A method for determining the energy of a singlet quasibound  $pp$ -state in the  $d + {}^1\text{H} \rightarrow n + p + p$  reaction is considered. Procedures for obtaining experimental data on the measurement of the  $pp$ -scattering length and extracting of the proton-proton state energy from the experimental data using the  $\chi^2$  minimum method are presented.