

УДК 517.977.5

## ОБ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ВЕСА ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ ПРИ ЗАДАННОЙ ЧАСТОТЕ КОЛЕБАНИЙ

© 2023 г. М. О. Арабян

Рассматриваются пологие упругие оболочки с заданной круговой границей. Ищется осесимметричная форма оболочки, которая минимизирует вес при заданной основной частоте колебаний оболочки. С помощью полученной формулы для линейной части приращения частотного функционала оценивается кратность минимальной собственной частоты колебаний оболочки. Устанавливается также дифференцируемость по Фреше частотного функционала и получаются условия оптимальности минимизации веса оболочки при заданной основной частоте колебаний.

DOI: 10.31857/S037406412309011X, EDN: WPFQKJ

**Введение.** Проблемы оптимизации конструкции в последнее время привлекают большое внимание, их решению посвящено значительное число работ. Существенное развитие теория оптимального проектирования получила в связи с исследованиями задачи отыскания форм сжатого стержня (колонны), обладающего минимальным весом и выдерживающего без потери устойчивости заданную нагрузку. Эта задача была поставлена Ж. Лагранжем [1].

Выбор функционалов, рассмотренных при оптимальном проектировании, является частью постановок задач оптимизации. На этот выбор влияют многие обстоятельства: основное назначение конструкции, условия эксплуатации, свойства модели.

Вес – одна из основных характеристик конструкции, и поэтому в большинстве работ по оптимальному проектированию этот функционал либо рассматривается в качестве оптимизируемого критерия качества, либо фигурирует среди других принимаемых ограничений.

Наиболее типичными в теории оптимального проектирования сжатых конструкций являются задачи максимизации критического значения  $\omega_0$  ( $\omega_0$  – минимальное из собственных значений) при заданном весе конструкции и задачи минимизации веса при ограничении  $\omega_0 \geq \mu$ , где  $\mu$  – заданное число. Заметим, что в отличие от динамических задач оптимального проектирования, в которых ставятся ограничения не только на фундаментальную частоту, но и на высшие частоты, учёт в задачах оптимального проектирования ограничений по устойчивости основан на рассмотрении только минимальных собственных значений.

В данной работе рассматриваются пологие упругие оболочки с заданной круговой границей. Наша цель – определить форму осесимметричной оболочки, которая имеет минимальный общий вес для заданной основной частоты пологой оболочки.

Рассматривается задача оптимального управления, описываемая задачей на собственные значения для системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, некоторые из них неинтегрируемы вблизи нуля. Для решения этой проблемы в статье [2] были введены специальные весовые пространства, затем были установлены теоремы вложения и свойства функций весовых пространств, а также существование решений краевой задачи и задачи на собственные значения.

В настоящей работе изучена дифференцируемость по Фреше частотного функционала и получены необходимые условия в оптимизационной задаче, поэтому сначала определена кратность собственного значения. В дальнейшем, получив лишшицеву непрерывность задачи на собственные значения и формулу градиента частотного функционала, методом Лагранжа найдены необходимые условия оптимальности.

В таких задачах оптимального управления кратность собственного значения не определяется, а рассматривается только как гипотеза [3–5]. Отметим также, что подобные задачи изучаются в работах [6–17].

**1. Основные обозначения и постановка задачи.** Рассмотрим задачу оптимизации из теории тонких оболочек в полярных координатах. При определённых предположениях поперечные колебания оболочки вращения описываются системой двух дифференциальных уравнений [18–20].

Обозначим  $W = W(r)$ ,  $\varphi = \varphi(r)$ . Переменная  $r \in [0, b]$  указывает текущий радиус;  $W(r)$  – амплитуда перемещения точек срединной поверхности в осевом направлении;  $\varphi(r)$  – функция напряжения, характеризующая тангенциальное перемещение.

Строгая постановка задачи: найти все пары  $(\lambda, u)$ , где  $\lambda \in \mathbb{R}$  и  $u = (W, \varphi)$ , такие, что

$$(Lu)_1 \equiv (rDW'')'' + \left( \left( \nu D' - \frac{D}{r} \right) W' \right)' + (f'\varphi)' = \lambda r h \rho W, \tag{1}$$

$$(Lu)_2 \equiv (a r \varphi')' - \left( \frac{a}{r} + \nu a' \right) \varphi - f' W' = 0. \tag{2}$$

Здесь величина  $f(r)$  определяет форму срединной поверхности оболочки вращения;  $\rho(r) > 0$  – удельный вес материала оболочки;  $h(r)$  – заданная толщина оболочки, удовлетворяющая условию

$$0 < h_0 \leq h(r) \leq h_1. \tag{3}$$

Наконец,  $D(r)$  – жёсткость на изгиб,  $D(r) \geq D_0 > 0$ , определяемая как

$$D(r) = \frac{E h^3(r)}{12(1 - \nu^2)}, \quad a(r) = \frac{1}{E h(r)}, \tag{4}$$

где  $E > 0$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $-1 < \nu < 0.5$ .

Задача на собственные значения представляет собой систему двух уравнений (1) и (2), дополненную следующими граничными условиями:

$$W'|_{r=0} = \left( (rDW'')' + \left( \nu D' - \frac{D}{r} \right) \frac{W'}{r} \right) \Big|_{r=0} = 0, \tag{5}$$

$$W|_{r=b} = W'|_{r=b} = 0, \tag{6}$$

$$a(\nu\varphi - r\varphi')|_{r=0} = a(\nu\varphi - r\varphi')|_{r=b} = 0, \tag{7}$$

где  $b > 0$  – константа.

Обозначим через  $\lambda_1 = w^2(f')$  минимальное собственное значение задачи (1)–(7), где  $w(f')$  – минимальная частота колебаний оболочки. Отметим, что граничные условия (5)–(7) взяты для случая закреплённого края при  $r = b$ . Далее для шарнирно-опертого края условия (6) имеют вид

$$W|_{r=b} = -D \left( W'' + \nu \frac{W'}{r} \right) \Big|_{r=b} = 0. \tag{8}$$

Таким образом, у нас есть две задачи на собственные значения: (1)–(7) и (1)–(5), (7), (8). Мы исследуем первую, вторая задача рассматривается аналогично.

Рассмотрим стандартную задачу минимизации веса оболочки

$$J(f') = \int_0^b 2\pi r h \rho \sqrt{1 + (f'(r))^2} dr \rightarrow \inf \tag{9}$$

при условии

$$\lambda_1(f') = \omega^2(f') = \omega_0^2. \tag{10}$$

Пусть  $p(r) = f'(r)$  – фиксированный элемент управления. Чтобы изучить проблему собственных значений, нам нужно в первую очередь изучить краевую задачу

$$(Lu)_1 = s_1, \tag{11}$$

$$(Lu)_2 = s_2 \tag{12}$$

с граничными условиями (5)–(7).

Первый вопрос, который возникает при изучении задачи (1)–(7), (9), (10), как решить задачу (1)–(7) для фиксированного управления  $p(r)$ . На самом деле некоторые коэффициенты системы не интегрируемы на отрезке  $[0, b]$ , поэтому в п. 2 вводятся конкретные весовые пространства (см. [2]).

**2. Весовые пространства, обобщённое решение и некоторые вспомогательные результаты.** Введём весовые гильбертовы пространства  $\tilde{H}^1[0, b]$ ,  $\tilde{H}^2[0, b]$  со следующими, соответственно, скалярными произведениями:

$$\langle u, v \rangle_{\tilde{H}^1} = \int_0^b \left( ru'v' + \frac{uv}{r} \right) dr, \quad \langle u, v \rangle_{\tilde{H}^2} = \int_0^b \left( ru''v'' + \frac{u'v'}{r} + uv \right) dr,$$

где  $u, v, u', v', u'', v'' \in L_{1,loc}(0, b)$ . Соответствующие нормы определяются как обычно.

Приведём следующий результат о теореме вложений.

**Теорема 1** [2]. *Любая функция  $u \in \tilde{H}^1[0, b]$  может быть отождествлена с непрерывной на отрезке  $[0, b]$  функцией и любая функция  $v \in \tilde{H}^2[0, b]$  с непрерывно дифференцируемой на  $[0, b]$  функцией, удовлетворяющими следующим оценкам и условиям:*

$$\max_{[0,b]} |u| \leq c_1 \|u\|_{\tilde{H}^1[0,b]}, \quad u(0) = 0, \quad \max_{[0,b]} (|v'| + |v|) \leq c_2 \|v\|_{\tilde{H}^2[0,b]}, \quad v'(0) = 0. \quad (13)$$

Теперь мы можем приступить к исследованию задачи на собственные значения (1)–(7). Пусть  $V$  – следующее линейное подпространство пространства  $\tilde{H}^1 \times \tilde{H}^2$ :

$$V = \{v : v = (v_1, v_2) \in \tilde{H}^1 \times \tilde{H}^2, \quad v_2(b) = v_2'(b) = 0\}.$$

Тип механических граничных условий, включённых в определение  $V$ , заключается в том, что оболочка зажата по всей границе.

На пространстве  $V \times V$  рассмотрим билинейную форму

$$B(u, v) = \int_0^b \left[ rDu_2''v_2'' + (D - \nu D'r) \frac{u_2'v_2'}{r} - pu_1v_2' + aru_1'v_1' + (a + \nu a'r) \frac{u_1v_1}{r} + pu_2'v_1 \right] dr - avu_1v_1|_0^b,$$

порождённую дифференциальным оператором и граничными условиями задачи (5)–(7).

В дальнейшем нам понадобится следующее

**Определение.** Для любой  $s = (s_1, s_2)$ ,  $s_1, s_2 \in L_2[0, b]$ , функцию  $u \in V$  назовём *обобщённым решением* задачи (5)–(7), (11), (12), если выполняется соотношение

$$B(u, v) = \langle s_1, v_2 \rangle_{L_2} + \langle s_2, v_1 \rangle_{L_2}, \quad v = (v_1, v_2) \in V. \quad (14)$$

Как показано в [2, теорема 5], билинейная форма  $B(u, v)$  положительно определена и ограничена, если два из указанных ниже условий 1)–3) выполнены:

- 1)  $D(r), D(r) - \nu D'(r)r, a'(r) \in L_\infty[0, b], p \in L_1[0, b]$ ;
- 2)  $D(r) \geq D_0 > 0, D(r) - \nu D'(r)r \geq D_{10} > 0, a(r) \geq a_0 > 0$ ;
- 3)  $t(r) = h(r)\rho(r) \in L_\infty[0, b], t(r) \geq t_0$ .

Далее представим результат о существовании и единственности решения краевой задачи (14).

**Теорема 2** [2]. *Предположим, что два из указанных выше условий 1)–3) выполнены. Тогда для любой  $s = (s_1, s_2)^T, s_1, s_2 \in L_2[0, b]$ , задача (14) имеет единственное решение  $u \in V$ .*

*Кроме того, для решения  $u$  справедлива оценка*

$$\|u\|_V \leq c_1 (\|s_1\|_{L_2}^2 + \|s_2\|_{L_2}^2)^{1/2}.$$

Возьмём любую функцию  $\psi \in L_2[0, b]$ . Тогда условие

$$B(u, v) = \langle \sqrt{rt} \psi, v_2 \rangle_{L_2}, \quad v \in V,$$

получаемое из (14) для  $s = (\sqrt{rt} \psi, 0)^T$ , определяет функцию  $u \in V$ . Таким образом определён оператор  $G : \psi \in L_2[0, b] \rightarrow u = G\psi \in V$  и верна оценка

$$\|u\|_{\tilde{H}^1 \times \tilde{H}^2} = \|G\psi\|_{\tilde{H}^1 \times \tilde{H}^2} \leq c_1 \|\sqrt{rt} \psi\|_{L_2}. \tag{15}$$

Далее показано, что оператор  $F_1\psi = \sqrt{rt} (G\psi)_2$ , отображающий  $L_2[0, b]$  на  $L_2[0, b]$ , компактный и самосопряжённый [2].

Легко видеть, что если  $\mu$  является собственным числом оператора  $F_1$ , а  $\psi$  – соответствующая собственная функция, т.е.  $F_1\psi = \mu\psi$ , то  $\lambda = 1/\mu$  и  $u = G\psi$  – собственное значение и собственная функция, соответственно, задачи

$$B(u, v) = \lambda \langle rtu_2, v_2 \rangle_{L_2}, \quad v \in V. \tag{16}$$

Действительно,

$$B(u, v) = B(G\psi, v) = \langle \sqrt{rt} \psi, v_2 \rangle_{L_2} = \frac{1}{\mu} \langle rt(G\psi)_2, v_2 \rangle_{L_2} = \lambda \langle rtu_2, v_2 \rangle_{L_2}, \quad v \in V.$$

Таким же образом можно доказать, что если  $\lambda$  – собственное число, а  $u$  – соответствующая собственная функция задачи (16), то  $\mu = 1/\lambda$  и  $\psi = \sqrt{rt} u_2$  являются собственным числом и собственной функцией оператора  $F_1$  соответственно.

Как показано в работе [2, теорема 6], если выполняются все условия 1)–3), то:

- а) существует последовательность положительных собственных значений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots$  задачи (16) с  $\lambda_k \rightarrow +\infty$  при  $k \rightarrow \infty$ ;
- б) каждому собственному значению  $\lambda_k$  соответствует только конечное число линейных независимых собственных функций из пространства  $V$ .

**3. О некоторых свойствах решений задачи на собственные значения.** Теперь изучим некоторые свойства решений следующей задачи:

$$B(u, v; p) = \lambda \langle rtu_2, v_2 \rangle_{L_2}, \quad v \in V. \tag{17}$$

Для нашего исследования важна следующая лемма. Она будет использована для получения однократности минимального собственного значения  $\lambda_1(p)$ .

**Лемма 1.** Допустим, что функции  $D(r), a(r), t(r)$  удовлетворяют условиям 1)–3) и  $p(r), \delta p(r) \in L_1[0, b]$ . Далее пусть  $u(p), \tilde{u}(p)$  – две линейно независимые собственные функции, соответствующие собственному значению  $\lambda_1(p)$  задачи (17). Тогда верно следующее равенство:

$$(u'_2(p)\tilde{u}_1(p) - \tilde{u}'_2(p)u_1(p))|_r = 0, \quad r \in (0, b). \tag{18}$$

**Доказательство.** Из соотношения (17) при  $v = (v_1, 0)^T$  имеем

$$\int_0^b \left[ aru'_1v'_1 + (a + \nu a'r) \frac{u_1v_1}{r} + pu'_2v_1 \right] dr - avu_1v_1|_0^b = 0, \quad v \in V. \tag{19}$$

Теперь докажем, что п.в. на  $(0, b)$  выполняется соотношение

$$(pu'_2(p)\tilde{u}_1(p) - p\tilde{u}'_2(p)u_1(p))|_r = 0. \tag{20}$$

Пусть  $\bar{r}$  – произвольная точка из интервала  $(0, b)$ .

*Шаг 1.* Начнём со случая, когда  $\tilde{u}_1(p)|_{\bar{r}} = 0, u_1(p)|_{\bar{r}} = 0$ . Рассмотрим следующие функции:

$$x = \begin{cases} \tilde{u}_1(p)|_r, & r \in [0, \bar{r}], \\ 0, & r \in (\bar{r}, b], \end{cases} \quad y = \begin{cases} u_1(p)|_r, & r \in [0, \bar{r}], \\ 0, & r \in (\bar{r}, b]. \end{cases}$$

Заметим, что эти функции непрерывные, так как  $u_1(p)$  и  $\tilde{u}_1(p)$  непрерывные.

Теперь вычтем соотношение (19) при  $u = \tilde{u}(p), v_1 = y$  из того же соотношения с  $u = u(p), v_1 = x$  и получим

$$\int_0^{\bar{r}} [pu'_2(p)\tilde{u}_1(p) - p\tilde{u}'_2(p)u_1(p)] dr = 0, \quad \bar{r} \in (0, b]. \tag{21}$$

Соотношение (20) доказано в [21, с. 331].

*Шаг 2.* Теперь рассмотрим общий случай. Без ограничения общности можно считать, что одна из функций  $u_1(p), \tilde{u}_1(p)$  обращается в нуль при  $\bar{r}$ , т.е.  $\tilde{u}_1(p)|_{\bar{r}} = 0, u_1(p)|_{\bar{r}} \neq 0$ . Действительно, для этого мы можем заменить  $\tilde{u}(p)$  нетривиальной линейной комбинацией  $c_1\tilde{u}(p) + c_2u(p)$ . Прделаем указанную выше операцию с функцией  $y$ , заменив её на функцию

$$z = \begin{cases} u_1(p)|_r, & r \in [0, \bar{r}], \\ u_1(p)|_{\bar{r}}(\bar{r} + \delta - r)/\delta, & r \in (\bar{r}, \bar{r} + \delta], \\ 0, & r \in (\bar{r} + \delta, b]. \end{cases}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{\bar{r}} [pu'_2(p)\tilde{u}_1(p) - p\tilde{u}'_2(p)u_1(p)] dr - \\ & - \int_{\bar{r}}^{\bar{r}+\delta} \left[ -\frac{ar}{\delta}\tilde{u}'_1(p)u_1(p)\Big|_{\bar{r}} + (a + \nu a'r)\frac{\bar{r} + \delta - r}{\delta}\frac{\tilde{u}_1(p)}{r}u_1(p)\Big|_{\bar{r}} + p\tilde{u}'_2(p)\frac{\bar{r} + \delta - r}{\delta}u_1(p)\Big|_{\bar{r}} \right] dr = 0. \end{aligned}$$

Оценим в этом соотношении три слагаемых второго интеграла, начиная со второго и третьего.

Ввиду абсолютной непрерывности интеграла Лебега получаем, что

$$\int_{\bar{r}}^{\bar{r}+\delta} (a + \nu a'r)\frac{\bar{r} + \delta - r}{\delta}\frac{\tilde{u}_1(p)}{r}u_1(p)\Big|_{\bar{r}} dr \rightarrow 0, \quad \int_{\bar{r}}^{\bar{r}+\delta} p\tilde{u}'_2(p)\frac{\bar{r} + \delta - r}{\delta}u_1(p)\Big|_{\bar{r}} dr \rightarrow 0$$

при  $\delta \rightarrow 0$ .

Действительно, подынтегральные выражения здесь интегрируемы по Лебегу, поскольку  $0 \leq (\bar{r} + \delta - r)/\delta \leq 1$  для любого  $r \in (\bar{r}, \bar{r} + \delta), \bar{r} > 0$ , а остальные функции непрерывны.

Далее оценим первое слагаемое во втором интеграле данного соотношения. С учётом неравенства Коши–Буняковского имеем, что

$$\begin{aligned} I(p, \bar{r}, \delta) & := \left| \frac{1}{\delta} \int_{\bar{r}}^{\bar{r}+\delta} ar\tilde{u}'_1(p)u_1(p)|_{\bar{r}} dr \right| = \left| \frac{1}{\delta} (z|_{\bar{r}} - z|_{\bar{r}+\delta}) \int_{\bar{r}}^{\bar{r}+\delta} ar\tilde{u}'_1(p) dr \right| \leq \\ & \leq \left( \int_{\bar{r}}^{\bar{r}+\delta} (z')^2 dr \right)^{1/2} \left( \int_{\bar{r}}^{\bar{r}+\delta} (ar\tilde{u}'_1(p))^2 dr \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега, заключаем, что  $I(p, \bar{r}, \delta) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

Таким образом, мы снова получили соотношение (21), а это означает, что равенство (20) доказано.

Далее докажем соотношение (18). Предположим противное, т.е. что для некоторой точки  $r_0 \in (0, b)$  имеем  $(u'_2(p)\tilde{u}_1(p) - \tilde{u}'_2(p)u_1(p))|_{r_0} \neq 0$ . Поскольку функция непрерывна, существует интервал  $(r_0 - \alpha, r_0 + \alpha)$  такой, что

$$(u'_2(p)\tilde{u}_1(p) - \tilde{u}'_2(p)u_1(p))|_r \neq 0, \quad r \in (r_0 - \alpha, r_0 + \alpha). \tag{22}$$

Отсюда и из (20) получаем, что п.в.

$$p(r) = 0, \quad r \in (r_0 - \alpha, r_0). \tag{23}$$

Далее, заменив  $v$  на  $z$  в (19) и устремив  $\delta$  к нулю, имеем

$$\int_0^{\bar{r}} \left[ ar(u'_1(p))^2 + (a + \nu a'r) \frac{(u_1(p))^2}{r} + pu'_2(p)u_1(p) \right] dr = 0, \quad \bar{r} \in (0, b]. \tag{24}$$

Но тогда, вычитая соотношение (24) при  $\bar{r} = r_0 - \alpha$  из того же самого соотношения при  $\bar{r} = r_0$ , находим

$$\int_{r_0-\alpha}^{r_0} \left( ar(u'_1(p))^2 + (a + \nu a'r) \frac{(u_1(p))^2}{r} \right) dr = - \int_{r_0-\alpha}^{r_0} pu'_2(p)u_1(p) dr. \tag{25}$$

Теперь проинтегрируем по частям:

$$\int_{r_0-\alpha}^{r_0} \nu a'(u_1(p))^2 dr = \nu a(u_1)^2|_{r_0-\alpha}^{r_0} - 2 \int_{r_0-\alpha}^{r_0} \nu a u'_1(p)u_1(p) dr.$$

Далее без ограничения общности можно считать, что  $u_1(p)|_{r_0-\alpha} = 0$ . Тогда с учётом соотношений (23), (25) и  $a(r) \geq a_0 \geq 0$  получаем, что

$$(1 - \nu)a_0 \int_{r_0-\alpha}^{r_0} \left( r(u'_1(p))^2 + \frac{(u_1(p))^2}{r} \right) dr \leq \int_{r_0-\alpha}^{r_0} pu'_2(p)u_1(p) dr = 0. \tag{26}$$

Отсюда имеем

$$u_1(p)|_r = 0, \quad r \in (r_0 - \alpha, r_0). \tag{27}$$

Таким же образом можно доказать, что  $\tilde{u}_1(p)|_r = 0$  для любого  $r \in (r_0 - \alpha, r_0)$ .

Но тогда с учётом равенства (27)  $(u'_2(p)\tilde{u}_1(p) - \tilde{u}'_2(p)u_1(p))|_r = 0$  для любого  $r \in (r_0 - \alpha, r_0)$ , что противоречит (22).

Следовательно, соотношение (18) доказано. Лемма доказана.

Теперь докажем следующие две леммы и следствие.

Имеем, что  $u(p) = (u_1(p), u_2(p))$  удовлетворяет соотношению (17). Далее пусть  $r_i \in [0, b)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , – нули функции  $u_1(p)$ . Так как  $u(p) \in V$ , то  $u_1(p)|_{r=0} = 0$ , а это означает, что  $r_1 = 0$ . Обозначим  $b = r_{N+1}$ .

**Лемма 2.** Пусть  $u(p)$  – собственная функция, соответствующая собственному значению  $\lambda_1(p)$  задачи (17). Пусть для некоторых  $i \in \mathbb{N}$  выполняется условие

$$u_1(p)|_r \neq 0, \quad r \in (r_i, r_{i+1}).$$

Тогда для этих же  $i$  имеем

$$u'_2(p)|_r \neq 0, \quad r \in (r_i, r_{i+1}). \tag{28}$$

**Доказательство.** Докажем от противного. Допустим, что соотношение (28) не выполняется. Тогда существует число  $\tilde{r} \in (r_1, r_2)$  такое, что  $u'_2(p)|_{\tilde{r}} = 0$ .

Далее аналогично (26) можно доказать, что верно неравенство

$$(1 - \nu)a_0 \int_{\tilde{r}-\delta}^{\tilde{r}+\delta} \left( r(u'_1(p))^2 + \frac{(u_1(p))^2}{r} \right) dr \leq - \int_{\tilde{r}-\delta}^{\tilde{r}+\delta} pu'_2(p)u_1(p) dr.$$

Разделив это соотношение на  $2\delta$  и устремив  $\delta$  к нулю, получим

$$(1 - \nu)a_0 \frac{(u_1(p))^2|_{\tilde{r}}}{\tilde{r}} \leq \frac{a(u_1(p))^2|_{\tilde{r}}}{\tilde{r}} \leq -pu'_2(p)u_1(p)|_{\tilde{r}} = 0.$$

Отсюда имеем  $u_1(p)|_{\tilde{r}} = 0$ , что противоречит нашему предположению. Таким образом, соотношение (28) справедливо. Лемма доказана.

**Лемма 3.** *Предположим, что выполнены условия леммы 2. Тогда существуют одновременно не равные нулю константы  $d_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , такие, что справедливы соотношения*

$$p\tilde{u}'_2(p)|_r = d_i pu'_2(p)|_r, \quad \tilde{u}_1(p)|_r = d_i u_1(p)|_r, \quad r \in [r_i, r_{i+1}).$$

**Доказательство.** Рассмотрим случай  $i = 1$ . Допустим, что  $u_1(p)|_r \neq 0$  для любого  $r \in (r_1, r_2)$ . На основании леммы 2 также получаем, что  $u'_2(p)|_r \neq 0$  для любого  $r \in (r_1, r_2)$ . Далее из равенства (18) имеем

$$\frac{\tilde{u}'_2(p)}{u'_2(p)} \Big|_r = \frac{\tilde{u}_1(p)}{u_1(p)} \Big|_r =: d_1|_r, \quad r \in (r_1, r_2). \tag{29}$$

Заменив  $u$  и  $v_1$  в (19) на  $\tilde{u}(p)$  и  $v_2^0$  соответственно, где

$$v_2^0 = \begin{cases} 0, & r \in (r_1, r_2), \\ d_1 u_1(p)|_r, & r \notin (r_1, r_2), \end{cases}$$

с учётом (29) получим

$$\int_{r_1}^{r_2} \left[ ar(d_1 u_1(p))^2 + (a + \nu a' r) \frac{(d_1 u_1(p))^2}{r} + d_1^2 pu'_2(p)u_1(p) \right] dr = 0. \tag{30}$$

Теперь в соотношении (19) заменим  $v_2$  на  $v_2^1$ , где

$$v_2^1 = \begin{cases} 0, & r \in [r_1, r_2], \\ d_1^2 u_1(p)|_r, & r \notin [r_1, r_2], \end{cases}$$

и вычтем полученное равенство из соотношения (30). В результате будем иметь

$$\int_{r_1}^{r_2} ar(d'_1 u_1(p))^2 dr = 0.$$

Поскольку  $u_1(p) \neq 0$  при  $r \in (r_1, r_2)$ , заключаем, что  $(d_1)' = 0$  для  $r \in (r_1, r_2)$ . Отсюда  $d_1(r) \equiv d_1$  для  $r \in (r_1, r_2]$ . Аналогично можно доказать, что  $d_2(r) \equiv d_2$  для любого  $r \in (r_2, r_3]$ .

Таким образом, для любого  $r \in (r_i, r_{i+1})$ ,  $i = 1, 2$ , выполняются следующие соотношения:

$$\tilde{u}'_2(p)|_r = d_i u'_2(p)|_r, \quad \tilde{u}_1(p)|_r = d_i u_1(p)|_r. \tag{31}$$

Теперь докажем это для  $r = r_i$ ,  $i = 1, 2$ . В силу непрерывности функций  $u_1(p)$ ,  $u_2(p)$  верно следующее:

$$\tilde{u}_1(p) \Big|_{r_i} = \lim_{r \rightarrow r_i} \frac{\tilde{u}_1(p)}{u_1(p)} \Big|_r \lim_{r \rightarrow r_i} u_1(p) \Big|_r = d_i u_1(p) \Big|_{r_i}, \tag{32}$$

$$\tilde{u}'_2(p) \Big|_{r_i} = \lim_{r \rightarrow r_i} \frac{\tilde{u}'_2(p)}{u'_2(p)} \Big|_r \lim_{r \rightarrow r_i} u'_2(p) \Big|_r = d_i u'_2(p) \Big|_{r_i}. \tag{33}$$

Из соотношений (31)–(33) получаем, что при  $i = 1, 2$  верны равенства

$$\tilde{u}'_2(p) \Big|_r = d_i u'_2(p) \Big|_r, \quad \tilde{u}_1(p) \Big|_r = d_i u_1(p) \Big|_r$$

для любого  $r \in (r_i, r_{i+1}]$ . Лемма доказана.

**Следствие.** Пусть  $u(p)$ ,  $\tilde{u}(p)$  – функции из формулировки леммы 1. Тогда существуют константы  $c_1$ ,  $c_2$  такие, что  $|c_1| + |c_2| \neq 0$  и

$$\hat{u}_1(p) \Big|_{r_i} = 0, \quad \hat{u}_2(p) \Big|_{r_i} = 0, \quad \hat{u}'_2(p) \Big|_{r_i} = 0, \quad i \in \mathbb{N},$$

$\hat{u}(p) = c_1 u(p) + c_2 \tilde{u}(p)$ . Кроме того, число нулей  $N$  функции  $u_1(p)$  на отрезке  $[0, b]$  не превосходит кратности  $m$  собственного значения  $\lambda_1(p)$ , т.е.  $N \leq m$ .

**Доказательство.** Из соотношения (17) при  $v = (0, v_2)^T$  имеем

$$\int_0^b \left[ r D u''_2 v''_2 + (D - \nu D' r) \frac{u'_2 v'_2}{r} - p u_1 v'_2 \right] dr = \lambda_1(p) \int_0^b r t u_2 v_2 dr, \quad v \in V. \tag{34}$$

Пусть  $\bar{r}$  – любая точка из интервала  $(0, b)$ . Построим функцию

$$\bar{z} = \begin{cases} u_2(p) \Big|_r, & r \in [0, \bar{r}], \\ [(2(r - \bar{r})/\delta + 1)u_2(p) \Big|_{\bar{r}} + (r - \bar{r})u'_2(p) \Big|_{\bar{r}}] ((\bar{r} + \delta - r)/\delta)^2, & r \in (\bar{r}, \bar{r} + \delta], \\ 0, & r \in (\bar{r} + \delta, b]. \end{cases}$$

Заметим, что она непрерывно дифференцируема на отрезке  $[0, b]$  и  $\bar{z}|_b = \bar{z}'|_b = 0$ .

Далее в соотношении (34) заменим  $v$  на  $\bar{z}$  и  $u$  на  $u(p)$ . Устремив  $\delta$  к нулю в полученном соотношении, получим

$$\int_0^{\bar{r}} \left[ r D (u''_2(p))^2 + (D - \nu D' r) \frac{(u'_2(p))^2}{r} - p u'_2(p) u_1(p) \right] dr = \lambda_1(p) \int_0^{\bar{r}} r t (u_2(p))^2 dr, \quad \bar{r} \in (0, b].$$

Теперь зафиксируем произвольное  $i = i_0 \in \mathbb{N}$ . Можно найти константы  $c_1$ ,  $c_2$  такие, что  $|c_1| + |c_2| \neq 0$  и  $\hat{u}_2(p) \Big|_{r_{i_0}} = (c_1 u_2(p) + c_2 \tilde{u}_2(p)) \Big|_{r_{i_0}} = 0$ . У нас также  $\hat{u}_1(p) \Big|_{r_{i_0}} = c_1 u_1(p) \Big|_{r_{i_0}} + c_2 \tilde{u}_1(p) \Big|_{r_{i_0}} = 0$ .

Далее, вычитая соотношение (34) при  $\bar{r} = r_{i_0} - \delta$  из того же самого соотношения при  $\bar{r} = r_{i_0} + \delta$  и заменяя  $u(p)$  на  $\hat{u}(p)$ , получаем

$$\int_{r_{i_0} - \delta}^{r_{i_0} + \delta} \left[ r D (\hat{u}''_2(p))^2 + (D - \nu D' r) \frac{(\hat{u}'_2(p))^2}{r} - p \hat{u}_1(p) \hat{u}'_2(p) \right] dr = \lambda_1(p) \int_{r_{i_0} - \delta}^{r_{i_0} + \delta} r t (\hat{u}_2(p))^2 dr.$$

Разделив это равенство на  $2\delta$  и устремив  $\delta$  к нулю, будем иметь

$$r_{i_0} D (\hat{u}''_2(p))^2 \Big|_{r_{i_0}} + D_{10} \frac{(\hat{u}'_2(p))^2 \Big|_{r_{i_0}}}{r_{i_0}} = p \hat{u}_1(p) \hat{u}'_2(p) \Big|_{r_{i_0}} + \lambda_1(p) (\hat{u}_2(p))^2 \Big|_{r_{i_0}}. \tag{35}$$



Отсюда в силу  $\hat{u}_1(p)|_{r_{i_0}} = \hat{u}_2(p)|_{r_{i_0}} = 0$  заключаем, что  $\hat{u}'_2(p)|_{r_{i_0}} = 0$ . Таким образом, имеем  $\hat{u}_1(p)|_{r_i} = \hat{u}_2(p)|_{r_i} = \hat{u}'_2(p)|_{r_i} = 0, i \in \mathbb{N}$ .

Покажем, что  $N \leq m$ . Сделаем это для  $m = 2$ . Докажем от противного, предположив, что  $N = 3$ . Тогда можно построить три собственные функции  $u^i(p), i = 1, 2, 3$ , соответствующие собственному значению  $\lambda_1(p)$ :

$$u^i(p) = \begin{cases} \hat{u}(p), & r \in (r_i, r_{i+1}), \\ 0, & r \notin (r_i, r_{i+1}), \end{cases}$$

причём по доказанному выше функции  $u^i_1(p), i = 1, 2, 3$ , непрерывны, а функции  $u^i_2(p), i = 1, 2, 3$ , непрерывно дифференцируемы. А это противоречит нашему предположению. Отсюда заключаем, что  $N \leq 2$ .

В общем случае таким же образом можно доказать, что число нулей функции  $u_1(p)$  не превосходит кратности  $\lambda_1(p)$ , т.е.  $m$ . Следствие доказано.

**4. Некоторые известные и вспомогательные результаты.** Теперь изучим дифференциальные свойства функционала  $\lambda_1(p)$  – минимального собственного значения задачи

$$B(u, v; p) = \lambda \langle rtu_2, v_2 \rangle_{L_2}, \quad v \in V.$$

Далее нам понадобятся следующие две леммы из статьи [22].

**Лемма 4.** Пусть  $\mu = \mu(p)$  – собственное число оператора  $F_1(p)$  кратности  $m$ , а  $\Gamma$  – окружность с центром в точке  $\mu$ , причём окружность принадлежит множеству регулярных точек и не содержит других точек спектра оператора  $F_1(p)$ .

Для каждого  $0 < \|\delta p\|_{L_2} \leq 1$  пусть  $\mu_1(p + \delta p), \dots, \mu_m(p + \delta p), \dots$  представляет собой последовательность собственных значений оператора  $F_1(p + \delta p)$ . Тогда существует такое число  $h_0 > 0$ , что для каждого  $0 < \|\delta p\|_{L_2} \leq h_0$  определены операторы

$$E(\mu(p)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_z(F_1(p)) dz, \quad E(\mu(p + \delta p)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_z(F_1(p + \delta p)) dz, \quad (36)$$

где  $R_z(F_1) = (F_1 - zE)^{-1}$  – проекторы. Областью значений  $E(\mu(p))$  и  $R(E(\mu(p)))$  является пространство собственных функций  $F_1(p)$ , соответствующих числу  $\mu(p)$ , а  $R(E(\mu(p + \delta p)))$  есть прямая сумма пространств собственных функций оператора  $F_1(p + \delta p)$ , соответствующих собственным значениям  $\mu_1(p + \delta p), \mu_2(p + \delta p), \dots, \mu_m(p + \delta p)$ . Более того,

$$\dim R(E(\mu(p))) = \dim R(E(\mu(p + \delta p))) = m.$$

В дальнейшем мы будем использовать непрерывную зависимость оператора  $G(p)$  от  $p(r)$ . Пусть  $G(p)$  – оператор  $G$ , а  $G(\psi; p)$  – это  $G\psi$ , соответствующий управлению  $p(r)$ , т.е.

$$B(G(\psi; p), v; p) = \langle \sqrt{rt} \psi, v_2 \rangle_{L_2}, \quad v \in V. \quad (37)$$

Ниже приведён результат из работы [23], показывающий, что при определённых условиях на коэффициенты имеем липшицеву непрерывность операторов  $G(p), F_1(p)$ .

**Лемма 5.** Пусть  $\mu_1(p + \delta p), \dots, \mu_m(p + \delta p)$  такие же, как в лемме 4. Тогда существуют положительные константы  $M_2$  и  $h_0$  такие, что для любых  $\|\delta p\|_{L_2} \leq h_0$  выполняются следующие условия:

1) у оператора  $F_1(p + \delta p)$  имеются ровно  $m$  собственных значений  $\mu_1(p + \delta p), \dots, \mu_m(p + \delta p)$ , лежащих внутри круга  $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - \mu_1(p)| = h_0\}$ ;

2) для любого базиса  $\{\varphi_i(p)\}_{i=1}^m$  из  $R(E(\mu(p)))$  существует базис  $\{\chi_i(p + \delta p)\}_{i=1}^m$  из области  $R(E(\mu(p + \delta p)))$  такой, что

$$\max_{1 \leq j \leq m} \|\varphi_j(p) - \chi_j(p + \delta p)\|_{L_2} \leq M_2 \|E(\mu(p)) - E(\mu(p + \delta p))\|_{L_2}.$$

Как показано в [23, лемма 6.1], справедливо следующее неравенство:

$$\| [E(\mu(p)) - E(\mu(p + \delta p))] \psi \|_{L_2} \leq M \| F_1(p) - F_1(p + \delta p) \|_{L_2, L_2} \| \psi \|_{L_2}.$$

Из леммы 5 следует, что кратность  $n$  собственного значения  $\mu_1(p + \delta p)$  не превосходит кратности  $\mu_1(p)$ , т.е.  $m$ .

**Лемма 6.** *Допустим, что функции  $D(r)$ ,  $a(r)$ ,  $t(r)$  удовлетворяют условиям 1)–3). Пусть  $\delta p(r) \in S = \{p : p \in L_1[0, b]\}$ . Тогда существуют такие положительные константы  $M_1, M_2$ , что для любых  $\delta p$  выполняется следующее неравенство:*

$$\| G(\psi; p + \delta p) - G(\psi; p) \|_{\tilde{H}^2 \times \tilde{H}^1} \leq M_1 \| \delta p \|_{L_1} \| \psi \|_{L_1}.$$

Таким образом, получаем

$$\| G(p + \delta p) - G(p) \|_{L_2, \tilde{H}^2 \times \tilde{H}^1} \leq M_1 \| \delta p \|_{L_1} \tag{38}$$

и

$$\| F_1(p + \delta p) - F_1(p) \|_{L_2, L_2} \leq M_1 \| \sqrt{rt} \|_{L_\infty} \| \delta p \|_{L_1} = M_2 \| \delta p \|_{L_2}.$$

Отметим, что в [23] мы доказываем липшицеву непрерывность решений задачи на собственные значения (17).

Следующая теорема имеет решающее значение для нашего исследования. Ею будем пользоваться для обоснования дифференцируемости по Фреше функционала  $\lambda_1(p)$  и его градиентной формулы.

**Теорема 3.** *Допустим, что функции  $D(r)$ ,  $a(r)$ ,  $t(r)$  удовлетворяют условиям 1)–3) и  $p \in L_2[0, b]$ . Пусть  $\lambda_1(p)$  – минимальное собственное значение задачи (17), а  $S_1$  является подпространством собственных функций, соответствующих собственному значению  $\lambda_1(p)$ . Тогда  $\dim S_1 = 1$ .*

**Доказательство.** От противного предположим, что  $\dim S_1 = 2$ , а  $u(p)$  и  $\tilde{u}(p)$  – две линейно независимые собственные функции, соответствующие собственному значению  $\lambda_1(p)$  задачи (17). Рассмотрим функцию  $p_0(r) \in C^1[0, b]$  такую, что

$$p_0(r) > 0, \quad r \in (0, b]. \tag{39}$$

Далее пусть  $w(p_0) = (w_1(p_0), w_2(p_0))$  – собственная функция, соответствующая собственному значению  $\lambda_1(p_0)$  задачи (17) при  $p_0$ . Докажем, что  $w_1(p_0)|_r$  тождественно не равняется нулю. От противного предположим, что  $w_1(p_0)|_r \equiv 0$ . Тогда из соотношения (20) с  $u = w(p_0)$  и  $p = p_0$  имеем

$$\int_0^b p_0 w_2'(p_0) v_1 dr = 0, \quad v \in V.$$

Поскольку  $p_0 w_2'(p_0) \in \tilde{H}^1$ , то, подставив  $v_1 = p_0 w_2'(p_0)$ , получаем  $p_0 w_2'(p_0) \equiv 0$ . А это с учётом условия (39) равносильно следующему:  $w_2'(p_0) \equiv 0$ .

Но тогда в силу краевого условия  $w_2(p_0)|_b = 0$  заключаем, что  $w_2(p_0) \equiv 0$ . Таким образом,  $w(p_0) = (w_1(p_0), w_2(p_0)) \equiv 0$ . Полученное противоречие доказывает, что  $w_2(p_0)$  тождественно не равняется нулю.

Построим собственную функцию

$$z(p) := (\tilde{u}(p) - d_1 u(p)) / (d_2 - d_1).$$

Согласно лемме 3 она имеет следующий вид:

$$z(p) = \begin{cases} 0, & r \in [r_1, r_2], \\ u(p), & r \in [r_2, r_3]. \end{cases}$$

Отсюда, в частности, вытекает, что  $u(p)|_r \neq 0$  для любого  $r \in (r_2, r_3)$ . В противном случае существовала бы точка  $\bar{r} \in (r_2, r_3)$  такая, что  $u(p_0)|_{\bar{r}} = 0$ . Но тогда можно построить три собственные функции  $u(p)$ ,  $\tilde{z}(p)$ ,  $\bar{z}(p)$ , соответствующие собственному значению  $\lambda_1(p)$ , где

$$\tilde{z}(p) = \begin{cases} u(p), & r \in [r_2, \bar{r}], \\ 0, & r \notin [r_2, \bar{r}], \end{cases} \quad \bar{z}(p) = \begin{cases} u(p), & r \in [\bar{r}, r_3], \\ 0, & r \notin [\bar{r}, r_3], \end{cases}$$

а это противоречит нашему предположению.

Далее, в силу непрерывности функции  $w_1(p_0)$  существуют числа  $\delta > 0$  и  $r_1 + \delta < r_2$  такие, что

$$w_1(p_0)|_r \neq 0, \quad r \in (r_2, r_2 + \delta). \tag{40}$$

Аналогично равенству (20) можно доказать, что п.в. на  $(0, b)$  выполняется соотношение

$$[p_0 w'_2(p_0) u_1(p) - p u'_2(p) w_1(p_0)]|_r = 0.$$

Тогда с учётом (40) получим

$$\left. \frac{p_0 w'_2(p_0)}{w_1(p_0)} \right|_r = \left. \frac{p u'_2(p)}{u_1(p)} \right|_r, \quad r \in (r_2, r_2 + \delta).$$

Обозначив  $p_0 w'_2(p_0)/w_1(p_0)|_r =: c|_r$ , отсюда имеем

$$p u'_2(p)|_r = c u_1(p)|_r, \quad r \in [r_2, r_2 + \delta]. \tag{41}$$

Далее, вычитая соотношение (24) при  $\bar{r} = r_2$  из того же соотношения при  $\bar{r} = r_2 + \delta$ , с учётом (41) получаем равенство

$$\int_{r_2}^{r_2+\delta} \left[ ar(u_1(p))'^2 + (a + \nu a' r) \frac{(u_1(p))^2}{r} \right] dr = - \int_{r_2}^{r_2+\delta} c(u_1(p))^2 dr.$$

Интегрируя его по частям, имеем

$$\int_{r_2}^{r_2+\delta} \left[ ar(u'_1(p))^2 + a \frac{(u_1(p))^2}{r} - 2a\nu u'_1(p)u_1(p) \right] dr + \nu a(u_1(p))^2|_{r_2}^{r_2+\delta} = - \int_{r_2}^{r_2+\delta} c(u_1(p))^2 dr. \tag{42}$$

Оценим правую часть этого соотношения. Так как

$$u_1(p)|_r = \int_{r_2}^r u'_1(p)|_\xi d\xi,$$

то заключаем, что

$$(u_1(p))^2|_r \leq \frac{\delta}{r_2} \int_{r_2}^{r_2+\delta} r(u'_1(p))^2|_r dr$$

для любого  $r \in [r_2, r_2 + \delta]$ .

Но тогда в силу непрерывности функции  $c|_r$ , равенства (42) и условий  $a(r) \geq a_0$ ,  $\nu \leq 1$  получим

$$\int_{r_2}^{r_2+\delta} \left[ r u'_1(p)^2 + \frac{(u_1(p))^2}{r} \right] dr \leq M \delta^2 \int_{r_2}^{r_2+\delta} r(u'_1(p))^2 dr, \tag{43}$$

где

$$M = \frac{M_1}{(1 - \nu)a_0 r_2}, \quad M_1 = \max_{[r_2, r_2 + \delta]} |c|.$$

Выберем  $\delta_0$  такое, что  $M\delta_0^2 < 1/2$ . Тогда из (43) следует неравенство

$$\int_{r_2}^{r_2 + \delta} \left[ r(u'_1(p))^2 + \frac{(u_1(p))^2}{r} \right] dr \leq 0.$$

Отсюда заключаем, что  $u_1(p)|_r \equiv 0$  для любого  $r \in [r_2, r_2 + \delta_0]$ .

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

**5. Дифференцируемость по Фреше частотного функционала.** Теперь мы можем сформулировать и доказать дифференцируемость по Фреше функционала  $\lambda_1(p)$ .

**Теорема 4.** Пусть  $\lambda_1(p)$  – минимальное собственное значение задачи (17). Тогда его производная по Фреше существует в гильбертовом пространстве  $L_2[0, b]$  и равна

$$\frac{d\lambda_1(p)}{dp} = \frac{-2u'_2(p)u_1(p)}{\langle rtu_2(p), u_2(p) \rangle_{L_2}},$$

где  $u(p) = (u_1(p), u_2(p))$  – любая ненулевая функция из подпространства  $S_1$  (см. формулировку теоремы 3).

**Доказательство.** С учётом свойств собственных значений компактных самосопряжённых операторов и в силу однократности  $\mu_1(p)$  [21, с. 248] получаем

$$\mu_1(p) = \max_{\substack{\psi \neq 0 \\ \psi \in L_2}} \frac{\langle F_1(p)\psi, \psi \rangle_{L_2}}{\langle \psi, \psi \rangle_{L_2}} = \frac{\langle F_1(p)\varphi(p), \varphi(p) \rangle_{L_2}}{\langle \varphi(p), \varphi(p) \rangle_{L_2}},$$

где  $\varphi(p)$  – единственная собственная функция, соответствующая собственному числу  $\mu_1(p)$ .

Следовательно, учитывая это соотношение, имеем

$$\begin{aligned} & \mu_1(p + \delta p) - \mu_1(p) = \\ &= \max_{\substack{\psi \neq 0 \\ \psi \in L_2}} \frac{\langle F_1(p + \delta p)\psi, \psi \rangle_{L_2}}{\langle \psi, \psi \rangle_{L_2}} - \frac{\langle F_1(p)\varphi(p), \varphi(p) \rangle_{L_2}}{\langle \varphi(p), \varphi(p) \rangle_{L_2}} \geq \frac{\langle (F_1(p + \delta p) - F_1(p))\varphi(p), \varphi(p) \rangle_{L_2}}{\langle \varphi(p), \varphi(p) \rangle_{L_2}} \end{aligned} \quad (44)$$

для всех  $\delta p$ , для которых  $\|\delta p\|_{L_1} < +\infty$ . Подставим  $v = (0, v_2)^T$  и  $v = (-v_1, 0)^T$  в (37). Сложив полученные равенства, получим

$$K(G\psi, v; p) = (\sqrt{rt}\psi, v_2)_{L_2}, \quad v \in V, \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} K(u, v; p) = & \int_0^b \left[ rDu''_2v''_2 + (D - \nu D'r)\frac{u'_2v'_2}{r} - pu_1v'_2 - \right. \\ & \left. - aru'_1v'_1 - (a + \nu a'r)\frac{u_1v_1}{r} - pu'_2v_1 \right] dr + avu_1v_1|_0^b, \quad u, v \in V, \end{aligned}$$

является симметричной билинейной формой. Далее имеем

$$\begin{aligned} K((G(p + \delta p) - G(p))\varphi(p), v; p) &= K(G(p + \delta p)\varphi(p), v; p) - K(G(p + \delta p)\varphi(p), v; p + \delta p) = \\ &= \delta p[(G(p + \delta p)\varphi(p))_1v'_2 + (G(p + \delta p)\varphi(p))'_2v_1] dr, \quad v \in V. \end{aligned}$$

Отсюда и из соотношения (45) при  $v = G(p)\varphi(p)$  находим

$$\int_0^b \delta p [(G(p + \delta p)\varphi(p))_1 (G(p)\varphi(p))'_2 + (G(p + \delta p)\varphi(p))'_2 (G(p)\varphi(p))_1] dr = \langle (F_1(p + \delta p) - F_1(p))\varphi(p), \varphi(p) \rangle_{L_2}. \tag{46}$$

Тогда, преобразовав левую часть равенства (46) с помощью оценок (13), (15) и (38) для всех  $\delta p$ ,  $\|\delta p\|_{L_1} < h_1$ , получим

$$\langle (F_1(p + \delta p) - F_1(p))\varphi(p), \varphi(p) \rangle_{L_2} \geq 2 \int_0^b \delta p (G(p)\varphi(p))'_2 (G(p)\varphi(p))_1 dr - M_3 \|\delta p\|_{L_1}^2 \|\varphi(p)\|_{L_2}^2, \tag{47}$$

где  $M_3 = 2M_1c_1c_2c_3\|\sqrt{rt}\|_{L_\infty}$ .

Наша следующая цель – получить верхнюю оценку, аналогичную (47). В связи с этим для всех  $\delta p$ ,  $\|\delta p\|_{L_1} < h_1$ , имеем

$$\begin{aligned} \mu_1(p + \delta p) - \mu_1(p) &= \frac{\langle F_1(p + \delta p)\psi(p + \delta p), \psi(p + \delta p) \rangle_{L_2}}{\langle \psi(p + \delta p), \psi(p + \delta p) \rangle_{L_2}} - \frac{\langle F_1(p)\varphi(p), \varphi(p) \rangle_{L_2}}{\langle \varphi(p), \varphi(p) \rangle_{L_2}} \leq \\ &\leq \frac{2}{\langle \psi(p + \delta p), \psi(p + \delta p) \rangle_{L_2}} \int_0^b \delta p (G(p)\psi(p + \delta p))'_2 (G(p)\psi(p + \delta p))_1 dr + M_3 \|\delta p\|_{L_1}^2, \end{aligned} \tag{48}$$

где  $\psi(p + \delta p)$  – единственная собственная функция оператора  $F_1(p + \delta p)$ , соответствующая собственному числу  $\mu_1(p + \delta p)$ .

Напомним, что согласно лемме 5 (см. п. 2) при  $m = 1$  для собственной функции  $\varphi(p)$  оператора  $F_1(p)$  существует собственная функция  $\psi(p + \delta p)$  оператора  $F_1(p + \delta p)$  такая, что

$$\|\varphi(p) - \psi(p + \delta p)\|_{L_2} \leq M_2 \|F_1(p + \delta p) - F_1(p)\|_{L_2, L_2}$$

для всех  $\delta p \in L_2[0, b]$ ,  $\|\delta p\|_{L_2} \leq h_1$ . Далее с помощью этой оценки и соотношения (48) при  $\psi = \psi(p + \delta p) - \varphi(p)$  имеем

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\langle \psi(p + \delta p), \psi(p + \delta p) \rangle_{L_2}} \int_0^b \delta p (G(p)\psi(p + \delta p))'_2 (G(p)\psi(p + \delta p))_1 dr - \\ &- \frac{2}{\langle \varphi(p), \varphi(p) \rangle_{L_2}} \int_0^b \delta p (G(p)\varphi(p))'_2 (G(p)\varphi(p))_1 dr \leq M_4 \|\delta p\|_{L_1}^2 \end{aligned}$$

для любого  $\delta p$ ,  $\|\delta p\|_{L_1} < h_1$ , где  $M_4 = 2MM_2M_1c_1^2c_2c_3\|(rt)^{3/2}\|_{L_\infty}$ .

Следовательно, с учётом соотношений (44), (47) и (48) получаем неравенства

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\langle \varphi(p), \varphi(p) \rangle_{L_2}} \int_0^b 2\delta p (G(p)\varphi(p))'_2 (G(p)\varphi(p))_1 dr - M_3 \|\delta p\|_{L_1}^2 \leq \\ &\leq \mu_1(p + \delta p) - \mu_1(p) \leq \frac{1}{\langle \varphi(p), \varphi(p) \rangle_{L_2}} \int_0^b 2\delta p (G(p)\varphi(p))'_2 (G(p)\varphi(p))_1 dr + (M_3 + M_4) \|\delta p\|_{L_1}^2 \end{aligned}$$

для всех  $\delta p$ , для которых  $\|\delta p\|_{L_1} < h_1$ .

Как непосредственное следствие этого, запишем представление

$$\left\langle \frac{d\mu_1(p)}{dp}, \delta p \right\rangle_{L_2} = \frac{1}{\langle \varphi(p), \varphi(p) \rangle_{L_2}} \int_0^b 2\delta p (G(p)\varphi(p))'_2 (G(p)\varphi(p))_1 dr. \tag{49}$$

Далее с помощью соотношения

$$\left\langle \frac{d\lambda_1(p)}{dp}, \delta p \right\rangle_{L_2} = -\frac{1}{(\mu_1(p))^2} \left\langle \frac{d\mu_1(p)}{dp}, \delta p \right\rangle_{L_2}$$

с учётом (49) получим формулу градиента функционала  $\lambda_1(p)$  в гильбертовом пространстве  $L_2[0, b]$ :

$$\left\langle \frac{d\lambda_1(p)}{dp}, \delta p \right\rangle_{L_2} = -\frac{2}{\langle rtu_2(p), u_2(p) \rangle_{L_2}} \int_0^b \delta p u'_2(p) u_1(p) dr.$$

Это завершает доказательство теоремы.

**6. Условия оптимальности.** Приведём условия оптимальности для задачи оптимизации (1)–(7), (9), (10). Рассмотрим следующую оптимальную задачу с переменной  $p$  в банаховом пространстве  $X = L_2[0, b]$ :

$$\mathcal{B}_0(p(\cdot)) = J(p) = \int_0^b 2\pi r t \sqrt{1 + p^2} dr \rightarrow \inf, \tag{50}$$

$$F(p(\cdot)) = \lambda_1(p) = \omega^2(f') = \omega_0^2, \tag{51}$$

где  $\omega_0^2$  является фиксированным числом, а  $\lambda_1(p)$  – минимальное собственное значение следующей задачи:

$$B(u, v; p) = \lambda \langle rtu_2, v_2 \rangle_{L_2}, \quad v \in V. \tag{52}$$

Построим функцию Лагранжа для задачи (50)–(52):

$$\mathcal{L}(p(\cdot), \alpha_0, \alpha_1) = \alpha_0 J(p) + \alpha_1 F(p).$$

Справедлива следующая

**Теорема 5.** *Предположим, что функции  $D(r)$ ,  $a(r)$ ,  $t(r)$  удовлетворяют условиям 1)–3) и  $p_*(r)$  является точкой локального минимума в задаче (50)–(52). Пусть  $\lambda_1(p_*)$  – минимальное собственное значение задачи (52), а  $u(p_*)$  – соответствующая собственная функция. Тогда существует константа  $\alpha$  такая, что*

$$\frac{\pi r t p_*}{\sqrt{1 + p_*^2}} - \alpha \frac{u'_2(p_*) u_1(p_*)}{\langle rtu_2(p_*), u_2(p_*) \rangle_{L_2}} = 0.$$

**Доказательство.** Ранее мы установили, что функционал  $F(p)$  имеет градиент

$$F'(p) = -\frac{2u'_2(p)u_1(p)}{\langle rtu_2(p), u_2(p) \rangle_{L_2}}, \quad p \in L_2[0, b].$$

Нетрудно установить, что функционал  $\mathcal{B}_0(p)$  тоже имеет градиент

$$\mathcal{B}'_0(p) = \frac{2\pi r t p}{\sqrt{1 + p^2}}, \quad p \in L_2[0, b].$$

Докажем, что образ  $\text{Im } F'(p)$  является замкнутым множеством, более того,

$$\text{Im } F'(p_*)X = \mathbb{R}.$$

Возможны два случая:

- (i)  $u'_2(p_*)u_1(p_*) \equiv 0$  для любого  $r \in [0, b]$ ;
- (ii) существует точка  $c \in (0, b]$  такая, что

$$\int_0^c 2u'_2(p_*)u_1(p_*) dr \neq 0.$$

В случае (i) докажем, что  $u(p_*) \equiv 0$ . Действительно, из соотношения (19) с  $p = p_*$ ,  $u = u(p_*)$  получим равенство

$$\int_0^b \left[ ar u'_1(p_*)v'_1 + (a + \nu a' r) \frac{u_1(p_*)v_1}{r} + p_* u'_2(p_*)v_1 \right] dr - a \nu u_1(p_*)v_1 \Big|_0^b = 0, \quad v \in V. \tag{53}$$

Далее подставим в (53)  $v_1 = u_1(p_*)$ . Используя соотношение (i) и положительную определённую билинейную формы  $B(u, v)$ , получаем  $u_1(p_*) \equiv 0$ . Теперь из соотношения (53) имеем

$$\int_0^b p_* u'_2(p_*)v_1 dr = 0, \quad v \in V. \tag{54}$$

Пусть  $\bar{r} \in (0, b)$  – произвольная точка. Возьмём любую функцию  $z = (z_1, z_2) \in \tilde{H}^1 \times \tilde{H}^2$  и построим функцию

$$v_1 = \begin{cases} z_1|_r, & r \in [0, \bar{r}], \\ z_1|_{\bar{r}}(\bar{r} + \delta - r)/\delta, & r \in (\bar{r}, \bar{r} + \delta], \\ 0, & r \in (\bar{r} + \delta, b]. \end{cases}$$

Подставив её в (54), разделив полученное соотношение на  $2\delta$  и устремив  $\delta$  к нулю, получим  $\int_0^{\bar{r}} p_* u'_2(p_*)z_1 dr = 0$ . Отсюда при  $z_1 = u'_2(p_*) \in \tilde{H}^1$  получим  $\int_0^{\bar{r}} p_* (u'_2(p_*))^2 dr = 0$  для любого  $\bar{r} \in (0, b)$ . Но тогда п.в. на  $[0, b]$  будем иметь  $p_* u'_2(p_*)|_r = 0$ . Поскольку  $p_*(r)$  тождественно не равняется нулю, то существует точка  $\tilde{r} \in (0, b)$  такая, что

$$u'_2(p_*)|_{\tilde{r}} = 0. \tag{55}$$

Далее в силу того, что  $u(p_*) \in V$ , запишем равенство

$$\int_0^b u''_2(p_*)v_2 dr = - \int_0^b u'_2(p_*)v'_2 dr, \quad v_2 \in H^1.$$

Теперь выполним указанную выше операцию с заменой  $v_1$  на функцию

$$v_2 = \begin{cases} u_2(p_*)|_r, & r \in [0, \bar{r}], \\ u_2(p_*)|_{\bar{r}}(\bar{r} + \delta - r)/\delta, & r \in (\bar{r}, \bar{r} + \delta], \\ 0, & r \in (\bar{r} + \delta, b]. \end{cases}$$

В результате получим

$$\int_0^{\bar{r}} u''_2(p_*)u_2(p_*) dr = - \int_0^{\bar{r}} (u'_2(p_*))^2 dr, \quad \bar{r} \in [0, b].$$

Это равносильно следующему:  $u_2''(p_*)u_2(p_*)|_{\tilde{r}} = (u_2'(p_*))^2|_{\tilde{r}}$  для любого  $\tilde{r} \in (0, b)$ . Отсюда и в силу (55) заключаем, что

$$u_2''(p_*)u_2(p_*)|_{\tilde{r}} = (u_2'(p_*))^2|_{\tilde{r}} = 0.$$

Тогда в силу соотношения (35) при  $r_{i_0} = \tilde{r}$ ,  $\hat{u}(p_*) = u(p)$  имеют место равенства

$$u_2(p_*)|_{\tilde{r}} = u_2'(p_*)|_{\tilde{r}} = 0.$$

Но это невозможно, иначе можно построить две собственные функции

$$u^1(p_*) = \begin{cases} u(p_*)|_r, & r \in (0, \tilde{r}), \\ 0, & r \notin (0, \tilde{r}), \end{cases} \quad u^2(p_*) = \begin{cases} 0, & r \in (0, \tilde{r}), \\ u(p_*), & r \notin (0, \tilde{r}), \end{cases}$$

соответствующие собственному значению  $\lambda_1(p_*)$ , а это противоречит однократности  $\lambda_1(p_*)$ , полученной нами в теореме 3.

Теперь докажем, что во втором случае следующее уравнение

$$\int_0^b \frac{-2u_1'(p_*)u_2(p_*)}{\langle rtu_1(p_*), u_1(p_*) \rangle_{L_2}} x dr = q \tag{56}$$

имеет решение  $x = x(r)$  для любого  $q \in \mathbb{R}$ .

Действительно, легко проверить, что

$$x(r) = \begin{cases} q \left( \int_0^c \frac{-2u_1'(p_*)u_2(p_*)|_{\tau}}{\langle rtu_1(p_*), u_1(p_*) \rangle_{L_2}} d\tau \right)^{-1}, & 0 \leq r \leq c, \\ 0, & c < r \leq b. \end{cases}$$

Следовательно, согласно (56) имеем

$$\text{Im } F'(p_*)X = \mathbb{R}.$$

Получили, что образ  $\text{Im } F'(p_*)$  совпадает с  $\mathbb{R}$ . Тем самым выполнено условие регулярности отображения  $F$ . Отсюда вытекает, что  $\alpha_0 = 1$ .

С учётом правила множителей Лагранжа [24] доказательство теоремы завершено.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lagrange J.L.* Sur la figure des colonnes // *Miscellanea Taurinensia*. 1770–1773. V. 5.
2. *Arabyan M.H.* Boundary-value problems and associated eigen-value problems for systems describing vibrations of a rotation shell // *New York J. of Math.* 2019. V. 25. P. 1350–1367.
3. *Plaut R.H., Johnson L.W., Parbery R.* Optimal forms of shallow shells with circular boundary. Part 1. Maximum fundamental frequency // *ASME J. of Appl. Mech.* 1984. V. 51. № 3. P. 526–530.
4. *Plaut R.H., Johnson L.W.* Optimal forms of shallow shells with circular boundary. Part 2. Maximum buckling load // *ASME J. of Appl. Mech.* 1984. V. 51. № 3. P. 531–535.
5. *Plaut R.H., Johnson L.W.* Optimal forms of shallow shells with circular boundary. Part 3. Maximum enclosed volume // *ASME J. of Appl. Mech.* 1984. V. 51. № 3. P. 536–539.
6. *Abdulla U.G., Cosgrove E., Goldfarb J.* On the Frechet differentiability in optimal control of coefficients in parabolic free boundary problems // *Evolution Equat. and Control Theory*. 2017. V. 6. № 3. P. 319–344.
7. *Bucur D., Buttazzo G.* Variational Methods in Shape Optimization Problems. Boston, 2005.
8. *He Y., Guo B.Z.* The existence of optimal solution for a shape optimization problem on starlike domain // *J. Optim. Theory and Appl.* 2012. V. 152. P. 21–30.
9. *Hinton E., Sienz J., Ozakca M.* Analysis and Optimization of Shells of Revolution and Prismatic Shells. London, 2003.



10. *Krivoshapko S.* Optimal shells of revolution and main optimization // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 3. С. 201–209.
11. *Lellep J., Hein H.* Optimization of clamped plastic shallow shells subjected to initial impulsive loading // Eng. Optim. 2002. V. 34. № 5. P. 545–556.
12. *Neittaanmaki P., Sprekels J., Tiba D.* Optimization of Elliptic Systems. New York, 2006.
13. *Olhoff N., Plaut R.H.* Bimodal optimization of vibrating shallow arches // Int. J. of Solids and Struct. 1983. V. 19. № 6. P. 553–570.
14. *Stupishin L.Yu., Kolesnikov A.G., Nikitin K.E.* Optimal design of flexible shallow shells on elastic foundation // J. of Appl. Eng. Sci. 2017. V. 15. № 3. P. 345–349.
15. *Velichkov B.* Existence and Regularity Results for Some Shape Optimization Problems. Springer, 2015.
16. *Wang G., Wang L., Yang D.* Shape optimization of an elliptic equation in an exterior domain // SIAM J. Control Optim. 2006. V. 45. № 2. P. 532–547.
17. *Ozakca M., Gogus M.T.* Structural analysis and optimization of bells using finite elements // J. New Music Res. 2004. V. 33. № 1. P. 61–69.
18. *Григолюк Э.И.* Нелинейные колебания и устойчивость пологих стержней и оболочек // Изв. АН СССР. Отдел техн. наук. 1955. № 3. С. 33–68.
19. *Timoshenko S., Woinorowsky-Krieger. S.* Theory of Plates and Shells. New York, 1959.
20. *Timoshenko S.* Strength of Materials. Part 2. Advanced Theory and Problems. New York, 1976.
21. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.
22. *Bramble J.H., Osborn J.E.* Rate of convergence estimates for nonselfadjoint approximations // Math. Comput. 1973. V. 27. P. 525–549.
23. *Arabyan M.H.* On the existence of solutions of two optimization problems // J. of Optim. Theory and Appl. 2018. V. 177. P. 291–315.
24. *Алекеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М., 1979.

Ереванский государственный университет,  
Армения

Поступила в редакцию 26.01.2023 г.  
После доработки 01.08.2023 г.  
Принята к публикации 21.08.2023 г.