ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2023, № 2, с. 125–135

УДК : 517.977, 534.11

ЗАДАЧА ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ СМЕЩЕНИЕМ НА ДВУХ КОНЦАХ ПРОЦЕССОМ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ, СОСТОЯЩЕГО ИЗ ДВУХ УЧАСТКОВ РАЗНОЙ ПЛОТНОСТИ И УПРУГОСТИ

© 2023 г. В. Р. Барсегян[a,b,*]

[a] *Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения*
[b] *Ереванский государственный университет, Ереван, Армения*
**e-mail: barseghyan@sci.am*

Поступила в редакцию 29.11.2021 г.
После доработки 14.03.2022 г.
Принята к публикации 20.04.2022 г.

Рассмотрена задача граничного управления для одномерного волнового уравнения с кусочно-постоянными характеристиками. При этом полагается, что время прохождения волны через каждый однородный участок одинаково. Управление осуществляется смещением на двух концах. Предложен конструктивный подход построения управляющего воздействия с заданными начальным и конечным условиями. Схема построения заключается в следующем: исходная задача сводится к задаче управления распределенными воздействиями с нулевыми граничными условиями. Далее используется метод разделения переменных и методы теории управления конечномерными системами. Полученные результаты иллюстрируются на конкретном примере.

Ключевые слова: управление колебаниями, продольные колебания кусочно-однородного стержня, поперечные колебания кусочно-однородной струны, граничное управление, разделение переменных

DOI: 10.31857/S0572329922600517, **EDN:** DGCRJE

Введение. Задачам граничного управления и оптималного управления колебательными процессами посвящены многие исследования, в частности, работы [1–12].

В настоящей работе рассмотрена задача граничного управления для одномерного волнового уравнения, описывающего не только поперечные колебания неоднородной струны, но и продольные колебания неоднородного стержня. Рассмотренный колебательный процесс состоит из двух участков с разными упругими свойствами и плотностями. Предпологается, что длины однородных участков такие, что время прохождения волны по каждому из однородных участков является одинаковым. Условия, определяющие контактные взаимодействия материалов разнородных тел имеют важные значения. Следовательно, при математическом моделировании учет этих условий сопряжения, соединения (склейки) двух участков с разными физическими характеристиками материалов, должны соответствовать условиям непрерывного истечения возбуждаемых волновых процессов.

Необходимость моделирования и управления распределенных колебательных процессов составных систем с кусочно-постоянными (неоднородными) характеристиками возникает во многих теоретических и прикладных областях науки и техники. Однако, научное направление по управлению неоднородными упругими колебаниями пока еще недостаточно исследовано, находится в стадии становления и по нему имеются лишь некоторые результаты. К исследованию решений задач управления подобных разнородных распределенных составных систем посвящены, в частности, работы [6–12]. В работах [6, 7] (и других работах этого же автора и его учеников) изучены подобные задачи граничного управления неоднородными колебательными процессами. При исследовании этих задач граничного управления использованы метод Даламбера и выведены формулы типа Даламбера. К краевым задачам для уравнения, описывающего процесс продольных колебаний стержня с кусочно-постоянными характеристиками (состоящими из не менее двух участков) со свободным либо закрепленным правым концом, посвящены, в частности, работы [13–18]. В этих работах исследования проведены в классе обобщенного решения. В [19] рассматриваются колебания механической системы, представляющей собой два куска струны одинаковой длины, соединенных между собой пружиной. С помощью формулы Даламбера исследована задача граничного управления колебаниями сложносочлененной системы с особенностями. Получен аналог формулы Даламбера.

Цель данной статьи состоит в разработке аналитического подхода построения функции граничного управления одномерными колебательными неоднородными процессами, переводящего колебания за заданный промежуток времени из начального состояния в конечное состояние.

1. Постановка задачи. Рассматриваются продольные колебания кусочно-однородного стержня, расположенного вдоль отрезка $-l_1 \le x \le l$ и состоящего из двух участков: участок $-l_1 \le x \le 0$ с линейной плотностью $\rho_1 = \text{const}$, с модулем Юнга $k_1 = \text{const}$ и скоростью прохождения по нему волны, равной $a_1 = \sqrt{\frac{k_1}{\rho_1}}$, и участка $0 \le x \le l$ с линейной плотностью $\rho_2 = \text{const}$, с модулем Юнга $k_2 = \text{const}$ и скоростью прохождения по нему волны, равной $a_2 = \sqrt{\frac{k_2}{\rho_2}}$. Как и в работе [6], предполагается, что длины l_1 и l участков стержневых систем выбраны так, что время прохождения волны по участку $-l_1 \le x \le 0$ совпадает со временем прохождения волны по участку $0 \le x \le l$, т.е.

$$\frac{l_1}{a_1} = \frac{l}{a_2} \tag{1.1}$$

Пусть состояние (продольные колебания) стержня (или поперечные колебания струны), описывается функцией $Q(x, t)$, $-l_1 \le x \le l$, $0 \le t \le T$, а отклонения от состояния равновесия, подчиняются следующему волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_1^2 \dfrac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2}, & -l_1 \le x \le 0, \quad 0 \le t \le T \\ a_2^2 \dfrac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2}, & 0 \le x \le l, \quad 0 \le t \le T \end{cases} \tag{1.2}$$

с начальными (при $t = t_0 = 0$) условиями

$$Q(x,0) = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad -l_1 \le x \le l \tag{1.3}$$

с граничными условиями

$$Q(-l_1,t) = \mu(t), \quad Q(l,t) = \nu(t), \quad 0 \le t \le T \tag{1.4}$$

и с условиями сопряжения в точке $x = 0$ соединения участков

$$Q(0-0,t) = Q(0+0,t)$$
$$a_1^2\rho_1 \left.\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0-0} = a_2^2\rho_2 \left.\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0+0} \tag{1.5}$$

и конечными (при $t = T$) условиями

$$Q(x,T) = \varphi_T(x), \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(x), \quad -l_1 \le x \le l \tag{1.6}$$

В формуле (1.4) функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ – управляющие воздействия (граничные управления). Предполагается, что функция $Q(x,t) \in C^2(\Omega_T)$, где $\Omega_T = \{(x,t) : x \in [-l_1, l], t \in [0,T]\}$, а функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_T(x) \in C^2[-l_1, l]$, $\psi_0(x)$, $\psi_T(x) \in C^1[-l_1, l]$.

Предполагается также, что все функции такие, что выполняются условия согласования.

$$\begin{gathered}
\mu(0) = \varphi_0(-l_1), \quad \dot{\mu}(0) = \psi_0(-l_1), \quad \nu(0) = \varphi_0(l), \quad \dot{\nu}(0) = \psi_0(l) \\
\mu(T) = \varphi_T(-l_1), \quad \dot{\mu}(T) = \psi_T(-l_1), \quad \nu(T) = \varphi_T(l), \quad \dot{\nu}(T) = \psi_T(l)
\end{gathered} \tag{1.7}$$

Задача граничного управления. Требуется найти граничные управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$ $0 \le t \le T$, переводящие колебания системы (1.2), из заданного начального состояния (1.3) в конечное состояние (1.6).

2. Сведение задачи к задаче с нулевыми граничными условиями. Для решения поставленной задачи перейдем к новой переменной [20]

$$\xi = \begin{cases} \dfrac{a_2}{a_1} x, & -l_1 \le x \le 0 \\ x, & 0 \le x \le l \end{cases} \tag{2.1}$$

что приводит к растяжению или сжатию отрезка $-l_1 \le x \le 0$ относительно точки $x = 0$. При этом с учетом (1.1), будем иметь, что отрезок $-l_1 \le x \le 0$ переходит к отрезку $-l \le \xi \le 0$. Для функции $Q(\xi,t)$ получим на отрезках одинаковой длины одинаковое уравнение

$$\frac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_2^2 \dfrac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial \xi^2}, & -l \le \xi \le 0, \quad 0 \le t \le T \\ a_2^2 \dfrac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial \xi^2}, & 0 \le \xi \le l, \quad 0 \le t \le T \end{cases}$$

или

$$\frac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial \xi^2}, \quad -l \le \xi \le l, \quad 0 \le t \le T \tag{2.2}$$

с соответствующими начальными условиями

$$Q(\xi,0) = \varphi_0(\xi), \quad \left.\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(\xi), \quad -l \le x \le l \tag{2.3}$$

с граничными условиями

$$Q(-l,t) = \mu(t), \quad Q(l,t) = \nu(t), \quad 0 \le t \le T \tag{2.4}$$

с конечными условиями

$$Q(\xi,T) = \varphi_T(\xi), \quad \left.\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(\xi), \quad -l \le \xi \le l \tag{2.5}$$

и с условиями сопряжения в точке $\xi = 0$ соединения участков

$$Q(0-0,t) = Q(0+0,t), \quad a_1\rho_1 \left.\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial \xi}\right|_{\xi=0-0} = a_2\rho_2 \left.\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial \xi}\right|_{\xi=0+0} \tag{2.6}$$

Так как граничные условия (2.4) неоднородны, решение уравнения (2.2) построим в виде суммы

$$Q(\xi,t) = V(\xi,t) + W(\xi,t) \tag{2.7}$$

где $V(\xi,t)$ – функция с однородными граничными условиями

$$V(-l,t) = V(l,t) = 0 \tag{2.8}$$

требующая определения, а $W(\xi,t)$ – решение уравнения (2.2) с неоднородными граничными условиями

$$W(-l,t) = \mu(t), \quad W(l,t) = \nu(t) \tag{2.9}$$

Функция $W(\xi,t)$ имеет вид

$$W(\xi,t) = \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\mu(t) + (l+\xi)\nu(t)\right] \tag{2.10}$$

Подставив (2.7) в (2.2) и учитывая (2.10), получим следующее уравнение для определения функции $V(\xi,t)$

$$\frac{\partial^2 V(\xi,t)}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 V(\xi,t)}{\partial \xi^2} + F(\xi,t), \quad -l \le \xi \le l, \quad 0 \le t \le T \tag{2.11}$$

где

$$F(\xi,t) = \frac{1}{2l}\left[(\xi - l)\ddot{\mu}(t) - (\xi + l)\ddot{\nu}(t)\right] \tag{2.12}$$

Функция $V(\xi,t)$ удовлетворяет соответствующему (2.6) условию сопряжения в точке $\xi = 0$ соединения участков. Отметим, что согласно (2.1) будем иметь

$$\varphi_0(-l_1) = \varphi_0(-l), \quad \varphi_T(-l_1) = \varphi_T(-l), \quad \psi_0(-l_1) = \psi_0(-l), \quad \psi_T(-l_1) = \psi_T(-l) \tag{2.13}$$

В силу начальных и конечных условий, соответственно (2.3) и (2.5), функция $V(\xi,t)$ должна удовлетворять следующим начальным

$$\begin{gathered} V(\xi,0) = \varphi_0(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\mu(0) + (l+\xi)\nu(0)\right] \\ \left.\frac{\partial V(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\dot{\mu}(0) + (l+\xi)\dot{\nu}(0)\right] \end{gathered} \tag{2.14}$$

и конечным условиям

$$\begin{gathered} V(\xi,T) = \varphi_T(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\mu(T) + (l+\xi)\nu(T)\right] \\ \left.\frac{\partial V(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\dot{\mu}(T) + (l+\xi)\dot{\nu}(T)\right] \end{gathered} \tag{2.15}$$

С учетом условий (1.7) и (2.13), условия (2.14), (2.15) запишутся следующим образом, соответственно:

$$
\begin{aligned}
V(\xi,0) &= \varphi_0(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\varphi_0(-l) + (l+\xi)\varphi_0(l)\right] \\
\left.\frac{\partial V(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= \psi_0(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\psi_0(-l) + (l+\xi)\psi_0(l)\right]
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

$$
\begin{aligned}
V(\xi,T) &= \varphi_T(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\varphi_T(-l) + (l+\xi)\varphi_T(l)\right] \\
\left.\frac{\partial V(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=T} &= \psi_T(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\psi_T(-l) + (l+\xi)\psi_T(l)\right]
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

Таким образом, решение задачи сведено к задаче управления движением, описываемым уравнением (2.11) с однородными граничными условиями (2.8), которая формулируется следующим образом: требуется найти такие граничные управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0 \le t \le T$, под воздействием которых колебание, описываемое уравнением (2.11) с граничными условиями (2.8), переходит из заданного начального состояния (2.16) в конечное состояние (2.17).

3. Решение задачи. Учитывая, что граничные условия (2.8) однородны и выполнены условия согласованности, решение уравнения (2.11) ищем в виде

$$
V(\xi,t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t)\sin\frac{\pi k\xi}{l}, \quad V_k(t) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} V(\xi,t)\sin\frac{\pi k\xi}{l}d\xi \tag{3.1}
$$

Представим в виде рядов Фурье, в базисе $\left\{\sin\frac{\pi k\xi}{l}\right\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, функции $F(\xi,t)$, $\varphi_0(\xi)$, $\varphi_T(\xi)$, $\psi_0(\xi)$ и $\psi_T(\xi)$ и, подставив их значения вместе с $V(\xi,t)$ в уравнения (2.11), (2.12) и в условия (2.16), (2.17), получим

$$
\ddot{V}_k(t) + \lambda_k^2 V_k(t) = F_k(t), \quad \lambda_k^2 = \left(\frac{a_2\pi k}{l}\right)^2 \tag{3.2}
$$

$$
F_k(t) = \frac{a_2}{\lambda_k l}\left[\ddot{\nu}(t)(2(-1)^k - 1) - \ddot{\mu}(t)\right] \tag{3.3}
$$

$$
\begin{aligned}
V_k(0) &= \varphi_k^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_k l}\left[\varphi_0(-l) - \varphi_0(l)(2(-1)^k - 1)\right] \\
\dot{V}_k(0) &= \psi_k^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_k l}\left[\psi_0(-l) - \psi_0(l)(2(-1)^k - 1)\right]
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

$$
\begin{aligned}
V_k(T) &= \varphi_k^{(T)} - \frac{a_2}{\lambda_k l}\left[\varphi_T(-l) - \varphi_T(l)(2(-1)^k - 1)\right] \\
\dot{V}_k(T) &= \psi_k^{(T)} - \frac{a_2}{\lambda_k l}\left[\psi_T(-l) - \psi_T(l)(2(-1)^k - 1)\right]
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Здесь коэффициенты Фурье функции $F(\xi,t)$, $\varphi_0(\xi)$, $\varphi_T(\xi)$, $\psi_0(\xi)$ и $\psi_T(\xi)$ обозначены через $F_k(t)$, $\varphi_k^{(0)}$, $\varphi_k^{(T)}$, $\psi_k^{(0)}$ и $\psi_k^{(T)}$ соответственно.

Общее решение неоднородного уравнения (3.2) с условиями (3.4) и его производная имеют вид

$$
\begin{aligned}
V_k(t) &= V_k(0)\cos\lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k}\dot{V}_k(0)\sin\lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k}\int_0^t F_k(\tau)\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau \\
\dot{V}_k(t) &= -\lambda_k V_k(0)\sin\lambda_k t + \dot{V}_k(0)\cos\lambda_k t + \int_0^t F_k(\tau)\cos\lambda_k(t-\tau)d\tau
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

Далее, для формулы (3.6), при $t = T$, учитывая конечные (3.5) условия применяем подходы, приведенные в работах [2–5, 20]. Тогда получим, что функции управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$ для каждого k должны удовлетворять следующим интегральным соотношениям:

$$\begin{gathered}\int_0^T \mu(\tau)\sin\lambda_k (T-\tau)\,d\tau + E_k\int_0^T \nu(\tau)\sin\lambda_k (T-\tau)\,d\tau = C_{1k}\\ \int_0^T \mu(\tau)\cos\lambda_k (T-\tau)\,d\tau + E_k\int_0^T \nu(\tau)\cos\lambda_k (T-\tau)\,d\tau = C_{2k}\end{gathered} \tag{3.7}$$

где

$$C_{1k} = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{1k} + X_{1k} + E_k Y_{1k}\right], \quad \tilde{C}_{1k} = \lambda_k V_k(T) - \lambda_k V_k(0)\cos\lambda_k T - \dot{V}_k(0)\sin\lambda_k T$$

$$C_{2k} = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{2k} + X_{2k} + E_k Y_{2k}\right], \quad \tilde{C}_{2k} = \dot{V}_k(T) + \lambda_k V_k(0)\sin\lambda_k T - \dot{V}_k(0)\cos\lambda_k T$$

$$X_{1k} = \lambda_k\varphi_T(-l) - \psi_0(-l)\sin\lambda_k T - \lambda_k\varphi_0(-l)\cos\lambda_k T, \quad E_k = 1 - 2(-1)^k \tag{3.8}$$

$$X_{2k} = \psi_T(-l) - \psi_0(-l)\cos\lambda_k T + \lambda_k\varphi_0(-l)\sin\lambda_k T$$

$$\begin{gathered}Y_{1k} = \lambda_k\varphi_T(l) - \psi_0(l)\sin\lambda_k T - \lambda_k\varphi_0(l)\cos\lambda_k T\\ Y_{2k} = \psi_T(l) - \psi_0(l)\cos\lambda_k T + \lambda_k\varphi_0(l)\sin\lambda_k T\end{gathered}$$

Введем следующие обозначения:

$$\bar{H}_k(\tau) = \begin{pmatrix}\sin\lambda_k (T-\tau) & E_k\sin\lambda_k (T-\tau)\\ \cos\lambda_k (T-\tau) & E_k\cos\lambda_k (T-\tau)\end{pmatrix}, \quad C_k = \begin{pmatrix}C_{1k}\\ C_{2k}\end{pmatrix}, \quad U(\tau) = \begin{pmatrix}\mu(\tau)\\ \nu(\tau)\end{pmatrix}$$

Тогда соотношение (3.7) запишется следующим образом

$$\int_0^T \bar{H}_k(\tau)U(\tau)d\tau = C_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.9}$$

Следовательно, для нахождения функции $U(\tau)$, $\tau \in [0, T]$, получаются бесконечные интегральные соотношения (3.9).

На практике задача синтеза управления решается используя методы теории управления конечномерными системами [1, 21, 22]. Для первых n гармоник введем следующие обозначения блочных матриц

$$H_n(\tau) = \begin{pmatrix}\bar{H}_1(\tau)\\ \bar{H}_2(\tau)\\ \vdots\\ \bar{H}_n(\tau)\end{pmatrix}, \quad \eta_n = \begin{pmatrix}C_1\\ C_2\\ \vdots\\ C_n\end{pmatrix} \tag{3.10}$$

с размерностями $H_n(\tau) - (2n\cdot 2)$, $\eta_n - (2n\cdot 1)$.

Для первых n гармоник, с учетом (3.10), из (3.9) будем иметь

$$\int_0^T H_n(\tau)U_n(\tau)d\tau = \eta_n \tag{3.11}$$

(здесь и далее обозначение в нижнем индексе буквы “n” будет означать – “для первых n гармоник”).

Таким образом, из (3.11) следует, что первые n гармоники системы (3.2) с условиями (3.3)–(3.5) вполне управляемы тогда и только тогда, когда для любого вектора η_n (3.10) можно найти управление $U_n(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющее условию (3.11).

Управляющее воздействие $U_n(t)$, удовлетворяющее интегральному соотношению (3.11), представим в виде [21, 22]

$$U_n(t) = H_n^T(t) S_n^{-1} \eta_n + f_n(t) \tag{3.12}$$

где $H_n^T(t)$ – транспонированная матрица, $f_n(t)$ – вектор-функция и такая, что

$$\int_0^T H_n(t) f_n(t) dt = 0, \quad S_n = \int_0^T H_n(t) H_n^T(t) \, dt \tag{3.13}$$

Здесь, S_n – известная матрица размерностью $(2n \cdot 2n)$, для которой предполагается, что $\det S_n \neq 0$.

Из формулы (3.12) следует, что существует множество управляющих функций, решающих задачу граничного управления.

Обозначим

$$S_n^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{s}_{11}^{(11)} & \hat{s}_{12}^{(11)} & \ldots & \hat{s}_{11}^{(1n)} & \hat{s}_{11}^{(1n)} \\ \hat{s}_{12}^{(11)} & \hat{s}_{12}^{(11)} & \ldots & \hat{s}_{21}^{(11)} & \hat{s}_{22}^{(11)} \\ \ldots & & \ldots & & \ldots \\ \hat{s}_{11}^{(n1)} & \hat{s}_{12}^{(n1)} & \ldots & \hat{s}_{11}^{(nn)} & \hat{s}_{12}^{(nn)} \\ \hat{s}_{21}^{(n1)} & \hat{s}_{22}^{(n1)} & \ldots & \hat{s}_{21}^{(nn)} & \hat{s}_{22}^{(nn)} \end{pmatrix}$$

Из формулы (3.10), (3.12) с учетом введенных обозначений функции граничного управления представляются в виде

$$\begin{aligned} \mu_n(t) &= \sum_{k=1}^{n} \left[S_1^{(k)} \sin\lambda_k (T - t) + S_2^{(k)} \cos\lambda_k (T - t) \right] + f_n(t) \\ \nu_n(t) &= \sum_{k=1}^{n} E_k \left[S_1^{(k)} \sin\lambda_k (T - t) + S_2^{(k)} \cos\lambda_k (T - t) \right] + f_n(t) \end{aligned} \tag{3.14}$$

где

$$S_1^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \left[\hat{s}_{11}^{(kj)} C_{1j} + \hat{s}_{12}^{(kj)} C_{2j} \right], \quad S_2^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \left[\hat{s}_{21}^{(kj)} C_{1j} + \hat{s}_{22}^{(kj)} C_{2j} \right]$$

Подставляя построенные выражения для функции $\mu_n(t)$ и $\nu_n(t)$ в (3.3), а найденное для $F_k(t)$ выражение – в (3.6), получим функцию $V_k(t)$, $t \in [0, T]$. Далее, из формулы (3.1) будем иметь

$$V_n(\xi, t) = \sum_{k=1}^{n} V_k(t) \sin\frac{\pi k}{l} \xi \tag{3.15}$$

а с помощью (2.7) и (2.10) функция колебания $Q_n(\xi, t)$ для первых n гармоник запишется в виде

$$Q_n(\xi, t) = V_n(\xi, t) + W_n(\xi, t) \tag{3.16}$$

$$W_n(\xi,t) = \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\mu_n(t) + (l+\xi)\nu_n(t)\right] \tag{3.17}$$

Учитывая обозначения (2.1) функция $Q_n\,(x,t)$ при $-l_1 \le x \le l$ представляется в виде:

$$Q_n(x,t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} V_k(t)\sin\frac{\pi k}{l_1}x + \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{x}{l_1}\right)\mu_n(t) + \left(1+\frac{x}{l_1}\right)\nu_n(t)\right] \\ -l_1 \le x \le 0, \quad 0 \le t \le T \\ \sum\limits_{k=1}^{n} V_k(t)\sin\frac{\pi k}{l}x + \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{x}{l}\right)\mu_n(t) + \left(1+\frac{x}{l}\right)\nu_n(t)\right] \\ 0 \le x \le l, \quad 0 \le t \le T \end{cases} \tag{3.18}$$

4. Пример. Для иллюстрации вышеизложенного построения предположим, что в граничных условиях (1.4) $Q(l,t) = 0$, $0 \le t \le T$ (т.е. $\nu(t) = 0$).

В этом случае из формулы (3.3) следует $F_k(t) = -\frac{2a_2}{\lambda_k l}\mu''(t)$, а согласно формулам (3.7) будем иметь следующие интегральные соотношения

$$\int\limits_0^T \mu(\tau)\sin\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau = C_{1k}$$

$$\int\limits_0^T \mu(\tau)\cos\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau = C_{2k}$$

$$C_{1k} = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{1k} + X_{1k}\right], \quad C_{2k} = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{2k} + X_{2k}\right]$$

Постоянные $\tilde{C}_{1k}$, $\tilde{C}_{2k}$, X_{1k} и X_{2k} определяются из формулы (3.8). Следовательно

$$\bar{H}_k(\tau) = \begin{pmatrix} \sin\lambda_k(T-\tau) \\ \cos\lambda_k(T-\tau) \end{pmatrix}, \quad C_k = \begin{pmatrix} C_{1k} \\ C_{2k} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Для простоты изложения, согласно формуле (3.12) (или (3.14)), (3.13), построим функцию граничного управления $\mu_n(t)$ при $n = 1$ (следовательно $k = 1$). Тогда, согласно (3.10), будем иметь $H_1(\tau) = \bar{H}_1(\tau)$, $\eta_1 = C_1$, а из (3.13), элементы матрицы

$$S_1 = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$$

получим в виде:

$$s_{11} = \frac{T}{2} - \frac{1}{4\lambda_1}\sin 2\lambda_1 T, \quad s_{12} = s_{21} = \frac{1}{2\lambda_1}\sin^2\lambda_1 T, \quad s_{22} = \frac{T}{2} + \frac{1}{4\lambda_1}\sin 2\lambda_1 T$$

при этом $\Delta = \det S_1 \ne 0$.

Из формулы (3.12) (или (3.14)) следует, что $\mu_1(\tau) = H_1^T(\tau)S_1^{-1}\eta_1 + f_1(\tau)$. Предполагая, что $f_1(\tau) = 0$, получим, при $\tau \in [0,\ T]$

$$\mu_1(\tau) = \sin\lambda_1\,(T-\tau)[\hat{s}_{11}^{(11)}C_{11} + \hat{s}_{12}^{(11)}C_{21}] + \cos\lambda_1\,(T-\tau)[\hat{s}_{21}^{(11)}C_{11} + \hat{s}_{22}^{(11)}C_{21}]$$

Отметим, что согласно формулам (3.15)–(3.16) будем иметь

$$Q_1(\xi,t) = V_1(t)\sin\frac{\pi}{l}\xi + \frac{1}{2l}(l-\xi)\mu_1(t)$$

Предположим, что $T = 2\dfrac{l}{a_2}$. Тогда, с учетом $\lambda_1 = \dfrac{a_2\pi}{l}$, получим $T\lambda_1 = 2\pi$. Для матриц S_1 и S_1^{-1} будем иметь:

$$S_1 = \begin{pmatrix} \frac{l}{a_2} & 0 \\ 0 & \frac{l}{a_2} \end{pmatrix}, \quad S_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_2}{l} & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{l} \end{pmatrix}, \quad \det S_1 = \left(\frac{l}{a_2}\right)^2$$

Учитывая, что $\widehat{s}_{12}^{(11)} = \widehat{s}_{21}^{(11)} = 0$, получим

$$C_{11} = \frac{l}{a_2}\left(\varphi_1^{(T)} - \varphi_1^{(0)}\right), \quad C_{21} = \frac{l}{a_2\lambda_1}\left(\psi_1^{(T)} - \psi_1^{(0)}\right)$$

$$\mu_1(\tau) = \frac{1}{\lambda_1}\left(\psi_1^{(T)} - \psi_1^{(0)}\right)\cos\lambda_1\tau - \left(\varphi_1^{(T)} - \varphi_1^{(0)}\right)\sin\lambda_1\tau$$

следовательно

$$F_1(\tau) = \frac{a_2}{l}\left(\psi_1^{(T)} - \psi_1^{(0)}\right)\cos\lambda_1\tau - \frac{a_2\lambda_1}{l}\left(\varphi_1^{(T)} - \varphi_1^{(0)}\right)\sin\lambda_1\tau$$

Подставляя найденное для $F_1(\tau)$ выражение в (3.6), получим функцию $V_1(t)$, $t \in [0,T]$ в явном виде

$$V_1(t) = \left[\varphi_1^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_1 l}\varphi_0(-l) + \frac{a_2}{2l}\left(\varphi_1^{(T)} - \varphi_1^{(0)}\right)t\right]\cos\lambda_1 t +$$
$$+\frac{1}{\lambda_1}\left[\psi_1^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_1 l}\psi_1(-l) - \frac{a_2}{2l}\left(\varphi_1^{(T)} - \varphi_1^{(0)}\right) + \frac{a_2}{2l}\left(\psi_1^{(T)} - \psi_1^{(0)}\right)t\right]\sin\lambda_1 t$$

Следовательно, для функций $Q_1(\xi,t)$, получим следующее явное выражение

$$Q_1(\xi,t) = \left\{\left[\varphi_1^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_1 l}\varphi_0(-l) + \frac{a_2}{2l}\left(\varphi_1^{(T)} - \varphi_1^{(0)}\right)t\right]\cos\lambda_1 t +\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\lambda_1}\left[\psi_1^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_1 l}\psi_1(-l) - \frac{a_2}{2l}\left(\varphi_1^{(T)} - \varphi_1^{(0)}\right) + \frac{a_2}{2l}\left(\psi_1^{(T)} - \psi_1^{(0)}\right)t\right]\sin\lambda_1 t\right\}\sin\frac{\pi}{l}\xi +$$
$$+\frac{1}{2l}(l-\xi)\left[\frac{1}{\lambda_1}\left(\psi_1^{(T)} - \psi_1^{(0)}\right)\cos\lambda_1 t - \left(\varphi_1^{(T)} - \varphi_1^{(0)}\right)\sin\lambda_1 t\right]$$

Имея явные виды функции $\mu_1(t)$, $V_1(t)$ или $Q_1(\xi,t)$ с помощью формул (3.15)–(3.18) или формулы замены переменных (2.1) можно записать явное выражение функции $Q_1(x,t)$, $-l_1 \le x \le l$, $0 \le t \le T$.

Заключение. В работе рассмотрена задача граничного управления одномерным волновым уравнением, описывающим поперечные колебания кусочно-однородной струны или продольные колебания кусочно-однородного стержня. Предложен конструктивный подход построения функции граничного управления одномерными неоднородными колебательными процессами. При этом явное выражение функции граничного управления представлено через заданные начальные и конечные функции прогиба и скоростей точек распределенной системы. Результаты могут быть использованы при проектировании граничного управления процессами разнородных колебаний в физических и технологических системах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
2. *Barseghyan V.R.* The control problem for stepwise changing linear systems of loaded differential equations with unseparated multipoint intermediate conditions // Mech. Solids. 2018. V. 53. № 6. P. 615–622. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-3-24-33
3. *Barseghyan V.R.* The problem of optimal control of string vibrations // Int. Appl. Mech. 2020. V. 56. № 4. P. 471–480. https://doi.org/10.1007/s10778-020-01030-w
4. *Barseghyan V.R.* The problem of optimal control of vibrations of a string with non-separated conditions into state functions at given intermediate time instants // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. № 2. P. 226–235. https://doi.org/10.31857/S0005231020020038
5. *Barseghyan V., Solodusha S.* Optimal boundary control of string vibrations with given shape of deflection at a certain moment of time // Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2021. Lecture Notes in Computer Science. V. 12755 / Ed. by *P. Pardalos, M. Khachay, A. Kazakov.* Cham: Springer, 2021. P. 299–313. https://doi.org/10.1007/978-3-030-77876-7_20
6. *Ильин В.А.* Оптимизация граничного управления колебаниями стержня, состоящего из двух разнородных участков // Доклады РАН. 2011. Т. 440. № 2. С. 159–163.
7. *Ильин В.А.* О приведении в произвольно заданое состояние колебаний первоначально покоящегося стержня, состоящего из двух разнородных участков // Доклады РАН. 2010. Т. 435. № 6. С. 732–735.
8. *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 85–92.
9. *Провоторов В.В.* Построение граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы струн // Вестн. Санкт-Петерб. ун-та. Сер. 1. С. 62–71. https://doi.org/10. 2012. Вып. 1.
10. *Amara J. Ben, Bouzidi H.* Null boundary controllability of a one-dimensional heat equation with an internal point mass and variable coefficients // J. Math. Phys. 2018. V. 59. № 1. P. 011512. https://doi.org/10.1063/1.5021947
11. *Amara J. Ben, Beldi E.* Boundary controllability of two vibrating strings connected by a point mass with variable coefficients // SIAM J. Control Optim. 2019. V. 57. № 5. P. 3360–3387. https://doi.org/10.1137/16M1100496
12. *Mercier D., Régnier V.* Boundary controllability of a chain of serially connected Euler-Bernoulli beams with interior masses // Collect. Math. 2009. V. 60. № 3. P. 307–334. https://doi.org/10.1007/BF03191374
13. *Кулешов А.А.* Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня и уравнения поперечных колебаний неоднородной струны, состоящих из двух участков разной плотности и упругости // Доклады РАН. 2012. Т. 442. № 5. С. 594–597.
14. *Кулешов А.А.* Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня со свободным либо закрепленным правым концом, состоящего из двух участков разной плотности и упругости // Доклады РАН. 2012. Т. 442. № 4. С. 451–454.
15. *Рогожников А.М.* Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков, при условии совпадения времени прохождения волны по каждому из этих участков // Доклады РАН. 2011. Т. 441. № 4. С. 449–451.
16. *Рогожников А.М.* Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами // Доклады РАН. 2012. Т. 444. С. 488–491.

17. *Аниконов Д.С., Коновалова Д.С.* Прямая и обратная задачи для волнового уравнения с разрывными коэффициентами // Науч.-тех. ведом. СПбГПУ. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 11. № 2. С. 61–72.
18. *Смирнов И.Н.* Смешанные задачи для телеграфного уравнения, в случае системы, состоящей из двух участков, имеющих разные плотности и разные упругости, но одинаковые импедансы // Доклады РАН. 2010. Т. 435. № 2. С. 172–177.
19. *Зверева М.Б., Найдюк Ф.О., Залукаева Ж.О.* Моделирование колебаний сингулярной струны // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Физ., мат. 2014. № 2. С. 111–119.
20. *Холодовский С.Е., Чухрий П.А.* Задача о движении неограниченной кусочно-однородной струны // Уч. зап. Забайкальск. гос. ун-та. Сер. Физ. мат. техн. технол. 2018. Т. 13. № 4. С. 42–50.
https://doi.org/10.21209/2308-8761-2018-13-4-42-50
21. *Барсегян В.Р.* Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016. 230 с.
22. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.