ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 8, с. 1098–1109

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.55

ВНУТРЕННОСТЬ ИНТЕГРАЛА ОТ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ И ЗАДАЧИ С ЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМОЙ

© 2023 г. М. В. Балашов

Изучена зависимость радиуса шара с центром в нуле, вписанного в значения интеграла от многозначного отображения, от верхнего предела интегрирования. Для некоторых типов интегралов найдены точные асимптотики радиуса по верхнему пределу, когда верхний предел стремится к нулю. Рассмотрены примеры нахождения этого радиуса. Полученные результаты применены для вывода новых достаточных условий равномерно непрерывной зависимости минимального времени и решения-точки в линейной задаче быстродействия от начальных данных. Также рассмотрены приложения в некоторых алгоритмах со множеством достижимости линейной управляемой системы.

DOI: 10.31857/S0374064123080095, EDN: IPXHTM

Введение. Пусть $U\subset\mathbb{R}^n$ – выпуклое компактное множество, $0\in U$, $F(s)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ – матрица с гладкими компонентами. Рассмотрим интеграл от многозначного отображения $F(s)U$

$$\mathcal{F}(t)=\int\limits_0^t F(s)U\,ds. \tag{1}$$

Многозначный интеграл здесь и далее мы будем понимать в смысле интеграла Аумана [1]

$$\int\limits_0^t F(s)U\,ds=\biggl\{\int\limits_0^t F(s)u(s)\,ds : u(s)\in U\biggr\},$$

где $u(s)$ – измеримый селектор. По теореме Ляпунова о векторной мере значение интеграла (1) есть выпуклое и замкнутое множество [2]. Теорию интегралов от многозначных отображений можно найти в монографии [3] (см. также библиографию в ней).

Одно из важных приложений интеграла – описание множества достижимости управляемой системы, в первую очередь линейной. Пусть линейная управляемая система задана в виде включения

$$x'\in Ax+U,\quad x(0)=x_0, \tag{2}$$

где $x\in\mathbb{R}^n$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $0\in U\subset\mathbb{R}^n$ – выпуклый компакт. Пусть $\mathcal{R}(x(0),t)$ – множество достижимости этой системы. Напомним, что для всякого $t\geqslant 0$ множество достижимости $\mathcal{R}(x(0),t)$ для системы (2) есть множество всех точек $x(t)$ по всем решениям $x(\cdot)$ системы (2). Множество достижимости выпукло и замкнуто [4, гл. 2, § 2.2, теорема 1]. Легко получить представление множества достижимости в виде интеграла

$$\mathcal{R}(x(0),t)=e^{At}x(0)+\int\limits_0^t e^{A(t-s)}U\,ds=e^{At}x_0+\int\limits_0^t e^{As}U\,ds. \tag{3}$$

Обозначим $\mathcal{R}_0(t)=\mathcal{R}(0,t)=\int_0^t e^{As}U\,ds$.

Включение $0 \in U$ обеспечивает монотонность интеграла (1): $\mathcal{F}(t_1) \subset \mathcal{F}(t_2)$ при $t_1 \leqslant t_2$. Также заметим, что в силу аддитивности интеграла Аумана справедливо

$$\mathcal{F}(t_2) = \mathcal{F}(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t_2} F(s)U\, ds, \quad t_1 \leqslant t_2.$$

Введём необходимые определения. Через (x, y) будем обозначать скалярное произведение (x, y) для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^n$ – стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $B_R(x)$ замкнутый шар с центром x радиуса $R > 0$. Для множества $\mathcal{M}$ обозначим через $\operatorname{cl}\mathcal{M}$ и $\partial\mathcal{M}$ замыкание и границу множества $\mathcal{M}$ соответственно. Определим функцию расстояния

$$\varrho_{\mathcal{M}}(x) = \inf_{y\in\mathcal{M}} \|x - y\|.$$

Расстоянием в метрике Хаусдорфа между компактными множествами $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subset \mathbb{R}^n$ называется величина

$$h(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = \max\left\{ \max_{x\in\mathcal{M}_1} \varrho_{\mathcal{M}_2}(x), \max_{x\in\mathcal{M}_2} \varrho_{\mathcal{M}_1}(x)\right\}.$$

Полунормой компакта $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ называется число $\|\mathcal{M}\| = h(M, \{0\}) = \max\limits_{x\in\mathcal{M}} \|x\|$.

Через $\operatorname{co}\mathcal{M}$ будем обозначать выпуклую оболочку множества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$.

Для замкнутого множества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ обозначим *конус Булигана* в точке $x \in \mathcal{M}$ через $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}(x) = \{v \in \mathbb{R}^n\colon$ для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\lambda_k \to +0$ такие, что $B_\varepsilon(v) \bigcap (\mathcal{M} - x)/\lambda_k \neq \neq \varnothing\}$. Если множество $\mathcal{M}$ ещё и выпукло, то $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}(x) = \operatorname{cl} \bigcup_{\lambda>0}(\mathcal{M} - x)/\lambda$ [5, с. 174, формула (13)].

Будем обозначать $f \asymp g$ при $t \to +0$, если существуют числа $C_2 > C_1 > 0$ и $t_0 > 0$ такие, что при всех $t \in (0, t_0)$ выполнены неравенства $C_1 \leqslant f(t)/g(t) \leqslant C_2$.

Опорной функцией множества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ в точке $p \in \mathbb{R}^n$ называется $s(p, \mathcal{M}) = \sup\limits_{x\in\mathcal{M}} (p, x)$. Отметим, что для множества $\mathcal{F}(t) = \int_0^t F(s)U\, ds$ легко вычислить опорную функцию. В силу линейности многозначного интеграла

$$s(p, \mathcal{F}(t)) = \int\limits_0^t s(p, F(t)U)\, ds = \int\limits_0^t s(F^T(s)p, U)\, ds.$$

Будем говорить, что выпуклое компактное множество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ *равномерно выпукло*, если существует строго возрастающая функция $\delta : [0, \operatorname{diam}\mathcal{M}] \to [0, +\infty)$, *модуль равномерной выпуклости*, такая, что для всех $x, y \in \mathcal{M}$ выполнено включение [6]

$$(x + y)/2 + B_{\delta(\|x-y\|)}(0) \subset \mathcal{M}.$$

Например, $\mathcal{M}$ является пересечением замкнутых евклидовых шаров радиуса $R > 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}$ равномерно выпукло с модулем $\delta(t) = t^2/(8R)$. Отметим, что любой строго выпуклый компакт из $\mathbb{R}^n$ является равномерно выпуклым с некоторым модулем δ. Будем говорить, что неограниченное множество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ локально равномерно выпукло, если для всякого $R > 0$ множество $\mathcal{M} \bigcap B_R(0)$ равномерно выпукло с модулем δ_R. Любое строго выпуклое замкнутое подмножество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ является локально равномерно выпуклым.

В силу теоремы Дэя–Нордлендера [7, гл. 3, § 3] максимальный модуль равномерной выпуклости среди центрально-симметричных тел диаметра $2R$ имеет евклидов шар, для него

$$\delta(t) = R - \sqrt{R^2 - \frac{t^2}{4}} \geqslant \frac{t^2}{8R}.$$

Рассмотрим пример задачи быстродействия с системой (2). Через $T_0(x_i)$ будем обозначать минимальное время, за которое решение с начальным условием $x(0)=x_i$ попадает на целевое множество $\mathcal{M}$.

Пример 1. Пусть в задаче (2)

$$x\in\mathbb{R}^2,\quad A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad e^{As}=\begin{pmatrix}\cos s & -\sin s\\ \sin s & \cos s\end{pmatrix},\quad U=\mathrm{co}\,(\pm e_1).$$

Пусть $\mathcal{M}=\{x_2\geqslant 4\}$. Рассмотрим начальные условия $x_0=(0,0)$ и $x_1=(0,\varepsilon)$, $\varepsilon>0$.

Для $p=(\cos\varphi,\sin\varphi)$, $\varphi\in[0,2\pi)$, имеем

$$s(p,\mathcal{R}_0(t))=\int\limits_0^t|\cos(s-\varphi)|\,ds.$$

При $t<2\pi$ $s(p,\mathcal{R}_0(t))<4$ и $s(p,\mathcal{R}_0(2\pi))=4=s(p,B_4(0))$ для всякого $\|p\|=1$. Поэтому $\mathcal{R}_0(2\pi)=B_4(0)$ и оптимальное время $T_0(x_0)=2\pi$.

Для второго начального условия

$$\mathcal{R}(x_1,t)=\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}\varepsilon+\mathcal{R}_0(t),\quad s(p,\mathcal{R}(x_1,t))=\varepsilon\sin(\varphi-t)+\int\limits_0^t|\cos(s-\varphi)|\,ds.$$

Для $\varphi=\pi/2$ имеем для некоторого $t\in(3\pi/2,2\pi)$

$$4=\varepsilon\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\int\limits_0^t|\cos(s-5\pi/2)|\,ds=\varepsilon\cos t+2-\int\limits_\pi^t\sin s\,ds.$$

Отсюда находим

$$\cos T_0(x_1)=\frac{1}{1+\varepsilon},\quad T_0(x_1)=2\pi-\tau,$$

где $\tau\in(0,\pi/2)$,

$$\cos(2\pi-\tau)=\cos\tau=\frac{1}{1+\varepsilon},\quad \tau=\arccos\frac{1}{1+\varepsilon}\sim 2\sqrt{\varepsilon},\quad \varepsilon\to+0.$$

Поэтому $T_0(x_1)\sim 2\pi-2\sqrt{\varepsilon}$, $\varepsilon\to+0$, и

$$T_0(x_0)-T_0(x_1)\sim 2\sqrt{\varepsilon}=2\sqrt{\|x_0-x_1\|},\quad \varepsilon=\|x_0-x_1\|\to+0.$$

Отметим, что при малом $t>0$ множество $\mathcal{R}_0(t)$ имеет ширину порядка t^2 в направлении вектора e_2, что и обуславливает условие Гёльдера с показателем $1/2$ по начальным данным в примере 1, более того, легко видеть, что радиус вписанного в $\mathcal{R}_0(t)$ шара с центром в нуле имеет порядок t^2 при $t\to 0$. Это и подобные наблюдения приводят нас к следующему условию.

Условие (I). Для интеграла (1) существует строго возрастающая функция $r:[0,+\infty)\to$ $\to[0,+\infty)$ такая, что $r(0)=0$, $r(t)>0$ при $t>0$ и $B_{r(t)}(0)\subset\mathcal{F}(t)$ при $t\geqslant 0$.

Для функции r будем понимать обратную функцию r^{-1} следующим образом. Если $\mu=$ $=r(t)$ и t – точка непрерывности r, то $r^{-1}(\mu)=t$. Если пределы $r(t\pm 0)=\lim\limits_{s\to t\pm 0}r(s)$ не равны и $\mu\in[r(t-0),r(t+0)]$, то $r^{-1}(\mu)=r(t+0)$.

Определим

$$m_T=\max_{s\in[0,T]}\|F(s)\|\quad\text{и}\quad \mu_T=\min_{\substack{\|h\|=1\\ s\in[0,T]}}\|F(s)h\|.$$

Условие (I) есть по сути аналитическая форма условия управляемости, в частности N-управляемости из работы [8]. Простейший пример выполнения условия (I) реализуется при существовании такого $d>0$, что $B_d(0)\subset U$, т.е. нуль – внутренняя точка U. В этом случае $r(t)=\mu_T td$ при условии, что матрица $F(s)$ не вырождена на отрезке $[0,T]$.

В работе нас будут главным образом интересовать ситуации, когда нуль есть граничная точка множества U, что часто возникает в приложениях, когда размерность множества управлений в (2) меньше размерности фазового пространства, например, U есть отрезок, содержащий нуль. Другая ситуация, которую мы рассмотрим, – это множество U с $C^{1,1}$ гладкой границей, т.е. когда единичная нормаль к U в точке границы ∂U зависит липшицево от точки границы. Этот случай сводится к изучению внутренности интеграла со множеством $U=B_1(p_0)$, $\|p_0\|=1$.

Статья организована следующим образом. В п. 1 оценим $r(t)$ для интеграла (1) когда $0\in\in\partial U$. Будут рассмотрены случаи, когда $0\in[-u,u]\subset\partial U$ для некоторого вектора $u\neq 0$, а также случай, когда $0\in\partial U$ – точка $C^{1,1}$ гладкости. Последнее означает, что существует шар радиуса $\rho>0$ с центром $x_0\in U$ из U такой, что $0\in\partial B_\rho(x_0)$. В первом случае покажем, что $r(t)$ по порядку не менее t^n при $t\to 0$. Во втором случае получим достаточные условия на матрицу $F(s)$ весьма общего вида, при которых $r(t)\asymp t^3$, $t\to 0$, независимо от размерности n пространства. В п. 2 будут получены новые условия равномерной непрерывности минимального времени и точки-решения задачи быстродействия системы (2) с условием $t\to\min$, для которого $x(t)\in\mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ – терминальное множество. В п. 3 рассмотрим приложение результатов к некоторым задачам оптимизации со множеством достижимости линейной управляемой системы.

1. Оценка $r(t)$ в условии (I).

Теорема 1. *Пусть* $u\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, $U=\mathrm{co}\{\pm u\}$, $t_0>0$. *Предположим, что матрица* $F(s)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ $n-1$ *раз непрерывно дифференцируема и* $F^{(n-1)}(s)$ *непрерывна по Липшицу при* $s\in[0,t_0]$. *Пусть* $\operatorname{rank}(F(s)u,F'(s)u,\ldots,F^{(n-1)}(s)u)=n$ *для всех* $s\in[0,t_0]$. *Тогда* $B_{r(t)}(0)\subset\int_0^t F(s)U\,ds$ *и* $r(t)\asymp t^n$, $t\to 0$. *При этом порядок* $r(t)\asymp t^n$ *точный.*

Доказательство. Определим для произвольного единичного вектора p функцию $g(s,p)==(p,F(s)u)$, $g_s^{(l)}(s,p)=(p,F^{(l)}(s)u)$, $l\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Заметим, что $|g(s,p)|=s(p,F(s)U)$.

Покажем, что найдутся такие числа $\beta>0$ и $t_1\in(0,t_0)$, что для любого $\|p\|=1$ и любого $s\in(0,t_1)$ выполняется неравенство

$$\sum_{l=0}^{n-1}|g_s^{(l)}(s,p)|\geqslant\beta. \tag{4}$$

Предположим, что условие (4) неверно. Тогда найдутся последовательность $s_i\to 0$ и векторы $\|p_i\|=1$ такие, что $\sum_{l=0}^{n-1}|g_s^{(l)}(s_i,p_i)|<1/i$. Без ограничения общности из компактности единичной сферы следует $p_i\to p_0$, $\|p_0\|=1$. Переходя к пределу по i, имеем $\sum_{l=0}^{n-1}|g_s^{(l)}(0,p_0)|=0$. Отсюда $(p_0,F^{(l)}(0)u)=0$ для всех $l=\overline{0,n-1}$, что противоречит условию полного ранга. Условие (4) доказано.

Из [9, следствие 2.1] в силу формулы (4) вытекает существование абсолютной константы $c>0$ такой, что $\int_0^t|g(s,p)|\,ds\geqslant ct^n$ для всех $\|p\|=1$. Кроме того, $ct^n=s(p,B_{ct^n}(0))$ для всех $\|p\|=1$. Поскольку последний интеграл есть опорная функция множества $\int_0^t F(s)U\,ds$, то $B_{ct^n}(0)\subset\int_0^t F(s)U\,ds$. Отметим, что условие полного ранга при всех $s\in[0,t_0]$ и условия гладкости на $F(s)$ требуются для доказательства указанного выше следствия 2.1 из [9].

Пусть p_0 такой произвольный единичный вектор, что $(p_0,F^{(l)}(0)u)=0$, $l=\overline{0,n-2}$. Тогда по формуле Тейлора

$$(p_0,F(s)u)=\frac{(p_0,F^{(n-1)}(0)u)}{(n-1)!}s^{n-1}+o(s^{n-1}).$$

Найдётся такое число $t_2 \in (0, t_1)$, что для всех $s \in (0, t_2)$ выполнена оценка

$$|o(s^{n-1})| < \frac{|(p_0, F^{(n-1)}(0)u)|}{(n-1)!} s^{n-1}.$$

Отсюда при $0 < t < t_2$ имеем

$$s\left(p_0, \int\limits_0^t F(s)U\,ds\right) = \int\limits_0^t |g(s,p_0)|\,ds \leqslant 2\int\limits_0^t \frac{|(p_0, F^{(n-1)}(0)u)|}{(n-1)!} s^{n-1}\,ds = \frac{2|(p_0, F^{(n-1)}(0)u)|}{n!} t^n.$$

Теорема доказана.

Пусть в системе (2) множество U содержит отрезок ненулевой длины с центром в нуле, удовлетворяющий условию полного ранга из теоремы 1 для матрицы $F(s) = e^{As}$. Тогда $B_{r(t)}(0) \subset \mathcal{R}_0(t)$ с радиусом $r(t) \geqslant ct^n$.

Теорема 2. *Пусть* $U = B_1(p_0) \subset \mathbb{R}^n$, $\|p_0\| = 1$. *Предположим, что матрица* $F(s) \in \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *удовлетворяет в окрестности нуля условию*

$$F^T(s) = F_0 + F_1 s + F_2 s^2 + o(s^2), \quad s \to 0,$$

где F_i, $i = 0, 1, 2$, *– фиксированные* $n \times n$*-матрицы,* $F_0 = I$ *– единичная* $n \times n$*-матрица и* $\|F_1 p_0\| > |(p_0, F_1 p_0)|$. *Тогда выполнено включение* $B_{r(t)}(0) \subset \int_0^t F(s) B_1(p_0)\,ds$, *и* $r(t) \asymp t^3$, $t \to 0$.

Доказательство. Для всякого вектора $\|p\| = 1$ имеем

$$s(p, \mathcal{F}(t)) = \int\limits_0^t s(F^T(s)p, p_0 + B_1(0))\,ds = \int\limits_0^t ((F^T(s)p, p_0) + \|F^T(s)p\|)\,ds,$$

$$\|F^T(s)p\|^2 = 1 + s^2\|F_1 p\|^2 + 2s(p, F_1 p) + 2s^2(p, F_2 p) + o(s^2),$$

при этом легко видеть, что функция $o(s^2)/s^2$, где $o(s^2)$ – последнее o-малое, равномерно бесконечно малая по $\|p\| = 1$. Отсюда следует, что

$$\|F^T(s)p\| = \sqrt{1 + s^2\|F_1 p\|^2 + 2s(p, F_1 p) + 2s^2(p, F_2 p) + o(s^2)} =$$

$$= 1 + s(p, F_1 p) + \frac{1}{2}s^2(\|F_1 p\|^2 - (p, F_1 p)^2) + s^2(p, F_2 p) + o(s^2),$$

причём последнее o-малое обладает тем же свойством $o(s^2)/s^2 \to 0$ при $s \to 0$ равномерно по $\|p\| = 1$. В результате получаем, что

$$\int\limits_0^t \|F^T(s)p\|\,ds = t + \frac{t^2}{2}(p, F_1 p) + \frac{t^3}{6}(\|F_1 p\|^2 - (p, F_1 p)^2) + \frac{t^3}{3}(p, F_2 p) + o(t^3),$$

и функция $o(t^3)/t^3$ также равномерно по $\|p\| = 1$ бесконечно малая. Заметим сразу, что ниже стереотипно во всех дальнейших разложениях по малому параметру t встречающиеся функции $o(1) = o(t^3)/t^3$ по $\|p\| = 1$ являются равномерно бесконечно малыми.

Таким образом,

$$s(p, \mathcal{F}(t)) = \frac{t}{2}\|p + p_0\|^2 + \frac{t^2}{2}(p + p_0, F_1 p) + \frac{t^3}{6}(\|F_1 p\|^2 - (p, F_1 p)^2) + \frac{t^3}{3}(p + p_0, F_2 p) + o(t^3). \quad (5)$$

Подставляя $p = -p_0$, получаем, что для любой матрицы F с $F_0 = I$ порядок $s(-p_0, \mathcal{F}(t))$ по t при $t \to 0$ не менее трёх.

Определим

$$C_0 = 1 + \|F_1\| + \frac{\|F_2\|}{3}, \quad h_p = p - \left(p + \frac{t}{2}F_1 p + \frac{t^2}{3}F_2 p\right)\left\|p + \frac{t}{2}F_1 p + \frac{t^2}{3}F_2 p\right\|^{-1}.$$

Пусть

$$\varphi(h) = \frac{t}{2}\|h\|^2 + \frac{t^2}{2}(h, F_1 p) + \frac{t^3}{3}(h, F_2 p).$$

Заметим, что h_p есть точка минимума $\varphi(h)$ при условии $\|h-p\| = 1$. Также из (5) следует, что

$$s(p, \mathcal{F}(t)) = \varphi(p + p_0) + \frac{t^3}{6}(\|F_1 p\|^2 - (p, F_1 p)^2) + o(t^3),$$

где $o(t^3)$ из формулы (5).

Зафиксируем такое число $t_0 \in (0, 1)$, что для всякого $t \in (0, t_0]$ выполнены условия:

(i) $\|o(t^3)\| \leqslant t^3/4$ для всех $\|p\| = 1$;

(ii) если $C \in (0, C_0]$ и $\|p + p_0\| = Ct$, то $\|F_1 p\|^2 - (p, F_1 p)^2 \geqslant (\|F_1 p_0\|^2 - (p_0, F_1 p_0)^2)/2$;

(iii) $\varphi(h_p) + t^3(\|F_1 p\|^2 - (p, F_1 p)^2)/6 = t^3(\|F_1 p\|^2 - (p, F_1 p)^2)/24 + o_1(t^3)$ (равенство будет доказано ниже) и для $\varepsilon(t) = o(t^3) + o_1(t^3)$ выполнено $\|\varepsilon(t)\| \leqslant t^3(\|F_1 p_0\|^2 - (p_0, F_1 p_0)^2)/96$ для всех $\|p\| = 1$.

(Функция $o(t^3)$ в условиях (i), (iii) из (5)).

Отметим, что $h_p \asymp t$, $t \to 0$, и $t^3(h_p, F_2 p) \asymp t^4$ при $t \to 0$ равномерно по $\|p\| = 1$.

Зафиксируем $t \in (0, t_0]$ и рассмотрим два случая.

Случай 1: $\boldsymbol{\|p + p_0\| = Ct}$ и $\boldsymbol{C > C_0}$. Из (5) тогда вытекает

$$s(p, \mathcal{F}(t)) \geqslant \frac{C^2 t^3}{2} - \frac{Ct^3}{2}\|F_1\| - \frac{Ct^4}{6}\|F_2\| + o(t^3) \geqslant \frac{Ct^3}{2}\left(C - \|F_1\| - \frac{\|F_2\|}{3}\right) + o(t^3) \geqslant \frac{t^3}{2} + o(t^3),$$

и с учётом (i) $t^3/2 + o(t^3) \geqslant t^3/4$. Таким образом, $s(p, \mathcal{F}(t)) \geqslant t^3/4$ для любого единичного вектора p.

Случай 2: $\boldsymbol{\|p + p_0\| = Ct}$ и $\boldsymbol{0 \leqslant C \leqslant C_0}$. Функция $\varphi(h)$ при условии $\|h - p\| = 1$ имеет глобальный минимум в точке

$$h_p = p - \left(p + \frac{t}{2}F_1 p + \frac{t^2}{3}F_2 p\right)\left\|p + \frac{t}{2}F_1 p + \frac{t^2}{3}F_2 p\right\|^{-1}.$$

При этом

$$\varphi(h_p) = t + \frac{t^2}{2}(p, F_1 p) + \frac{t^3}{3}(p, F_2 p) - t\left\|p + \frac{t}{2}F_1 p + \frac{t^2}{3}F_2 p\right\| =$$

$$= t + \frac{t^2}{2}(p, F_1 p) + \frac{t^3}{3}(p, F_2 p) - t\sqrt{1 + t(p, F_1 p) + \frac{t^2}{4}\|F_1 p\|^2 + \frac{2t^2}{3}(p, F_2 p) + \tilde{o}(t^2)} =$$

$$= -\frac{t^3}{8}(\|F_1 p\|^2 - (p, F_1 p)^2) + o_1(t^3),$$

$$\varphi(h_p) + \frac{t^3}{6}(\|F_1 p\|^2 - (p, F_1 p)^2) = \frac{t^3}{24}(\|F_1 p\|^2 - (p, F_1 p)^2) + o_1(t^3).$$

Отсюда для всякого единичного вектора p имеем

$$s(p, \mathcal{F}(t)) \geqslant \varphi(h_p) + \frac{t^3}{6}(\|F_1 p\|^2 - (p, F_1 p)^2) + o(t^3) = \frac{t^3}{24}(\|F_1 p\|^2 - (p, F_1 p)^2) + \varepsilon(t).$$

Из условия (ii) $\|F_1 p\|^2 - (p, F_1 p)^2 \geqslant (\|F_1 p_0\|^2 - (p_0, F_1 p_0)^2)/2$, и значит,

$$s(p, \mathcal{F}(t)) \geqslant \frac{t^3}{48}(\|F_1 p_0\|^2 - (p_0, F_1 p_0)^2) + \varepsilon(t).$$

С учётом условия (iii)

$$s(p,\mathcal{F}(t)) \geqslant \frac{t^3}{96}(\|F_1p_0\|^2-(p_0,F_1p_0)^2).$$

Теорема доказана.

Если множество U содержит шар $B_\rho(p_0)\subset U$ и $0\in\partial B_\rho(p_0)\bigcap\partial U$, то порядок $r(t)$ по t в условии (I) для интеграла $\mathcal{F}(t)$ не менее t^3. Если дополнительно $U\subset B_R(Rp_0)$ для некоторого $R>0$, то порядок $r(t)$ в точности t^3.

Если в формуле (5) взять больше членов разложения, то можно получить следующий результат.

Замечание 1. Пусть $F(s)$ – $n\times n$ матрица с C^∞ компонентами в окрестности нуля. Если $\|F_1p_0\|=|(p_0,F_1p_0)|$ (т.е. p_0 есть собственный вектор F_1), то при малых $t>0$ для некоторой константы $C>0$ выполнено неравенство $r(t)\leqslant Ct^5$. Порядок $r(t)\asymp t^4$ при $t\to 0$ у функции $s(p,\mathcal{F}(t))$ исключается, поскольку коэффициент при t^4 разложения $s(p,\mathcal{F}(t))$ по t при $p=-p_0$ равен нулю.

Следствие. *Пусть в теореме 2* $F(s)=e^{As}$ *и* $\|A^Tp_0\|>|(p_0,A^Tp_0)|$. *Тогда множество достижимости* $\mathcal{R}_0(t)=\int_0^t e^{As}B_1(p_0)\,ds$ *содержит шар* $B_{r(t)}(0)$ *и* $r(t)\asymp t^3$, $t\to 0$.

2. Оценки модуля непрерывности в задаче быстродействия. Пусть $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}^n$ – замкнутое подмножество и $T>0$. Будем рассматривать задачу быстродействия для системы (2) в постановке

$$\min_{t\in[0,T]} t \quad \text{при условии} \quad \mathcal{R}(x(0),t)\bigcap\mathcal{M}\neq\varnothing. \tag{6}$$

В дальнейшем предполагаем, что решение задачи (6) со всеми рассматриваемыми начальными условиями существует на отрезке $[0,T]$.

Пусть $T_0(x_0)$ – оптимальное время в (6) для $x(0)=x_0$. Поскольку $\mathcal{R}(x(0),T_0(x_0))$ – выпуклый компакт, то при условии строгой выпуклости $\mathcal{M}$ множество $\mathcal{R}(x(0),T_0(x_0))\bigcap\mathcal{M}=\{w_0(x_0)\}$ одноточечно. Отметим, что в некоторых типичных случаях множество $\mathcal{R}_0(t)$ является строго выпуклым [9, теорема 3.1] и решение $\mathcal{R}(x(0),T_0(x_0))\bigcap\mathcal{M}$ также одноточечно для произвольного выпуклого замкнутого множества $\mathcal{M}$.

Одна из первых работ, где исследовалась непрерывность функции Беллмана в задаче (6) со множеством $\mathcal{M}=\{0\}$, – работа [10]. Насколько известно автору, впервые необходимые и достаточные условия локальной липшицевости T_0 были получены в статьях [11, 12] для множества $\mathcal{M}=\{0\}$. В дальнейшем они были обобщены в работе [13] для случая замкнутого множества $\mathcal{M}$. Дифференцируемость T_0 изучалась в [14–16]. Достаточные условия гладкости, непрерывности функции Беллмана и соответствующие примеры были рассмотрены в [17].

Равномерная непрерывность, а именно условие Гёльдера с показателем $\alpha\in(0,1)$ функции T_0, исследовалась в работах [8, 18] и в [19] для систем специального вида. В [8] было показано, что для линейной системы со множеством управлений специального вида и $\mathcal{M}=\{0\}$ функция Беллмана равномерно непрерывна, а в [18] доказана равномерная непрерывность T_0 для нелинейной системы на плоскости. Упомянем также статью [20], где получены достаточные условия для выполнения условия Гёльдера функции T_0 с показателем $1/2$ при условии, что $\mathcal{M}$ есть C^1-гладкое многообразие в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Получим зависимость модуля непрерывности функции T_0 и точки-решения w_0 задачи (6) от начального условия x_0 через геометрические свойства многозначного интеграла $\mathcal{R}_0(t)$ и множества $\mathcal{M}$. Для получения зависимости T_0 от x_0 мы используем радиус $r(t)$ шара с центром в нуле, вписанного в $\mathcal{R}_0(t)$ (если такой существует), который зависит от t. Покажем, что модуль непрерывности T_0 есть обратная функция к $r(\cdot)$, причём эта оценка в общем случае неулучшаема. Множество $\mathcal{M}$ на этом шаре будем считать замкнутым.

Оценка $w_0(\cdot)$ получена из условия равномерной выпуклости $\mathcal{M}$ или $\mathcal{R}_0(t)$. Здесь нам нужна строгая выпуклость $\mathcal{M}$ либо выпуклость $\mathcal{M}$ и строгая выпуклость $\mathcal{R}_0(t)$.

Полученные оценки не вытекают из цитируемых в работе результатов.

Лемма 1. *Рассмотрим систему (2) с начальными условиями* $x(0)=x_0$ *и* $x(0)=x_1$, $h=x_1-x_0$. *Пусть* $U_0=U+Ax_0$ *и множество* $\mathcal{M}$ *замкнуто. Предположим, что условие*

(I) выполнено для $\mathcal{R}_0(t)=\int_0^t e^{As}U_0\,ds$ *с функцией* r, $T>0$, $m_T\|h\|<r(T)$, *и в задаче (6)* $T_0(x_0),T_0(x_1)\in[0,T]$. *Тогда*

$$|T_0(x_0)-T_0(x_1)|\leqslant r^{-1}\biggl(\frac{m_T}{\mu_T}\|h\|\biggr). \tag{7}$$

Пусть множество $\mathcal{M}$ *дополнительно строго выпукло и шар* $B_R(0)$ *содержит множества* $\mathcal{R}(x_i,T_0(x_i))$, $i=0,1$, δ_R *– модуль равномерной выпуклости множества* $\mathcal{M}\bigcap B_R(0)$. *Тогда*

$$|w_0(x_0)-w_0(x_1)|\leqslant 2\omega(h)+\delta_R^{-1}(\omega(h)), \tag{8}$$

где $\omega(h)=m_T(\|h\|+r^{-1}(m_T\|h\|/\mu_T)\operatorname{diam}U)$, $m_T=\max\limits_{s\in[0,T]}\|e^{As}\|$, $\mu_T=\min\limits_{\substack{\|h\|=1\\ s\in[0,T]}}\|e^{As}h\|$.

Доказательство. Предположим, что $T_0(x_0)\leqslant T_0(x_1)$. Сделав замену $z=x-x_0$, получим систему $z'\in Az+U_0$ с начальными условиями $z(0)=0$ и $z(0)=h$. Переобозначим $\mathcal{M}:=$ $:=\mathcal{M}-x_0$.

Пусть $w_0=w_0(0)=z(T_0(0))\bigcap\mathcal{M}$, $u=w_0+e^{AT_0(h)}h$, $\Delta t=T_0(h)-T_0(0)$. Тогда

$$u\in e^{AT_0(h)}h+\int\limits_0^{T_0(h)}e^{As}U_0\,ds,$$

и поскольку выполнено неравенство $\mathcal{M}\bigcap(e^{AT_0(h)}h+\mathcal{R}(T_0(h)))\neq\varnothing$, то величина $r(\Delta t)$ из условия

$$e^{AT_0(0)}B_{r(\Delta t)}(0)\subset e^{AT_0(0)}\int\limits_0^{\Delta t}e^{As}U_0\,ds=\int\limits_{T_0(0)}^{T_0(h)}e^{As}U_0\,ds$$

должна удовлетворять неравенству $\mu_T r(\Delta t)\leqslant\|u-w_0\|$. В противном случае мы получаем включение $w_0\in e^{AT_0(h)}h+\int_0^{T_0(h)}e^{As}U_0\,ds$. Кроме того, $\|u-w_0\|\leqslant m_T\|h\|$. Отсюда вытекает оценка (7). Случай $T_0(x_1)<T_0(x_0)$ рассматривается аналогично.

Имеем следующую цепочку соотношений:

$$h(\mathcal{R}(x_0,T_0(x_0)),\mathcal{R}(x_1,T_0(x_1)))\leqslant m_T\|h\|+h\biggl(\{0\},\int\limits_{T_0(0)}^{T_0(h)}e^{As}U\,ds\biggr)\leqslant$$

$$\leqslant m_T\|h\|+m_T|T_0(h)-T_0(0)|\operatorname{diam}U=m_T\biggl(\|h\|+r^{-1}\biggl(\frac{m_T}{\mu_T}\|h\|\biggr)\operatorname{diam}U\biggr)=\omega(h),$$

где $\operatorname{diam}U$ – диаметр множества U. Определим $F_1(x)=\mathcal{M}\bigcap B_R(0)$ и $F_2(x)=\mathcal{R}(x,T_0(x))$ в окрестности нуля. Множество F_1 равномерно выпукло с модулем δ_R и равномерно непрерывно с модулем $\omega_1=0$, а F_2 имеет выпуклые компактные значения и равномерно непрерывно с модулем $\omega_2(h)=\omega(h)$. Оценка (8) для решения-точки вытекает из работы [21, теорема 3.1]. Заметим, что в доказательстве теоремы 3.1 точки t_1 и t_2 фиксированы, в нашем случае нужно взять $t_1=0$ и $t_2=h$. Лемма доказана.

Для выполнения условия (I) для $\int_0^t e^{As}U_0\,ds$ необходимо включение $0\in U_0=Ax_0+U$. Таким образом, лемма 1 даёт оценку модуля непрерывности решения (6) в нуле.

Теорема 3. *Рассмотрим систему (2) с начальными условиями* $x(0)=x_0$ *и* $x(0)=x_1$, $h=x_1-x_0$. *Пусть* $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}^n$ *– замкнутое множество и выполнено условие* $e^{-At}\mathcal{M}\subset e^{-At_1}\mathcal{M}$ *для всех* $0\leqslant t\leqslant t_1$. *Пусть выполнено условие (I) для* $\int_0^t e^{-As}U\,ds$: $B_{r_-(t)}(0)\subset\int_0^t e^{-As}U\,ds$ *для* $t\geqslant 0$ *и* $\|h\|\leqslant r_-(T)$ *для некоторого* $T>0$. *Тогда для системы* $z(t)\in z(0)+\int_0^t e^{-As}U\,ds$ *с* *начальными условиями* $z(0)=x_0$ *и* $z(0)=x_1$ *минимальное время попадания на множество* $e^{-At}\mathcal{M}$ *удовлетворяет условию*

$$|T_0(x_0)-T_0(x_1)|\leqslant r_-^{-1}\biggl(\frac{\|h\|}{\mu_T^-}\biggr),\quad \mu_T^-=\min_{\substack{\|h\|=1\\ s\in[0,T]}}\|e^{-As}h\|.$$

Доказательство. В системе (2) сделаем замену $x(s)=e^{As}z(s)$. Без ограничения общности считаем, что $T_0(x_0)\leqslant T_0(x_1)$. Для $t=T_0(x_0)$ имеем

$$\biggl(e^{At}x_0+\int\limits_0^t e^{As}U\,ds\biggr)\bigcap\mathcal{M}\neq\varnothing,\quad \biggl(x_0+\int\limits_0^t e^{A(s-t)}U\,ds\biggr)\bigcap(e^{-At}\mathcal{M})\neq\varnothing,$$

$(x_0+\int_0^t e^{-As}U\,ds)\bigcap(e^{-At}\mathcal{M})=\{w_0\}$, $u=w_0+h$. Далее доказательство повторяет доказательство леммы 1 с учётом того, что если $w_0\in e^{-AT_0(x_0)}\mathcal{M}$, то $w_0\in e^{-As}\mathcal{M}$ при $s>T_0(x_0)$. Заметим, что $T_0(x_i)$, $i=0,1$, является также оптимальным временем для задачи (6). Теорема доказана.

Замечание 2. Оценка по точке для задачи (6) с системой (2) в условиях теоремы 3 вытекает из формулы (8) с функцией r_- из теоремы 3. Пусть $\mathcal{M}$ дополнительно строго выпукло и шар $B_R(0)$ содержит множества $\mathcal{R}(x_i,T_0(x_i))$, $i=0,1$, δ_R – модуль равномерной выпуклости множества $\mathcal{M}\bigcap B_R(0)$. Тогда справедливо неравенство

$$|w_0(x_0)-w_0(x_1)|\leqslant 2\omega(h)+\delta_R^{-1}(\omega(h)), \tag{9}$$

где $\omega(h)=m_T(\|h\|+r_-^{-1}(\|h\|/\mu_T^-)\operatorname{diam}U)$, $m_T=\max\limits_{s\in[0,T]}\|e^{As}\|$.

Замечание 3. Заметим, что множества $\mathcal{R}_0(t)$ могут быть равномерно выпуклыми [9, теорема 3.1]. Тогда при выпуклости $\mathcal{M}$ в оценках (8) и (9) вместо модуля δ_R можно брать функцию δ, которая равна минимуму из модулей выпуклости множеств $\mathcal{R}_0(t)$ при $t==T_0(x_0),T_0(x_1)$.

Если $\mathcal{M}=\{0\}$, то мы получаем известный результат о локальной равномерной непрерывности функции T_0. Отметим также, что для доказательства равномерной непрерывности T_0 нам не нужна выпуклость $\mathcal{M}$, она требуется для доказательства равномерной непрерывности по точке-решению.

Условие монотонного возрастания по включению множеств $\{e^{-At}\mathcal{M}\}_{t\geqslant 0}$ в теореме 3 можно заменить на условие включения точки $w_0\in e^{-As}\mathcal{M}$ для всех $s\in[T_0(x_0),T_1]$, где $T_1>T_0(x_1)$. Также это условие можно сформулировать с использованием касательного конуса $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}$.

Лемма 2. *Пусть в обозначениях теоремы 3* $w_1=e^{AT_0(x_0)}w_0\in\mathcal{M}$. *Тогда при выполнении условия*

$$Ax\in\mathcal{C}_{\mathcal{M}}(x) \tag{10}$$

для любых $x\in\partial\mathcal{M}$ *справедливо включение* $e^{As}w_1\in\mathcal{M}$ *при всех* $s\geqslant 0$.

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши $y'=Ay$, $y(0)=w_1\in\mathcal{M}$. В силу теоремы Нагумо [5, с. 174] условие (10) гарантирует включение $y(s)=e^{As}w_1\in\mathcal{M}$ для всех $s\geqslant 0$. Лемма доказана.

Приведём пример выполнения условия (10). Пусть $\mathcal{M}=B_1(0)$ и $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ такая (не обязательно симметричная) матрица, что $(x,Ax)\leqslant 0$ при всех $\|x\|=1$. Последнее, как легко видеть, эквивалентно условию $Ax\in\mathcal{C}_{\mathcal{M}}(x)$ для всех $\|x\|=1$. Поэтому для системы (2) с указанной матрицей и при выполнении условия (I) можно применить теорему 3.

Легко привести и другие примеры матриц A и множеств $\mathcal{M}$, когда выполнено условие монотонного возрастания множеств $\{e^{-At}\mathcal{M}\}_{t\geqslant 0}$ по включению. Для этого для конкретной матрицы A и множества $\mathcal{M}$ достаточно выполнения условия $Ax\in\mathcal{C}_{\mathcal{M}}(x)$ для всех $x\in\partial\mathcal{M}$. Например, если $\mathcal{M}$ задано в виде $\{x\in\mathbb{R}^n:\varphi(x)\leqslant 1\}$, где $\varphi\in C^1$, то достаточно выполнения неравенства $(\varphi'(x),Ax)\leqslant 0$ для всех $x\in\partial\mathcal{M}$, где $\varphi'(x)$ – градиент φ в точке x.

Отметим, что можно привести примеры, когда без требования монотонности множеств $\{e^{-At}\mathcal{M}\}_{t\geqslant 0}$ функция T_0 в задаче (6) разрывна. В этих примерах в соответствующей задаче (2) можно взять множество $U = B_\gamma(0)$, $\gamma > 0$.

Замечание 4. Пусть в системе (2) множество U содержит отрезок ненулевой длины с центром в нуле, удовлетворяющий условию полного ранга из теоремы 1 для $F(s) = e^{As}$. Тогда $B_{r(t)}(0) \subset \mathcal{R}_0(t)$ с радиусом $r(t) \geqslant ct^n$. Отсюда, в случае выполнения условия (10), вытекает, что решение T_0 задачи (6) удовлетворяет условию Гёльдера с показателем не менее $1/n$. Результат об условии Гёльдера функции Беллмана с показателем $1/n$ был ранее получен в работе [8] для $\mathcal{M} = \{0\}$ при условии, что U есть линейный образ гипероктаэдра со $\{\pm e_i\}_{i=1}^m \subset \subset \mathbb{R}^m$, где m может быть как меньше, так и больше n.

Пример 2. В условиях сформулированного следствия определим вектор $\|p_0\| = 1$ из равенств $(p_0, A^l u) = 0$, $l = \overline{0, n-2}$. Пусть

$$\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^n : (p_0, x) \geqslant 0\}, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = -\varepsilon p_0, \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда в системе (2) с начальными условиями x_0, x_1 имеем $T_0(x_0) = 0$, $T_0(x_1) \asymp \varepsilon^{1/n}$. Заметим, что в силу аналитичности $g(s,p)$ и условия полного ранга уравнение $g(s,p) = 0$ имеет конечное число корней для каждого $\|p\| = 1$ и, следовательно, $\mathcal{R}(x_1, t)$ есть строго выпуклый компакт при всех $t > 0$ с модулем выпуклости $\delta(\tau) \asymp \tau^\alpha$, $\tau \to +0$, а $\alpha \geqslant 1/n$ [9, теорема 3.1].

Пример 3. Пусть в $\mathbb{R}^2$ матрица A и множество управлений U такие же, как в примере 1, а $\mathcal{M} = B_1(0)$. Рассмотрим задачу (6) с начальными условиями $x_0 = (0, -1)$ и $x_1 = (0, -1-\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Условия теоремы 3 выполняются, в частности $e^{As}\mathcal{M} = \mathcal{M}$ при всех $s \geqslant 0$. Поэтому по теореме 3 $|T_0(x_0) - T_0(x_1)| \leqslant \mathrm{const}\sqrt{\varepsilon}$, при этом $T_0(x_0) = 0$.

Из примера 1 для $p = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ имеем

$$s(p, \mathcal{R}(x_1, t)) = -(1+\varepsilon)\sin(\varphi - t) + \int\limits_0^t |\cos(s - \varphi)|\, ds.$$

Пусть $t > 0$ – первый момент, когда $\mathcal{R}(x_1,t) \bigcap \mathcal{M} \neq \varnothing$, т.е. $t = T_0(x_1)$. Тогда при малых $\varepsilon > 0$ вектор p_0, отделяющий $\mathcal{R}(x_1, t)$ и $\mathcal{M}$, задаётся углом $\varphi_0 = \pi/2 + \theta$, где $0 \leqslant \theta \leqslant ct$ для некоторого $c > 0$. Значит,

$$s(p_0, \mathcal{R}(x_1, t)) = -(1+\varepsilon)\cos(\theta - t) + \int\limits_0^t |\sin(s - \theta)|\, ds = -1,$$

откуда следует, что $t^2 \asymp \varepsilon$, $\varepsilon \to +0$. Поэтому оценка теоремы 3 в этом примере точна.

Рассмотрим в примере 3 множество управлений $U = B_1(-e_2)$. Тогда

$$\mathcal{R}(x_1, t) = e^{At}x_1 - \int\limits_0^t e^{As}e_2\, ds + \int\limits_0^t e^{As}B_1(0)\, ds = (1+\varepsilon)\begin{pmatrix}\sin t \\ -\cos t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1-\cos t \\ -\sin t\end{pmatrix} + B_t(0).$$

Решение $t = T_0(x_1)$ есть время $t > 0$, при котором шар радиуса t с центром в точке $((1+\varepsilon)\sin t + 1 - \cos t, -(1+\varepsilon)\cos t - \sin t)^{\mathrm{т}}$ касается шара $\mathcal{M} = B_1(0)$. Из этого условия приходим к уравнению

$$f(t) = 2t + t^2 + 2\cos t - 2\sin t - 2\varepsilon \sin t = 2 + 2\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Пусть $t(c) = c\varepsilon^{1/3}$. С помощью разложений функций по степеням t по формуле Тейлора легко убедиться в том, что при малых $\varepsilon > 0$ и $c > \sqrt[3]{6}$ имеем $f(t(c)) > 2 + 2\varepsilon + \varepsilon^2$, а при $c < \sqrt[3]{6}$ имеем $f(t(c)) < 2 + 2\varepsilon + \varepsilon^2$. Поэтому $T_0(x_1) \sim \sqrt[3]{6\varepsilon}$ при $\varepsilon \to +0$.

С учётом теоремы 2 теорема 3 в рассматриваемой ситуации также даёт порядок $T_0(x_1) \asymp \asymp \varepsilon^{1/3}$, $\varepsilon \to +0$.

Замечание 5. Полученными в работе оценками для T_0 имеет смысл пользоваться, когда неприменимы стандартные условия Липшица для функции минимального времени T_0 из задачи (6), например, обобщение условия Петрова (H3) из статьи [13].

3. Приложение к оценкам приближённого решения задач со множеством достижимости. Рассмотрим задачу для линейной управляемой системы (2)

$$\min_{t\geqslant 0,\ x\in\mathbb{R}^n} t \quad \text{при условии} \quad x+\mathcal{R}_0(t)\supset\mathcal{M}. \tag{11}$$

Здесь $\mathcal{M}$ – выпуклый компакт, а множество $\mathcal{R}_0(t)=\mathcal{R}_0(0,t)$ (см. (3)). Смысл задачи состоит в том, чтобы найти минимальное время $T_0>0$ и начальное условие $x(0)=e^{-AT_0}x_0$, где (x_0,T_0) – решение (11), для которых множество $\mathcal{R}(x(0),t)$ за минимальное время $t=T_0$ накрывает множество $\mathcal{M}$. Для решения этой задачи в фазовом пространстве небольшой размерности предложен алгоритм [22].

Будем считать, что решение $T_0\leqslant T$. Дискретный вариант задачи (11) имеет вид

$$\min_{k,\ x\in\mathbb{R}^n} t_k \quad \text{при условии} \quad x+\hat{\mathcal{R}}_0(t_k)\supset\hat{\mathcal{M}}, \tag{12}$$

где $0=t_0<t_1<\ldots<t_K=T$ – некоторое разбиение отрезка $[0,T]$, а $\hat{}$ над множеством означает его внешнюю многогранную аппроксимацию на сетке единичных векторов $\mathbb{G}=\{p_i\}_{i=1}^I$, например,

$$\hat{\mathcal{M}}=\{x\in\mathbb{R}^n:(p_i,x)\leqslant s(p_i,\mathcal{M}),\quad p_i\in\mathbb{G}\}.$$

Ищем минимальное k, для которого система из (12), т.е. $(p_i,x)+s(p_i,\mathcal{R}_0(t_k))\geqslant s(p_i,\mathcal{M})$, $i=\overline{1,I}$, имеет решение. Последняя задача легко решается симплекс-методом. Пусть $\varepsilon>0$ – погрешность аппроксимации $\mathcal{R}_0(t_k)$ (детали см. в [22, теорема 1]), а k – найденный номер. Тогда оптимальное время T_0 удовлетворяет условию $t_{k-1}<T_0\leqslant\tau$, где τ – минимальное время, для которого (см. [22, формула (20)])

$$\int\limits_{t_i}^{\tau} e^{As}U\,ds\supset B_\varepsilon(0). \tag{13}$$

Из формулы (13) получаем, что $t_{k-1}<T_0\leqslant t_k+r^{-1}(\varepsilon/\mu_T)$, где

$$\mu_T=\min_{\substack{\|h\|=1\\ s\in[0,T]}}\|e^{As}h\|.$$

Таким образом, функция r^{-1} связывает погрешность аппроксимации ε по пространству и ошибку по времени в алгоритме решения задачи (11).

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда №22-11-00042, https://rscf.ru/project/22-11-00042/ в ИПУ имени В.А. Трапезникова РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aumann R.* Integrals of set-valued functions // J. of Math. Anal. Appl. 1965. V. 12. № 1. P. 1–12.
2. *Ляпунов А.А.* О вполне аддитивных вектор-функциях // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1940. Т. 4. № 6. С. 465–478.
3. *Половинкин Е.С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения. М., 2014.
4. *Lee E.B., Markus L.* Foundations of Optimal Control Theory. New York, 1967.
5. *Aubin J.-P., Cellina A.* Differential Inclusions. Berlin; Heidelberg, 1984.

6. *Поляк Б.Т.* Теоремы существования и сходимость минимизирующих последовательностей для задач на экстремум при наличии ограничений // Докл. АН СССР. 1966. Т. 166. № 2. С. 287–290.
7. *Дистель Дж.* Геометрия банаховых пространств. Киев, 1980.
8. *Ливеровский А.А.* Некоторые свойства функции Беллмана для линейных и симметричных полисистем // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 3. С. 414–423.
9. *Veliov V.M.* On the convexity of integrals of multivalued mappings: application in control theory // J. of Optim. Theory and Appl. 1987. V. 54. P. 541–563.
10. *Кириллова Ф.М.* О корректности постановки одной задачи оптимального регулирования // Изв. вузов. Математика. 1958. № 4. С. 113–126.
11. *Петров Н.Н.* О непрерывности обобщённой функции Беллмана // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. № 2. С. 373–374.
12. *Петров Н.Н.* О функции Беллмана для задачи оптимального быстродействия // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34. № 5. С. 820–826.
13. *Cannarsa P., Sinestrary C.* Convexity properties of the minimum time function // Calc. Var. 1995. V. 3. P. 273–298.
14. *Кун Л.А., Пронозин Ю.Ф.* К регуляризации метода Беллмана в задачах оптимального быстродействия // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200. № 6. С. 1294–1297.
15. *Сатимов Н.Ю.* О гладкости функции Беллмана для линейной задачи оптимального управления // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 12. С. 2176–2179.
16. *Тынянский Н.Т., Арутюнов А.В.* Линейные процессы оптимального быстродействия // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 1979. Вып. 2. С. 32–37.
17. *Арутюнов А.В.* Об одном классе линейных процессов оптимального быстродействия // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 4. С. 555–560.
18. *Ливеровский А.А.* О гёльдеровости функции Беллмана плоских систем управления // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 4. С. 604–613.
19. *Evans L.C., Janaes M.R.* The Hamilton–Jacobi–Bellman equation for time optimal control // SIAM J. Control Optim. 1989. V. 27. P. 1477–1489.
20. *Soravia P.* Hölder continuity of the minimum-time function for C^1-manifold targets // J. of Optim. Theory and Appl. 1992. V. 75. P. 401–421.
21. *Balashov M.V., Repovs D.* Uniform convexity and the splitting problem for selections // J. of Math. Anal. Appl. 2009. V. 360. № 1. P. 307–316.
22. *Балашов М.В., Камалов Р.А.* Оптимизация множества достижимости линейной системы по отношению к другому множеству // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2023. Т. 63. № 5. С. 739–759.

Институт проблем управления
имени В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва

Поступила в редакцию 25.04.2023 г.
После доработки 25.04.2023 г.
Принята к публикации 14.06.2023 г.