ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 3, с. 346–364

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.983.51

О РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНЫХ И ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА–ДАРБУ

А. В. Глушак

Белгородский государственный национальный исследовательский университет
e-mail: aleglu@mail.ru

Поступила в редакцию 27.10.2023 г., после доработки 09.01.2024 г.; принята к публикации 10.01.2024 г.

В банаховом пространстве для функционально-дифференциального уравнения, обобщающего уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу, рассмотрены задача Коши и граничные задачи Дирихле и Неймана. Доказано достаточное условие разрешимости задачи Коши и указан явный вид разрешающего оператора, который записан с помощью введённых автором операторных функций Бесселя и Струве. Для граничных задач в гиперболическом случае установлены достаточные условия их однозначной разрешимости, налагаемые на операторный коэффициент уравнения и граничные элементы.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, задача Коши, задача Дирихле, задача Неймана, однозначная разрешимость, операторная функция Бесселя, операторная функция Струве.

DOI: 10.31857/S0374064124030057, EDN: PMUKGQ

ВВЕДЕНИЕ

Пусть A — замкнутый оператор в банаховом пространстве E с плотной в нём областью определения $D(A)$. При $k>0$ рассмотрим уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу (ЭПД)

$$u''(t)+\frac{k}{t}u'(t)=Au(t), \qquad t>0. \tag{1}$$

Из результатов работ [1, 2] следует, что корректная постановка начальных условий для уравнения (1) состоит в задании в точке $t=0$ начальных условий

$$u(0)=u_0, \qquad u'(0)=0, \tag{2}$$

при этом, если $k\geqslant 1$, начальное условие $u'(0)=0$ снимается, что характерно для ряда уравнений с особенностью в коэффициентах при $t=0$.

Корректная постановка начальных условий в зависимости от параметра $k\in\mathbb{R}$, а также решение соответствующих начальных задач в случае, когда A — оператор Лапласа по пространственным переменным, приводится в [3, гл. 1]. Дальнейшие исследования по теории сингулярных уравнений в частных производных можно найти в работах [4–8]. Что касается абстрактного уравнения ЭПД (1), то оно встречалось ранее в [9; 10, гл. 1; 11] при различных предположениях об операторе A.

В статьях [1, 2] приведены условия на оператор A, обеспечивающие корректную разрешимость задачи (1), (2). В [2] они сформулированы в терминах оценки нормы резольвенты $R(\lambda,A)$ оператора A и её весовых производных, а в [1] — в терминах дробной степени резольвенты и её обычных производных. Множество операторов A, с которыми задача (1), (2) при $k\geqslant 0$ равномерно корректна, обозначим через G_k, а разрешающий оператор этой задачи обозначим через $Y_k(t)$ и назовём *операторной функцией Бесселя* (ОФБ). В дальнейшем предположение $A\in G_k$ при некотором $k\geqslant 0$ означает, в частности, что с оператором A корректно разрешима задача Коши (1), (2) и $Y_k(t)$ — разрешающий оператор этой задачи, при этом $Y_0(t)=C(t)$ — косинус оператор-функция (КОФ) (подробнее о ней см., например, в работах [12; 13, с. 175; 14; 15]).

ОФБ $Y_k(t)$ ($Y_k(0)=I$, $Y_k'(0)=0$) была введена в рассмотрение в [1, 2] как разрешающий оператор задачи Коши для уравнения ЭПД. Но, также как и в теории полугрупп и косинус оператор-функций, семейство операторных функций Бесселя можно ввести (см. [16]) независимо от дифференциального уравнения ЭПД, с которым в итоге оно связано.

В статье [17] исследована задача Коши для уравнения Бесселя–Струве

$$u''(t)+\frac{k}{t}(u'(t)-u'(0))=Au(t),\quad t>0, \tag{3}$$

$$u(0)=0,\quad u'(0)=u_1, \tag{4}$$

указан явный вид разрешающего оператора этой задачи, который был назван *операторной функцией Струве* (ОФС) и обозначен как $L_k(t)$ ($L_k(0)=0$, $L_k'(0)=I$), а также приведены формулы, связывающие ОФБ $Y_k(t)$ и ОФС $L_k(t)$ с проинтегрированной косинус оператор-функцией (ПКОФ).

К понятию ПКОФ привело (см. [18–21]) желание исследователей ослабить требования на операторный коэффициент задачи Коши для абстрактных дифференциальных уравнений второго порядка. Напомним далее определение ПКОФ.

Определение. Пусть $\alpha>0$. Однопараметрическое семейство линейных ограниченных операторов $C_\alpha(t)$, $t\geqslant 0$, называется *α раз проинтегрированной косинус оператор-функцией*, если:

1) $2\Gamma(\alpha)C_\alpha(t)C_\alpha(s)=\int_t^{t+s}(t+s-r)^{\alpha-1}C_\alpha(r)\,dr-\int_0^s(t+s-r)^{\alpha-1}C_\alpha(r)\,dr+\int_{t-s}^t(r-t+s)^{\alpha-1}\times$ $\times C_\alpha(r)\,dr+\int_0^s(r+t-s)^{\alpha-1}C_\alpha(r)\,dr$, $t>s>0$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера;

2) $C_\alpha(0)=0$;

3) для любого $x\in E$ функция $C_\alpha(t)x$ непрерывна по $t\geqslant 0$;

4) существуют постоянные $M>0$, $\omega\geqslant 0$ такие, что

$$\|C_\alpha(t)\|\leqslant Me^{\omega t},\quad t\geqslant 0.$$

Генератор A ПКОФ $C_\alpha(t)$ определяется следующим образом: $D(A)$ — множество элементов $x\in E$ таких, что существует элемент $y\in E$, удовлетворяющий равенству

$$C_\alpha(t)x-\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}x=\int\limits_0^t(t-r)C_\alpha(r)y\,dr,\quad t\geqslant 0, \tag{5}$$

и в этом случае полагаем $Ax=y$.

Критерием того, что оператор A — генератор ПКОФ $C_\alpha(t)$, является наличие у его резольвенты $R(\lambda^2,A)$ оценки (см., например, теорему 2.2.5 из [21])

$$\left\|\frac{d^n}{d\lambda^n}(\lambda^{1-\alpha}R(\lambda^2,A))\right\|\leqslant\frac{Mn!}{(\lambda-\omega)^{n+1}},\quad \lambda>\omega,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Пусть $P_\nu(t)$ — сферическая функция Лежандра (см. [22, с. 205]). Формулы, связывающие ОФБ $Y_k(t)$ и ОФС $L_k(t)$ с ПКОФ $C_\alpha(t)$, содержатся в следующих двух теоремах.

Теорема 1 [17]. *Пусть $k=2\alpha>0$ и оператор A является генератором α раз ПКОФ $C_\alpha(t)$, $u_0\in D(A)$. Тогда задача (1), (2) равномерно корректна, т.е. $A\in G_k$, и соответствующая ОФБ представима в виде*

$$Y_k(t)u_0=\frac{2^\alpha\Gamma(\alpha+1/2)}{\sqrt{\pi}t^\alpha}\left(C_\alpha(t)u_0-\int_0^1 P'_{\alpha-1}(\tau)C_\alpha(t\tau)u_0\,d\tau\right). \tag{6}$$

Из теоремы 1 следует, что определяемая равенством (6) функция $u(t)=Y_k(t)u_0$ является единственным решением задачи Коши (1), (2).

Теорема 2 [17]. *Пусть $u_1\in D(A)$, $k=2\alpha>0$ и оператор A является генератором α раз ПКОФ $C_\alpha(t)$. Тогда функция $u(t)=L_k(t)u_1$, где*

$$L_k(t)u_1=\frac{2^\alpha\ \Gamma(\alpha+1)}{t^{\alpha-1}}\int_0^1 P_{\alpha-1}(\tau)C_\alpha(t\tau)u_1\ d\tau, \tag{7}$$

будет решением задачи (3), (4).

Отметим также, что условием существования операторных функций $Y_k(t)$ и $L_k(t)$ в равенствах (6), (7) является условие $A\in G_k$ (см. [17, 23]).

Пример 1. Если оператор A — оператор умножения на число, то

$$Y_k(t)=\Gamma(k/2+1/2)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(t^2A/4)^j}{j!\,\Gamma(j+k/2+1/2)}=\Gamma(k/2+1/2)(t\sqrt{A}/2)^{1/2-k/2}I_{k/2-1/2}(t\sqrt{A}),$$

$$L_k(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma(k/2+1)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t(t^2A/4)^j}{\Gamma(j+3/2)\Gamma(j+k/2+1)}=\frac{2^{k/2-1/2}\sqrt{\pi}\Gamma(k/2+1)}{A^{k/4+1/4}t^{k/2-1/2}}\mathbf{L}_{k/2-1/2}(t\sqrt{A}),$$

где $I_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя, $\mathbf{L}_\nu(z)$ — модифицированная функция Струве [24, с. 655]. Поэтому операторная функция $Y_k(t)$ была названа ОФБ, а операторная функция $L_k(t)$ — ОФС.

В настоящей работе будем рассматривать функционально-дифференциальное уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу вида

$$u''(t)+\frac{2(\mu+\nu)+1}{t}(u'(t)-u'(0))+\frac{4\mu\nu}{t^2}(u(t)-u(0)-tu'(0))=Au(t),\quad t>0. \tag{8}$$

Функционально-дифференциальное уравнение (8), которое обобщает уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу и Бесселя–Струве, следуя [21, 22], можно также назвать *слабо нагруженным уравнением ЭПД*. Интерес к изучению нагруженных дифференциальных уравнений объясняется объёмом их приложений и тем фактом, что нагруженные уравнения составляют особый класс функционально-дифференциальных уравнений со своими специфическими задачами. Обзор публикаций по нагруженным дифференциальным уравнениям содержится в монографиях [25, 26].

1. ЗАДАЧА КОШИ

Далее рассмотрим начальную задачу и найдём решение сингулярного функционально-дифференциального уравнения (8), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(0)=u_0,\quad u'(0)=u_1. \tag{9}$$

Если $\nu=0$, $\mu\geqslant-1/2$, $A\in G_{2\mu+1}$, то уравнение (8) превращается в уравнение Бесселя–Струве и в силу теорем 1, 2 единственным решением задачи (8), (9) является функция

$$u_{\mu,0}(t)=Y_{2\mu+1}(t)u_0+L_{2\mu+1}(t)u_1. \tag{10}$$

Пусть теперь $\nu>0$, $\mu\geqslant -1/2$. В этом случае будем искать решение задачи (8), (9) в виде интеграла типа Эрдейи–Кобера

$$u(t)=\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}U(ts)u_2\,ds, \tag{11}$$

где $U(ts)$ и u_2 — подлежащие определению дважды дифференцируемая операторная функция и начальный элемент.

Вычислим производные определяемой равенством (11) функции $u(t)$ и после интегрирования по частям получим

$$u'(t)=\int\limits_0^1 s^2(1-s^2)^{\nu-1}U'(ts)u_2\,ds=-\frac{1}{2\nu}\int\limits_0^1\frac{d}{ds}(1-s^2)^{\nu}sU'(ts)u_2\,ds=$$
$$=\frac{1}{2\nu}\int\limits_0^1(1-s^2)^{\nu}(tsU''(ts)u_2+U'(ts)u_2)\,ds, \tag{12}$$
$$u''(t)=\int\limits_0^1 s^3(1-s^2)^{\nu-1}U''(ts)u_2\,ds. \tag{13}$$

Предположим, что функция $U(t)u_2$ удовлетворяет равенству

$$AU(t)u_2=U''(t)u_2+\frac{2\mu+1}{t}(U'(t)-U'(0))u_2, \tag{14}$$

тогда, учитывая (12)–(14) и элементарный интеграл (2.2.4.8) [27], после интегрирования по частям будем иметь

$$u''(t)+\frac{2(\mu+\nu)+1}{t}(u'(t)-u'(0))+\frac{4\mu\nu}{t^2}(u(t)-u(0)-tu'(0))-Au(t)=$$
$$=\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}\left(\frac{2(\mu+\nu)+1}{2\nu}(1-s^2)+s^2-1\right)U''(ts)u_2\,ds+$$
$$+\frac{1}{t}\int\limits_0^1(1-s^2)^{\nu-1}\left(\frac{2(\mu+\nu)+1}{2\nu}(1-s^2)-2\mu-1\right)U'(ts)u_2\,ds+$$
$$+\frac{2\mu+1}{t}\int\limits_0^1(1-s^2)^{\nu-1}U'(0)u_2\,ds-\frac{2(\mu+\nu)+1}{t}\int\limits_0^1 s^2(1-s^2)^{\nu-1}U'(0)u_2\,ds-$$
$$-\frac{4\mu\nu}{t}\int\limits_0^1 s^2(1-s^2)^{\nu-1}U'(0)u_2\,ds+\frac{4\mu\nu}{t^2}\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}U(ts)u_2\,ds-\frac{4\mu\nu}{t^2}\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}U(0)u_2\,ds=$$
$$=\frac{2\mu+1}{2\nu t}\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu}\frac{d}{ds}U'(ts)u_2\,ds+\frac{1}{t}\int\limits_0^1(1-s^2)^{\nu-1}\left(\frac{2(\mu+\nu)+1}{2\nu}(1-s^2)-2\mu-1\right)U'(ts)u_2\,ds+$$
$$+\frac{4\mu\nu}{t^2}\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}U(ts)u_2\,ds-\frac{2\mu}{t^2}U(0)u_2=$$
$$=-\frac{2\mu}{t}\int\limits_0^1(1-s^2)^{\nu}U'(ts)u_2\,ds+\frac{4\mu\nu}{t^2}\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}U(ts)u_2\,ds-\frac{2\mu}{t^2}U(0)u_2=$$
$$=\frac{2\mu}{t^2}U(0)u_2-\frac{4\mu\nu}{t^2}\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}U(ts)u_2\,ds+\frac{4\mu\nu}{t^2}\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}U(ts)u_2\,ds-\frac{2\mu}{t^2}U(0)u_2=0.$$

Поэтому если выполнено равенство (14), то определяемая равенством (11) функция $u(t)$ является решением уравнения (8).

Как следует из теоремы 1, функция $Y_{2\mu+1}(t)u_2$ удовлетворяет равенству (14), и если выбрать $U(t)=Y_{2\mu+1}(t)$, $u_2=2\nu u_0$, то функция $u(t)=Y_{2\mu+1}(t)u_2$, очевидно, будет удовлетворять условиям $u(0)=u_0$, $u'(0)=0$.

В силу теоремы 2 функция $L_{2\mu+1}(t)u_2$ также удовлетворяет равенству (14), и если выбрать

$$U(t)=L_{2\mu+1}(t), \quad u_2=\frac{4\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)}u_1,$$

то функция $u(t)=L_{2\mu+1}(t)u_2$ будет удовлетворять условиям $u(0)=0$, $u'(0)=u_1$.

Таким образом, если $\nu>0$, $\mu\geqslant -1/2$, то решением задачи (8), (9) будет функция

$$u_{\mu,\nu}(t)=2\nu\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}Y_{2\mu+1}(ts)u_0\,ds+\frac{4\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma(\nu)}\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}L_{2\mu+1}(ts)u_1\,ds. \qquad (15)$$

Пример 2. Если оператор A — оператор умножения на число, то, учитывая результаты примера 1, интегралы в выражении (15) вычисляются (см. соответственно интегралы (2.15.2.5) [28], (2.7.4.1) [24]) и решение $u_{\mu,\nu}(t;u_0,u_1)$ задачи (8), (9) примет вид

$$u_{\mu,\nu}(t)={}_1F_2\left(1;\mu+1,\nu+1;\frac{t^2A}{4}\right)u_0+t\,{}_1F_2\left(1;\mu+\frac{3}{2},\nu+\frac{3}{2};\frac{t^2A}{4}\right)u_1, \qquad (16)$$

где ${}_1F_2(\cdot)$ — гипергеометрическая функция

$${}_1F_2\left(1;\alpha,\beta;\frac{t^2A}{4}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(j+\alpha)\Gamma(j+\beta)}\left(\frac{t^2A}{4}\right)^j.$$

Естественно, определение решения в виде гипергеометрических рядов по формуле (16) имеет место и для любого ограниченного оператора A, действующего в E. Укажем также, что ранее результаты о разрешимости некоторых интегро-дифференциальных уравнений при других значениях параметров гипергеометрических рядов встречались в статье [29].

Проведённые выше рассуждения приводят к следующему утверждению.

Теорема 3. *Пусть $\nu>0$, $\mu\geqslant -1/2$, начальные элементы $u_0,u_1\in D(A)$ и оператор $A\in G_{2\mu+1}$. Тогда определяемая равенством (15) функция $u_{\mu,\nu}(t)$ является единственным решением задачи (8), (9).*

Доказательство. Для доказательства теоремы осталось лишь доказать единственность решения задачи (8), (9), которую мы установим методом от противного. Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — два решения указанной задачи. Рассмотрим функцию двух переменных

$$w(t,s)=f\big(Y_{2\mu+1}(s)(u_1(t)-u_2(t))\big),$$

где $f\in E^*$ (E^* — сопряжённое пространство), $t,s\geqslant 0$. Она, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w(t,s)}{\partial t^2}+\frac{2(\mu+\nu)+1}{t}\frac{\partial w(t,s)}{\partial t}+\frac{4\mu\nu}{t^2}w(t,s)=\frac{\partial^2 w(t,s)}{\partial s^2}+\frac{2\mu+1}{s}\frac{\partial w(t,s)}{\partial s}, \quad t,s>0, \qquad (17)$$

и условиям

$$\lim_{t\to 0}\ w(t,s)=\lim_{t\to 0}\frac{\partial w(t,s)}{\partial t}=\lim_{s\to 0}\frac{\partial w(t,s)}{\partial s}=0. \qquad (18)$$

Подобно тому как это было сделано в [30], понимаем под $w(t,s)$ обобщённую функцию умеренного роста и по переменной s применим преобразование Фурье–Бесселя

$$\hat{w}(t,\lambda)=\int\limits_0^\infty s^{2\mu+1}\ j_\mu(\lambda s)w(t,s)\,ds,\quad w(t,s)=\gamma_\mu\int\limits_0^\infty \lambda^{2\mu+1}j_\mu(\lambda s)\hat{w}(t,\lambda)\,d\lambda,$$

$$\gamma_\mu=\frac{1}{2^{2\mu}\Gamma^2(\mu+1)},\quad j_\mu(s)=\frac{2^\mu\Gamma(\mu+1)}{s^\mu}J_\mu(s),$$

где $J_\mu(\cdot)$ — функция Бесселя.

Из (17), (18) для образа $\hat{w}(t,\lambda)$ получим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2\hat{w}(t,\lambda)}{\partial t^2}+\frac{2(\mu+\nu)+1}{t}\frac{\partial\hat{w}(t,\lambda)}{\partial t}+\frac{4\mu\nu}{t^2}\hat{w}(t,\lambda)=-\lambda^2\ \hat{w}(t,\lambda),\quad t>0, \tag{19}$$

$$\lim_{t\to0}\hat{w}(t,\lambda)=\lim_{t\to0}\frac{\partial\hat{w}(t,\lambda)}{\partial t}=0. \tag{20}$$

В силу примера 2 общее решение дифференциального уравнения (19) имеет вид

$$\hat{w}(t,\lambda)=c_1(\lambda)\,{}_1F_2\left(1;\mu+1,\nu+1;-\frac{t^2\lambda^2}{4}\right)+c_2(\lambda)t\,{}_1F_2\left(1;\mu+\frac{3}{2},\nu+\frac{3}{2};-\frac{t^2\lambda^2}{4}\right),$$

и из начальных условий (20), очевидно, вытекают равенства $c_1(\lambda)=c_2(\lambda)=0$. Следовательно, $\hat{w}(t,\lambda)=w(t,s)=0$ для любого $s\geqslant0$. Ввиду произвольности функционала $f\in E^*$ при $s=0$ получим равенство $u_1(t)\equiv u_2(t)$, тем самым единственность решения рассматриваемой задачи установлена. Теорема доказана.

Определяемая равенством (7) ОФС $L_{2\mu+1}(t)$ выражается через ОФБ $Y_{2\mu+2}(t)$ по формуле (см. [17])

$$L_{2\mu+1}(t)u_1=\int\limits_0^t\frac{\xi}{\sqrt{t^2-\xi^2}}Y_{2\mu+2}(\xi)u_1\,d\xi,$$

поэтому второе слагаемое в представлении (15) можно преобразовать к виду

$$\frac{4\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)}\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}L_{2\mu+1}(ts)u_1\,ds=\frac{4\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)}\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}\int\limits_0^{ts}\frac{\xi}{\sqrt{t^2s^2-\xi^2}}Y_{2\mu+2}(\xi)u_1\,d\xi\,ds=$$

$$=\frac{4\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)}\int\limits_0^t\xi Y_{2\mu+2}(\xi)u_1\int\limits_{\xi/t}^1\frac{s(1-s^2)^{\nu-1}\,ds}{\sqrt{t^2s^2-\xi^2}}\,d\xi=\frac{2\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)t^{2\nu}}\int\limits_0^t\xi Y_{2\mu+2}(\xi)u_1\int\limits_{\xi^2}^{t^2}\frac{(t^2-\eta)^{\nu-1}\,d\eta}{\sqrt{\eta-\xi^2}}\,d\xi=$$

$$=\frac{2\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)t^{2\nu}}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+1/2)}\int\limits_0^t\xi(t^2-\xi^2)^{\nu-1/2}Y_{2\mu+2}(\xi)u_1\,d\xi=(2\nu+1)t\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1/2}Y_{2\mu+2}(ts)u_1\,ds,$$

в силу которого справедливо следующее

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы 3 определяемое равенством (15) решение $u_{\mu,\nu}(t)$ может быть записано в виде*

$$u_{\mu,\nu}(t)=2\nu\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}Y_{2\mu+1}(ts)u_0\,ds+(2\nu+1)t\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1/2}Y_{2\mu+2}(ts)u_1\,ds. \tag{21}$$

Поскольку параметры μ и ν входят в уравнение (8) симметрично, то, естественно, справедливы и следующие два утверждения.

Теорема 4. *Пусть $\mu>0$, $\nu\geqslant -1/2$, начальные элементы $u_0, u_1\in D(A)$ и оператор $A\in \in G_{2\nu+1}$. Тогда определяемая равенством*

$$u_{\mu,\nu}(t)=2\mu\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\mu-1}Y_{2\nu+1}(ts)u_0\,ds+\frac{4\Gamma(\mu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu)}\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\mu-1}L_{2\nu+1}(ts)u_1\,ds$$

функция $u_{\mu,\nu}(t)$ является единственным решением задачи (8), (9).

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы 4 решение $u_{\mu,\nu}(t)$ может быть записано в виде*

$$u_{\mu,\nu}(t)=2\mu\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\mu-1}Y_{2\nu+1}(ts)u_0\,ds+(2\mu+1)t\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\mu-1/2}Y_{2\nu+2}(ts)u_1\,ds.$$

Если одновременно выполнены условия теорем 3 и 4 и нужно ослабить требования на оператор A, то следует выбирать теорему, в которой используются операторные функции с большим индексом, поскольку $G_k\subset G_m$ при $k<m$ (см. [1, 16]).

Приведём примеры уравнений, для которых интегралы в представлении (15) могут быть вычислены.

Пример 3. Пусть в уравнении (8) $\mu>0$, $\nu=1/2$ и A — оператор умножения на число, $A\neq 0$. Тогда по формуле (16) единственным решением задачи

$$u''(t)+\frac{2\mu+2}{t}(u'(t)-u'(0))+\frac{2\mu}{t^2}(u(t)-u(0)-tu'(0))=Au(t),\quad t>0, \tag{22}$$

$$u(0)=u_0,\quad u'(0)=u_1, \tag{23}$$

в силу равенств (7.14.1.11) и (7.14.1.12) [24], является функция

$$u_{\mu,1/2}(t)={}_1F_2\left(1;\frac{3}{2},\mu+1;\frac{t^2A}{4}\right)u_0+t\,{}_1F_2\left(1;2,\mu+\frac{3}{2};\frac{t^2A}{4}\right)u_1=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma(\mu+1)\left(\frac{t\sqrt{A}}{2}\right)^{-\mu-1/2}\mathbf{L}_{\mu-1/2}(t\sqrt{A})u_0+\frac{4\mu+2}{tA}\left(\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{t\sqrt{A}}{2}\right)^{1/2-\mu}I_{\mu-1/2}(t\sqrt{A})-1\right)u_1=$$

$$=\frac{1}{t}L_{2\mu}(t)u_0+\frac{4\mu+2}{tA}(Y_{2\mu}(t)-1)u_1.$$

Если у неограниченного оператора $A\in G_{2\mu}$ существует обратный, то представление решения задачи (22), (23) в виде

$$u_{\mu,1/2}(t)=\frac{1}{t}L_{2\mu}(t)u_0+\frac{4\mu+2}{t}(Y_{2\mu}(t)-I)A^{-1}u_1$$

сохраняется, в чём нетрудно убедиться непосредственной проверкой.

В частности, если оператор A является генератором КОФ $C(t)$, то, учитывая приведённые в [17] примеры операторных функций, при $\mu=1$ получим

$$u_{1,1/2}(t)=\frac{1}{t^2}(C(t)-I)A^{-1}u_0+\frac{6}{t^2}(S(t)-tI)A^{-1}u_1,$$

где $S(t)=C_1(t)$ — синус оператор-функция.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда равномерно по $t\in[0,T]$, $T>0$, имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{\nu\to+0}u_{\mu,\nu}(t)=u_{\mu,0}(t), \tag{24}$$

где $u_{\mu,0}(t)$ определена равенством (10).

Доказательство. Учитывая представления (15), (10), для любого $\delta>0$ имеем

$$u_{\mu,\nu}(t)-u_{\mu,0}(t)=2\nu\left(\int\limits_0^{1-\delta/T}+\int\limits_{1-\delta/T}^1\right)s(1-s^2)^{\nu-1}(Y_{2\mu+1}(ts)-Y_{2\mu+1}(t))u_0\,ds+$$

$$+\frac{4\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)}\left(\int\limits_0^{1-\delta/T}+\int\limits_{1-\delta/T}^1\right)s(1-s^2)^{\nu-1}(L_{2\mu+1}(ts)-L_{2\mu+1}(t))u_1\,ds.$$

В силу сильной непрерывности операторных функций $Y_{2\mu+1}(t)$ и $L_{2\mu+1}(t)$ для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что

$$\|(Y_{2\mu+1}(ts)-Y_{2\mu+1}(t))u_0\|+\|(L_{2\mu+1}(ts)-L_{2\mu+1}(t))u_1\|<\varepsilon,$$

если только $|s-1|<\delta/T$. Зафиксируем такое $\delta>0$. Пусть также

$$M(T)=\sup_{[0,T]}(\|Y_{2\mu+1}(t)u_0\|+\|L_{2\mu+1}(t)u_1\|).$$

Тогда после очевидных оценок получим

$$\|u_{\mu,\nu}(t)-u_{\mu,0}(t)\|\leqslant 2\nu\left(1+\frac{2\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1)}\right)\left(2M(T)\int\limits_0^{1-\delta/T}s(1-s^2)^{\nu-1}\,ds+2\varepsilon\int\limits_{1-\delta/T}^1 s(1-s^2)^{\nu-1}\,ds\right)=$$

$$=\left(1+\frac{2\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1)}\right)\left(2M(T)\left(1-\left(1-\frac{\delta^2}{T^2}\right)^{\nu}\right)+2\varepsilon\right).$$

Поскольку при $\nu\to+0$ слагаемое

$$2M(T)\left(1+\frac{2\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1)}\right)\left(1-\left(1-\frac{\delta^2}{T^2}\right)^{\nu}\right)$$

стремится к нулю, а слагаемое

$$2\varepsilon\left(1+\frac{2\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma(\nu+1)}\right)$$

может быть сделано меньше произвольного числа $\varepsilon_1>0$, то отсюда и вытекает справедливость предельного равенства (24). В частности, если оператор A ограничен, то, учитывая пример 2, оно принимает вид

$$\lim_{\nu\to+0}u_{\mu,\nu}(t)=\lim_{\nu\to+0}\left({}_1F_2\left(1;\mu+1,\nu+1;\frac{t^2A}{4}\right)u_0+t\,{}_1F_2\left(1;\mu+\frac{3}{2},\nu+\frac{3}{2};\frac{t^2A}{4}\right)u_1\right)=$$

$$={}_1F_2\left(1;\mu+1,1;\frac{t^2A}{4}\right)u_0+t\,{}_1F_2\left(1;\mu+\frac{3}{2},\frac{3}{2};\frac{t^2A}{4}\right)u_1=$$

$$=\Gamma(\mu+1)(t\sqrt{A}/2)^{-\mu}I_\mu(t\sqrt{A})u_0+\frac{2^\mu\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+3/2)}{A^{\mu/2+1/2}t^\mu}\mathbf{L}_\mu(t\sqrt{A})=Y_{2\mu+1}(t)u_0+L_{2\mu+1}(t)u_1=u_{\mu,0}(t).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим случай при $\nu<0$, который не охватывает теорема 3. Если $\mu\geqslant\nu-1/2$, то непосредственная проверка показывает, что функция

$$u_{\mu,\nu}(t)=t^{-2\nu}Y_{2\mu-2\nu+1}(t)u_0+\frac{1}{2}t^{-2\nu}L_{2\mu-2\nu+1}(t)u_1+\frac{1}{2}t^{1-2\nu}u_1 \qquad (25)$$

удовлетворяет уравнению (8) и условиям

$$\lim_{t\to 0} t^{2\nu}u(t)=u_0, \quad \lim_{t\to 0}(t^{2\nu}u(t))'=u_1. \tag{26}$$

Действительно, вычислив производные определяемой равенством (25) функции $u_{\mu,\nu}(t)$, получим

$$u'_{\mu,\nu}(t)=-2\nu t^{-2\nu-1}Y_{2\mu-2\nu+1}(t)u_0+t^{-2\nu}Y'_{2\mu-2\nu+1}(t)u_0-$$
$$-\nu t^{-2\nu-1}L_{2\mu-2\nu+1}(t)u_1+\frac{1}{2}t^{-2\nu}L'_{2\mu-2\nu+1}(t)u_1+\frac{1}{2}(1-2\nu)t^{-2\nu},$$
$$u''_{\mu,\nu}(t)=-2\nu(-2\nu-1)t^{-2\nu-2}Y_{2\mu-2\nu+1}(t)u_0-4\nu t^{-2\nu-1}Y'_{2\mu-2\nu+1}(t)u_1+$$
$$+t^{-2\nu}Y''_{2\mu-2\nu+1}(t)u_0-\nu(-2\nu-1)t^{-2\nu-2}L_{2\mu-2\nu+1}(t)u_1-$$
$$-2\nu t^{-2\nu-1}L'_{2\mu-2\nu+1}(t)u_1+\frac{1}{2}t^{-2\nu}L''_{2\mu-2\nu+1}(t)u_1-\nu(1-2\nu)t^{-2\nu-1},$$
$$u''_{\mu,\nu}(t)+\frac{2(\mu+\nu)+1}{t}u'_{\mu,\nu}(t)+\frac{4\mu\nu}{t^2}u_{\mu,\nu}(t)=t^{-2\nu}\left(Y''_{2\mu-2\nu+1}(t)u_0+\frac{2(\mu-\nu)+1}{t}Y'_{2\mu-2\nu+1}(t)u_0\right)+$$
$$+\frac{1}{2}t^{-2\nu}\left(L''_{2\mu-2\nu+1}(t)u_1+\frac{2(\mu-\nu)+1}{t}L'_{2\mu-2\nu+1}(t)u_1\right)=t^{-2\nu}AY_{2\mu-2\nu+1}(t)u_0+$$
$$+\frac{1}{2}t^{-2\nu}\left(AL_{2\mu-2\nu+1}(t)u_1+\frac{2(\mu-\nu)+1}{t}u_1\right)-\frac{2(\mu-\nu)+1}{2t^{2\nu+1}}u_1=Au_{\mu,\nu}(t), \quad A\in G_{2\mu-2\nu+1}.$$

При этом учитывалось, что функция $v(t)=t^{1-2\nu}$ удовлетворяет неоднородному дифференциальному уравнению

$$v''(t)+\frac{2(\mu+\nu)+1}{t}v'(t)+\frac{4\mu\nu}{t^2}v(t)=(2\mu-2\nu+1)t^{-2\nu-1}u_1.$$

Отметим также, что представление решения в виде (25) найдено подстановкой в равенство (11) операторной функции $U(t)=t^{-2\mu}Y_{1-2\mu}(t)$, $\mu<0$.

Справедливость начальных условий (26), очевидно, вытекает из свойств операторных функций $Y_{2\mu-2\nu+1}(t)$ и $L_{2\mu-2\nu+1}(t)$, тем самым проверка утверждения завершена.

Таким образом, справедливы следующие две теоремы, утверждение о единственности решения в которых устанавливается методом от противного, подобно тому как это было сделано в теореме 3.

Теорема 6. *Пусть $\nu<0$, $\mu\geqslant\nu-1/2$, $u_0,u_1\in D(A)$ и оператор $A\in G_{2\mu-2\nu+1}$. Тогда определяемая равенством (25) функция $u_{\mu,\nu}(t)$ является единственным решением дифференциального уравнения*

$$u''(t)+\frac{2(\mu+\nu)+1}{t}u'(t)+\frac{4\mu\nu}{t^2}u(t)=Au(t), \quad t>0, \tag{27}$$

удовлетворяющим условиям (26).

Теорема 7. *Пусть $\mu<0$, $\nu\geqslant\mu-1/2$, $u_0,u_1\in D(A)$ и оператор $A\in G_{2\nu-2\mu+1}$. Тогда функция*

$$u_{\mu,\nu}(t)=t^{-2\mu}Y_{2\nu-2\mu+1}(t)u_0+\frac{1}{2}t^{-2\mu}L_{2\nu-2\mu+1}(t)u_1+\frac{1}{2}t^{1-2\mu}u_1$$

является единственным решением дифференциального уравнения (27), удовлетворяющим условиям

$$\lim_{t\to 0} t^{2\mu}u(t)=u_0, \quad \lim_{t\to 0}(t^{2\mu}u(t))'=u_1.$$

Следствие 3. *Если дополнительно в условиях теоремы 6 параметр* $\nu \leqslant -1/2$, *а в условиях теоремы 7 параметр* $\mu \leqslant -1/2$, *то указанные в этих теоремах функции* $u_{\mu,\nu}(t)$ *обладают свойством* $u_{\mu,\nu}(0) = u'_{\mu,\nu}(0) = 0$ *и удовлетворяют не только дифференциальному уравнению (27), но и функционально-дифференциальному уравнению (8).*

Отметим, что в теоремах 6 и 7 для выделения единственного решения классическая (“невесовая”) постановка начальных условий не подходит, поскольку, например, функция

$$u(t) = t^2 c, \quad c \in E,$$

при $\mu = -1$, $\nu = 1$ удовлетворяет однородной задаче

$$u''(t) + \frac{1}{t}u'(t) - \frac{4}{t^2}u(t) = 0, \quad u(0) = u'(0) = 0,$$

тем самым нарушается однозначная разрешимость рассматриваемых задач.

Пример 4. Пусть в уравнении (27) $\mu = -1$, $\nu = -1/2$ и оператор A является генератором КОФ $C(t)$. Тогда по формуле (25) теоремы 6 единственным решением задачи (26), (27) является функция

$$u_{-1,-1/2}(t) = tC(t)u_0 + \frac{1}{2}tS(t)u_1 + \frac{1}{2}t^2 u_1.$$

Замечание 1. Определяемые в теоремах 3 и 4 разрешающие операторы задачи Коши (8), (9) представляют собой проинтегрированные специальным образом КОФ $C(t)$.

Отметим, что если оператор A является генератором ПКОФ $C_{\mu+\nu+1/2}(t)$ и при этом $\mu > -1/2$, $\mu + \nu + 1/2 > 0$, то функция

$$u(t) = \frac{\Gamma(\mu+\nu+3/2)}{t^{\mu+\nu+1/2}} C_{\mu+\nu+1/2}(t)u_0$$

является решением уравнения

$$u''(t) + \frac{2(\mu+\nu)+1}{t}(u'(t) - u'(0)) + \frac{4(\mu+\nu)^2 - 1}{4t^2}(u(t) - u(0) - tu'(0)) = Au(t), \tag{28}$$

удовлетворяющим условиям

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0, \tag{29}$$

в чём нетрудно убедиться непосредственной проверкой с использованием равенства (5).

При $\nu = \mu + 1/2$ уравнения (28) и (8) совпадают и, в силу утверждения о единственности теоремы 3, для решения задачи (28), (29) справедливо представление

$$u(t) = (2\mu+1)\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\mu-1/2} Y_{2\mu+1}(ts)u_0\,ds = \frac{\Gamma(2\mu+2)}{t^{2\mu+1}} C_{2\mu+1}(t)u_0.$$

Замечание 2. Определяемые в теоремах 3 и 4 разрешающие операторы задачи Коши (8), (9) при $\mu > 0$, $\nu = \mu + 1/2$ связаны соотношением

$$2\mu\int\limits_0^t \tau^{2\mu+1}\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\mu-1}\ Y_{2\mu+2}(\tau s)\,ds\,d\tau = 2\mu\int\limits_0^t \xi Y_{2\mu+2}(\xi)\int\limits_\xi^t \tau(\tau^2-\xi^2)^{\mu-1}\,d\tau\,d\xi =$$
$$= t^{2\mu+2}\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\mu} Y_{2\mu+2}(ts)\,ds. \tag{30}$$

Если оператор A ограничен, то, учитывая пример 2 и интеграл (2.22.2.1) [24], соотношение (30) запишем как

$$\int_0^t \tau^{2\mu+1}\,{}_1F_2\left(1;\mu+1,\mu+\frac{3}{2};\frac{\tau^2 A}{4}\right)d\tau=\frac{t^{2\mu+2}}{2\mu+2}\,{}_1F_2\left(1;\mu+\frac{3}{2},\nu+\frac{3}{2};\frac{t^2 A}{4}\right),\quad \mu>-1. \tag{31}$$

В частности, при $\mu=-1/2$ равенство (31) принимает вид известной формулы связи КОФ $C(t)$ и СОФ $S(t)$:

$$\int_0^t C(\tau)\,d\tau=\int_0^t \operatorname{ch}(\tau\sqrt{A})\,d\tau=\frac{\operatorname{sh}(t\sqrt{A})}{\sqrt{A}}=S(t).$$

2. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ

Граничные задачи для уравнения (8) в гиперболическом случае, вообще говоря, не являются корректными, но в настоящее время общепризнана необходимость решать некорректные задачи (см. введение в [31], а также работы [32, 33] и обширную библиографию в них). В монографии [31, гл. 2] исследована корректность общих краевых задач для дифференциально-операторного уравнения первого порядка и для абстрактного волнового уравнения (случай $k=0$ в уравнении (1)).

Многие некорректные задачи для дифференциально-операторных уравнений могут быть сведены к операторным уравнениям первого рода $Bx=y$, $x,y\in E$, и основная трудность состоит в установлении их разрешимости. Ниже при $A\in G_{2\mu+1}$ в гиперболическом случае решим операторное уравнение первого рода и установим условия корректности граничной задачи Дирихле для функционально-дифференциального уравнения (8).

При $\nu>0$, $\mu\geqslant -1/2$ будем искать решение $u(t)\in C^2([0,1],E)\cap C((0,1],D(A))$ уравнения (8) на интервале конечной длины $t\in(0,1)$, удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0)=u_0,\quad u(1)=v_1. \tag{32}$$

Как уже было отмечено, задача (8), (32) не является корректной. Установим условия, налагаемые на оператор $A\in G_{2\mu+1}$ и элементы u_0, $v_1\in E$, обеспечивающие её однозначную разрешимость. Случай с параметром $\nu=0$ в уравнении (8) был рассмотрен в работе [34].

Из теоремы 3 следует, что корректная постановка начальных условий для функционально-дифференциального уравнения (8) состоит в задании в точке $t=0$ начальных значений (9), при этом единственное решение задачи (8), (9) имеет вид (15) или (21).

Возвращаясь к рассматриваемой нами задаче Дирихле (8), (32), отметим, что, учитывая представление (21), нам следует определить элемент $u_1\in D(A)$ из уравнения

$$(2\nu+1)\int_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1/2}Y_{2\mu+2}(s)u_1\,ds=v_2, \tag{33}$$

где

$$v_2=v_1-2\nu\int_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}Y_{2\mu+1}(s)u_0\,ds. \tag{34}$$

Уравнение (33) преобразуем, воспользовавшись формулой (см. [1]), выражающей ОФБ $Y_{2\mu+2}(t)$ через резольвенту $R(\lambda)=(\lambda I-A)^{-1}$ оператора A:

$$Y_{2\mu+2}(t)u_0=\frac{2^{\mu+1/2}\Gamma(\mu+3/2)}{i\pi t^{\mu+1/2}}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\lambda^{1/2-\mu}I_{\mu+1/2}(t\lambda)R(\lambda^2)u_0\,d\lambda,\quad \sigma>\omega,\quad u_0\in D(A), \tag{35}$$

где λ^2 при $\operatorname{Re}\lambda>\omega\geqslant 0$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A.

Подставив выражение (35) в левую часть (33), после элементарных преобразований получим

$$(2\nu+1)\int_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1/2}Y_{2\mu+2}(s)u_1\,ds=$$

$$=(2\nu+1)\int_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1/2}\frac{2^{\mu+1/2}\Gamma(\mu+3/2)}{i\pi\ \ s^{\mu+1/2}}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\xi^{1/2-\mu}I_{\mu+1/2}(s\xi)R(\xi^2)u_1\,d\xi\,ds=$$

$$=\frac{2^{\mu+1/2}(2\nu+1)\Gamma(\mu+3/2)}{i\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\xi^{1/2-\mu}R(\xi^2)u_1\int_0^1 s^{1/2-\mu}(1-s^2)^{\nu-1/2}I_{\mu+1/2}(s\xi)\,ds\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{i\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\xi\,{}_1F_2\big(1;\mu+3/2,\nu+3/2;\xi^2/4\big)R(\xi^2)u_1\,d\xi, \tag{36}$$

при этом был использован интеграл (2.15.2.5) [28].

Важную роль в дальнейшем будет играть целая функция

$$\chi_{\mu,\nu}(\lambda)={}_1F_2\big(1;\mu+3/2,\nu+3/2;\lambda/4\big), \tag{37}$$

применяя которую и учитывая представление (36), операторное уравнение первого рода (33) запишем в виде

$$Bu_1\equiv\frac{1}{\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\xi\chi_{\mu,\nu}(\xi^2)\ \ R(\xi^2)u_1\,d\xi=v_2. \tag{38}$$

Для установления разрешимости уравнения (38) наложим дополнительное условие на резольвенту оператора A.

Условие 1. Каждый нуль λ_j, $j\in\mathbb{N}$, определяемой равенством (37) целой функции $\chi_{\mu,\nu}(\lambda)$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$, и существует такое число $d>0$, что

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}\|R(\lambda_j)\|\leqslant d.$$

Будем считать условие 1 выполненным. Поскольку каждый нуль λ_j, $j\in\mathbb{N}$, функции $\chi_{\mu,\nu}(\lambda)$ принадлежит $\rho(A)$, то он принадлежит $\rho(A)$ вместе с круговой окрестностью Ω_j радиуса $1/d$, границу которой, проходимую по часовой стрелке, обозначим γ_j. Пусть Υ_0 — контур на комплексной плоскости, состоящий из проходимой снизу вверх прямой $\operatorname{Re}z=\sigma_0>\omega$, Υ_0^2 — парабола — образ Υ_0 при отображении $w=z^2$ $(z\in\Upsilon_0,\ w\in\Upsilon_0^2)$, и $\Xi=\Upsilon_0^2\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\gamma_j$.

Возьмём $\lambda_0\in\rho(A)$, $\operatorname{Re}\lambda_0>\sigma>\sigma_0$, и выберем $n\in\mathbb{N}$ так, чтобы

$$n>(2\mu+\nu+3)/2. \tag{39}$$

Рассмотрим ограниченный оператор

$$Hq=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Xi}\frac{R(z)q\,dz}{\chi_{\mu,\nu}(z)(z-\lambda_0)^n},\quad H\colon\ E\to E. \tag{40}$$

Покажем, что интеграл в (40) при выполнении некоторых условий абсолютно сходится. Действительно, в силу выбора контура Υ_0^2, неравенства (см. [2])

$$\|\lambda^{1/2-\mu}R(\lambda^2)\|\leqslant\frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda-\omega)^{\mu+3/2}},\quad \operatorname{Re}\lambda>\omega,$$

и асимптотического поведения гипергеометрической функции ${}_1F_2(a;b_1,b_2;z)$ при $|z|\to\infty$, $|\arg z|<\pi$:

$$ {}_1F_2(a;b_1,b_2;z)=\frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(a)}z^{(a-b_1-b_2+1/2)/2}e^{2\sqrt{z}}\biggl(1+O\biggl(\frac{1}{\sqrt{z}}\biggr)\biggr), $$

интеграл

$$ \int\limits_{\Upsilon_0^2}\frac{R(z)\,dz}{\chi_{\mu,\nu}(z)(z-\lambda_0)^n}=2\int\limits_{\Upsilon_0}\frac{\lambda^{\mu+1/2}\lambda^{1/2-\mu}R(\lambda^2)\,d\lambda}{{}_1F_2(1;\mu+3/2,\nu+3/2;\lambda^2/4)(\lambda^2-\lambda_0)^n} $$

абсолютно сходится, поскольку, как следует из ограничения (39), справедливо неравенство $2n-2\mu-\nu-2>1$, обеспечивающее его абсолютную сходимость.

Рассмотрим теперь интеграл

$$ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}}\gamma_j}\frac{R(z)\,dz}{\chi_{\mu,\nu}(z)(z-\lambda_0)^n} \tag{41} $$

по оставшейся части контура Ξ.

В общем случае асимптотика нулей λ_j функции $\chi_{\mu,\nu}(\lambda)$ нам не известна, поэтому абсолютную сходимость интеграла (41) мы, наряду с условием 1, обеспечим следующим предположением.

Условие 2. При некотором числе n, удовлетворяющем неравенству (39), ряд

$$ \sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{\gamma_j}\frac{R(z)\,dz}{\chi_{\mu,\nu}(z)(z-\lambda_0)^n} $$

сходится абсолютно.

Пример 5. Если в уравнении (8) $\mu=0$, $\nu=1$, то

$$ \chi_{0,1}(\lambda)=\frac{2(\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}-1)}{\lambda},\quad \lambda_j=-4\pi^2j^2,\quad j\in\mathbb{N}. $$

Рассматриваемый в условии 2 ряд будет абсолютно сходящимся, если при некотором n абсолютно сходится ряд

$$ \sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{\gamma_j}\frac{R(z)\,dz}{\chi_{0,1}(z)(z-\lambda_0)^n}=\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{\gamma}\frac{(\xi+2\pi ji)^3R((\xi+2\pi ji)^2)\,d\xi}{(\operatorname{ch}\xi-1)((\xi+2\pi ji)^2-\lambda_0)^n}, $$

где γ — окружность радиуса $1/d$ с центром в точке $z=0$. В силу условия 1 резольвента $R(\cdot)$ ограничена в круговой окрестности с контуром γ, поэтому порядок интеграла по $j\to\infty$ равен j^{3-2n}, следовательно, рассматриваемый в условии 2 ряд сходится абсолютно при $n>2$.

Теорема 8. *Пусть $\nu>0$, $\mu\geqslant-1/2$, $A\in G_{2\mu+1}$, число $n\in\mathbb{N}$ выбрано так, чтобы выполнялось неравенство (39) и были справедливы условия 1, 2. Если $u_0,u_2\in D(A^{n+1})$, то задача (8), (32) имеет единственное решение.*

Доказательство. Как мы ранее уже выяснили, доказательство существования единственного решения задачи (8), (32) сводится к доказательству существования обратного оператора у ограниченного оператора B, определяемого равенством (38). Покажем, что оператор B имеет обратный B^{-1}: $D(A^n)\to E$.

Пусть $q\in D(A)$, $\sigma_0<\sigma<\operatorname{Re}\lambda$. Тогда, применяя определяемый равенством (40) оператор H к Bq и учитывая тождество Гильберта

$$ R(z)R(\xi^2)=\frac{R(z)-R(\xi^2)}{\xi^2-z}, $$

получаем равенство

$$HBq=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Xi}\frac{R(z)\,dz}{\chi_{\mu,\nu}(z)(z-\lambda_0)^n}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\xi\chi_{\mu,\nu}(\xi^2)R(\xi^2)q\,d\xi=$$

$$=\frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left(\frac{\xi\chi_{\mu,\nu}(\xi^2)R(z)q}{\chi_{\mu,\nu}(z)(z-\lambda_0)^n(\xi^2-z)}-\frac{\xi\chi_{\mu,\nu}(\xi^2)R(\xi^2)q}{\chi_{\mu,\nu}(z)(z-\lambda_0)^n(\xi^2-z)}\right)d\xi\,dz. \tag{42}$$

Интеграл в (42) абсолютно сходится. Изменив порядок интегрирования, будем иметь

$$HBq=\frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\xi\chi_{\mu,\nu}(\xi^2)R(z)q\,d\xi\,dz}{\chi_{\mu,\nu}(z)(z-\lambda_0)^n(\xi^2-z)}-$$

$$-\frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\xi\chi_{\mu,\nu}(\xi^2)R(\xi^2)q\int\limits_{\Xi}\frac{dz}{\chi_{\mu,\nu}(z)(z-\lambda_0)^n(\xi^2-z)}\,d\xi. \tag{43}$$

Если контур интегрирования Υ_0^2 замкнуть влево, не пересекая $\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\gamma_j$, то внутренний интеграл во втором слагаемом (43) обратится в нуль в силу выбора контура Ξ и теоремы Коши для многосвязной области. Для вычисления интегралов в первом слагаемом (43) используем интегральную формулу Коши. Таким образом, справедливо равенство

$$HBq=\frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\Upsilon}\frac{\xi\chi_{\mu,\nu}(\xi^2)R(z)q\,d\xi\,dz}{\chi_{\mu,\nu}(z)(z-\lambda_0)^n(\xi^2-z)}=\frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\Upsilon^2}\frac{\chi_{\mu,\nu}(\lambda)R(z)q\,d\lambda\,dz}{\chi_{\mu,\nu}(z)(z-\lambda_0)^n(\lambda-z)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Xi}\frac{R(z)q\,dz}{(z-\lambda_0)^n}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Upsilon_0^2}\frac{R(z)q\,dz}{(z-\lambda_0)^n}=\frac{-1}{(n-1)!}R^{(n-1)}(\lambda_0)q=(-1)^nR^n(\lambda_0)q.$$

Коммутирующие операторы H, B, $R^n(\lambda_0)$ ограничены и область определения $D(A)$ плотна в E, поэтому равенство $HBq=(-1)^nR^n(\lambda_0)q$ справедливо и для $q\in E$, и при этом HB: $E\to D(A^n)$. Отсюда следует, что оператор $B^{-1}q=(-1)^n(\lambda_0I-A)^nHq$ при $q\in D(A^n)$ является обратным по отношению к B, B^{-1}: $D(A^n)\to E$. Действительно,

$$BB^{-1}q=(-1)^nB(\lambda_0I-A)^nHq=(-1)^nBH(\lambda_0I-A)^nq=R^n(\lambda_0)(\lambda_0I-A)^nq=q,\quad q\in D(A^n),$$

$$B^{-1}Bq=(-1)^n(\lambda_0I-A)^nHBq=(\lambda_0I-A)^nR^n(\lambda_0)q=q,\quad q\in E.$$

Возвращаясь к задаче (8), (32), определим принадлежащий области $D(A)$ начальный элемент $u_1=(-1)^n(\lambda_0I-A)^nHv_2$, где v_2 определён равенством (34), $v_2\in D(A^{n+1})$, оператор H задан равенством (40), $\lambda_0\in\rho(A)$, $\operatorname{Re}\lambda_0>\sigma_0>\omega$. Тогда в силу представления (21) единственное решение $u(t)$ задачи (8), (32) имеет вид

$$u_{\mu,\nu}(t)=2\nu\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}Y_{2\mu+1}(ts)u_0\,ds+(2\nu+1)t\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1/2}Y_{2\mu+2}(ts)u_1\,ds.$$

Теорема доказана.

3. ЗАДАЧА НЕЙМАНА

Рассмотрим ещё один случай регулярных граничных условий для гиперболического уравнения (8) (задачу Неймана):

$$u'(0)=u_1,\quad u'(1)=w_1. \tag{44}$$

При этом, также как в [34, 35], для корректной разрешимости задачи Неймана необходимо существование ограниченного оператора A^{-1}, что мы будем предполагать при исследовании данной задачи.

Учитывая представление (15) и условия (44), определим неизвестный элемент $u_0 \in D(A)$ из уравнения

$$2\nu \int_0^1 s^2(1-s^2)^{\nu-1} Y'_{2\mu+1}(s) u_0\, ds + \frac{4\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)} \int_0^1 s^2(1-s^2)^{\nu-1} L'_{2\mu+1}(s) u_1\, ds = w_1. \tag{45}$$

Используя формулу для дифференцирования (см. [1])

$$Y'_k(t) u_0 = \frac{t}{k+1} Y_{k+2}(t) A u_0,$$

уравнение (45) перепишем как

$$\frac{\nu}{\mu+1} \int_0^1 s^3(1-s^2)^{\nu-1} Y_{2\mu+3}(s) A u_0\, ds = u_2, \tag{46}$$

где

$$u_2 = w_1 - \frac{4\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)} \int_0^1 s^2(1-s^2)^{\nu-1} L'_{2\mu+1}(s) u_1\, ds. \tag{47}$$

С учётом представления (35) левая часть уравнения (46) после элементарных преобразований примет вид

$$\frac{\nu}{\mu+1} \int_0^1 s^3(1-s^2)^{\nu-1} Y_{2\mu+3}(s) A u_0\, ds =$$

$$= \frac{\nu}{\mu+1} \int_0^1 s^{2-\mu}(1-s^2)^{\nu-1} \frac{2^{\mu+1}\Gamma(\mu+2)}{i\pi s^{\mu+1}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \xi^{-\mu} I_{\mu+1}(s\xi) R(\xi^2) A u_0\, d\xi\, ds =$$

$$= \frac{2^{\mu+1}\nu\Gamma(\mu+1)}{i\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \xi^{-\mu} R(\xi^2) A u_0 \int_0^1 s^{2-\mu}(1-s^2)^{\nu-1} I_{\mu+1}(s\xi)\, ds\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2(\mu+1)\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \xi\, {}_1F_2\left(1; \mu+2, \nu+1; \frac{\xi^2}{4}\right) R(\xi^2) A u_0\, d\xi, \tag{48}$$

при этом был использован интеграл (2.15.2.5) [28].

Введём в рассмотрение целую функцию

$$\psi_{\mu,\nu}(\lambda) = \frac{1}{2(\mu+1)}\, {}_1F_2\left(1; \mu+2, \nu+1; \frac{\lambda}{4}\right), \tag{49}$$

используя которую и учитывая представление (48), операторное уравнение первого рода (46) запишем в виде

$$B_1 A u_0 \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \xi \psi_{\mu,\nu}(\xi^2) R(\xi^2) A u_0\, d\xi = u_3. \tag{50}$$

Доказательство разрешимости уравнения (50) относительно Au_0 проводится аналогично доказательству теоремы 8. Сформулируем достаточные для этого условия, потребовав существование обратного оператора A^{-1}.

Условие 3. Число $\theta_0=0$, а также каждый нуль θ_j, $j\in\mathbb{N}$, определяемой равенством (49) функции $\psi_{\mu,\nu}(\lambda)$ принадлежат резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A, и существует такое число $d>0$, что

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}\|R(\theta_j)\|\leqslant d.$$

Далее будем использовать введённые ранее контуры Ξ, γ_j, но, в отличие от теоремы 8, построенные по нулям θ_j функции $\psi_{\mu,\nu}(\lambda)$.

Условие 4. При некотором m, удовлетворяющем неравенству $m>(2\mu+\nu+3)/2$, ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{\gamma_j}\frac{R(z)\,dz}{\psi_{\mu,\nu}(z)(z-\lambda_0)^m}$$

сходится абсолютно.

При выполнении условий 3 и 4 введём в рассмотрение ограниченный оператор

$$H_1q=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Xi}\frac{R(z)q\,dz}{\psi_{\mu,\nu}(z)(z-\lambda_0)^m},\quad H_1\colon\ E\to E. \tag{51}$$

Справедливо следующее утверждение о разрешимости задачи Неймана.

Теорема 9. *Пусть $\nu>0$, $\mu\geqslant-1/2$, $A\in G_{2\mu+1}$, $u_1,w_1\in D(A^{n+2})$ и выполнены условия 3, 4. Тогда задача (8), (44) однозначно разрешима и её решение имеет вид*

$$u(t)=2\nu\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}Y_{2\mu+1}(ts)u_0\,ds+\frac{4\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)}\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}L_{2\mu+1}(ts)u_1\,ds,$$

где $u_0=(-1)^mA^{-1}(\lambda_0I-A)^mH_1u_2$, элемент u_2 и оператор H_1 определены, соответственно, равенствами (47) и (51).

Пример 6. Если A — оператор умножения на число, $A\neq0$, то по формуле (16) решение задачи Коши имеет вид

$$u_{\mu,\nu}(t)={}_1F_2\big(1;\mu+1,\nu+1;t^2A/4\big)u_0+t\,{}_1F_2\big(1;\mu+3/2,\nu+3/2;t^2A/4\big)u_1,$$

поэтому задача Дирихле с условиями $u(0)=u_0$, $u(1)=v_1$ разрешима, если

$${}_1F_2\big(1;\mu+3/2,\nu+3/2;A/4\big)\neq0.$$

Пусть в уравнении (8) $\mu=-1/2$, $\nu=1$ и $u_0=0$. В этом частном случае удовлетворяющее условиям $u(0)=0$, $u(1)=v_1$ решение $u(t)$ уравнения (8) имеет вид

$$u(t)=\frac{\big(\sqrt{A}t\operatorname{ch}(t\sqrt{A})-\operatorname{sh}(t\sqrt{A})\big)}{t^2}u_1,\quad u_1=\frac{v_1}{\sqrt{A}\operatorname{ch}\sqrt{A}-\operatorname{sh}\sqrt{A}}.$$

Аналогично решение задачи Неймана, удовлетворяющее условиям $u'(0)=0$, $u'(1)=w_1$, имеет вид

$$u(t)=\frac{1-\operatorname{ch}(t\sqrt{A})+\sqrt{A}\ \,t\operatorname{sh}(t\sqrt{A})}{t^2}u_0,\quad u_0=\frac{w_1}{(2+A)\operatorname{ch}\sqrt{A}-2\sqrt{A}\operatorname{sh}\sqrt{A}-2}.$$

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глушак, А.В. Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу / А.В. Глушак, О.А. Покручин // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 1. — С. 41–59.
2. Глушак, А.В. Операторная функция Бесселя / А.В. Глушак // Докл. РАН. — 1997. — Т. 352, № 5. — С. 587–589.
3. Терсенов, С.А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе / С.А. Терсенов. — Новосибирск : Новосибирский гос. ун-т, 1973. — 143 с.
4. Иванов, Л.А. Задача Коши для некоторых операторов с особенностями / Л.А. Иванов // Дифференц. уравнения. — 1982. — Т. 18, № 6. — С. 1020–1028.
5. Ситник, С.М. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя / С.М. Ситник, Э.Л. Шишкина. — М. : Физматлит, 2019. — 224 с.
6. Шишкина, Э.Л. Общее уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу и гиперболические B-потенциалы / Э.Л. Шишкина // Соврем. математика. Фунд. направления. — 2019. — Т. 65, № 2. — С. 157–338.
7. Шишкина, Э.Л. Единственность решения задачи Коши для общего уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу / Э.Л. Шишкина // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 12. — С. 1688–1693.
8. Ляхов, Л.Н. Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B-гармонического уравнения / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 12. — С. 1610–1620.
9. Donaldson, J.A. A singular abstract Cauchy problems / J.A. Donaldson // Proc. Nat. Acad. Sci. — 1970. — V. 66, № 2. — P. 269–274.
10. Carroll, R.W. Singular and Degenerate Cauchy Problems / R.W. Carroll, R.E. Showalter. — New York : Academic Press, 1976. — 333 p.
11. Bragg L.R. Some abstract Cauchy problems in exceptional cases / L.R. Bragg // Proc. Amer. Math. Soc. — 1977. — V. 65, № 1. — P. 105–112.
12. Fattorini, H.O. Ordinary differential equations in linear topological space. II / H.O. Fattorini // J. Differ. Equat. — 1969. — V. 6. — P. 50–70.
13. Баскаков, А.Г. Гармонический анализ косинусной и экспоненциальной операторных функций / А.Г. Баскаков // Мат. сб. Новая серия. — 1984. — Т. 166, № 1. — С. 68–95.
14. Голдстейн, Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Дж. Голдстейн ; пер. с англ. В.В. Любашенко ; под ред. Ю.Л. Далецкого. — Киев : Выща школа, 1989. — 347 с.
15. Васильев, В.В. Полугруппы операторов, косинус-оператор функции и линейные дифференциальные уравнения / В.В. Васильев, С.Г. Крейн, С.И. Пискарев // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. — 1990. — Т. 28. — С. 87–202.
16. Глушак, А.В. Семейство операторных функций Бесселя / А.В. Глушак // Геометрия и механика. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. математика и её прил. Темат. обз. — 2020. — Т. 187. — С. 36—43.
17. Глушак, А.В. Абстрактная задача Коши для уравнения Бесселя–Струве / А.В. Глушак // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 7. — С. 891–905.
18. Мельникова, И.В. Интегрированные полугруппы и C-полугруппы. Корректность и регуляризация дифференциально-операторных задач / И.В. Мельникова, А.И. Филинков // Упехи мат. наук. — 1994. — Т. 49, № 6 (300). — С. 111–150.
19. Zheng, Q. Integrated cosine functions / Q. Zheng // Int. J. Math. and Math. Sci. — 1996. — V. 19, № 3. — P. 575–580.
20. Zhang, J. On α-times integrated cosine functions / J. Zhang, Q. Zheng // Math. Jap. — 1999. — V. 50. — P. 401–408.
21. Kostić, M. Generalized semigroups and cosine functions / M. Kostić. — Beograd : Matematički institut SANU, 2011. — 352 p.
22. Лебедев, Н.Н. Специальные функции и их приложения / Н.Н. Лебедев. — М. : Физматлит, 1963. — 359 с.
23. Глушак, А.В. О связи проинтегрированной косинус-оператор-функции с операторной функцией Бесселя / А.В. Глушак // Дифференц. уравнения. — 2006. — Т. 42, № 5. — С. 583–589.
24. Прудников, А.П. Интегралы и ряды. Т. 3. Специальные функции. Дополнительные главы / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. — 2-е изд. — М. : Физматлит, 2003. — 688 с.

25. Дженалиев, М.Т. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений / М.Т. Дженалиев, М.И. Рамазанов. — Алматы : ГЫЛЫМ, 2010. — 334 с.
26. Нахушев, А.М. Нагруженные уравнения и их применение / А.М. Нахушев. — М. : Наука, 2012. — 231 с.
27. Прудников, А.П. Интегралы и ряды. Элементарные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. — М. : Наука, 1981. — 798 с.
28. Прудников, А.П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. — М. : Наука, 1983. — 750 с.
29. Глушак, А.В. Операторные гипергеометрические функции / А.В. Глушак // Геометрия и механика. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. математика и её прил. Темат. обз. — 2020. — Т. 174. — С. 37–45.
30. Житомирский, Я.И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя / Я.И. Житомирский // Мат. сб. — 1955. — Т. 36, № 2. — С. 299–310.
31. Иванов, В.К. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи / В.К. Иванов, И.В. Мельникова, А.И. Филинков. — М. : Физматлит, 1995. — 176 с.
32. Кабанихин, С.И. Численный метод решения задачи Дирихле для волнового уравнения / С.И. Кабанихин, О.И. Криворотько // Сиб. журн. индустр. математики. — 2012. — Т. 15, № 4. — С. 90–101.
33. Васильев, В.И. Решение задачи Дирихле для уравнения колебаний струны методом сопряжённых градиентов / В.И. Васильев, А.М. Кардашевский, В.В. Попов // Вестн. СВФУ. — 2015. — Т. 12, № 2. — С. 43–50.
34. Глушак А.В. О разрешимости граничных задач для абстрактного уравнения Бесселя–Струве / А.В. Глушак // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 8. — С. 1103–1110.
35. Небольсина, М.Н. Ортогональные многочлены Чебышева и краевая задача Неймана / М.Н. Небольсина // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46, № 3. — С. 449–450.

ON SOLVABILITY OF INITIAL AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ABSTRACT FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EULER–POISSON–DARBOUX EQUATIONS

A. V. Glushak

Belgorod National Research University, Russia
e-mail: aleglu@mail.ru

In the Banach space for functional-differential equation, generalizing the Euler–Poisson–Darboux equation, the Cauchy problem and boundary value problems of Dirichlet and Neumann are consider. A sufficient condition for solvability is proved Cauchy problem and an explicit form of the resolving operator is indicated, which is written using the ones introduced by the author Bessel and Struve operator functions. For boundary value problems in the hyperbolic case, sufficient conditions for their unique solvability imposed on the operator coefficient of the equation and boundary elements.

Keywords: functional-differential equation, Cauchy problem, Dirichlet problem, Neumann problem, unique solvability, Bessel operator function, Struve operator function.

REFERENCES

1. Glushak, A.V. and Pokruchin, O.A., Criterion for the solvability of the Cauchy problem for an abstract Euler-Poisson–Darboux equation, *Differ. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 1, pp. 39–57.
2. Glushak, A.V., The Bessel operator function, *Dokl. RAN*, 1997, vol. 352, no. 5, pp. 587–589.
3. Tersenov, S.A., *Vvedenie v teoriyu uravnenii, vyrozhdayushchikhsya na granitse* (Introduction to the Theory of Equations Degenerating on the Boundary), Novosibirsk: Novosibirsk. Gos. Univ., 1973.
4. Ivanov, L.A., A Cauchy problem for some operators with singularities, *Differ. Equat.*, 1982, vol. 18, no. 6, pp. 724–731.

5. Sitnik, S.M. and Shishkina, E.L., *Metod operatorov preobrazovaniya dlya differentsial'nykh uravnenii s operatorami Besselya* (Transformation Operator Method for Differential Equations with Bessel Operators), Moscow: Fizmatlit, 2019.
6. Shishkina, E.L., The general Euler–Poisson–Darboux equation and hyperbolic B-potentials, *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2019, vol. 65, no. 2, pp. 157–338.
7. Shishkina, E.L., Uniqueness of the solution of the Cauchy problem for the general Euler–Poisson–Darboux equation, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 12, pp. 1673–1679.
8. Lyakhov, L.N. and Sanina, E.L., Kipriyanov–Beltrami operator with negative dimension of the Bessel operators and the singular Dirichlet problem for the B-harmonic equation, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 12, pp. 1564–1574.
9. Donaldson, J.A., A singular abstract Cauchy problems, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1970, vol. 66, no. 2, pp. 269–274.
10. Carroll, R.W. and Showalter, R.E., *Singular and Degenerate Cauchy Problems*, New York: Academic Press, 1976.
11. Bragg, L.R., Some abstract Cauchy problems in exceptional cases, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1977, vol. 65, no. 1, pp. 105–112.
12. Fattorini, H.O., Ordinary differential equations in linear topological space. II, *J. Differ. Equat.*, 1969, vol. 6, pp. 50–70.
13. Baskakov, A.G., Harmonic analysis of cosine and exponential operator-valued functions, *Math. USSR Sbornik*, 1985, vol. 52, no. 1, pp. 63–90.
14. Goldstein, J.A., Semigroups of Linear Operators and Applications, New York: Oxford Univ. Press, 1985.
15. Vasil'ev, V.V., Krein, S.G., and Piskarev, S.I., Semigroups of operators, cosine operator functions, and linear differential equations, *J. Sov. Math.*, 1991, vol. 54, no. 4, pp. 1042–1129.
16. Glushak, A.V., Family of Bessel operator functions, *Geom. Mekh. Itogi Nauki Tekh. Ser.: Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.*, Moscow: VINITI RAN, 2020, vol. 187, pp. 36–43.
17. Glushak, A.V., Abstract Cauchy problem for the Bessel–Struve equation, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 7, pp. 864–878.
18. Mel'nikova, I.V. and Filinkov, A.I., Integrated semigroups and C-semigroups. Well-posedness and regularization of differential-operator problems, *Russ. Math. Surveys*, 1994, vol. 49, no. 6 (300), pp. 115–155.
19. Zheng, Q., Integrated cosine functions, *Int. J. Math. and Math. Sci.*, 1996, vol. 19, no. 3, pp. 575–580.
20. Zhang, J. and Zheng, Q., On α-times integrated cosine functions, *Math. Jap.*, 1999, vol. 50, pp. 401–408.
21. Kostić, M., *Generalized semigroups and cosine functions*, Beograd: Matematički institut SANU, 2011.
22. Lebedev, N.N., *Spetsial'nye funktsii i ikh prilozheniya* (Special Functions and Their Applications), Moscow: Fizmatlit, 1963.
23. Glushak, A.V., On the relationship between the integrated cosine function and the operator Bessel function, *Differ. Equat.*, 2006, vol. 42, no. 5, pp. 619–626.
24. Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A., and Marichev, O.I., *Integraly i ryady. T. 3. Special'nye funkcii. Dopolnitel'nyye glavy* (Integrals and Series. V. 3. Special functions. Additional chapters), Moscow: Fizmatlit, 2003.
25. Dzhenaliev, M.T. and Ramazanov, M.I., *Nagruzhennye uravneniya kak vozmushcheniya differentsial'nykh uravnenii* (Loaded Equations as Perturbations of Differential Equations), Almaty: Gylym, 2010.
26. Nakhushev, A.M., *Nagruzhennye uravneniya i ikh primenenie* (Loaded Equations and Their Applications), Moscow: Nauka, 2012.
27. Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A., and Marichev, O.I., *Integraly i ryady. Elementarnye funktsii* (Integrals and Series. Elementary Functions), Moscow: Nauka, 1981.
28. Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A., and Marichev, O.I., *Integraly i ryady. Spetsial'nye funktsii* (Integrals and Series. Special Functions), Moscow: Nauka, 1983.
29. Glushak, A.V., Operator hypergeometric functions, *J. Math. Sci.*, 2023, vol. 272, no. 5, pp. 658–666.
30. Zitomirskii, Ya.I., Cauchy problem for systems of linear partial differential equations with Bessel-type differential operators, *Mat. Sb.*, 1955, vol. 36, no. 2, pp. 299–310.
31. Ivanov, V.K., Mel'nikova, I.V., and Filinkov, A.I., *Differentsial'no-operatornye uravneniya i nekorrektnye zadachi* (Operator-Differential Equations and Ill-Posed Problems), Moscow: Fizmatlit, 1995.
32. Kabanikhin, S.I. and Krivorot'ko, O.I., A numerical method for solving the Dirichlet problem for the wave equation, *J. Appl. Ind. Math.*, 2012, vol. 15, no. 4, pp. 187–198.
33. Vasil'ev, V.I., Kardashevskii, A.M., and Popov, V.V., Solving the Dirichlet problem for vibrating string equation by the conjugate gradient method, *Vestn. Sev.-Vost. Fed. Univ.*, 2015, vol. 12, no. 2, pp. 43–50.
34. Glushak, A.V., On the solvability of boundary value problems for an abstract Bessel–Struve equation, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 8, pp. 1069–1076.
35. Nebol'sina, M.N., Chebyshev orthogonal polynomials and the Neumann problem, *Differ. Equat.*, 2010, vol. 46, no. 3, pp. 455–457.