ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2023, № 2, с. 115–124

УДК 531.38;531.39

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОЛУРЕГУЛЯРНЫХ ПРЕЦЕССИЙ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ

© 2023 г. Г. В. Горр[a,*]

[a] *Государственное учреждение “Институт прикладной математики и механики”, Донецк, Россия*

**e-mail: gvgorr@gmail.com*

Поступила в редакцию 11.06.2022 г.
После доработки 28.06.2022 г.
Принята к публикации 30.06.2022 г.

В статье рассмотрена задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента. Исследованы условия существования полурегулярных прецессий, характеризующихся постоянством скорости собственного вращения. Построено новое решение уравнений класса Кирхгофа–Пуассона, основанное на специальном типе трех инвариантных соотношений по основным переменным данных уравнений.

Ключевые слова: потенциальные и гироскопические силы, переменный гиростатический момент, полурегулярные прецессии

DOI: 10.31857/S0572329922600414, **EDN:** DFXOLF

Введение. Прецессионные движения твердых тел занимают особое место в классической задаче о движении тяжелого твердого тела и ее обобщениях. Прикладные задачи, связанные с изучением прецессий гироскопических приборов, рассмотрены А.Ю. Ишлинским [1]. В динамике твердого тела прецессии изучали Д. Гриоли [2], Ф. Кляйн и А. Зоммерфельд [3], автор данной статьи [4] и многие другие авторы (см. книги [5, 6]). Монография [7] посвящена исследованию условий существования прецессионных движений гиростата с переменным гиростатическим моментом. В ней приведен обзор результатов, полученных в данной задаче и сформулированы основные определения гиростата. Важное значение в постановке задачи о движении гиростата имеют подходы, которые приняты в работах Й. Виттенбурга [8], В.В. Румянцева [9], П.В. Харламова [10]. Прецессионные движения характеризуются свойством постоянства угла между двумя осями l_1, l_2, проходящими через неподвижную точку, одна из которых (l_1) связана с телом-носителем, а другая (l_2) неподвижна в пространстве. В случае, когда одна из осей подвижной системы координат содержит ось l_1, то целесообразно такую систему координат называть прецессионной системой координат [11]. Согласно [2, 4], прецессионные движения подразделяются на классы: если скорости прецессии и собственного вращения постоянны, то прецессия называется регулярной; если скорость прецессии постоянна, то прецессия называется полурегулярной первого типа; если только скорость собственного вращения постоянна, то прецессию называют полурегулярной прецессией второго типа; в других случаях прецессия называется прецессией общего типа. Наибольшее количество прецессионных движений гиростата установлено для классов регулярных и полурегулярных прецессий первого типа. Следует отметить, что уникальными случаями прецессий тяжелого твердого тела, описываемых уравнениями Эйлера–Пуассона, являются регулярные прецессии, полученные Д. Гриоли [2], относительно наклонной оси и случай А.И. Докшевича [12], для которого постоянно произведение скоростей прецессии и собственного вращения. Полурегулярные прецессии второго типа твердого тела и гиростата относятся к меньшему числу найденных прецессий. Например, в [4] доказано, что в классической задаче полурегулярные прецессии второго типа динамически невозможны. Несмотря на это, в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом получены некоторые решения, имеющие такое свойство [7].

В данной статье исследованы условия существования полурегулярных прецессий второго типа гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил. Указаны условия на параметры уравнений движения и прецессии, при выполнении которых гиростат совершает прецессию второго типа.

1. Постановка задачи. При изучении уравнений движения гиростата с постоянным гиростатическим моментом следует учитывать известное свойство аналогии задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и задачи о движении тела в идеальной жидкости, которую в частном случае доказали В.А. Стеклов [13] и П.В. Харламов [14], а в общем случае – Х.М. Яхья [15]. Для случая переменного гиростатического момента $\boldsymbol{\lambda}(t)$ такой аналогии нет. Поэтому в данной статье будем использовать дифференциальные уравнения в следующей форме [6, 7, 15]:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \big(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}(t)\big)\times\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}\times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}\times(C\boldsymbol{\nu} - \mathbf{s}) \tag{1.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega} \tag{1.2}$$

где введены обозначения: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости; $\boldsymbol{\lambda}(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$ – вектор гиростатического момента; $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции гиростата; $B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, B_3)$ – матрица, характеризующая гироскопические силы; $C = \mathrm{diag}(C_1, C_2, C_3)$ – матрица, определяющая квадратичные по компонентам вектора $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ члены; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор обобщенного центра масс гиростата; точка над переменными $\boldsymbol{\omega}(t)$, $\boldsymbol{\lambda}(t)$, $\boldsymbol{\nu}(t)$ обозначает дифференцирование по времени t.

Уравнения (1.1), (1.2) имеют первые интегралы

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \quad \big(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}(t)\big)\cdot\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = k \tag{1.3}$$

где k – произвольная постоянная. Все указанные выше величины заданы в главной подвижной системе координат с единичными векторами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$.

Система (1.1), (1.2) является неавтономной системой дифференциальных уравнений относительно переменных $\boldsymbol{\omega}(t)$, $\boldsymbol{\lambda}(t)$, $\boldsymbol{\nu}(t)$. Ее интегрирование может быть основано на нескольких подходах. В данной статье будем полагать, что ротор S_3, который несет тело-носитель S_0, лежит на третьей координатной оси, то есть $\boldsymbol{\lambda}(t) = (0, 0, \lambda_3(t))$. Тогда в силу [10] систему (1.1), (1.2) будем рассматривать совместно с уравнениями

$$\dot{\lambda}_3(t) = L(t), \quad \lambda_3(t) = \mathrm{D}_3[\boldsymbol{\omega}(t)\cdot\mathbf{i}_3 + \dot{\kappa}(t)] \tag{1.4}$$

здесь $\dot{\kappa}(t)$ – скорость вращения ротора S_3; D_3 – момент инерции ротора S_3 относительно оси вращения Oz; $L(t)$ – проекция моментов и сил на ось Oz со стороны тела-носителя. Уравнения (1.4) можно изучать с помощью двух подходов: если задана функция $L(t)$, то вначале из первого уравнения системы (1.4) находится функция $\lambda_3(t)$ и интегрируются уравнения (1.1), (1.2), а затем из второго уравнения (1.4) определяется функция $\dot{\kappa}(t)$; если $\dot{\kappa}(t)$ задана и известна функция $\lambda_3(t)$, то из (1.4) находится функция $L(t)$.

Задача о движении гиростата с постоянным гиростатическим моментом на основе функции Лагранжа изучалась в [16].

Исследование полурегулярных прецессий будем вести, используя метод [17, 18]. Согласно этому методу, вектор угловой скорости гиростата представим в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \varepsilon(\nu_3)\boldsymbol{\nu} + g_0\boldsymbol{\beta} \tag{1.5}$$

где $\varepsilon(\nu_3)$ – дифференцируемая функция; $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ – постоянный единичный вектор; g_0 – постоянный параметр. Случай $\varepsilon(\nu_3) = \varepsilon_0$, где ε_0 – постоянная, рассмотрен в [19].

Подставим значение (1.5) в уравнение (1.2):

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = g_0(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\beta}) \tag{1.6}$$

Из уравнения (1.6) следует первый интеграл

$$\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2 + \beta_3\nu_3 = c_0 \tag{1.7}$$

который в векторной форме представим так: $\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\nu} = c_0$, где c_0 – постоянная. То есть в силу равенств $|\boldsymbol{\beta}| = 1, |\boldsymbol{\nu}| = 1$ параметр c_0 удовлетворяет условию $c_0 < 1$. Из (1.5) следует, что скорость прецессии равна $\varepsilon(\nu_3)$, а скорость собственного вращения – g_0. То есть прецессия гиростата относится к полурегулярной прецессии второго типа. Запишем (1.5), (1.6) в скалярной форме:

$$\omega_i = \varepsilon(\nu_3)\nu_i + g_0\beta_i \quad (i = \overline{1,3}) \tag{1.8}$$

$$\dot{\nu}_1 = g_0(\beta_3\nu_2 - \beta_2\nu_3), \quad \dot{\nu}_2 = g_0(\beta_1\nu_3 - \beta_3\nu_1), \quad \dot{\nu}_3 = g_0(\beta_2\nu_1 - \beta_1\nu_2) \tag{1.9}$$

Используя равенства $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$ и (1.7), найдем функции $\nu_1(\nu_3)$, $\nu_2(\nu_3)$:

$$\begin{aligned} \nu_1(\nu_3) &= \frac{1}{\kappa_0^2}[\beta_1(c_0 - \beta_3\nu_3) + \beta_2\sqrt{F(\nu_3)}] \\ \nu_2(\nu_3) &= \frac{1}{\kappa_0^2}[\beta_2(c_0 - \beta_3\nu_3) - \beta_1\sqrt{F(\nu_3)}] \end{aligned} \tag{1.10}$$

где $\kappa_0^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2$, а функция $F(\nu_3)$ такова

$$F(\nu_3) = -\nu_3^2 + 2c_0\beta_3\nu_3 + (\kappa_0^2 - c_0^2) \tag{1.11}$$

Подставляя $\nu_1(\nu_3)$, $\nu_2(\nu_3)$ из (1.10) в третье уравнение системы (1.9), получим, что функцию $\nu_3(t)$ можно получить обращением интеграла [17]

$$\int_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\nu_3}{\sqrt{F(\nu_3)}} = g_0(t - t_0) \tag{1.12}$$

Тогда функции $\nu_i(t)$ $(i = 1, 2)$, $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1,3})$ находятся из формул (1.10), (1.8). В силу того, что функция (1.11) удовлетворяет условию $F(\nu_3) < 0$ при $|\nu_3| > 1$, то при действительном значении параметра $\mu_0 = \sqrt{1 - c_0^2}$ корни уравнения $F(\nu_3) = 0$ действительны. То есть из (1.11), (1.12) найдем

$$(\nu_3)_{1,2} = c_0\beta_3 \pm \mu_0\kappa_0\sin\psi \tag{1.13}$$

где в силу третьего уравнения из (1.9) $\psi = g_0 t$. Выбирая для определенности в (1.13) знак плюс, из (1.13), (1.10) получим

$$\nu_1(\psi) = h_0 + h_1\cos\psi + h_2\sin\psi, \quad \nu_2(\psi) = r_0 + r_1\cos\psi + r_2\sin\psi$$
$$\nu_3(\psi) = a_0 + a_2\sin\psi \tag{1.14}$$

Здесь введены обозначения

$$h_0 = c_0\beta_1, \quad h_1 = \frac{\beta_2\mu_0}{\kappa_0}, \quad h_2 = -\frac{\beta_1\beta_3\mu_0}{\kappa_0}$$
$$r_0 = c_0\beta_2, \quad r_1 = -\frac{\beta_1\mu_0}{\kappa_0}, \quad r_2 = -\frac{\beta_2\beta_3\mu_0}{\kappa_0}, \quad a_0 = c_0\beta_3, \quad a_2 = \kappa_0\mu_0 \tag{1.15}$$

Отметим вид решения (1.14) и обозначений (1.15) в случае $\beta_3 = 0$, который рассмотрен в статье [19] при изучении регулярных прецессий гиростата ($\varepsilon(\nu_3) = \varepsilon_0$):

$$\nu_1(\psi) = h_0 + h_1\cos\psi, \quad \nu_2(\psi) = r_0 + r_1\cos\psi, \quad \nu_3(\psi) = a_2\sin\psi$$
$$h_0 = c\beta_1, \quad h_1 = \beta_2\mu_0, \quad h_2 = 0, \quad r_0 = c_0\beta_2$$
$$r_1 = -\beta_1\mu_0, \quad r_2 = 0, \quad a_0 = 0, \quad a_2 = \mu_0 \tag{1.16}$$

Поставим задачу: определить условия существования у уравнения (1.1) решения (1.8), (1.14).

2. Исследование уравнения (1.1). Запишем уравнение (1.1) в скалярной форме:

$$A_1\dot\omega_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 - \lambda_3(t)\omega_2 + \omega_2 B_3\nu_3 - \omega_3 B_2\nu_2 + s_2\nu_3 - s_3\nu_2 + (C_3 - C_2)\nu_2\nu_3 \tag{2.1}$$

$$A_2\dot\omega_2 = (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 + \lambda_3(t)\omega_1 + \omega_3 B_1\nu_1 - \omega_1 B_3\nu_3 + s_3\nu_1 - s_1\nu_3 + (C_1 - C_3)\nu_3\nu_1 \tag{2.2}$$

$$\dot\lambda_3(t) + A_3\dot\omega_3 = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \omega_1 B_2\nu_2 - \omega_2 B_1\nu_1 + s_1\nu_2 - s_2\nu_1 + (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2 \tag{2.3}$$

Подставим в (2.1)–(2.3) выражения ω_i из (1.8) и воспользуемся уравнениями (1.9). Тогда получим систему трех дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\lambda_3(t)(v_2\varepsilon(\nu_3) + \beta_2 g_0) = A_1 g_0 v_1\varepsilon'(\nu_3)(\beta_1 v_2 - \beta_2 v_1) + A_1 g_0\varepsilon(\nu_3)(\beta_2 v_3 - \beta_3 v_2) + \\ + \nu_2\nu_3[\varepsilon^2(\nu_3)(A_2 - A_3) + \varepsilon(\nu_3)(B_3 - B_2) + C_3 - C_2] + \\ + \nu_2\{\beta_3 g_0[\varepsilon(\nu_3)(A_2 - A_3) - B_2] - s_3\} + \\ + \nu_3\{\beta_2 g_0[\varepsilon(\nu_3)(A_2 - A_3) + B_3] + s_2\} + \beta_2\beta_3 g_0^2(A_2 - A_3)\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered}-\lambda_3(t)(v_1\varepsilon(\nu_3) + \beta_1 g_0) = A_2 g_0 v_2\varepsilon'(\nu_3)(\beta_1 v_2 - \beta_2 v_1) + A_2 g_0\varepsilon(\nu_3)(\beta_3 v_1 - \beta_1 v_3) + \\ + \nu_1\nu_3[\varepsilon^2(\nu_3)(A_3 - A_1) + \varepsilon(\nu_3)(B_1 - B_3) + C_1 - C_3] + \\ + \nu_1\{\beta_3 g_0[\varepsilon(\nu_3)(A_3 - A_1) + B_1] + s_3\} + \\ + \nu_3\{\beta_1 g_0[\varepsilon(\nu_3)(A_3 - A_1) - B_3] - s_1\} + \beta_1\beta_3 g_0^2(A_3 - A_1)\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered}\dot\lambda_3(t) = A_3 v_3\varepsilon'(\nu_3)(\beta_1 v_2 - \beta_2 v_1) + A_3 g_0\varepsilon(\nu_3)(\beta_1 v_2 - \beta_2 v_1) + \\ + \nu_1\nu_2[\varepsilon^2(\nu_3)(A_1 - A_2) + \varepsilon(\nu_3)(B_2 - B_1) + C_2 - C_1] + \\ + \nu_1\{\beta_2 g_0[\varepsilon(\nu_3)(A_1 - A_2) - B_1] - s_2\} + \\ + \nu_2\{\beta_1 g_0[\varepsilon(\nu_3)(A_1 - A_2) + B_2] + s_1\} + \beta_1\beta_2 g_0^2(A_1 - A_2)\end{gathered} \tag{2.6}$$

Выбор формы дифференциальных уравнений (2.4)–(2.6) связан с применяемой методикой их изучения в дальнейших преобразованиях.

В некоторых случаях целесообразно использовать уравнения (2.1), (2.2), исключив из них функцию $\lambda_3(t)$:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2)^{\bullet} = (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2\omega_3 + \omega_3(B_1\nu_1\omega_2 - B_2\nu_2\omega_1) + \\ + s_3(\omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2) + \nu_3(\omega_1 s_2 - \omega_2 s_1) + \nu_3[\nu_2\omega_1(C_3 - C_2) - \nu_1\omega_2(C_3 - C_1)]\end{gathered} \tag{2.7}$$

В общем случае при подстановке функций (1.14) в уравнения (2.4), (2.5) и исключения из полученных уравнений функции $\lambda_3(t)$ приходим к уравнению типа Риккати, решение которого установить не представляется возможным. Поэтому в дальнейших преобразованиях положим, что выполняются условия

$$A_2 = A_1, \quad B_2 = B_1, \quad C_2 = C_1 \tag{2.8}$$

Кроме этого, будем рассматривать два независимых варианта дополнительных ограничений на параметры:

$$1.\ s_3 = 0, \quad s_1 = d_0\beta_1, \quad s_2 = d_0\beta_2 \tag{2.9}$$

$$2.\ s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad s_3 \neq 0 \tag{2.10}$$

где d_0 – параметр. В случае (2.9) уравнение (2.7) на основе (1.8), (1.9) преобразуем к виду

$$\frac{1}{2}A_1(\omega_1^2 + \omega_2^2)'_{\nu_3} = \frac{d_0 + g_0 B_1}{g_0}\nu_3\varepsilon(\nu_3) + B_1 g_0\beta_3 + (C_1 - C_3)\nu_3 \tag{2.11}$$

В силу (2.8), (2.9) данные равенства можно интерпретировать, как обобщенные условия С.В. Ковалевской.

При выполнении условий (2.10) уравнение (2.7) представим следующим образом:

$$\frac{1}{2}A_1(\omega_1^2 + \omega_2^2)'_{\nu_3} = B_1\nu_3\varepsilon(\nu_3) + (s_3 + \beta_3 g_0 B_1) + (C_1 - C_3)\nu_3 \tag{2.12}$$

Аналоги первых интегралов, следующих из (2.12), рассматривались в [20]. Запишем уравнение (2.3) в случае (2.9):

$$A_3\omega_3(\nu_3) + \lambda_3(\nu_3) = -\frac{d_0 + B_1 g_0}{g_0}\nu_3 + B_0 \tag{2.13}$$

где B_0 – произвольная постоянная. Если учесть в уравнении (2.3) условия (2.10) и третье уравнение из (1.9), то получим

$$A_3\omega_3(\nu_3) + \lambda_3(\nu_3) = -B_1\nu_3 + l_0 \tag{2.14}$$

Здесь l_0 – произвольная постоянная. Аналогия уравнений (2.11) и (2.12), а также (2.13), (2.14) очевидна.

Рассмотрим линейную комбинацию уравнений (2.4), (2.5), умножив уравнение (2.4) на ν_1, уравнение (2.5) – на ν_2 и сложив левые и правые части полученных уравнений. Тогда в силу уравнения $\dot{\nu}_3 = g_0(\beta_2\nu_1 - \beta_1\nu_2)$ найдем

$$\{A_1[(\nu_3^2-1)\varepsilon(\nu_3)]' - A_3\nu_3\varepsilon(\nu_3) + B_3\nu_3 + g_0\beta_3(A_1 - A_3) - \lambda_3(\nu_3)\}\dot{\nu}_3 + \\ + s_2\nu_1 - s_1\nu_2 = 0 \tag{2.15}$$

В случае (2.9), (2.13) из (2.15) следует

$$\varepsilon(\nu_3) = \frac{1}{1-\nu_3^2}(E_2\nu_3^2 + E_1\nu_3 + E_0) \tag{2.16}$$

где E_0 – произвольная постоянная, а E_2, E_1 таковы:

$$E_2 = \frac{1}{2g_0A_1}[g_0(B_1 + B_3) + 2d_0], \quad E_1 = \frac{1}{A_1}(\beta_3 g_0 A_1 - B_0) \tag{2.17}$$

Распишем уравнение (2.15) при условиях (2.10), (2.14):

$$\varepsilon(\nu_3) = \frac{1}{1-\nu_3^2}(G_2\nu_3^2 + G_1\nu_3 + G_0) \tag{2.18}$$

где G_0 – произвольная постоянная, а G_2, G_1 имеют вид

$$G_2 = \frac{1}{2A_1}(B_1 + B_3), \quad G_1 = \frac{\beta_3 g_0 A_1 - l_0}{A_1} \tag{2.19}$$

Из (2.17), (2.19) следует, что величина E_2 при $d_0 = 0$ примет значение G_2, а для получения из (2.17) значения G_1 необходимо положить $B_0 = l_0$. Однако уравнения (2.11), (2.12) такой аналогией не обладают.

3. Случай (2.9). Этот случай на первом этапе будем изучать при выполнении условия

$$d_0 + g_0 B_1 = 0 \tag{3.1}$$

При выполнении равенства (3.1) уравнение (2.11) запишем в виде его первого интеграла

$$\frac{A_1}{2}[(1-v_3^2)\varepsilon^2(\nu_3) + 2g_0\varepsilon(\nu_3)(c_0 - \beta_3\nu_3 - g_0B_1\beta_3\nu_3) - \\ - \beta_3 g_0 B_1\nu_3 + \frac{1}{2}(C_3 - C_1)v_3^2 = D_0 \tag{3.2}$$

где D_0 – произвольная постоянная. В уравнении (3.2) учтены инвариантные соотношения (1.8). Подставим в равенство (3.2) значение $\varepsilon(\nu_3)$ из формулы (2.16) и потребуем, чтобы полученное равенство было тождеством по переменной ν_3. Тогда получим следующую алгебраическую систему на параметры задачи:

$$C_1 - C_3 + A_1E_2^2 = 0 \tag{3.3}$$

$$B_0 = \frac{g_0\beta_3B_1}{E_2}, \quad E_1^2 + (E_0 + E_2)^2 + 2g_0c_0(E_0 + E_2) + E_1(E_1 - 2g_0\beta_3) = 0 \tag{3.4}$$

$$E_0(E_1 - \beta_3 g_0) + 2g_0c_0E_1 - \frac{\beta_3 g_0 B_1}{A_1} = 0 \tag{3.5}$$

$$D_0 = \frac{A_1 E_0}{2}(E_0 + 2g_0 c_0) \tag{3.6}$$

Уравнение (3.3) будем рассматривать как условие на параметры C_1, C_3. Первое равенство из (3.4), в силу (2.17) и предположения (3.1), для которого значение E_2 имеет вид

$$E_2 = \frac{B_3 - B_1}{2A_1} \tag{3.7}$$

запишем так:

$$B_0 = \frac{2\beta_3 g_0 A_1 B_1}{B_3 - B_1} \tag{3.8}$$

На основании значения (3.8) параметр E_1 из (2.17) выразим через параметры задачи:

$$E_1 = \frac{\beta_3 g_0 (B_3 - 3B_1)}{B_3 - B_1} \tag{3.9}$$

Из второго уравнения системы (3.4) и уравнения (3.6) найдем значения c_0, E_0:

$$c_0 = \delta_0 \frac{2\beta_3 B_1}{B_3 - B_1}, \quad E_0 = \delta_0 E_1 - \frac{B_3 - B_1}{2A_1} \tag{3.10}$$

где $\delta_0 = \pm 1$. Уравнение (3.6) на основании (3.10) служит для определения постоянной D_0. Изучим функцию (2.16) с учетом (3.7), (3.10). Для определенности предположим $\delta_0 = 1$. Тогда

$$\varepsilon(\nu_3) = \frac{1}{1 - \nu_3}(E_2 \nu_3 + E_2^*), \quad E_2^* = \frac{2\beta_3 g_0 (B_3 - 3B_1) - (B_3 - B_1)^2}{2A_1 (B_3 - B_1)} \tag{3.11}$$

Для того, чтобы функция $\varepsilon(\nu_3)$ не принимала постоянное значение, полагаем, что выполняются условия $\beta_3 \neq 0$, $B_3 - 3B_1 \neq 0$. Таким образом, функция $\varepsilon(\nu_3)$ из (3.11) является дробно-линейной функцией от $\nu_3 = a_0 + a_2 \sin g_0 t$. Укажем значение $\lambda_3(\nu_3)$ в рассматриваемом случае. Из формул (2.13), (3.11) имеем

$$\lambda_3(\nu_3) = \frac{\beta_3 g_0 [2A_1 B_1 - A_3 (B_3 - B_1)]}{B_3 - B_1} - \frac{A_3 \nu_3 (E_2 \nu_3 + E_2^*)}{1 - \nu_3} \tag{3.12}$$

Для окончательного решения задачи об условиях существования полурегулярных прецессий гиростата необходимо рассмотреть уравнения (1.4) совместно со значением функции (3.12), положив $\nu_3(t) = a_0 + a_2 \sin g_0 t$. В силу очевидности указанных преобразований ограничимся лишь их объяснениями.

4. Случай $d_0 + g_0 B_1 \neq 0$. Рассмотрим уравнение (2.11) при условии $d_0 + g_0 B_1 \neq 0$. Функция $\varepsilon(\nu_3)$ имеет вид (2.16) с обозначениями (2.17). Подставим в него ω_1, ω_2 из (1.8) и учтем уравнения (1.9). Тогда получим дифференциальное уравнение на функцию $\varepsilon(\nu_3)$:

$$A_1\varepsilon'(\nu_3)[(1-v_3^2)\varepsilon(\nu_3)+g_0(c_0-\beta_3)v_3]-A_1\nu_3\varepsilon^2(\nu_3)-$$
$$-\frac{1}{g_0}\varepsilon(\nu_3)[(d_0+B_1g_0)\nu_3+g_0^2\beta_3A_1]+g_0(C_3-C_1)v_3-\beta_3g_0B_1=0 \tag{4.1}$$

Внесем функцию (2.16) в уравнение (4.1). Результат удобно представить так:

$$A_1[E_1\nu_3^2+2(E_0+E_2)\nu_3+E_1](E_2\nu_3^2+\tilde{E}_1\nu_3+\tilde{E}_0)-$$
$$-A_1\nu_3(E_2\nu_3^2+E_1\nu_3+E_0)^2-(1-v_3^2)(E_2v_3^2+E_1\nu_3+E_0)(R_0+R_1\nu_3)+ \tag{4.2}$$
$$+(1-v_3^2)^2[(C_3-C_1)v_3-\beta_3B_1g_0]=0$$

где

$$\tilde{E}_0=E_0+c_0g_0,\quad \tilde{E}_1=E_1-\beta_3g_0,\quad R_1=\frac{d_0+g_0B_1}{g_0},\quad R_0=\beta_3g_0A_1 \tag{4.3}$$

Потребуем, чтобы уравнение (4.2) было тождеством по переменной ν_3. Равенство нулю коэффициента при ν_3^5 имеет вид

$$E_2R_1+C_3-C_1-A_1E_2^2=0 \tag{4.4}$$

Для упрощения других условий выразим из равенства (4.4) величину C_3-C_1 и подставим ее в (4.2). Выпишем равенство нулю коэффициента при ν_3^3. Используя формулы (4.3), получим

$$R_1(E_0+E_2)=0 \tag{4.5}$$

Покажем, что должно выполняться равенство $R_1=0$. Предположим противное; тогда из (4.5) имеем

$$E_0+E_2=0 \tag{4.6}$$

Условие (4.6) позволяет рассмотреть уравнение (4.2) при $v_3=\pm1$:

$$E_1(2c_0g_0\pm E_1\mp 2g_0\beta_3)=0 \tag{4.7}$$

Случай $E_1=0$, в силу (4.6) для функции $\varepsilon(\nu_3)$ из (2.16), приводит к постоянному значению $\varepsilon(\nu_3)$. Поэтому в (4.7) необходимо положить

$$c_0=0,\quad E_1=2g_0\beta_3 \tag{4.8}$$

Из равенств нулю в уравнении (4.2) коэффициентов при v_3^4 и свободного члена следует

$$E_1R_1=E_2R_0+g_0B_1\beta_3,\quad R_0E_0-g_0B_1\beta_3=0 \tag{4.9}$$

Поскольку по предположению (4.6) $E_0=-E_2$, то в силу $E_1\neq 0$ из (4.9) получим $R_1=0$, что и требовалось доказать. Итак, вариант, когда параметры удовлетворяют условию $d_0+g_0B_1\neq 0$, невозможен.

5. Случай (2.10). Рассмотрим уравнения (2.11), (2.12) и функции (2.13), (2.14), (2.16), (2.18). Для того, чтобы изучить данный вариант, можно формально от уравнения (2.11) перейти к уравнению (2.12), от уравнения (2.13) перейти к уравнению (2.14), от функции (2.16) – к функции (2.18), то случай (2.10) получим из случая (2.9), положив в нем

$d_0 = 0$ $B_0 = l_0$ и заменив выражение $B_1 g_0 \beta_3$ выражением $s_3 + B_1 g_0 \beta_3$. Следовательно, уравнению (4.1) будет соответствовать уравнение, в котором $R_1 = B_1$, а вместо последнего слагаемого в (4.1) необходимо рассматривать слагаемое $-(s_3 + B_1 g_0 \beta_3)$. Принимая во внимание результат п. 4, в данном варианте получим $R_1 = B_1 = 0$. То есть квадратичная форма $B_1 \nu_1^2 + B_2 \nu_2^2 + B_3 \nu_3^2$ становится вырожденной $B_3 \nu_3^2$. Данный результат не представляет интереса для динамики гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил.

Заключение. При рассмотрении условий существования полурегулярных прецессий второго типа гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил построено новое решение уравнений движения, в которых учтено свойство переменности гиростатического момента. Данное решение характеризуется тремя инвариантными соотношениями: (1.8) и формулами (1.14). Ключевыми условиями существования этого решения являются равенства (2.8), (2.9), характеризующие распределение масс, которое можно отнести к обобщенным условиям С.В. Ковалевской. Решение описывается элементарными функциями времени, а скорость прецессии тела-носителя является дробно-линейной функцией тригонометрической функции $\sin g_0 t$. В общем случае решение поставленной задачи достаточно сложно. Оно может быть описано следующим образом: на первом этапе исследования условий существования на основании второго интеграла из (1.3) с помощью инвариантного соотношения (1.8) и решения (1.14), (1.15) (в частном случае вместо (1.14), (1.15) можно привлечь (1.16)) определяется функция $\lambda_3(\psi)$; на втором этапе эта функция подставляется в уравнения (2.4)–(2.6) и находятся три дифференциальных уравнения на функцию $\varepsilon(\psi)$ (очевидно, что они будут зависимыми); на третьем этапе исследуется задача об условиях интегрирования полученных уравнений в квадратурах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 672 с.
2. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. Mat. Pura Appl. 1947. V. 26. 271–281. https://doi.org/10.1007/BF02415381
3. *Klein F., Sommerfeld A.* Über die Theorie des Kreisels. New York: Johnson Reprint corp., 1965. 966 p.
4. *Горр Г.В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел // Прикл. мат. мех. 2003. Т. 67. № 4. С. 573–587.
5. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. Донецк: ДонНУ, 2009. 222 с.
6. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. Донецк: ДонНУ, 2010. 364 с.
7. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Котов Г.А.* Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом. Донецк: ГУ “ИПММ”, 2018. 265 с.
8. *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. 292 с.
9. *Румянцев В.В.* Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Мат. мех. 1970. № 2. С. 83–96.
10. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Мех. тверд. тела. 1972. Вып. 4. С. 52–73.
11. *Горр Г.В., Балаклицкая Т.В.* О движении главных осей твердого тела, имеющего неподвижную точку, в случае прецессий относительно вертикали // Мех. тверд. тела. 2019. Вып. 49. С. 55–65.
12. *Докшевич А.И.* Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона. Киев: Наук. думка, 1992. 168 с.
13. *Стеклов В.А.* О движении твердого тела в жидкости. Харьков, 1893. 234 с.

14. *Харламов П.В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Журнал прикл. механики и техн. физики. 1963. № 4. С. 17–29.
15. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations // J. Mecan. Theor. Appl. 1986. V. 5. № 5. P. 747–754.
16. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. 384 с.
17. *Горр Г.В.* О трех инвариантных соотношениях уравнений движения тела в потенциальном поле сил // Прикл. мат. мех. 2019. Т. 83. № 2. С. 202–214.
18. *Gorr G.V.* On three invariant of the equations of motion of a body in a potential field of force // Mech. Solid. 2019. V. 54. P. 234–244. https://doi.org/10.3103/S0025654419030105
19. *Горр Г.В., Белоконь Т.В.* О решениях уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом // Прикл. мат. мех. 2021. Т. 85. № 2. С. 139–151. https://doi.org/10.31857/S0032823521020053
20. *Асланов В.С., Дорошин А.В.* Движение системы соосных тел переменной массы // Прикл. мат. мех. 2004. Т. 68. № 6. С. 999–1009.