

УДК 517.54:532.031

## ГИДРОМЕХАНИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАГЛУБЛЕННОГО НАЧАЛЬНОГО ИМПУЛЬСНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ГИДРОГЕОФИЗИЧЕСКИЙ МАССИВ

© 2023 г. К. Н. Анахаев<sup>a,b,\*</sup>, В. В. Беликов<sup>b,\*\*</sup>

<sup>a</sup> *Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук (ИПМА КБНЦ РАН), Нальчик, Россия*

<sup>b</sup> *Институт водных проблем Российской академии наук (ИВП РАН), Москва, Россия*

\*e-mail: [anaha13@mail.ru](mailto:anaha13@mail.ru)

\*\*e-mail: [belvv@bk.ru](mailto:belvv@bk.ru)

Поступила в редакцию 27.10.2021 г.

После доработки 10.12.2021 г.

Принята к публикации 20.12.2021 г.

В работе рассматривается потенциальная задача заглубленного импульсного воздействия в начальный момент времени на гидрогеофизический массив, что может иметь место при подземных (подводных) взрывах, извержениях вулканов, сейсмах и т.д. Воздействие очага импульса моделировалось источником округленной формы с единичным напором, а область стока – линией нулевого потенциала. Получено строгое гидромеханическое решение задачи с установлением аналитической взаимосвязи между физической областью течения и комплексным потенциалом на основе теории функции комплексного переменного – использования метода последовательных конформных отображений с определением всех необходимых характеристик потока. Приведены примеры расчета для частных случаев с построением криволинейных ортогональных гидродинамических сеток, очертаний семейств линий равных напоров и линий токов, профилей источников импульса, а также эпюры скоростей, напоров и расходов потенциального потока.

*Ключевые слова:* потенциальный поток, импульсное воздействие, конформные отображения, комплексный потенциал, комплексная область, эллиптические функции, линии токов, линии равных напоров

DOI: 10.31857/S0572329922060022, EDN: KFXN1J

**Введение.** Импульсные воздействия на гидрогеофизические массивы могут иметь естественное (падения астероидов, извержения вулканов, сейсмические воздействия и т.д.) и искусственное (надземные, подземные и подводные взрывы) происхождения. Во многих случаях они сопровождаются крупномасштабными динамическими изменениями окружающей природной среды с возникновением цунами, наводнений, оползней и обвалов береговых склонов [1–5] и, нередко, оказывают значительные негативно-разрушающие воздействия на населенные пункты, селитебные территории, объекты экономики, представляя значительную угрозу для безопасности жизнедеятельности людей. При научных исследованиях указанных воздействий с оценкой их мощности и прогнозом возможных последствий наиболее широкое применение получила гидродинамическая модель тяжелой идеальной жидкости [3, 5, 6]. В частности, в работах [6, 7] рассматриваются случаи падения (ударов) высокоскоростных (до 15–50 км/с) астероидов на земную и водную поверхности с проникновениями, соответственно, в грунтовую толщу и до дна водной акватории.

Особенности развития во времени подводного импульса (взрыва) рассматривается в работе [3, с. 279–281], где указано также на наличие гидродинамического парадокса – при увеличении глубины расположения источника импульса (в определенном интервале) не происходит снижение силы импульсного воздействия, то есть пробивная сила ударной волны остается постоянной. Задача о распределении импульсных давлений по ряду плавающих тел в покоящейся жидкости при ударном воздействии на одного из них в момент времени, непосредственно следующий за ударом, изложена в [6, с. 259].

Импульсные (взрывные) методы воздействия на гидрогеофизические массивы могут быть использованы также при создании искусственных островов и оградительных дамб (преимущественно в относительно мелкой воде) путем комбинированных разновременных взрывов, при которых первые (вспомогательные заряды) удаляют слой воды, а вторые (наклонные заряды с двух сторон) набрасывают (сгребают) грунт дна водоема в тело насыпи [8, с. 8].

В работе [9, с. 77] рассматривается задача о распределении давления в безграничной несжимаемой жидкости от воздействия подводного импульсного источника (взрыва мины) в начальный (весьма малый) промежуток времени в гидромеханической постановке как плоская задача осесимметричного потенциального потока без учета наличия водной поверхности.

**1. Постановка задачи.** В работе начальное импульсное воздействие заглубленного источника округленного профиля на гидрогеофизический массив (водный, грунтовый) рассматривается в плоской постановке как задача гидромеханического моделирования потенциального потока [1, 2, 6, 10], принимая контур источника импульса за полный (единичный) потенциал, а горизонтальную поверхность массива (линию стока) – за линию нулевого потенциала (рис. 1).

**2. Метод и построение решения.** Задача решается на основе теории функции комплексного переменного с использованием метода последовательных конформных отображений, отличительной особенностью от [1, 3, 6] которой является аналитическое определение в элементарных функциях характеристик потенциального потока в первоначальный момент времени импульсного воздействия.

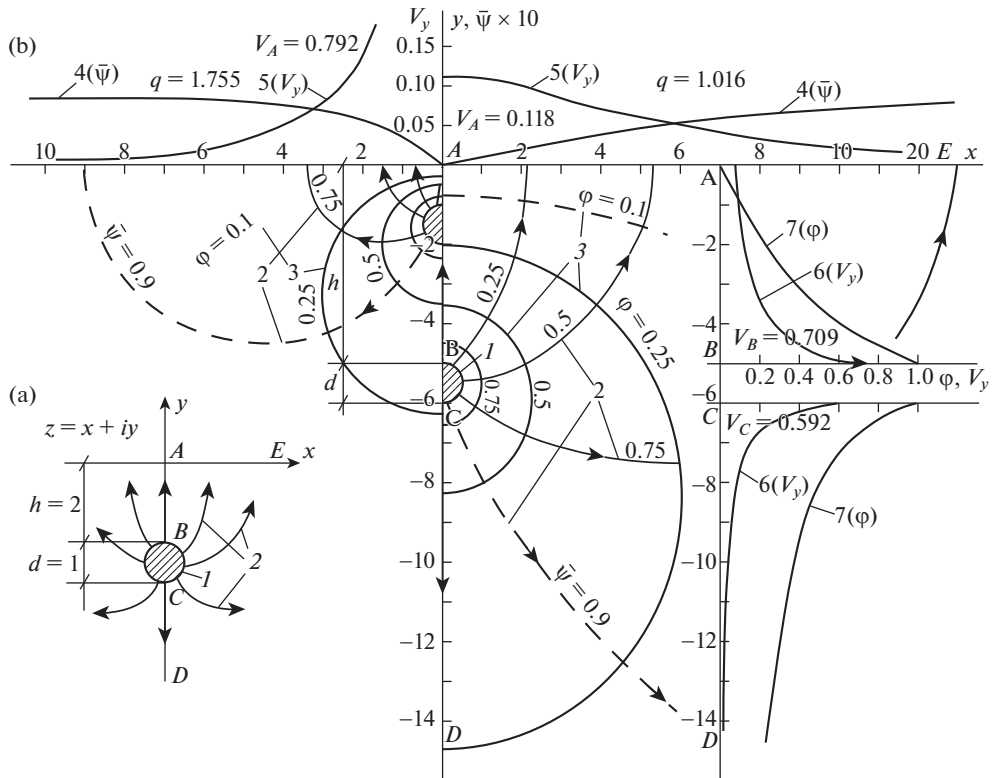
В силу симметрии физической области течения  $z = x + iy$  (рис. 1, а) в качестве расчетной схемы принята правая ее половина  $ABCDE$  (рис. 2, а), представленная в IV квадранте источником импульса округленного профиля (размером  $d$  по вертикальной оси), заглубленным в гидрогеофизический массив на величину  $h$ . Решение задачи отыскивается на основе аналитической однозначной взаимосвязи между указанной областью физической течения  $z = x + iy$  (рис. 1, 2, а) и областью комплексного потенциала  $W = \varphi + i\psi$ , геометрический образ которого для принятой расчетной схемы представлен прямоугольником  $ABCD(E)$  с точкой  $A$  в центре координат  $\varphi A \psi$  (рис. 2, и), где  $\varphi$  и  $\psi$  – напорная (потенциальная) функция и функция тока. В указанном прямоугольнике линии равного напора  $BC$  и  $AE$  соответствуют значениям потенциала, равным напорам – единичному  $\varphi = H = 1$  (в усл. ед.) и нулевому  $\varphi = 0$ , а линии тока  $BA$  и  $CD$  – значениям функции тока нулевого ( $\psi = 0$ ) и полного (для правой половины области течения  $\psi = q$ ) расходов.

При этом имеем следующие граничные условия (рис. 1, 2):

– по линиям осевой симметрии (непроницаемые границы)  $BA$  и  $CD$  функция тока  $\psi$  равна, соответственно, нулевому  $\psi = 0$  и полному расходу  $\psi = q$ ;

– вдоль очертания импульсного источника  $BC$  и линии поверхности стока  $AE$  функции тока  $\psi$  растут от нулевого значения  $\psi = 0$  до полного расхода  $\psi = q$ ;

– напорная (потенциальная) функция  $\varphi$  на линии контура источника импульса  $BC$  равна полному (единичному) напору  $H$  ( $\varphi = H = 1$ ), а на выходном участке стока  $AE$  – нулевому значению  $\varphi = 0$ .



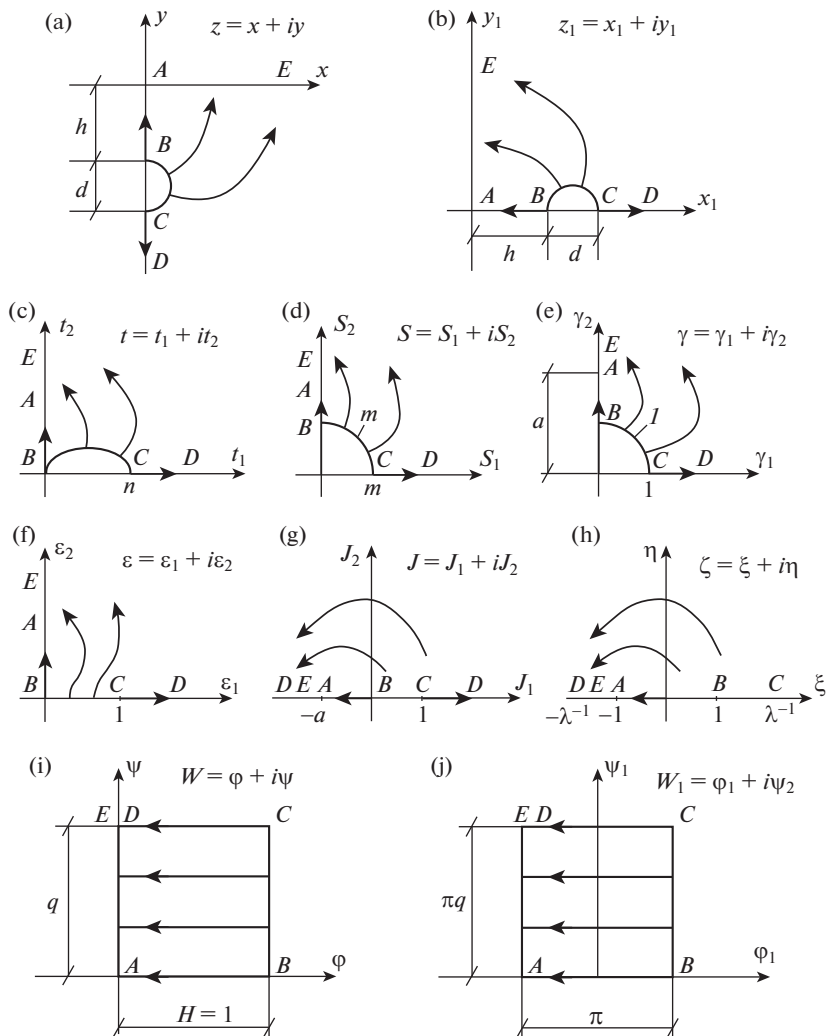
**Рис. 1.** Расчетные характеристики поля потенциального потока при заглубленном начальном импульсном воздействии: а) общий симметричный характер потенциального потока; б) криволинейные ортогональные гидродинамические сетки потока при  $h/d = 5$  (правая половина) и  $h/d = 1$  (левая половина); 1 – очерта- ния профилей импульсного источника  $BC$ ; 2 – очертания семейства кривых функции тока (относительных расходов  $\bar{\Psi}$ ) – через 0.25; 3 – очертания семейства кривых линий равных напоров (потенциальной функции  $\varphi$ ) – через 0.25; 4 – эпюры расходов (функции тока  $\bar{\Psi}$ ) вдоль границ стока; 5 – эпюры выходных скоростей потока  $V_y = V_{out}$  вдоль границ стока; 6 и 7 – соответственно, эпюры действующих вертикальных скоростей  $V_y$  и напоров  $\varphi$  вдоль осевой линии области течения.

Аналитическая взаимосвязь между комплексными областями физического течения  $z = x + iy$  (рис. 2, а) и комплексного потенциала  $W = \varphi + i\psi$  (рис. 2, и) устанавливается путем их последовательного конформного отображения на единую связующую полуплоскость  $\zeta = \xi + i\eta$  (рис. 2, h) [10–12]. При этом для конформного отображения области  $z = x + iy$  на полуплоскость  $\zeta = \xi + i\eta$  используются промежуточные комплексные области  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $t = t_1 + it_2$ ,  $S = S_1 + iS_2$ ,  $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ ,  $J = J_1 + iJ_2$  (рис. 2, б, с, d, e, f, g) с помощью функции [10–14]:

$$z = -iz_1, \quad t = \sqrt{z_1^2 - h^2}, \quad S = \sqrt{t^2 - m^2}, \quad \gamma = \frac{S}{m}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \left( \gamma + \frac{1}{\gamma} \right), \quad J = \varepsilon^2 \quad (2.1)$$

в которых

$$m = \sqrt{d(h + 0.5d)} \quad (2.2)$$



**Рис. 2.** Схема последовательных конформных отображений, устанавливающая аналитическую взаимосвязь областей физического течения  $z = x + iy$  и комплексного потенциала  $W = \varphi + i\psi$  (прямоугольника).

С другой стороны, необходимо также конформно отобразить на полуплоскость  $\zeta = \xi + i\eta$  область комплексного потенциала  $W = \varphi + i\psi$ , имеющего вид прямоугольника шириной  $H = 1$  и длиной равной  $q$  (рис. 2, i), для точного отображения которого на полуплоскость требуется использование эллиптического синуса Якоби [10–15]. Однако, возникающие при этом математические сложности (в том числе при последующих преобразованиях эллиптических функций Якоби [15, 16]), затрудняют получение итоговых аналитических выражений в элементарных функциях для непосредственного определения гидромеханических характеристик потока в начальный момент импульсного воздействия, что имеет важное значение как для теоретического анализа, так и решения прикладных задач.

Для преодоления изложенных математических трудностей ниже приводится новая методика конформного отображения области комплексного потенциала  $W = \varphi + i\psi$ , представленного в виде прямоугольника, на полуплоскость  $\zeta = \xi + i\eta$  [10, 17, 18]. При этом используется промежуточная комплексная область  $W_1 = \varphi_1 + i\psi_1$  – прямоугольник шириной  $\pi$  с осевым расположением мнимой оси  $O\varphi_1$  (рис. 2, j), определяемая зависимостью (при  $H = 1$ )

$$W_1 = \pi(W - 0.5) \quad (2.3)$$

который (при “удлиненном” прямоугольнике  $q/H \geq 1$ ) отображается на полуплоскость  $\zeta = \xi + i\eta$  элементарными алгебраическими соотношениями (с погрешностью  $\ll 1\%$ ) [17, 18]:

$$\xi = \frac{2}{\lambda R} \cdot \frac{\sin W_1}{1 + \frac{\sin^2 W_1}{R^2}}, \quad R = \operatorname{ch}(\pi q), \quad \lambda = \frac{2R}{1 + R^2} \quad (2.4)$$

При этом комплексные области  $J = J_1 + iJ_2$  (рис. 2, g) и  $\zeta = \xi + i\eta$  (рис. 2, h) связываются между собой по соответствию трех точек:  $A$  ( $J_A = -a$ ,  $\zeta_A = -1$ ),  $B$  ( $J_B = 0$ ,  $\zeta_B = 1$ ) и  $D$  ( $J_D = -\infty$ ,  $\zeta_D = -1/\lambda$ ) зависимостями:

$$J = J_1 + iJ_2 = \frac{a(\zeta - 1)(1 - \lambda)}{2(\lambda\zeta + 1)}, \quad \zeta = \xi + i\eta = -\frac{2J + a(1 - \lambda)}{2J\lambda - a(1 - \lambda)} \quad (2.5)$$

где  $a$  – модуль точки  $A$  в комплексной области  $J = J_1 + iJ_2$  (рис. 2, g), определяемый из последовательных отображений областей  $z \rightarrow z_1 \rightarrow t \rightarrow S \rightarrow \gamma \rightarrow \varepsilon \rightarrow J$  по формуле

$$a = \frac{h^4}{4m^2(m^2 + h^2)} \quad (2.6)$$

При этом, для определения в формулах (2.4) значений параметров  $\lambda$ ,  $R$  и расхода  $q$ , из зависимости (2.5) для образа точки  $C$  в области  $\zeta = \xi + i\eta$  (рис. 2, h)

$$\zeta_C = -\frac{2J_C + a(1 - \lambda)}{2J_C\lambda - a(1 - \lambda)}$$

выразим (при  $J_C = 1$ ;  $\zeta_C = 1/\lambda$ ) значение  $\lambda$  в виде

$$\lambda = \frac{1}{a}[a + 2(1 - \sqrt{a + 1})] \quad (2.7)$$

подставляя которое в формулы (2.4), получим

$$R = \frac{1}{\lambda}(1 + \sqrt{|1 - \lambda^2|}), \quad q = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arch}(R) \quad (2.8)$$

Таким образом, устанавливаем аналитическую взаимосвязь  $z = f(W)$  между областями физического течения  $z = x + iy$  (рис. 2, a) и комплексного потенциала  $W = \varphi + i\psi$  (рис. 2, i) с учетом значений промежуточных функций  $z_1, t, S, \gamma, \varepsilon, J, \xi, W_1$ , определяемых по зависимостям (2.1)–(2.8). Разделяя в последних действительную и мнимую части и преобразовывая получим окончательные выражения в элементарных функциях для определения координат  $x$  и  $y$  области физического течения  $z = x + iy$  при известных величинах  $d$  и  $h$  в зависимости от заданных значений напорной функции  $\varphi$  и функции тока  $\psi$  в виде:

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{A_{10}^2 + B_{10}^2} - A_{10}}{2}}, \quad y = -\sqrt{\frac{\sqrt{A_{10}^2 + B_{10}^2} + A_{10}}{2}} \quad (2.9)$$

в которых

$$\begin{aligned}
 A_{10} &= t_1^2 - t_2 + h^2, & B_{10} &= 2t_1t_2, & t_1 &= \sqrt{\frac{\sqrt{A_9^2 + B_9^2} + A_9}{2}}, & t_2 &= \sqrt{\frac{\sqrt{A_9^2 + B_9^2} - A_9}{2}} \\
 A_9 &= S_1^2 - S_2^2 + m^2, & B_9 &= 2S_1S_2, & S_1 &= \gamma_1m, & S_2 &= \gamma_2m \\
 \gamma_1 &= \varepsilon_1 + A_8, & \gamma_2 &= \varepsilon_2 + B_8, & A_8 &= \sqrt{\frac{\sqrt{A_7^2 + B_7^2} + A_7}{2}}, & B_8 &= \sqrt{\frac{\sqrt{A_7^2 + B_7^2} - A_7}{2}} \\
 A_7 &= \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - 1, & B_7 &= 2\varepsilon_1\varepsilon_2, & \varepsilon_1 &= \sqrt{\frac{\sqrt{J_1^2 + J_2^2} + J_1}{2}}, & \varepsilon_2 &= \sqrt{\frac{\sqrt{J_1^2 + J_2^2} - J_1}{2}} \quad (2.10) \\
 J_1 &= \frac{A_5A_6 + B_5B_6}{A_6^2 + B_6^2}, & J_2 &= \frac{A_6B_5 - A_5B_6}{A_6^2 + B_6^2}, & A_6 &= 2(\lambda\xi + 1), & B_6 &= 2\lambda\eta \\
 A_5 &= a(1 - \lambda)(\xi - 1), & B_5 &= a(1 - \lambda)\eta, & \xi &= \frac{2}{\lambda R} \cdot A_4, & \eta &= \frac{2}{\lambda R} \cdot B_4 \\
 A_4 &= \frac{A_1A_3 + B_1B_3}{A_3^2 + B_3^2}, & B_4 &= \frac{A_3B_1 - A_1B_3}{A_3^2 + B_3^2}, & A_3 &= 1 + \frac{A_2}{R^2}, & B_3 &= \frac{B_2}{R^2} \\
 A_2 &= A_1^2 - B_1^2, & B_2 &= 2A_1B_1, & A_1 &= \sin \varphi_1 \cdot \operatorname{ch} \psi_1, & B_1 &= \cos \varphi_1 \cdot \operatorname{sh} \psi_1 \\
 & & & & \varphi_1 &= \pi(\varphi - 0.5), & \psi_1 &= \pi\psi
 \end{aligned}$$

**3. Анализ результатов и примеры.** Полученное строгое решение рассматриваемой задачи, представленное в виде аналитической взаимосвязи  $z = f(W)$ , позволяет определять на основе элементарных расчетных зависимостей (2.7)–(2.10) для заданных значений параметра импульсного очага  $d$  и глубины его расположения  $h$  значения всех необходимых гидромеханических характеристик потенциального потока (поля) в области физического течения в начальный момент времени.

При этом значения скоростей потока  $V_x$  и  $V_y$  – горизонтальной и вертикальной составляющих полной скорости  $V$ , определяются по зависимостям [10, 15]:

$$V_x = \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{\Delta\Psi}{\Delta y}, \quad V_y = \pm \frac{\Delta\Phi}{\Delta y} = \pm \frac{\Delta\Psi}{\Delta x}, \quad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \quad (3.1)$$

в которых  $\Delta\Phi$ ,  $\Delta\Psi$  и  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  расчетные величины приращений напоров и функции тока при соответствующих приращениях координат для рассматриваемых (весьма малых) участков области течения.

Очертание же профиля самого источника импульса определяется полуобратным методом – последовательным конформным отображением четверти дуги  $BC$  единичной окружности в области  $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$  (рис. 2, е) на область физического течения  $z = x + iy$  (рис. 2, а) через промежуточные комплексные области  $S = S_1 + iS_2$ ,  $t = t_1 + it_2$ ,  $z_1 = x_1 + iy_1$  (рис. 2, д, с, б). При этом профиль источника импульса  $BC$  получает вид, описываемый параметрическими зависимостями:

$$\begin{aligned}
 x_{BC} &= \sqrt{\frac{\sqrt{(2m^2\gamma_1^2 + h^2)^2 + 4m^4\gamma_1^2(1 - \gamma_1^2)} - (2m^2\gamma_1^2 + h^2)}{2}} \\
 y_{BC} &= -\sqrt{\frac{\sqrt{(2m^2\gamma_1^2 + h^2)^2 + 4m^4\gamma_1^2(1 - \gamma_1^2)} + (2m^2\gamma_1^2 + h^2)}{2}} \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

для задаваемых значений  $0 \leq \gamma_1 \leq 1$  – от 0 (точки *B*) до 1 (точки *C*), где величина *m* находится по формуле (2.2).

На рис. 1, а, б приведены общая схема задачи в виде симметричного потенциально-го потока, а также результаты расчетов основных гидромеханических параметров для двух частных случаев при начальном импульсном воздействии (в усл. ед.):

– при  $h = 5$ ;  $d = 1$  (на правой половине рисунка)

$$q = 1.016, \quad V_A = 0.118, \quad V_B = 0.709, \quad V_C = 0.592$$

– при  $h = 1$ ;  $d = 1$  (на левой половине рисунка)

$$q = 1.755, \quad V_A = 0.792, \quad V_B = 1.667, \quad V_C = 0.833$$

При этом, для указанных случаев на рисунке также представлены:

– криволинейные ортогональные гидродинамические сетки потенциального потока;  
– очертания профилей импульсного источника *BC* в физической области течения (кривые 1);

– очертания семейств кривых функции тока (относительных расходов  $\bar{\psi} = \psi/q$ ) – через 0.25 (кривые 2);

– очертания семейств кривых линий равных напоров (потенциальной функции  $\phi$ ) – через 0.25 (кривые 3);

– эпюры функции тока  $\bar{\psi}$  вдоль границ стока (кривые 4);

– эпюры выходных скоростей потока  $V_y = V_{out}$  вдоль границ стока (кривые 5);

– эпюры действующих вертикальных скоростей  $V_y$  и напоров  $\phi$  вдоль осевой линии области течения при  $h/d = 5$  (соответственно, кривые 6 и 7).

Ортогональность расчетных криволинейных ячеек гидродинамических сеток (рис. 1, б) непосредственно подтверждает потенциальность распределения гидромеханических характеристик потока импульсного источника.

**Заключение.** В работе дано новое гидромеханическое решение задачи заглубленного начального импульсного воздействия на гидрогеофизический массив (водный, грунтовый) с непосредственным аналитическим определением в элементарных функциях гидромеханических характеристик потенциального потока. При этом, воздействие очага импульса для начального момента времени моделировалось источником потенциального потока округленного профиля с единичным напором, а область стока – линией нулевого потенциала. Полученное строгое решение рассматриваемой задачи с установлением аналитической взаимосвязи между физической областью течения и комплексным потенциалом основано на теории функции комплексного переменного – использовании метода последовательных конформных отображений с определением полей гидромеханических характеристик потока в начальный момент времени. Приведены примеры расчета для двух частных случаев с построением: криволинейных ортогональных гидродинамических сеток, очертаний семейств линий равных напоров и линий токов, профилей источников импульса, а также эпюр скоростей потока, напоров и относительных расходов потенциального потока.

Часть работы, связанная с гидродинамикой водоемов, выполнена в рамках темы № FMWZ-2022-0001 государственного задания ИВП РАН.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильинский Н.Б., Лабуткин А.Г., Салимов Р.Б. Некоторые задачи о взрыве заглубленных зарядов // Труды семинара по краевым задачам. Вып. 12. Казань: КГУ, 1975. С. 63–75.
2. Меркулов В.И. Популярная гидродинамика. Киев: Техніка, 1976. 145 с.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977. 407 с.

4. *Пелиновский Е.Н.* Гидродинамика волн цунами. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996. 276 с.
5. *Иванов Б.А.* Распределение в пространстве энергии сейсмических волн при метеоритном ударе и взрыве // *Динамические процессы в геосферах*. Сб. науч. трудов ИДГ РАН. Вып. 10. М.: Графитекс, 2018. С. 46–53.  
<https://doi.org/10.26006/IDG.2018.10.20170>
6. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука. 1973. 736 с.
7. *Шувалов В.В.* Выброс воды в атмосферу при падении астероидов в океан // *Динамические процессы в геосферах*. Сб. науч. трудов ИДГ РАН. Вып. 10. М.: Графитекс, 2018. С. 126–131.  
<https://doi.org/10.26006/IDG.2018.10.20187>
8. *Покровский Г.И.* Возведение плотин направленным взрывом. М.: Недра, 1974. 113 с.
9. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Часть 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.
10. *Анахаев К.Н.* Гидромеханический расчет потенциального потока при ударе плиты о воду // *Доклады Академии наук*. 2012. Т. 445. № 4. С. 407–411.
11. *Лаврик В.И., Фильчакова В.П., Яшин А.А.* Конформные отображения физико-топологических моделей. Киев: Наукова думка, 1990. 374 с.
12. *Anakhaev K.N., Ivanov P.M., Temukuev Kh.M., Chechenov M.M.* The hydromechanical problem of pulse punching of a plate // *Doklady Physics*. 2018. V. 63. № 7. P. 288–292.  
<https://doi.org/10.1134/S1028335818070017>
13. *Vetz A.* Konforme Abbildung. Berlin: Springer – Verlag, 1960. 407 s.
14. *Лаврик В.И., Савенков В.Н.* Справочник по конформным отображениям. Киев: Наукова думка, 1970. 252 с.
15. *Павловский Н.Н.* Собрание сочинений. Т. 2. Движение грунтовых вод. М.– Л.: Изд-во АН СССР, 1956. 771 с.
16. *Милн-Томсон Л.* Эллиптические функции Якоби и тета-функции // *Справочник по специальным функциям*. Под редакцией *М. Абрамовица и И. Стиган* М.: Наука. 1979. С. 380–400.
17. *Анахаев К.Н.* О расчете потенциальных потоков // *Доклады Академии наук*. 2005. Т. 401. № 3. С. 337–341.
18. *Анахаев К.Н.* Об определении эллиптических функций Якоби // *Вестник РУДН. Серия: математика, информатика, физика*. 2009. № 2. С. 90–95.