ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 9, с. 1216–1224

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.78

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ТЕЛЕ, ПОКРЫТОМ ГРАФЕНОМ

© 2024 г. Ю. Г. Смирнов[1], О. В. Кондырев[2]

Пензенский государственный университет

e-mail: [1]smirnovyug@mail.ru, [2]kow20002204@mail.ru

Поступила в редакцию 21.03.2024 г., после доработки 21.03.2024 г.; принята к публикации 04.06.2024 г.

Рассмотрена задача о резонансных частотах диэлектрических тел, покрытых графеном, без учёта его нелинейности. Краевая задача сведена к системе интегро-дифференциальных уравнений по поверхности графена. Доказано свойство фредгольмовости этой системы при выполнении достаточных условий. Установлена дискретность спектра оператор-функции, отвечающей системе интегро-дифференциальных уравнений, в области комплексной плоскости спектрального параметра (круговой частоты).

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, единственность, существование, фредгольмовость, уравнения Максвелла

DOI: 10.31857/S0374064124090053, EDN: JXKTJB

ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи сопряжения для системы уравнений Максвелла имеют ряд важных приложений в электродинамике, в частности, при изучении процесса дифракции электромагнитных волн на диэлектрических телах (задачи дифракции), при исследовании собственных электромагнитных колебаний систем, состоящих из диэлектрических тел (задачи о резонансных частотах) и др. Основные типы этих задач исследованы достаточно подробно (см., например, работы [1–6]). Однако в последнее время появился интерес к краевым задачам со специальными условиями сопряжения, в которых предполагается наличие бесконечно тонкого слоя материала на поверхности раздела сред. В качестве примера такого материала можно рассмотреть графен, покрывающий диэлектрик [7–9], поскольку его слой имеет толщину в один атом, т.е. его можно считать бесконечно тонким. Но наличие графена на поверхности раздела сред изменяет условия сопряжения. В общем случае графен проявляет нелинейность в инфракрасном и терагерцевом диапазонах частот [10], во многих важных для приложений случаях ею можно пренебречь [11]. В настоящей статье будут рассмотрены линейные условия сопряжения.

Одним из наиболее известных методов решения задач сопряжения является метод сведения задачи к системе интегральных уравнений, что позволяет исследовать её свойства и разрешимость. Такой подход ориентирован на применение численных методов для поиска решения. Нередко переход к интегральным уравнениям приводит к понижению размерности решаемой задачи, что очень важно при реализации вычислительного алгоритма с точки зрения быстродействия и памяти компьютера. Кроме того, вычислительные алгоритмы, построенные для решения интегральных уравнений, легко распараллеливаются, что позволяет использовать для их решения суперкомпьютеры. В работе [12] такой подход численно реализован для краевой задачи в скалярном случае с нелинейными условиями сопряжения.

В настоящей статье изучена система интегральных уравнений для задачи на собственные значения относительно спектрального параметра (круговой частоты). Заметим, что задача дифракции электромагнитной волны на диэлектрическом теле, покрытом графеном, приводит к той же системе интегральных уравнений, но уже не однородной, а с некоторой ненулевой правой частью.

В открытых объёмных магнитодиэлектрических резонаторах могут существовать только комплексные резонансные частоты из-за излучения в свободное пространство [2, с. 384; 13, с. 34]. Это означает, что вещественные положительные характеристические числа у оператор-функции, отвечающей краевой задаче, отсутствуют, все комплексные резонансные частоты имеют отрицательную мнимую часть. Физическая интерпретация комплексных резонансных частот подробно изложена в книге [2, с. 385].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим ограниченную область $\Omega_1 \in \mathbb{R}^3$ с границей Γ класса гладкости C^2 и диэлектрической ε_1 и магнитной μ_1 проницаемостью в области Ω_1 и ε_2, μ_2 — в $\Omega_2 := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_1$, причём $\varepsilon_i > 0$ и $\mu_i > 0$, $i = 1, 2$. Электромагнитное поле $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ в области Ω_1 представим как $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$, а в области Ω_2 — как $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$. Для определения указанных компонент необходимо решить систему уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_1 = -i\omega\varepsilon_1 \mathbf{E}_1, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 = i\omega\mu_1 \mathbf{H}_1 \quad \text{в} \quad \Omega_1, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_2 = -i\omega\varepsilon_2 \mathbf{E}_2, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_2 = i\omega\mu_2 \mathbf{H}_2 \quad \text{в} \quad \Omega_2, \tag{2}$$

где ω — круговая частота.

На границе Γ должны выполняться условия сопряжения

$$[\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H}]_\Gamma = \sigma \mathbf{E}_\tau, \quad [\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}]_\Gamma = 0, \tag{3}$$

где $[\ ]_\Gamma$ — разность следов функции с разных сторон Γ; $\boldsymbol{\nu}$ — вектор нормали к границе Γ, направленный в область Ω_2;

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_3 |E_\tau|^2 \tag{4}$$

— нелинейная проводимость графена [10, 11], выраженная законом Керра; индекс τ — касательные компоненты. Будем считать, что $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_3 = 0$, т.е. рассматривать только линейный случай.

На бесконечности должны выполняться условия

$$(\mathbf{e}_r \times \mathbf{E}_2) + \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} (\mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r \times \mathbf{H}_2)) = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при} \quad r \to \infty, \tag{5}$$

где $\mathbf{e}_r$ — вектор нормали к единичной сфере, $r := |x|$ и $x = (x_1, x_2, x_3)$.

2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ

Теорема 1. *Если* $\operatorname{Re}\sigma \geqslant 0$ *и* $\omega > 0$, *то задача (1)–(5) имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. Вместе с полями $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ и $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$ будем рассматривать комплексно-сопряжённые поля $\{\overline{\mathbf{E}}_1, \overline{\mathbf{H}}_1\}$ и $\{\overline{\mathbf{E}}_2, \overline{\mathbf{H}}_2\}$. Они удовлетворяют следующей краевой задаче:

$$\operatorname{rot} \overline{\mathbf{H}}_1 = +i\omega\varepsilon_1 \overline{\mathbf{E}}_1, \quad \operatorname{rot} \overline{\mathbf{E}}_1 = -i\omega\mu_1 \overline{\mathbf{H}}_1 \quad \text{в} \quad \Omega_1,$$

$$\operatorname{rot} \overline{\mathbf{H}}_2 = +i\omega\varepsilon_2 \overline{\mathbf{E}}_2, \quad \operatorname{rot} \overline{\mathbf{E}}_2 = -i\omega\mu_2 \overline{\mathbf{H}}_2 \quad \text{в} \quad \Omega_2,$$

$$(\boldsymbol{\nu}\times\overline{\mathbf{H}}_2)\big|_\Gamma-(\boldsymbol{\nu}\times\overline{\mathbf{H}}_1)\big|_\Gamma=\overline{\sigma}\overline{\mathbf{E}}_\tau,\quad (\boldsymbol{\nu}\times\overline{\mathbf{E}}_2)\big|_\Gamma-(\boldsymbol{\nu}\times\overline{\mathbf{E}}_1)\big|_\Gamma=0,$$

$$(\mathbf{e}_r\times\overline{\mathbf{E}}_2)+\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}(\mathbf{e}_r\times(\mathbf{e}_r\times\overline{\mathbf{H}}_2))=o\left(\frac{1}{r}\right)\quad \text{при}\quad r\to\infty.$$

Применив лемму Лоренца к полям $\{\mathbf{E}_1,\mathbf{H}_1\}$ и $\{\overline{\mathbf{E}}_1,\overline{\mathbf{H}}_1\}$ в области Ω_1, получим

$$\int\limits_\Gamma\big[\mathbf{E}_1\cdot(\overline{\mathbf{H}}_1\times\boldsymbol{\nu}_1)+\overline{\mathbf{E}}_1\cdot(\mathbf{H}_1\times\boldsymbol{\nu}_1)\big]\,ds=0, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{\nu}_1$ — единичная нормаль к поверхности Γ, направленная во внешность тела.

Пусть Σ_R — сфера такого радиуса R, что содержит в себе область Ω_1. Тогда, применяя лемму Лоренца к полям $\{\mathbf{E}_2,\mathbf{H}_2\}$ и $\{\overline{\mathbf{E}}_2,\overline{\mathbf{H}}_2\}$ в области между поверхностью Γ и сферой Σ_R, будем иметь

$$\int\limits_\Gamma\big[\mathbf{E}_2\cdot(\overline{\mathbf{H}}_2\times\boldsymbol{\nu}_2)+\overline{\mathbf{E}}_2\cdot(\mathbf{H}_2\times\boldsymbol{\nu}_2)\big]\,ds+\int\limits_{\Sigma_R}\big[\mathbf{E}_2\cdot(\overline{\mathbf{H}}_2\times\mathbf{e}_r)+\overline{\mathbf{E}}_2\cdot(\mathbf{H}_2\times\mathbf{e}_r)\big]\,ds=0, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{\nu}_1=-\boldsymbol{\nu}_2\equiv\boldsymbol{\nu}$.

Складывая (6) и (7) с учётом условий сопряжения на Γ, получаем

$$\operatorname{Re}\sigma\int\limits_\Gamma|\mathbf{E}_\tau|^2\,ds+\int\limits_{\Sigma_R}\big[\mathbf{E}_2\cdot(\overline{\mathbf{H}}_2\times\mathbf{e}_r)+\overline{\mathbf{E}}_2\cdot(\mathbf{H}_2\times\mathbf{e}_r)\big]\,ds=0. \tag{8}$$

Перейдём к пределу при $R\to\infty$ в соотношении (8) и применим условия на бесконечности:

$$\operatorname{Re}\sigma\int\limits_\Gamma|\mathbf{E}_\tau|^2\,ds+\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\Sigma_R}\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}|\mathbf{e}_r\times\mathbf{H}_2|^2\,ds=0. \tag{9}$$

Оба слагаемых в (9) неотрицательны, поэтому [14, с. 69, 75] $\mathbf{E}_2\equiv0$ и $\mathbf{H}_2\equiv0$ всюду в $\overline{\Omega}_2$. Из условий сопряжения находим, что

$$(\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{E}_1)\big|_\Gamma=0,\quad \mathbf{E}_\tau=0,\quad (\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{H}_1)\big|_\Gamma=0,$$

следовательно, в силу аналитичности полей $\mathbf{E}_1\equiv0$, $\mathbf{H}_1\equiv0$ всюду в Ω_1. Таким образом, задача (1)–(5) имеет только тривиальное решение.

3. СИСТЕМА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Выразим компоненты $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ поля через комбинацию поверхностных электрических и магнитных диполей с помощью формул Стрэттона–Чу в области Ω_1 [4, с. 124]:

$$\mathbf{E}_1=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{1}{i\omega\varepsilon_1}\int\limits_\Gamma\Phi_1(x,y)(\boldsymbol{\nu}(y)\times\mathbf{H}_1(y))\,ds(y)-\operatorname{rot}\int\limits_\Gamma\Phi_1(x,y)(\boldsymbol{\nu}(y)\times\mathbf{E}_1(y))\,ds(y),$$

$$\mathbf{H}_1=-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{1}{i\omega\mu_1}\int\limits_\Gamma\Phi_1(x,y)(\boldsymbol{\nu}(y)\times\mathbf{E}_1(y))\,ds(y)-\operatorname{rot}\int\limits_\Gamma\Phi_1(x,y)(\boldsymbol{\nu}(y)\times\mathbf{H}_1(y))\,ds(y), \tag{10}$$

где $x\in\Omega_1$; и в области Ω_2 [4, с. 128]:

$$\mathbf{E}_2=-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{1}{i\omega\varepsilon_2}\int\limits_\Gamma\Phi_2(x,y)(\boldsymbol{\nu}(y)\times\mathbf{H}_2(y))\,ds(y)+\operatorname{rot}\int\limits_\Gamma\Phi_2(x,y)(\boldsymbol{\nu}(y)\times\mathbf{E}_2(y))\,ds(y),$$

$$\mathbf{H}_2=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{1}{i\omega\mu_2}\int\limits_\Gamma\Phi_2(x,y)(\boldsymbol{\nu}(y)\times\mathbf{E}_2(y))\,ds(y)+\operatorname{rot}\int\limits_\Gamma\Phi_2(x,y)(\boldsymbol{\nu}(y)\times\mathbf{H}_2(y))\,ds(y), \tag{11}$$

где $x\in\Omega_2$. В (10) и (11)

$$\Phi_1(x,y)=\frac{e^{ik_1|x-y|}}{4\pi|x-y|},\quad k_1^2=\omega^2\varepsilon_1\mu_1;\quad \Phi_2(x,y)=\frac{e^{ik_2|x-y|}}{4\pi|x-y|},\quad k_2^2=\omega^2\varepsilon_2\mu_2.$$

Выполнив замену

$$\mathbf{j}_1=\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{H}_1,\quad \mathbf{m}_1=\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{E}_1;\quad \mathbf{j}_2=\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{H}_2,\quad \mathbf{m}_2=\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{E}_2, \tag{12}$$

перепишем условия (3) в виде

$$\mathbf{j}_2-\mathbf{j}_1=\sigma\mathbf{E}_\tau,\quad \mathbf{m}_2-\mathbf{m}_1=0. \tag{13}$$

Выразим из условий (13) неизвестные $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{j}_2$, $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$ через $\mathbf{j}$ и $\mathbf{m}$ следующим образом:

$$\mathbf{m}_1=\mathbf{m}_2=\mathbf{m},\quad \mathbf{j}_1=\mathbf{j},\quad \mathbf{j}_2=\mathbf{j}_1+\sigma(\mathbf{m}\times\boldsymbol{\nu})=\mathbf{j}+\sigma(\mathbf{m}\times\boldsymbol{\nu}). \tag{14}$$

Перепишем (10) и (11) с учётом (12) и (14):

$$\mathbf{E}_1=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{1}{i\omega\varepsilon_1}\int\limits_\Gamma\Phi_1(x,y)\mathbf{j}(y)\,ds(y)-\operatorname{rot}\int\limits_\Gamma\Phi_1(x,y)\mathbf{m}(y)\,ds(y),$$

$$\mathbf{H}_1=-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{1}{i\omega\mu_1}\int\limits_\Gamma\Phi_1(x,y)\mathbf{m}(y)\,ds(y)-\operatorname{rot}\int\limits_\Gamma\Phi_1(x,y)\mathbf{j}(y)\,ds(y); \tag{15}$$

$$\mathbf{E}_2=-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{1}{i\omega\varepsilon_2}\int\limits_\Gamma\Phi_2(x,y)\big[\mathbf{j}(y)+\sigma(\mathbf{m}(y)\times\boldsymbol{\nu}(y))\big]\,ds(y)+\operatorname{rot}\int\limits_\Gamma\Phi_2(x,y)\mathbf{m}(y)\,ds(y),$$

$$\mathbf{H}_2=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{1}{i\omega\mu_2}\int\limits_\Gamma\Phi_2(x,y)\mathbf{m}(y)\,ds(y)+\operatorname{rot}\int\limits_\Gamma\Phi_2(x,y)\big[\mathbf{j}(y)+\sigma(\mathbf{m}(y)\times\boldsymbol{\nu}(y))\big]\,ds(y). \tag{16}$$

Подставим выражения (15) и (16) в условия (3) и внесём ротор под интеграл по следующей формуле [5, с. 200]:

$$\mathbf{S}(x)=\int\limits_\Gamma\Phi(x,y)\mathbf{a}(y)\,ds(y),$$

$$\boldsymbol{\nu}(x)\times\operatorname{rot}\mathbf{S}_\pm(x)=\int\limits_\Gamma\boldsymbol{\nu}(x)\times\operatorname{rot}_x(\Phi(x,y)\mathbf{a}(y))\,ds(y)\pm\frac{1}{2}\mathbf{a}(x),$$

$$\lim_{h\to+0}\boldsymbol{\nu}(x)\big[\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{S}(x+h\boldsymbol{\nu}(x))-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{S}(x-h\boldsymbol{\nu}(x))\big]=0.$$

В результате получим

$$-\int\limits_\Gamma\boldsymbol{\nu}(x)\times\operatorname{rot}_x\operatorname{rot}_x\left(\frac{\Phi_2(x,y)}{i\omega\varepsilon_2}+\frac{\Phi_1(x,y)}{i\omega\varepsilon_1}\right)\mathbf{j}(y)\,ds(y)-$$

$$-\int\limits_\Gamma\boldsymbol{\nu}(x)\times\operatorname{rot}_x\operatorname{rot}_x\frac{\Phi_2(x,y)}{i\omega\varepsilon_2}\sigma\left(\mathbf{m}(y)\times\boldsymbol{\nu}(y)\right)\,ds(y)+$$

$$+\int\limits_\Gamma\boldsymbol{\nu}(x)\times\operatorname{rot}_x(\Phi_2(x,y)+\Phi_1(x,y))\mathbf{m}(y)\,ds(y)=0,$$

$$\int\limits_{\Gamma} \boldsymbol{\nu}(x) \times \operatorname{rot}_x \operatorname{rot}_x \left(\frac{\Phi_2(x,y)}{i\omega\mu_2} + \frac{\Phi_1(x,y)}{i\omega\mu_1} \right) \mathbf{m}(y)\, ds(y) +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma} \boldsymbol{\nu}(x) \times \operatorname{rot}_x (\Phi_2(x,y) + \Phi_1(x,y)) \mathbf{j}(y)\, ds(y) +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma} \boldsymbol{\nu}(x) \times \operatorname{rot}_x \Phi_2(x,y) \sigma\left(\mathbf{m}(y) \times \boldsymbol{\nu}(y)\right)\, ds(y) = \frac{1}{2}\sigma\left(\mathbf{m}(x) \times \boldsymbol{\nu}(x)\right). \tag{17}$$

Введём операторы, действующие на касательное векторное поле:

$$\mathrm{M}_i\,\mathbf{a} = 2 \int\limits_{\Gamma} \boldsymbol{\nu}(x) \times \operatorname{rot}_x \big(\Phi_i(x,y)\mathbf{a}(y)\big)\, ds(y), \quad i = 1, 2;$$

$$\mathrm{T}_i\,\mathbf{a} = 2 \int\limits_{\Gamma} \boldsymbol{\nu}(x) \times \operatorname{rot}_x \operatorname{rot}_x \big(\Phi_i(x,y)\mathbf{a}(y)\big)\, ds(y), \quad i = 1, 2;$$

$$\mathrm{R}\,\mathbf{a} = \mathbf{a} \times \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\nu} \times \mathrm{R}\,\mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

Будем рассматривать эти операторы в пространстве [5, с. 204]

$$C^{0,\alpha}(\mathrm{Div}, \Gamma) := \big\{ \mathbf{a} \in C^{0,\alpha}_t(\Gamma) \colon \ \mathrm{Div}\,\mathbf{a} \in C^{0,\alpha}(\Gamma) \big\}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

с нормой

$$\|\mathbf{a}\|_{C^{0,\alpha}(\mathrm{Div},\Gamma)} := \|\mathbf{a}\|_{\alpha,\Gamma} + \|\,\mathrm{Div}\,\mathbf{a}\|_{\alpha,\Gamma}.$$

Лемма 1 [5, с. 206]. *Операторы* $\mathrm{M}_i \colon C^{0,\alpha}(\mathrm{Div},\Gamma) \to C^{0,\alpha}(\mathrm{Div},\Gamma)$, $i = 1, 2$, *являются компактными.*

Лемма 2 [5, с. 206]. *Операторы* $\mathrm{T}_i \colon C^{0,\alpha}(\mathrm{Div},\Gamma) \to C^{0,\alpha}(\mathrm{Div},\Gamma)$, $i = 1, 2$, *являются ограниченными.*

Лемма 3 [5, с. 207]. *Имеет место равенство*

$$\mathrm{T}_i^2 = k_i^2(\mathrm{I} - \mathrm{M}_i^2), \quad k_i \neq 0, \quad i = 1, 2. \tag{18}$$

Лемма 4. *Операторы* T_i, $i = 1, 2$, *при* $k_i \neq 0$ *являются фредгольмовыми с нулевым индексом.*

Доказательство. Из (18) следует, что оператор T_i имеет левый и правый регуляризаторы [15, с. 6] (совпадающие с самим T_i), поэтому T_i почти обратим [16, с. 87] и, следовательно, фредгольмов [16, с. 89].

Вычислим индекс оператора. В силу леммы 3 имеем, с одной стороны,

$$\operatorname{ind} \mathrm{T}_i^2 = \operatorname{ind}(k_i^2(\mathrm{I} - \mathrm{M}_i^2)) = \operatorname{ind}(k_i^2\,\mathrm{I}) = 0,$$

а с другой —

$$\operatorname{ind} \mathrm{T}_i^2 = \operatorname{ind} \mathrm{T}_i + \operatorname{ind} \mathrm{T}_i = 2 \operatorname{ind} \mathrm{T}_i,$$

поэтому $\operatorname{ind} \mathrm{T}_i = 0$. Лемма доказана.

Пусть $\mathrm{T}(k)$ — оператор T_i с $k_i = k$. Пусть Λ — множество значений $k \in \mathbb{C}$, которые являются собственными значениями внутренней задачи Максвелла [4, с. 135]. Заметим, что Λ — дискретное не более чем счётное множество в $\mathbb{C}$.

Лемма 5. *Если* $k \notin \Lambda$, *то оператор* $\mathrm{T}(k) \colon C^{0,\alpha}(\mathrm{Div},\Gamma) \to C^{0,\alpha}(\mathrm{Div},\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$, *непрерывно обратим.*

Доказательство следует из леммы 4 и результата [4, с. 152] о единственности решения уравнения при $k \notin \Lambda$.

Лемма 6. *Оператор-функция* $\mathrm{T}(k)\colon C^{0,\alpha}(\mathrm{Div},\Gamma) \to C^{0,\alpha}(\mathrm{Div},\Gamma)$, $0<\alpha<1$, *голоморфна в* $\mathbb{C}$ *и фредгольмова с нулевым индексом.*

Доказательство. Голоморфность $\mathrm{T}(k)$ следует из аналитичности функции $\Phi(x,y) = e^{ik|x-y|}/(4\pi|x-y|)$ по $k\in\mathbb{C}$. Фредгольмовость следует из леммы 4.

Домножим систему уравнений (17) на $i\omega$ и представим её в операторном виде:

$$-(\varepsilon_1^{-1}\,\mathrm{T}_1 + \varepsilon_2^{-1}\,\mathrm{T}_2)\mathbf{j} - \varepsilon_2^{-1}\sigma\,\mathrm{T}_2(\mathrm{R}\,\mathbf{m}) + i\omega(\mathrm{M}_1+\mathrm{M}_2)\mathbf{m} = 0,$$

$$(\mu_1^{-1}\,\mathrm{T}_1 + \mu_2^{-1}\,\mathrm{T}_2)\mathbf{m} + i\omega(\mathrm{M}_1+\mathrm{M}_2)\mathbf{j} + i\omega\,\mathrm{M}_2(\sigma\,\mathrm{R}\,\mathbf{m}) - i\omega\sigma\,\mathrm{R}\,\mathbf{m} = 0. \tag{19}$$

Запишем (19) как систему

$$(-\varepsilon_1^{-1}\,\mathrm{T}_1 - \varepsilon_2^{-1}\,\mathrm{T}_2)\mathbf{j} - \varepsilon_2^{-1}\sigma\,\mathrm{T}_2(\mathrm{R}\,\mathbf{m}) + \mathrm{K}_1\,\mathbf{m} = 0,$$

$$(\mu_1^{-1}\,\mathrm{T}_1 + \mu_2^{-1}\,\mathrm{T}_2)\mathbf{m} - i\sigma\omega\,\mathrm{R}\,\mathbf{m} + \mathrm{K}_2\,\mathbf{m} + \mathrm{K}_3\,\mathbf{j} = 0 \tag{20}$$

с компактными операторами K_1, K_2, K_3. Далее,

$$-(\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1})\,\mathrm{T}_2\,\mathbf{j} - \varepsilon_1^{-1}(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2)\mathbf{j} - \sigma\varepsilon_2^{-1}\,\mathrm{T}_2(\mathrm{R}\,\mathbf{m}) + \mathrm{K}_1\,\mathbf{m} = 0,$$

$$(\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1})\,\mathrm{T}_2\,\mathbf{m} + \mu_1^{-1}(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2)\mathbf{m} - i\sigma\omega\,\mathrm{R}\,\mathbf{m} + \mathrm{K}_2\,\mathbf{m} + \mathrm{K}_3\,\mathbf{j} = 0.$$

Подействовав оператором T_2 на оба уравнения, получим систему

$$-(\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1})k_2^2\mathbf{j} - \varepsilon_1^{-1}\,\mathrm{T}_2(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2)\mathbf{j} - \varepsilon_2^{-1}\sigma\,\mathrm{T}_2^2(\mathrm{R}\,\mathbf{m}) + \widetilde{\mathrm{K}}_{11}\mathbf{j} + \widetilde{\mathrm{K}}_{12}\mathbf{m} = 0,$$

$$(\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1})k_2^2\mathbf{m} + \mu_1^{-1}\,\mathrm{T}_2(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2)\mathbf{m} - i\sigma\omega\,\mathrm{T}_2(\mathrm{R}\,\mathbf{m}) + \widetilde{\mathrm{K}}_{21}\mathbf{j} + \widetilde{\mathrm{K}}_{22}\mathbf{m} = 0 \tag{21}$$

с компактными операторами $\widetilde{\mathrm{K}}_{ij}$, $i,j=1,2$.

Теорема 2. *Если выполняются условия*

$$\|\,\mathrm{T}_2\,\|\,|\sigma\omega| + \mu_1^{-1}\|\,\mathrm{T}_2\,\|\,\|\,\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2\,\| < (\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1})|k_2|^2, \tag{22}$$

$$\varepsilon_1^{-1}\|\,\mathrm{T}_2\,\|\,\|\,\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2\,\| < (\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1})|k_2|^2, \tag{23}$$

то оператор системы (21) фредгольмов с нулевым индексом.

Доказательство. При выполнении условий теоремы 1 операторы

$$-(\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1})k_2^2\,\mathrm{I} - \varepsilon_1^{-1}\,\mathrm{T}_2(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2),$$

$$(\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1})k_2^2\,\mathrm{I} + \mu_1^{-1}\,\mathrm{T}_2(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2) - i\sigma\omega\,\mathrm{T}_2\,\mathrm{R}$$

обратимы, откуда, учитывая компактность операторов $\widetilde{\mathrm{K}}_{ij}$, $i,j=1,2$, и следует фредгольмовость оператора системы (21) с нулевым индексом.

Замечание. В силу леммы 5 если $k_2 \notin \Lambda$, то системы (20) и (21) эквивалентны.

Согласно [11] $\sigma(\omega)$ является аналитической функцией в области $\mathbb{C}\setminus\{\omega\colon \operatorname{Im}\omega = \eta\}$ для некоторого $\eta>0$, причём $|\omega\sigma(\omega)| \leqslant C_0$ при $|\omega|\to\infty$, $|\operatorname{Im}\omega - \eta| > \delta_0$ для некоторого $C_0>0$ и любого $\delta_0>0$.

Обозначим через $D\subset\mathbb{C}$ область значений ω, для которых выполняются неравенства (22) и (23). Такие значения ω есть по крайней мере тогда, когда $|\varepsilon_1\mu_1 - \varepsilon_2\mu_2|$ мало́ и $|\sigma|$ также достаточно мало́.

Обозначим через $\mathrm{A}(\omega)$ оператор-функцию, определяемую системой (19): $\mathrm{A}(\omega)\colon B\to B$, $B:=C^{0,\alpha}(\mathrm{Div},\Gamma)\times C^{0,\alpha}(\mathrm{Div},\Gamma)$, $\mathbf{u}=(j,m)^T$, $\mathrm{A}(\omega)\mathbf{u}=0$. Так как операторы T_i и M_i зависят от ω аналитически (голоморфные оператор-функции), то $\mathrm{A}(\omega)$ голоморфна в области D. Тогда из теоремы 2 следует [17]

Теорема 3. *В области* $D\setminus\{\omega\colon k_2\in\Lambda\}$ *оператор-функция* $\mathrm{A}(\omega)\colon B\to B$ *является фредгольмовой и имеет в* D *дискретный спектр, т.е. спектр* $\mathrm{A}(\omega)$ *состоит из не более чем счётного множества изолированных характеристических чисел конечной алгебраической кратности.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задачи о рассеянии электромагнитных волн на диэлектрических телах, покрытых графеном, приводят к новому типу краевых задач электродинамики с видоизменёнными условиями сопряжения. В общем случае условия сопряжения становятся нелинейными [9]. Однако и случай линейных условий сопряжения пока не исследован достаточно подробно.

В статье получена новая система интегро-дифференциальных уравнений в задаче о распространении электромагнитных волн на диэлектрическом рассеивателе произвольной формы, покрытом графеном. Доказанная фредгольмовость системы (при некоторых ограничениях на параметры задачи) в специальных пространствах Гёльдера позволяет получать результаты о разрешимости как в задаче о резонансных частотах, так и в задаче дифракции электромагнитной волны на рассеивателе. Кроме того, система интегро-дифференциальных уравнений удобна для численного решения соответствующих задач.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20087).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская, О.А. Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. — М. : Наука, 1973. — 407 с.
2. Санчес-Паленсия, Э. Неоднородные среды и теория колебаний / Э. Санчес-Паленсия ; пер. с англ. В.В. Житкова ; под ред. О.А. Олейник. — М. : Мир, 1984. — 472 с.
3. Nédélec, J.-C. Acoustic and Electromagnetic Equations. Integral Representations for Harmonic Problems / J.-C. Nédélec. — New York; Berlin; Heidelberg : Springer, 2001. — 316 p.
4. Колтон, Д. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / Д. Колтон, Р. Кресс ; пер. с англ. Ю.А. Еремина, Е.В. Захарова ; под ред. А.Г. Свешникова. — М. : Мир, 1987. — 311 с.
5. Colton, D. Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory / D. Colton, R. Kress. — 3rd ed. — New York : Springer, 2013. — 420 p.
6. Смирнов, Ю.Г. Численное и аналитическое исследование задачи об электромагнитных колебаниях открытых неоднородных резонаторов / Ю.Г. Смирнов, Ю.А. Петрова // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 9. — С. 1266–1273.
7. Смирнов, Ю.Г. О распространении электромагнитных волн в диэлектрическом слое, покрытом графеном / Ю.Г. Смирнов, С.В. Тихов, Е.В. Гусарова // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. — 2022. — № 3. — С. 11–18.
8. Лерер, А.М. Численная оценка погрешности метода возмущения при решении задачи об отражении электромагнитной волны от нелинейного графенового слоя / А.М. Лерер // Радиотехника и электроника. — 2022. — Т. 67, № 9. — С. 855–858.

9. Smirnov, Y.G. The nonlinear eigenvalue problem of electromagnetic wave propagation in a dielectric layer covered with graphene / Y.G. Smirnov, S.V. Tikhov // Photonics. — 2023. — № 10. — Art. 523.
10. Mikhailov, S.A. Quantum theory of the third-order nonlinear electrodynamic effects of graphene / S.A. Mikhailov // Phys. Rev. B. — 2016. — V. 93, № 8. — Art. 085403.
11. Hanson, G.W. Dyadic Green's functions and guided surface waves for a surface conductivity model of graphene / G.W. Hanson // J. Appl. Phys. — 2008. — V. 103, № 6. — Art. 064302.
12. Смирнов, Ю.Г. О фредгольмовости и разрешимости системы интегральных уравнений в задаче сопряжения для уравнения Гельмгольца / Ю.Г. Смирнов, О.В. Кондырев // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 8. — С. 1089–1097.
13. Диэлектрические резонаторы / М.Е. Ильченко, В.Ф. Взятышев, Л.Г. Гассанов [и др.]. — М. : Радио и связь, 1989. — 326 с.
14. Ильинский, А.С. Математические модели электродинамики и акустики / А.С. Ильинский, В.В. Кравцов, А.Г. Свешников. — М. : Высшая школа, 1991. — 224 с.
15. Панич, О.И. Введение в общую теорию эллиптических кревых задач / О.И. Панич. — Киев : Вища школа, 1986. — 126 с.
16. Кириллов, А.А. Теоремы и задачи функционального анализа / А.А. Кириллов, А.Д. Гвишиани. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1988. — 396 с.
17. Гохберг, И.Ц. Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше / И.Ц. Гохберг, Е.И. Сигал // Мат. сб. — 1971. — Т. 84, № 4. — С. 607–629.

INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE PROBLEM OF ELECTROMAGNETIC WAVE SCATTERING ON A DIELECTRIC BODY COVERED WITH GRAPHENE

© 2024 / Yu. G. Smirnov[1], O. V. Kondyrev[2]

Penza State University, Russia
e-mail: [1]smirnovyug@mail.ru, [2]kow20002204@mail.ru

We consider the determination of resonance frequencies of dielectric bodies coated with graphene. In the addressed problem statement, the graphene nonlinearity is not taken into account. The initial boundary-value problem for Maxwell's equations is reduced to a system of integro-differential equations on the graphene surface. We prove the Fredholm property of this system under certain sufficient conditions and establish the discreteness of the spectrum of an operator-valued function corresponding to this system in a certain region of the complex plane of the circular frequency spectral parameter.

Keywords: integro-differential equation, uniqueness, existence, Fredholm property, Maxwell's equation

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 20-11-20087).

REFERENCES

1. Ladyzhenskaya, O.A., *Kraevye zadachi matematicheskoj fiziki* (Boundary Value Problems of Mathematical Physics), Moscow: Nauka, 1973.
2. Sanches-Palensiya, E., *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, New York: Springer, 1980.
3. Nédélec, J.-C., *Acoustic and Electromagnetic Equations. Integral Representations for Harmonic Problems*, New York; Berlin; Heidelberg: Springer, 2001.
4. Colton, D. and Kress, R., *Integral Equation Methods in Scattering Theory*, New York: John Wiley & Sons, 1983.
5. Colton, D. and Kress, R., *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, New York: Springer, 2013.
6. Smirnov, Yu.G. and Petrova, Yu.A., Numerical and analytical study of the problem of electromagnetic oscillations in open inhomogeneous resonators, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 9, pp. 1258–1266.

7. Smirnov, Yu.G., Tihov, S.V., and Gusarova, E.V., On the propagation of electromagnetic waves in a dielectric layer coated with graphene, *Izv. vuzov. Povolzhsk. Reg. Fiz.-Mat. Nauki*, 2022, no. 3, pp. 11–18.
8. Lerer, A.M., Numerical evaluation of the errors of the perturbation method in solving the problem of the reflection of an electromagnetic wave from a nonlinear graphene layer, *J. Commun. Technol. Electron.*, 2022, vol. 67, no. 9, pp. 1063–1066.
9. Smirnov, Y.G. and Tikhov, S.V., The nonlinear eigenvalue problem of electromagnetic wave propagation in a dielectric layer covered with graphene, *Photonics*, 2023, no. 10, art. 523.
10. Mikhailov, S.A., Quantum theory of the third-order nonlinear electrodynamic effects of graphene, *Phys. Rev. B.*, 2016, vol. 93, no. 8, art. 085403.
11. Hanson, G.W., Dyadic Green's functions and guided surface waves for a surface conductivity model of graphene, *J. Appl. Phys.*, 2008, vol. 103, no. 6, art. 064302.
12. Smirnov, Yu.G. and Kondyrev, O.V., On the fredholm property and solvability of a system of integral equations in the transmission problem for the Helmholtz equation, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 8, pp. 1095–1104.
13. Il'chenko, M.E., Vzyatyshev, V.F., Gassanov, L.G. [et al.], *Dielektricheskie rezonatory* (Dielectric Resonators), Moscow: Radio i svyaz', 1989.
14. Il'inskij, A.S., Kravcov, V.V., and Sveshnikov, A.G., *Matematicheskie modeli elektrodinamiki i akustiki* (Mathematical Models of Electrodynamics and Acoustics), Moscow: Vysshaya shkola, 1991.
15. Panich, O.I., *Vvedenie v obshchuyu teoriyu ellipticheskih krevyh zadach* (Introduction to the General Theory of Elliptic Curve Problems), Kiev: Vishcha shkola, 1986.
16. Kirillov, A.A. and Gvishiani, A.D., *Teoremy i zadachi funkcional'nogo analiza* (Theorems and Problems of Functional Analysis), Moscow: Nauka, 1988.
17. Gohberg, I.C. and Sigal, E.I., Operator generalization of the logarithmic residue theorem and Rouche's theorem, *Mat. Sb.*, 1971, vol. 84, no. 4, pp. 607–629.