

УДК 539.374

**О ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ В МАТЕРИАЛЕ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ, НАСАЖЕННОГО НА ЖЕСТКИЙ ВАЛ
В УСЛОВИЯХ ЕГО ПЕРЕМЕННОГО ВРАЩЕНИЯ**

© 2023 г. С. В. Фирсов^{а,*}

^аИМиМ, ХФИЦ ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, Российская Федерация

^{*}*e-mail*: firsov.s.new@yandex.ru

Поступила в редакцию 21.05.2022 г.

После доработки 24.05.2022 г.

Принята к публикации 26.05.2022 г.

Расчитывается развитие вязкопластического течения в материале цилиндрического слоя, помещенного на жесткий цилиндрический вал, и вращающегося вместе с ним вокруг их общей оси. Определяются в зависимости от возрастающей скорости вращения до максимальной место и моменты времени начала вязкопластического течения, закономерности продвижения области течения, изменяющиеся деформации и напряжения в деформируемом материале. В качестве условия вязкопластического течения принимается соответствующее обобщение условия максимальных октаэдрических напряжений. Для целей тестирования программ расчетов получено точное решение задачи об установившемся вязкопластическом течении материала при вращении составного цилиндра с постоянной скоростью.

Ключевые слова: упругость, вязкопластичность, вращающийся цилиндр, деформирование за счет инертностных сил

DOI: 10.31857/S0572329922600359, EDN: DFBVULC

1. Введение. С тех пор как был сформулирован практический интерес к задачам о приобретении материалом вращающихся цилиндров и дисков необратимых деформаций [1, 2] такая задача становится одной из классических для теории ползучести и теории пластического течения. Рассматривалась она неоднократно [3–7]. При использовании кусочно-линейных потенциалов (классических поверхностей нагружения) удалось получить точные или численно-аналитические решения задачи [8–10]. Совместное производство необратимых деформаций за счет инертностных массовых сил как в медленном процессе ползучести материала, так и в более быстром процессе пластического течения рассматривалось в [10, 11].

2. Исходные соотношения принимаемой математической модели. Деформируемый материал полагаем упруговязкопластическим, допускающим лишь малые деформации. Полные деформации **d** в материале считаем представленными суммой его обратимых (упругих) деформаций **e** и необратимых вязкопластических **p** деформаций

$$\mathbf{d} = \mathbf{e} + \mathbf{p} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \quad (2.1)$$

В (2.1) **u** — вектор перемещений. Упругие деформации задают напряжения **σ** в деформируемом материале.

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\mathbf{e})\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e} \quad (2.2)$$

Здесь λ, μ – параметры Ламе, $\mathbf{I}$ – единичный тензор составленный из символов Кронекера. Пластические деформации производятся в материале в условиях принадлежности напряжений поверхности нагружений (текучести) в пространстве напряжений $f(\boldsymbol{\sigma}, k) = 0$ (k – предел текучести). В условиях принятия принципа Мизеса [12] функция $f(\boldsymbol{\sigma}, k)$ оказывается пластическим потенциалом со следованием ассоциированного с поверхностью нагружения закона пластического течения

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \Phi \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \Phi > 0 \quad (2.3)$$

В качестве условия пластического течения (поверхности нагружения) будем использовать следующее обобщение условия максимальных октаэдрических напряжений Мизеса [13, 14]

$$(\boldsymbol{\tau} - \eta \boldsymbol{\theta}) \cdot (\boldsymbol{\tau} - \eta \boldsymbol{\theta}) = \frac{8}{3} k^2, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.4)$$

Вместе с уравнением движения (равновесия) система уравнений (2.1)–(2.4) составляет замкнутую систему уравнений, которой подчинено деформирование упруговязкопластического тела.

3. Постановка задачи. Первоначальное упругое деформирование. Рассматриваем двухслойный вал конечной длины. Внутреннюю часть вала $0 \leq r \leq R_1$ полагаем абсолютно жесткой, а часть $R_1 \leq r \leq R_2$ деформируемой. Считаем, что вал вращается вокруг своей оси с переменной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$. Для деформаций материала такого составного цилиндра имеем в цилиндрической системе координат r, φ, z , связанной с вращающимся цилиндром

$$\begin{aligned} u_r &= u_r(r, t), \quad u_\varphi = u_\varphi(r, t), \quad u_z = 0, \quad d_{rr} = e_{rr} + p_{rr} = u_{r,r} \\ d_{\varphi\varphi} &= e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi} = r^{-1} u_r, \quad d_{zz} = e_{zz} + p_{zz}, \quad d_{\varphi r} = \frac{1}{2} (u_{\varphi,r} - r^{-1} u_\varphi) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Когда торцы жестко закреплены, тогда $d_{zz} = 0$. Если они свободны, то считаем $d_{zz} = f(t)$. Такой случай называют обобщенной плоской деформацией и для определения d_{zz} вводят ограничения на осевую нагрузку

$$2\pi \int_{R_1}^{R_2} r \sigma_{zz}(r, t) dr = 0 \quad (3.2)$$

Далее рассматривается такой случай. Уравнение движения во введенной системе координат принимают форму

$$\begin{aligned} \sigma_{rr,r} + r^{-1} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) &= -\rho r \omega^2 \\ \sigma_{\varphi r,r} + 2r^{-1} \sigma_{\varphi r} &= -\rho r \dot{\omega} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь, также как и в (3.1) индекс после запятой обозначает дифференцирование по данной пространственной переменной; точкой обозначается производная по времени. Введем безразмерные зависимые и независимые переменные

$$\begin{aligned} r &= R_2 \xi, \quad \sigma_{ij} = \sigma_0 \tilde{\sigma}_{ij}, \quad u_r = R_2 \tilde{u}_r, \quad u_\varphi = R_2 \tilde{u}_\varphi \\ \psi &= R_2 \sqrt{\frac{\rho}{\sigma_0}} \omega, \quad t = R_2 \sqrt{\rho \sigma_0^{-1}} \tau \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для постоянных задачи принимаем

$$\xi_0 = \frac{R_1}{R_2} = 0.2, \quad \alpha = \frac{\lambda}{\sigma_0} = 250, \quad \beta = \frac{\mu}{\sigma_0} = 195, \quad \xi = \frac{\eta}{R_2 \sqrt{\rho \sigma_0}} = 100 \quad (3.5)$$

Здесь ρ – плотность деформируемого материала. Далее знак “~” опускаем, так как будут использоваться только безразмерные переменные. В безразмерных переменных уравнение (3.3) принимает форму

$$\begin{aligned} \xi^2 u_{r,\xi\xi} + \xi u_{r,\xi} - u_r &= -\frac{\xi^3 \psi^2}{\alpha + 2\beta} \\ \xi^2 u_{\varphi,\xi\xi} + \xi u_{\varphi,\xi} - u_\varphi &= -\frac{\xi^3 \dot{\psi}}{\beta} \end{aligned} \quad (3.6)$$

В (3.6) следует иметь ввиду, что $\dot{\psi} = \frac{d\psi}{d\tau}$. Проинтегрировав (3.6), запишем

$$\begin{aligned} u_r &= c_1 \xi + c_2 \xi^{-1} - \frac{1}{8} \frac{\xi^3 \psi^2}{\alpha + 2\beta} \\ u_\varphi &= c_3 \xi + c_4 \xi^{-1} - \frac{\xi^3 \dot{\psi}}{8\beta} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для напряжений, следуя (2.2) найдем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2(\alpha + \beta) c_1 - 2\beta c_2 \xi^{-2} + \alpha d_{zz} - \frac{1}{4} \frac{2\alpha + 3\beta}{\alpha + 2\beta} \xi^2 \psi^2 \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= 2(\alpha + \beta) c_1 + 2\beta c_2 \xi^{-2} + \alpha d_{zz} - \frac{1}{4} \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} \xi^2 \psi^2 \\ \sigma_{zz} &= 2\alpha c_1 + (\alpha + 2\beta) d_{zz} - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} \xi^2 \psi^2 \\ \sigma_{\varphi r} &= -2\beta c_4 \xi^{-2} - \frac{1}{4} \xi^2 \dot{\psi}^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Из (3.2) находим d_{zz} , зависящую только от безразмерного времени τ

$$d_{zz} = \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} \left(\frac{1}{4} \frac{\xi_0^2 + 1}{\alpha + 2\beta} \psi^2 - 2c_1 \right) \quad (3.9)$$

Постоянные в каждый момент времени c_1, c_2, c_3, c_4 находим из граничных условий. Последние имеют вид

$$u_r(\xi_0, \tau) = 0, \quad u_\varphi(\xi_0, \tau) = 0, \quad \sigma_{rr}(1, \tau) = 0, \quad \sigma_{\varphi r}(1, \tau) = 0 \quad (3.10)$$

Выполняя условия (3.10), находим

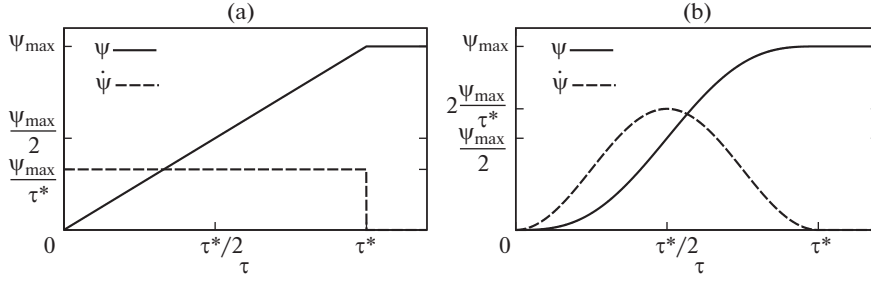


Рис. 1. Варианты задания угловой скорости $\psi(\tau)$ и ускорения $\dot{\psi}(\tau)$: линейная (а) и гладкая (б).

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{\beta(\alpha + 2\beta)\xi_0^4 - \alpha^2\xi_0^2 + (\alpha + \beta)(\alpha + 6\beta)}{8\beta(\alpha + 2\beta)((\alpha + 2\beta)\xi_0^2 + (3\alpha + 2\beta))} \psi^2 \\
 c_2 &= \frac{1}{8\beta} \frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} \frac{(\alpha + 2\beta)\xi_0^2 - (\alpha + 6\beta)}{(\alpha + 2\beta)\xi_0^2 + (3\alpha + 2\beta)} \xi_0^2 \psi^2 \\
 c_3 &= \frac{\xi_0^4 + 1}{8\beta\xi_0^2} \dot{\psi}, \quad c_4 = -\frac{1}{8\beta} \dot{\psi}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Решение задачи (3.7)–(3.11) справедливо до моментов времени до наступления вязкопластического течения.

4. Вязкопластическое течение. Начало вязкопластического течения связано с выполнением в некоторый рассчитываемый момент времени условия (2.4). В такой начальный момент времени в (2.4) скорости необратимых деформаций θ следует положить равными нулю ($\theta = 0$). Во введенных безразмерных переменных условие (2.4) принимает форму

$$\Sigma = \sqrt{\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}\sigma_{zz} - \sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{zz} - 3\sigma_{\varphi r}^2} = 1 \tag{4.1}$$

После подстановки в (4.1) напряжений, вычисленных согласно (3.8) и (3.11), находим, что это условие первоначально выполнится на поверхности $\xi = \xi_0$ ($\Sigma(\xi_0, \tau) = 1$). Это произойдет при следующих безразмерных значениях для угловой скорости ψ_p и углового ускорения $\dot{\psi}_p$

$$\begin{aligned}
 \psi_p^2 &= \frac{\alpha + 2\beta}{2\xi_0^2(1 - \xi_0^2)} ((\alpha + 2\beta)\xi_0^2 + 3\alpha + 2\beta) \sqrt{16\xi_0^4 - 9(1 - \xi_0^4)^2 \dot{\psi}_p^2 (3\alpha^4 + 27\alpha^3\beta +} \\
 &+ 85\alpha^2\beta^2 + 96\alpha\beta^3 + 36\beta^4 + \beta(\alpha + 2\beta)\xi_0^2(\beta(\alpha + 2\beta)\xi_0^2 + (3\alpha^2 + 16\alpha\beta + 12\beta^2)))}^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\dot{\psi} < \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\xi_0^2}{1 - \xi_0^2} \tag{4.3}$$

Вязкопластическое течение на поверхности $\xi = \xi_0$ может наступить при предельном значении $\dot{\psi}_p$, когда неравенство (4.3) обратится в равенство. При равноускорен-

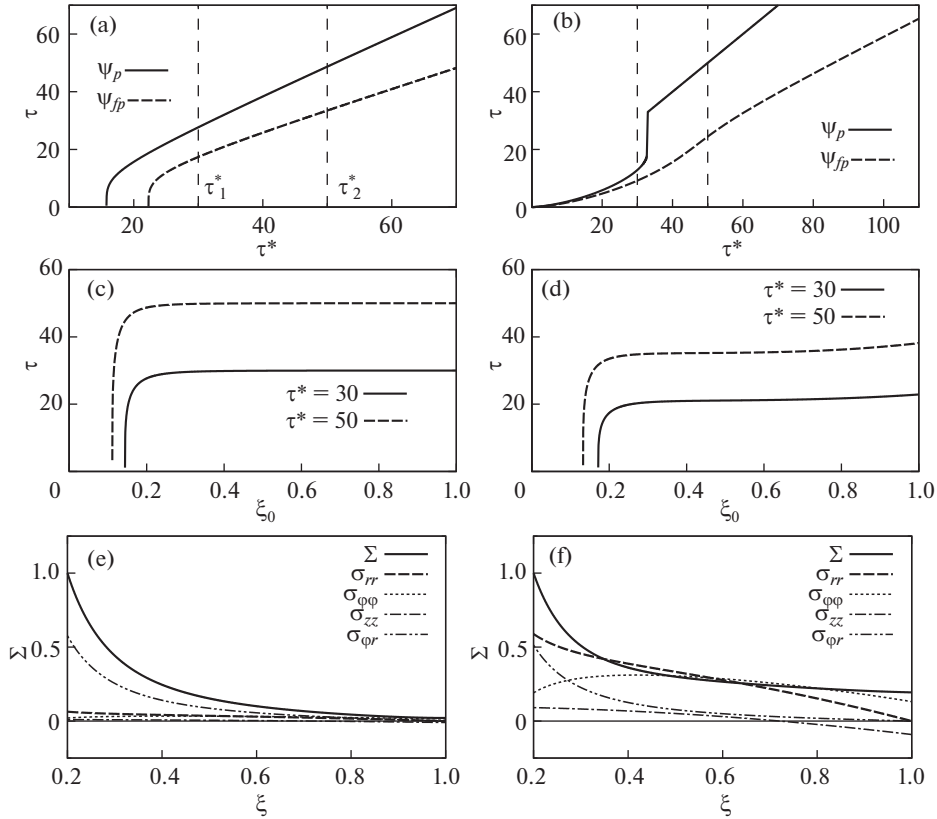


Рис. 2. Зависимость времени начала пластического течения от времени разгона τ^* при линейном росте угловой скорости (а) и при плавном (б), а также от положения внутренней границы ξ_0 для линейной зависимости при $\psi_{\max} = \psi_{fp}$ (с) и $\psi_{\max} = \psi_{fp}$ (д). Распределение напряжений в материале перед началом пластического течения при плавном разгоне и $\psi_{\max} = \psi_{fp}$ для $\tau^* = 30$ (е) и $\tau^* = 50$ (ф).

ном (с самого начала) вращения, когда задаваемая функция линейная ($\psi(\tau) = a\tau$) вязкопластическое течение наступает с момента начала вращения, если

$$a = \pm \frac{\xi_0^2}{\sqrt{3}(1 - \xi_0^2)}$$

Такой случай иллюстрируется зависимостями $\psi = \psi(\tau)$ и $\dot{\psi} = \dot{\psi}(\tau)$ на рис. 1а, где $\psi_{\max}$ – предельно допустимая угловая скорость вращения, τ^* – момент времени, когда такая угловая скорость достигается. Здесь будем задавать вращение цилиндра, постулируя зависимости

$$\psi(\tau) = \psi_{\max} \left(\frac{\tau}{\tau^*} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi\tau}{\tau^*} \right), \quad \dot{\psi}(\tau) = \frac{\psi_{\max}}{\tau^*} \left(1 - \cos \frac{2\pi\tau}{\tau^*} \right) \quad (4.4)$$

Эти функции иллюстрируются графически на рис. 1б.

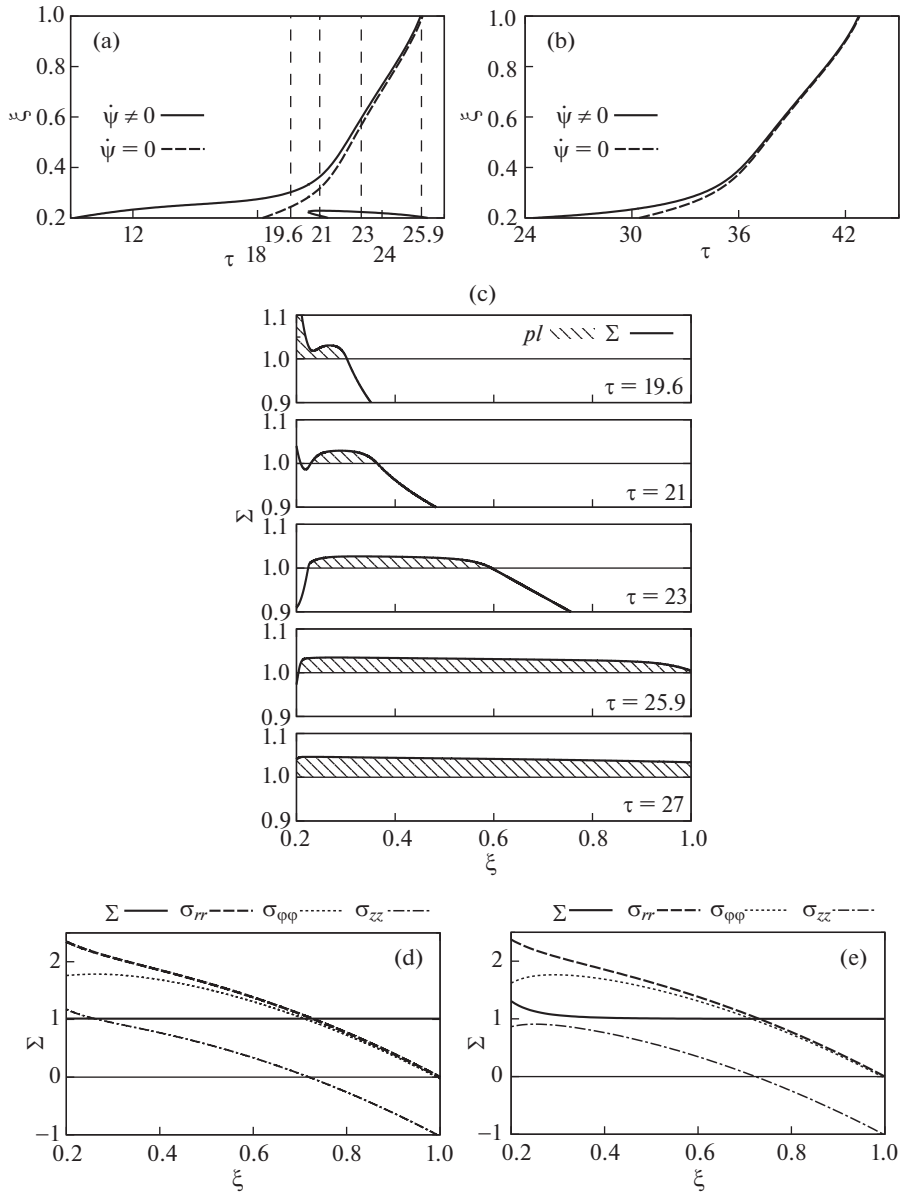


Рис. 3. Результаты численных расчетов. Движение границ областей пластического течения при $\tau^* = 30$ (a) и $\tau^* = 50$ (b). Распределение интенсивности напряжений Σ в различные моменты времени при $\tau^* = 30$ и с учетом углового ускорения (c). Распределение напряжений в среде при установившемся вязкопластическом течении при численном (d) и аналитическом (e) решениях.

Уравнения равновесия в перемещениях с учетом сил инерции (аналог (3.6)) теперь будут включать в себя неизвестные пластические деформации.

$$\begin{aligned}\xi^2 u_{r,\xi\xi} + \xi u_{r,\xi} - u_r &= \frac{2\beta}{\alpha + 2\beta} \xi(p_{\varphi\varphi} - p_{rr}) + \xi^2 p_{rr,\xi} + \xi^2 \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} (p_{\varphi\varphi,\xi} + p_{zz,\xi}) - \frac{\xi^3 \psi^2}{\alpha + 2\beta} \\ \xi^2 u_{\varphi,\xi\xi} + \xi u_{\varphi,\xi} - u_\varphi &= 4\xi p_{\varphi r} + 2\xi^2 p_{\varphi r,\xi} - \frac{\xi^3 \psi'}{\beta}\end{aligned}\quad (4.5)$$

Запишем решение (4.5) в форме

$$\begin{aligned}u_r &= C_1 \xi + C_2 \xi^{-1} + \frac{\beta\beta}{\alpha + 2\beta} \Phi_1 + \xi^{-1} \Phi_2 - \frac{1}{8} \frac{\xi^3 \psi^2}{\alpha + 2\beta} \\ u_\varphi &= C_3 \xi + C_4 \xi^{-1} + 2\xi I_3 - \frac{\xi^3 \psi'}{8\beta} \\ \Phi_1(\xi, \tau) &= \int_{\xi_0}^{\xi} x^{-1} (p_{rr}(x, \tau) - p_{\varphi\varphi}(x, \tau)) dx \\ \Phi_2(\xi, \tau) &= \int_{\xi_0}^{\xi} x \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} (p_{rr}(x, \tau) + p_{\varphi\varphi}(x, \tau)) + \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} p_{zz}(x, \tau) \right) dx \\ \Phi_3(\xi, \tau) &= \int_{\xi_0}^{\xi} x^{-1} p_{\varphi r}(x, \tau) dx\end{aligned}\quad (4.6)$$

В (4.6) следует учитывать, что постоянные в рассматриваемый момент времени C_j ($j = 1, 2, 3, 4$) являются все же функциями безразмерного времени τ , а Φ_i ($i = 1, 2, 3$) определяются неизвестными пластическими деформациями. Для компонент тензора напряжений из (2.2) и (4.6) следуют зависимости

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= 2(\alpha + \beta)C_1 - 2\beta\xi^{-2}C_2 + \alpha d_{zz} + \frac{2\beta(\alpha + \beta)}{\alpha + 2\beta} \Phi_1 - 2\beta\xi^{-2}\Phi_2 - \frac{1}{4} \frac{2\alpha + 3\beta}{\alpha + 2\beta} \xi^2 \psi^2 \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= 2(\alpha + \beta)C_1 + 2\beta\xi^{-2}C_2 + \alpha d_{zz} - 2\beta \left(\frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} p_{zz} + 2 \frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} p_{\varphi\varphi} \right) + \\ &\quad + 2\beta \frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} \Phi_1 + 2\beta\xi^{-2}\Phi_2 - \frac{1}{4} \frac{2\alpha + 3\beta}{\alpha + 2\beta} \xi^2 \psi^2 \\ \sigma_{zz} &= 2\alpha C_1 + (\alpha + 2\beta)d_{zz} - 4\beta \frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} p_{zz} + \frac{2\alpha\beta}{\alpha + 2\beta} (\Phi_1 - p_{\varphi\varphi}) - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} \xi^2 \psi^2 \\ \sigma_{\varphi r} &= -2\beta C_4 \xi^{-2} - \frac{1}{4} \xi^2 \psi'\end{aligned}\quad (4.7)$$

Выполняя ограничение (3.2), налагаемое на значение осевых усилий, находим

$$\begin{aligned}d_{zz} &= \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} \left(\frac{1}{4} \frac{\xi_0^2 + 1}{\alpha + 2\beta} \psi^2 - 2C_1 \right) + \frac{2\beta}{(\alpha + 2\beta)(\xi_0^2 - 1)} \left(\frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} \Phi_1(1, \tau) - \Phi_4(1, \tau) \right) \\ \Phi_4(\xi, \tau) &= \int_{\xi_0}^{\xi} x \left(\frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} (p_{rr}(x, \tau) + p_{\varphi\varphi}(x, \tau)) + 4 \frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} p_{zz}(x, \tau) \right) dx\end{aligned}\quad (4.8)$$

Исходя из граничных условий (3.10), вычисляем постоянные в этот момент времени C_j ($j = 1, 2, 3, 4$)

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \left((\alpha + 2\beta)(I_2(1, \tau) - I_1(1, \tau)) + \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} (1 - \xi_0^2)^{-1} (\alpha I_1(1, \tau) - I_4(1, \tau)) + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\beta \xi_0^4 - \frac{\alpha^2 \xi_0^2}{\alpha + 2\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} (\alpha + 6\beta) \right) \frac{\Psi^2}{8\beta} \right) ((\alpha + 2\beta)\xi_0^2 + (3\alpha + 2\beta))^{-1} \\
 C_2 &= \xi_0^2 \left((\alpha + 2\beta)(I_1(1, \tau) - I_2(1, \tau)) + \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} \frac{I_4(1, \tau) - \alpha I_1(1, \tau)}{1 - \xi_0^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} ((\alpha + 2\beta)\xi_0^2 - (\alpha + 6\beta)) \frac{\Psi^2}{8\beta} \right) ((\alpha + 2\beta)\xi_0^2 + (3\alpha + 2\beta))^{-1} \\
 C_3 &= \frac{\xi_0^4 + 1}{8\beta \xi_0^2} \Psi, \quad C_4 = -\frac{1}{8\beta} \Psi
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

В соотношениях (4.6)–(4.9) компоненты пластических деформаций остаются неизвестными. Для отыскания распределения этих деформаций в каждый рассматриваемый момент времени следует воспользоваться ассоциированным с выбранной поверхностью нагружения (2.4) законом вязкопластического течения (2.3). Таким способом получаем

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial p_{rr}}{\partial \tau} = \frac{1}{3\xi} \frac{\Sigma - 1}{\Sigma} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}) \\
 \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial \tau} = \frac{1}{3\xi} \frac{\Sigma - 1}{\Sigma} (2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz}) \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial p_{zz}}{\partial \tau} = \frac{1}{3\xi} \frac{\Sigma - 1}{\Sigma} (2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \\
 \varepsilon_{\varphi r} &= \frac{\partial p_{\varphi r}}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \frac{\Sigma - 1}{\Sigma} \sigma_{\varphi r}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

В момент начала вязкопластического течения при $\Sigma = 1$ пластические деформации в деформируемом материале равны нулю. Для расчетов следующих шагов по времени представляем (4.10) его конечно-разностным аналогом, включая последний в общий алгоритм расчетов последовательными шагами по времени.

5. Некоторые результаты расчетов. Далее, если это специально не оговорено, результаты расчетов будут представляться при следующем выборе для постоянных деформируемого материала и его геометрии

$$\xi_0 = \frac{R_1}{R_2} = 0.2, \quad \alpha = \frac{\lambda}{\sigma_0} = 250, \quad \beta = \frac{\mu}{\sigma_0} = 195, \quad \xi = \frac{\eta}{R_2 \sqrt{\rho \sigma_0}} = 100 \tag{5.1}$$

Согласно (4.4) параметрами задачи являются $\Psi_{\max}$ и τ^* – момент времени, в который значение $\Psi_{\max}$ достигается. С целью задания (оценки) значения $\Psi_{\max}$ в (4.4) имеем возможность вычислить его в момент начала вязкопластического течения, если не учитывать угловое ускорение. Такое значение, согласно (4.2), оказалось равным $\Psi_{\max} = \Psi_p \approx 1.45893$. Другое значение $\Psi_{\max}$ можно связать с переходом всего материала деформируемой части вращающегося цилиндра в пластическое состояние. Тогда, по-

лагая угловое ускорение нулевым, получаем значение $\psi_{\max} = \psi_{fp} \approx 2.06118$. Дальнейшие результаты расчетов связываются с такими двумя значениями $\psi_{\max}$ в (4.4).

На рис. 2,а и рис. 2,б указывается безразмерное время τ начала вязкопластического течения в зависимости от назначаемого параметра τ^* . При этом на рис. 2,а данная зависимость получена при равноускоренном начальном вращении, а на рис. 2,б для закона вращения (4.4). Сплошная линия соответствует $\psi_{\max} = \psi_p$, пунктирная $\psi_{\max} = \psi_{fp}$.

В (5.1) геометрический параметр ξ_0 также является параметром задачи. Если фиксировать τ^* , то можно указать время начала вязкопластического течения в зависимости от назначаемого параметра ξ_0 . Такие графические зависимости представлены для $\psi_{\max} = \psi_p$ на рис. 2,с и для $\psi_{\max} = \psi_{fp}$ на рис. 2,д при $\tau^* = 30$ (сплошная линия) и $\tau^* = 50$ (пунктирная линия).

Распределение напряжений по деформируемому материалу перед началом пластического течения иллюстрируют графические зависимости рис. 2,е ($\tau^* = 30$) и рис. 2,ф ($\tau^* = 50$). При этом в (4.4) принимается, что $\psi_{\max} = \psi_{fp}$.

6. Установившееся вязкопластическое течение. Согласно (4.4) при $\tau \geq \tau^*$ $\psi(\tau) = \psi_{\max} - \text{const}$ и $\dot{\psi}(\tau) = 0$. Если $\psi_{\max} \geq \psi_{fp}$, то деформируемая часть $\xi_0 \leq \xi \leq 1$ вращающегося цилиндра будет находиться в пластическом состоянии. Возможно ли в таком случае предельное установившееся пластическое течение? Расчет параметров такого течения, покажем, что оно осуществляется. Из (3.1) в случае установившегося вязкопластического течения с учетом того, что скорости пластических деформаций отождествляются со скоростями полных деформаций, получаем

$$\varepsilon_{rr} = v_{r,\xi}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \xi^{-1}v_r, \quad \varepsilon_{zz} = \text{const}, \quad \varepsilon_{\varphi r} = \frac{1}{2}(v_{\varphi,\xi} - \xi^{-1}v_{\varphi}) \quad (6.1)$$

Учитывая, что согласно выбранному условию пластического течения деформируемый материал пластически несжимаем, запишем

$$v_{r,\xi} + \xi^{-1}v_r + \varepsilon_{zz} = 0, \quad v_r = \xi^{-1}C_1 - \frac{1}{2}\xi\varepsilon_{zz} \quad (6.2)$$

Если учесть кинематику такого установившегося вязкопластического течения (6.1) и (6.2), то из (4.10) следуют соотношения

$$\begin{aligned} C_1 &= \xi^2 \frac{\Sigma - 1}{2\xi\Sigma} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\Sigma - 1}{3\xi\Sigma} (2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \\ v_{\varphi,\xi} - \xi^{-1}v_{\varphi} &= 2 \frac{\Sigma - 1}{\xi\Sigma} \sigma_{\varphi r} \\ \sigma_{zz} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{3\xi^2\varepsilon_{zz}}{4C_1} \right) \sigma_{rr} + \left(\frac{1}{2} + \frac{3\xi^2\varepsilon_{zz}}{4C_1} \right) \sigma_{\varphi\varphi} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Проинтегрировав уравнение равновесия (3.3), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= C_2 - \xi\xi^{-2}C_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(2 \ln \xi - \ln \left(2 + \sqrt{4 + 3 \frac{\xi^4 \varepsilon_{zz}^2}{C_1^2}} \right) \right) - \frac{1}{2} \xi^2 \psi^2 \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= 2\xi\xi^{-2}C_1 + \sigma_{rr} + 4 \left(12 + 9 \frac{\xi^4 \varepsilon_{zz}^2}{C_1^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \sigma_{\varphi r} = \xi^{-2}C_3 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Постоянные интегрирования в рассматриваемый момент времени находим при выполнении граничных условий (3.10)

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} \xi_0^2 \epsilon_{zz}, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0 \\ C_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln(2 + \sqrt{4 + 12\xi_0^4}) + \frac{1}{2} \xi \xi_0^2 \epsilon_{zz} + \frac{1}{2} \psi^2 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Неизвестное ϵ_{zz} в (6.2)–(6.5) вычисляется при выполнении условия (3.2)

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{2\xi} \frac{(1 - \xi_0^2)^2}{\xi_0^4 + 2\xi_0^2 - 3} \psi^2 + \frac{2}{\sqrt{3}\xi} \frac{\xi_0^2}{\xi_0^4 + 2\xi_0^2 - 3} \left(\sqrt{1 + 3\xi_0^4} - \ln \left(\frac{1}{3} (\xi_0^2 + \sqrt{\xi_0^4 + 3}) \right) - 2 \right) \quad (6.6)$$

Для того, чтобы установившееся вязкопластическое течение в соответствии с точным решением (6.2)–(6.6) осуществилось необходимо, чтобы угловая скорость достигла значения ψ_{fp} . Для этого $\psi_{\max}$ в (4.4) должно быть не меньше этого значения. Зависимости (6.4)–(6.5) позволяют вычислить данное значение условием $\Sigma(1, \tau) \geq 1$

$$\psi_{fp} \geq \frac{2}{1 - \xi_0^2} \sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{3 - 3\xi_0^4 - 4\xi_0^2}{\xi_0^4 + 3}} + \xi_0^2 \left(2 - \ln \frac{3}{\xi_0^2 + \sqrt{\xi_0^4 + 3}} \right) \quad (6.7)$$

Наименьшее из возможных ψ_{fp} использовалось при задании вращения в (4.4) $\psi_{\max} = \psi_{fp} \approx 2.06118$, когда проводились численные расчеты (рис. 3).

Сравнение результатов численных расчетов с аналогичными, получаемыми при точном решении задачи, приведено на рис. 3, d и e соответственно, где представлено распределение напряжений в материале. Сравнение показывает, что численное решение оказывается близким к точному, за исключением значений для безразмерной σ_{zz} . Несовпадение тем больше, чем ближе подходим к жесткой поверхности $\xi_0 = 0.2$. На том же рис. 3, a, b представлено развитие области вязкопластического течения при $\tau^* = 30$ и $\tau^* = 50$ соответственно. Очень часто [4–9] угловым ускорением при начале вращения пренебрегают, что делает задачу зависящей от одной переменной и приводит к значительным ее упрощениям. На рис. 3, a графиком предстает закон продвижения упруговязкопластической границы в двух случаях: при учете в расчетах изменяющегося углового ускорения $\dot{\psi}(\tau)$ (сплошная линия) и без такого учета (пунктирная). Учет в расчетах углового ускорения приводит не только к более быстрому возникновению области вязкопластического течения, но и появлению области обратимого деформирования в окрестности поверхности ξ_0 . Однако такой эффект характерен только при быстром разгоне (например при $\tau^* = 30$, как на рис. 3, a); при $\tau^* = 50$ он уже не проявляется (рис. 3, b).

Изменение безразмерного Σ при разгоне вращения графически показано на рис. 3, c. В качестве времени данного разгонного участка принято $\tau^* = 30$. Заштрихованные области – области где происходит вязкопластическое течение материала. $\psi_{\max}$ в (4.4) выбрано $\psi_{\max} = \psi_{fp}$, что обеспечивает распространение вязкопластического течения на всю деформируемую часть цилиндра $0.2 \leq \xi \leq 1$.

7. Заключение. В отличие от большинства публикаций [4–9] где на разгонном участке вращения дисков и цилиндров пренебрегается угловым ускорением, считая, что угловая скорость меняется достаточно медленно, здесь рассмотрен именно быстрый разгон вращения. В некоторых случаях приводится сравнение со случаем медленного разгона и указываются качественные отличия в процессе деформирования, вызываемые быстрым изменением угловой скорости вращения. Необходимо отметить работу [10], где также учитывались окружные силы инерции, определяемые угловым ускорением, но в иной постановке.

Основным средством тестирования программ расчетов являются точные решения упругой задачи, задающие изменения напряжений и деформаций на начальной стадии процесса, и, что более важно, точное решение задачи об установившемся вязкопластическом течении. В последнем случае весь деформируемый материал подвержен вязкопластическому течению в условии постоянства угловой скорости вращения.

Работа выполнена в рамках госзадания ХФИЦ ДВО РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 2014. 752 p.
2. *Nadai A.* Theory of Flow and Fracture of Solids. McGraw Hill, 1950. 572 p.
3. *Gamer U., Sayir M.* Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft // ZAMP. 1984. V. 35. № 5. P. 601–617.
<https://doi.org/10.1007/BF00952107>
4. *Mack W.* The rotating elastic-plastic solid shaft with free ends // Tech. Mech. 1991. № 12. P. 119–124.
5. *Mack W.* Rotating elastic-plastic tube with free ends // Int. J. Solids Struct. 1991. V. 27. № 11. P. 1461–1476.
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(91\)90042-E](https://doi.org/10.1016/0020-7683(91)90042-E)
6. *Gamer U., Mack W., Varga I.* Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends // Int. J. Eng. Sci. 1997. V. 35. № 3. P. 253–267.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(96\)00085-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(96)00085-7)
7. *Прокудин А.Н., Фирсов С.В.* Вязкопластическое течение вращающегося полого цилиндра // Дальневосточный математический журнал. 2018. V. 18. № 2. P. 242–260.
8. *Прокудин А.Н., Буренин А.А.* Упругопластическое деформирование вращающегося сплошного цилиндра из линейно-упрочняющегося материала // ПММ. 2021. V. 85. № 2. P. 172–192.
<https://doi.org/10.31857/S0032823521020077>
9. *Прокудин А.Н., Буренин А.А.* Анализ упругопластического деформирования вращающегося сплошного цилиндра при общем кусочно-линейном условии пластичности // ПМТФ. 2021. V. 62. № 5 (369). P. 68–79.
<https://doi.org/10.15372/PMTF20210507>
10. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Prokudin A.N.* Irreversible deformation of a rotating disk having angular acceleration // Acta Mech. 2021. V. 232. № 5. P. 1917–1931.
<https://doi.org/10.1007/s00707-021-02942-5>
11. *Firsov S.V., Prokudin A.N., Burenin A.A.* Creep and plastic flow in a rotating cylinder with a rigid inclusion // J. Appl. Industr. Math. 2019. V. 13. № 4. P. 642–652.
<https://doi.org/10.1134/S199047891904001X>
12. *Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д.* Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 p.
13. *Мосолов П.П., Мясников В.П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1988. 208 p.
14. *Ковтанюк Л.В., Шитиков А.В.* О теории больших упругопластических деформаций материалов при учете температурных и реологических эффектов // Вестник ДВО РАН. 2006. № 4. P. 87–93.