

УДК 629.784

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИССИПАТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ МОДАЛЬНОГО ПОДХОДА

© 2023 г. А. Ю. Бондаренко^{a,b,*}, А. И. Лиходед^{a,b,**}, В. В. Сидоров^{a,b}

^aЦентральный научно-исследовательский институт машиностроения,
г.о. Королев, Россия

^bМосковский физико-технический институт (государственный университет),
Долгопрудный, Россия

*e-mail: andrei.bondarenko@phystech.edu

**e-mail: Likhoded@tsniimash.ru

Поступила в редакцию 14.06.2022 г.

После доработки 07.07.2022 г.

Принята к публикации 08.07.2022 г.

Предложен способ решения нестационарных динамических задач с комплексными модулями упругости или матрицами жесткостей, позволяющий учитывать локальные диссипативные свойства элементов конструкций. Показано, что в синтезированных конструкциях даже с существенно различными диссипативными свойствами динамическое поведение и параметры нагружения на резонансных частотах определяются едиными интегральными логарифмическими декрементами, получаемыми путем массово-энергетического осреднения диссипативных свойств конструкций.

Предложены две концепции оценки интегральных добротностей и логарифмических декрементов колебаний конструкций с различными диссипативными свойствами, одна из которых базируется на физических особенностях резонансных явлений в механических системах, а вторая на анализе поведения затухающих фундаментальных решений соответствующих однородных уравнений.

Совпадение интегральных логарифмических декрементов, полученных на основе различных концепций, позволяет решать нестационарные задачи для конструкций с различными диссипативными свойствами методом разложения кинематических параметров по собственным формам колебаний (модальным методом). Результаты расчетов динамического поведения конструкций с различными диссипативными свойствами продемонстрированы на модельных задачах.

Ключевые слова: нестационарная задача, комплексные жесткости, декременты колебаний, диссипативные свойства, модальный метод, частоты и формы колебаний, инерционные силы, фундаментальные решения

DOI: 10.31857/S0572329922600426, EDN: JLCTJN

1. Введение. Известно, что использование комплексных модулей упругости эффективно применяется для решения стационарных задач, в частности определения амплитудно-частотных характеристик механических систем, однако прямое решение нестационарных задач с комплексными модулями невозможно из-за появления бесконечно возрастающих фундаментальных решений соответствующих однородных уравнений [1]. Вместе с тем существует потребность в оценке влияния различий в диссипативных свойствах отдельных частей конструкций на динамические процессы при

переходных нестационарных внешних воздействиях. Для решения этой задачи предложено воспользоваться методом разложения решения по собственным тонам колебаний, причем каждый тон включается в решение со своим интегральным логарифмическим декрементом, полученным путем массово-энергетического осреднения диссипации по конструкции. Представлены различные концепции определения интегральных логарифмических декрементов для систем с неоднородными диссипативными свойствами.

Запишем конечноэлементную [2] систему уравнений с комплексной матрицей жесткости:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}^* \mathbf{X} = \mathbf{F}(t, x) \quad (1.1)$$

здесь $\mathbf{M}$ и $\mathbf{K}^*$ — матрицы масс и жесткостей, $\mathbf{X}$ — вектор обобщенных координат, $\mathbf{F}(t, x)$ — вектор внешних сил.

В общем случае матрица жесткости $\mathbf{K}^*$ состоит из действительной и мнимой частей:

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}^{(1)} + j \cdot \mathbf{K}^{(2)} \quad (1.2)$$

При этом матрица $\mathbf{K}^{(1)}$ является традиционной (упругой) матрицей жесткости с элементами $k_{\mu\nu}^{(1)}$, элементы матрицы $\mathbf{K}^{(2)}$, характеризующие диссипативные свойства различных частей конструкции, имеют структуру, аналогичную [3], и могут быть представлены в следующем общем виде:

$$k_{\mu\nu}^{(2)} = k_{\mu\nu}^{(1)} \cdot \frac{\delta_{\mu\nu}}{\pi} \quad (1.3)$$

где $\delta_{\mu\nu}$ — локальные логарифмические декременты.

Внешнюю силу зададим в виде произведения вектора $\mathbf{P}(x)$, характеризующего распределение внешних сил по поверхности конструкции, и функции времени $q(t)$

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{P}(x) \cdot q(t) \quad (1.4)$$

Предварительно проанализируем решение стационарной задачи в случае различных диссипативных свойств конструкции.

В случае стационарной задачи правая часть (внешняя сила) в (1.1) задается в виде

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{P}(x) \cdot e^{j\omega t} \quad (1.5)$$

Тогда решение уравнения (1.1) ищется в аналогичном (1.5) виде

$$\mathbf{X}(t) = \tilde{\mathbf{X}}_a \cdot e^{j\omega t} \quad (1.6)$$

где $\tilde{\mathbf{X}}_a$ — искомый вектор обобщенных координат (амплитудных значений), который будет зависеть от частоты ω .

С учетом (1.5), (1.6) алгебраическая система уравнений для определения неизвестного вектора $\tilde{\mathbf{X}}_a$ при стационарных колебаниях примет вид:

$$(-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}^*)\tilde{\mathbf{X}}_a = \mathbf{P}(x) \quad (1.7)$$

2. Использование резонансных явлений для оценки интегральных логарифмических декрементов. Первая концепция для оценки интегральных логарифмических декрементов конструкций с различными диссипативными свойствами базируется на физических особенностях резонансных явлений в механических системах.

С этой целью будем возбуждать конечноэлементную модель (1.1) внешней силой так, чтобы частота внешней силы совпадала с собственной частотой ω_j , а распределе-

ние внешней силы по конструкции совпадало с инерционными силами, возникающими при колебаниях конструкции по соответствующему тону колебаний φ_i

$$\ddot{\mathbf{P}}_i(x) = \omega_i^2 \mathbf{M} \varphi_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.1)$$

здесь N – количество собственных тонов колебаний модели, для которых будут определяться интегральные логарифмические декременты.

После определения амплитудных значений кинематических параметров системы $\tilde{X}_{ai}$ из (1.7) определяются амплитуды инерционных сил $\mathbf{P}_i^{(1)}$, действующих по степеням свободы КЭ модели по i -му тону колебаний.

Так как поле кинематических параметров $\tilde{X}_{ai}$ в общем случае (при произвольной частоте ω) является комплексным ($\tilde{X}_{ai} = \tilde{\xi}_{ai} + j\tilde{\zeta}_{ai}$), то и поле инерционных сил также является комплексным

$$\mathbf{P}_{ai}^{(1)} = -\omega_i^2 \mathbf{M} \tilde{\xi}_{ai} - j \omega_i^2 \mathbf{M} \tilde{\zeta}_{ai} \quad (2.2)$$

Поле кинематических параметров при использовании модального метода [4] определяется равенством

$$\mathbf{Y}(t, x) = \sum_i \mathbf{T}_i(t) \varphi_i(x) \quad (2.3)$$

Здесь $\varphi_i(x)$ – собственные формы колебаний, нормированные по единичной массе $\{\mathbf{M} \varphi_i, \varphi_i\} = 1$. Функции $\mathbf{T}_i(t)$ в случае стационарной задачи определяются из следующих уравнений для обобщенных координат:

$$\ddot{\mathbf{T}}_i + \frac{\delta_i \omega_i}{\pi} \dot{\mathbf{T}}_i + \omega_i^2 \mathbf{T}_i = \{\mathbf{P}(x), \varphi_i\} e^{j\omega t} \quad (2.4)$$

где δ_i, ω_i – соответственно собственные частоты и логарифмические декременты колебаний, фигурными скобками $\{\dots\}$ обозначено обобщенное скалярное произведение.

С учетом (2.4) поле кинематических параметров конечноэлементной модели на резонансной частоте ω_i при распределении внешних сил по конструкции (2.1), представляется мнимой частью решения и имеет следующий вид

$$\mathbf{Y}_i = -j Q_i \varphi_i e^{j\omega t}, \quad \left(Q_i = \frac{\pi}{\delta_i} \right) \quad (2.5)$$

Здесь Q_i – добротность для каждого тона колебаний ω_i . При этом действительная часть решения на резонансной частоте равна нулю.

Поле амплитудных значений инерционных сил $\mathbf{P}_i^{(2)}$ с учетом (2.5) для i -го тона колебаний примет вид

$$\mathbf{P}_i^{(2)} = j \omega_i^2 Q_i \mathbf{M} \varphi_i \quad (2.6)$$

Приравнявая поле амплитуд инерционных сил, полученных методом разложения по собственным формам колебаний (2.6), полю амплитуд мнимой части инерционных сил (2.2), полученных из решения задачи (1.7) с правой частью (2.1), будем иметь

$$\omega_i^2 Q_i \mathbf{M} \varphi_i = -\omega_i^2 \mathbf{M} \tilde{\zeta}_i \quad (2.7)$$

Умножая обе части равенства (2.7) скалярно на φ_i , приходим к следующим значениям для интегральных добротностей Q_i и логарифмических декрементов δ_i :

$$Q_i = -\{\mathbf{M} \tilde{\zeta}_i, \varphi_i\}, \quad \delta_i = \frac{\pi}{Q_i} \quad (2.8)$$

По существу этой формулой осуществляется массово-энергетическое осреднение различных диссипативных свойств конструкций при колебаниях на резонансных частотах.

Другой подход базируется на минимизации невязки между амплитудными значениями Y_i (2.5) и мнимой частью ξ_i решения $\tilde{X}_{ai}$ (1.7), что обеспечивается функционалом:

$$\Pi_i = \sum_{n=1}^{N_{dof}} (Q_i \Phi_{ni} - \xi_{ni})^2, \quad i = 1 \dots N \quad (2.9)$$

где N_{dof} — число степеней свободы конструкции, N — количество рассматриваемых тонов колебаний (2.9).

Следует отметить, что для решения практических задач в большинстве случаев нет необходимости использовать полный спектр собственных тонов колебаний. Количество потребных тонов колебаний N оценивается по характеру сходимости кинематических и силовых факторов в конструкциях.

С использованием функционала (2.9), минимизирующего невязку по амплитудам узловых кинематических параметров, определяются осредненные добротности Q_i и соответствующие интегральные логарифмические декременты колебаний δ_i для конструкций с различными диссипативными свойствами по каждому тону колебаний ω_i :

$$Q_i = \sum_{n=1}^{N_{dof}} \zeta_{ni} \Phi_{ni} / \sum_{n=1}^{N_{dof}} (\Phi_{ni})^2, \quad \delta_i = \frac{\pi}{Q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.10)$$

3. Использование затухающих фундаментальных решений однородного уравнения для определения интегральных логарифмических декрементов. Вторая концепция определения интегральных декрементов по тонам колебаний базируется на анализе поведения фундаментальных решений $\tilde{X}(t)$ однородного уравнения, соответствующего (1.1)

$$\mathbf{M}\ddot{\tilde{X}} + (\mathbf{K}^{(1)} + j \cdot \mathbf{K}^{(2)})\tilde{X} = 0 \quad (3.1)$$

Если решение уравнения (3.1) отыскивать в виде

$$\tilde{X}(t) = \tilde{X}_0 \cdot e^{j\omega t} \quad (3.2)$$

то соответствующее (3.1) характеристическое уравнение запишется так:

$$\Pi(\lambda, \kappa_{\mu\nu}, \delta_{\mu\nu}) = \left| -\mathbf{M}\lambda + \mathbf{K}^{(1)} + j \cdot \mathbf{K}^{(2)} \right| = 0, \quad (\lambda = \omega^2) \quad (3.3)$$

Очевидно, что выражение $\Pi(\lambda, \kappa_{\mu\nu}, \delta_{\mu\nu})$ из (3.3) непрерывным образом зависит от параметров $\delta_{\mu\nu}$ и при малых значениях $\delta_{\mu\nu}$ корни характеристического уравнения (3.3) λ_i будут близки на комплексной плоскости λ к квадратам собственных частот ω_i^2 . При наличии диссипации, учтенной в виде комплексных жесткостей (1.2), (1.3), нули характеристического уравнения λ_i в общем случае будут комплексными

$$\lambda_i = a_i + jb_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3.4)$$

При этом действительные части корней λ_i будут отражать параметры собственных частот ω_i^2 , а мнимые — интегральные диссипативные свойства конструкций, соответствующие различным тонам колебаний.



Рис. 1 – Модель балки. Показана нумерация узлов модели.

Из (3.3), (3.4) следует, что каждому значению λ_i соответствуют два корня характеристического уравнения

$$\omega_i^{(1)} = \sqrt{a_i + jb_i}; \quad \omega_i^{(2)} = -\sqrt{a_i + jb_i} \quad (3.5)$$

и, соответственно, два фундаментальных решения однородного уравнения (3.1)

$$\tilde{X}_i^{(1)}(t) = \tilde{X}_{i0}^{(1)} \cdot e^{j\omega_i^{(1)}t}; \quad \tilde{X}_i^{(2)}(t) = \tilde{X}_{i0}^{(2)} \cdot e^{j\omega_i^{(2)}t} \quad (3.6)$$

При малых диссипативных свойствах конструкций корни $\omega_i^{(1)}$ и $\omega_i^{(2)}$ (3.5), соответствующие λ_i , могут быть в первом приближении представлены в виде:

$$\omega_i^{(1)} = \sqrt{a_i} \left(1 + j \frac{b_i}{2a_i} \right); \quad \omega_i^{(2)} = -\sqrt{a_i} \left(1 + j \frac{b_i}{2a_i} \right) \quad (3.7)$$

Таким образом, однородное уравнение (3.1) будет иметь часть фундаментальных решений, стремящихся с ростом времени к бесконечности, и часть фундаментальных решений, стремящихся к нулю. Этим объясняется невозможность прямого решения нестационарных задач с использованием комплексного модуля.

В связи с этим возникает альтернативный подход, заключающийся в следующем.

Из всех фундаментальных решений (для каждого λ_i) выбираются решения, имеющие физический смысл, то есть решения, затухающие на бесконечности (как это принято при решении задач уравнений математической физики).

Действительные части затухающих фундаментальных решений по существу моделируют процесс, характерный для типового динамического эксперимента по определению диссипативных свойств конструкций путем сброса статических сил, приложенных к конструкциям.

Очевидно, что при положительных значениях b_i (3.4) действительная часть затухающего решения $\tilde{X}_i^{(1)}(t)$ (3.6) имеет вид:

$$\text{Re } \tilde{X}_i^{(1)}(t) = \tilde{X}_{i0}^{(1)} e^{-\frac{b_i}{2\sqrt{a_i}}t} \cos \sqrt{a_i}t \quad (3.8)$$

При отрицательных значениях b_i аналогичная ситуация имеет место для второго решения $\tilde{X}_i^{(2)}(t)$ из (3.6).

Из равенства (3.8) следует выражение для интегрального логарифмического декремента конструкции с различными локальными диссипативными свойствами

Таблица 1. Свойства осцилляторов, использованных в модельной задаче

№	№ узла подвески	масса, кг	жесткость, Н/м	Диссипативные свойства δ	ось
1	11	2.0	1400	0.094	Y
2	8	1.0	10000	0.942	Y
3	7	0.4	9900	0.157	Y
4	5	0.4	17200	0.031	Y
5	9	1.0	63000	0.471	X

Во второй задаче (“балка № 2”) к консольной балке в некоторых узлах присоединены одноступенные осцилляторы массой 5–20% от массы конструкции. В механике такие осцилляторы часто используются в качестве механических аналогов для учета динамических свойств подконструкций [5–7]. Свойства осцилляторов приведены в табл. 1.

Расчеты проводились как на закрепленных расчетных моделях, так и на моделях со свободными краями при силовом и кинематическом возбуждении.

Комплексные корни характеристического уравнения (3.3) определялись с помощью программного комплекса MSC.Nastran [8] методом Ланцоша [9].

В табл. 2 приведено сравнение результатов расчетов модальных логарифмических декрементов балки № 1 (без осцилляторов) с использованием различных методов. Граничные условия соответствовали консольной заделке левого конца балки (с меньшей диссипацией).

В табл. 3 приведено сравнение результатов расчетов модальных логарифмических декрементов балки № 2 (с одноступенными осцилляторами) с использованием различных методов. Граничные условия были аналогичными.

Таблица 2. Сравнение результатов расчетов модальных логарифмических декрементов балки № 1 (без осцилляторов) с использованием различных методов

№ тона	Частота, Гц	Интегральные модальные логарифмические декременты δ для модельной задачи, определенные в соответствии с формулами		
		(2.8)	(2.10)	(3.9)
1	0.9927	0.1137	0.1137	0.1134
2	6.1465	0.2639	0.2639	0.2620
3	17.015	0.2871	0.2875	0.2865
4	32.924	0.2906	0.2906	0.2893
5	53.658	0.2843	0.2846	0.2843
6	78.746	0.2890	0.2893	0.2887
7	107.20	0.2821	0.2824	0.2837
8*	127.16	0.1615	0.1615	0.1608
9	136.89	0.2749	0.2755	0.2774
10	163.87	0.2727	0.2711	0.2809

*Продольный тон колебаний

$$\tilde{\delta}_i = \ln \left(\frac{e^{-\frac{b_i t}{2\sqrt{a_i}}}}{e^{-\frac{b_i}{2\sqrt{a_i}} \left(t + \frac{2\pi}{\sqrt{a_i}} \right)}} \right) = \frac{b_i \pi}{a_i} \quad (3.9)$$

Здесь учтено, что период колебаний T_i по i -му тону с учетом (3.8) определяется соотношением

Таблица 3. Сравнение результатов расчетов модальных логарифмических декрементов балки № 2 (с одностепенными осцилляторами) с использованием различных методов

№ тона	Частота, Гц	Интегральные модальные логарифмические декременты δ для модельной задачи, определенные в соответствии с формулами		
		(2.8)	(2.10)	(3.9)
1	0.67	0.1219	0.1219	0.1217
2	3.87	0.2416	0.2419	0.2402
3	7.88	0.1360	0.1360	0.1357
4	14.22	0.4722	0.4869	0.4763
5	19.70	0.5674	0.5806	0.5909
6	27.06	0.2736	0.2746	0.2782
7	32.28	0.1389	0.1401	0.1410
8	36.41	0.1800	0.1810	0.1857
9*	39.56	0.4646	0.4646	0.4620
10	56.07	0.2648	0.2642	0.2645
11	79.43	0.2900	0.2897	0.2900
12	108.15	0.2856	0.2853	0.2867
13*	128.84	0.1678	0.1678	0.1672
14	137.52	0.2721	0.2717	0.2742
15	165.06	0.2708	0.2724	0.2807
16	182.73	0.2441	0.2485	0.2588

*Продольный тон колебаний

$$T_i = \frac{2\pi}{\sqrt{a_i}} \quad (3.10)$$

Необходимо отметить, что собственные частоты колебаний конструкций при учете диссипативных свойств $\sqrt{a_i}$ несколько снижаются по сравнению с частотами недемпфированной конструкции ω_i .

4. Применение полученных результатов при решении модельных задач. Для иллюстрации полученных соотношений приводятся результаты оценки интегральных логарифмических декрементов колебаний, полученных с использованием различных концепций, по двум модельным задачам.

В первой задаче (“балка № 1”) рассматривается консольно заделанная одним концом однородная алюминиевая балка длиной 10 м трубчатого сечения диаметром 100 мм и толщиной 1 мм. Балка разбита на 10 одинаковых конечных элементов. Модель балки показана на рис. 1. Балка может совершать поперечные колебания только в плоскости XOY.

Диссипативные характеристики конечных элементов задаются в виде конструкционного демпфирования (пропорционально матрице жесткости элемента). Первые 5 элементов (показаны серым цветом) имеют диссипативные характеристики, соответствующие логарифмическому декременту $\delta = 0.0942$ ($0.03 \cdot \pi$). Оставшиеся 5 элементов имеют диссипативные характеристики в 5 раз больше – $\delta = 0.4712$ ($0.15 \cdot \pi$).

Во второй задаче (“балка № 2”) к консольной балке в некоторых узлах присоединены одностепенные осцилляторы массой 5–20% от массы конструкции. В механике такие осцилляторы часто используются в качестве механических аналогов для учета ди-

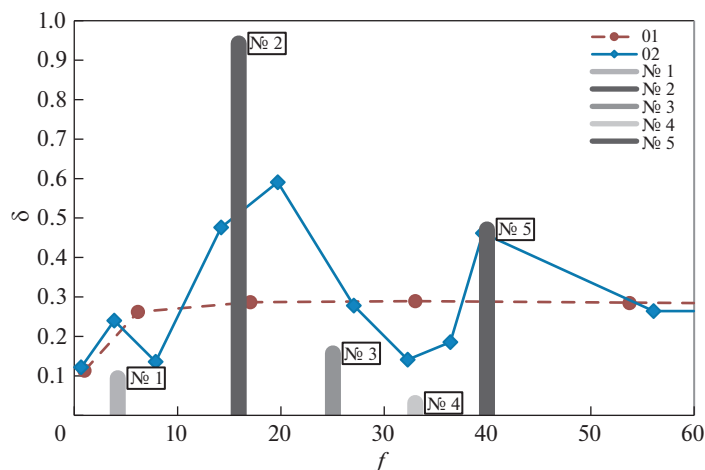


Рис. 2. Интегральные модальные логарифмические декременты δ двух моделей (пунктирная линия (01) — модель без осцилляторов, сплошная линия (02) — модель с осцилляторами) в зависимости от частоты f (Гц), а также частоты и декременты отдельных осцилляторов (№ 1–5).

намических свойств подконструкций [5–7]. Свойства осцилляторов приведены в табл. 1.

Расчеты проводились как на закрепленных расчетных моделях, так и на моделях со свободными краями при силовом и кинематическом возбуждении.

Комплексные корни характеристического уравнения (3.3) определялись с помощью программного комплекса MSC.Nastran [8] методом Ланцоша [9].

В табл. 2 приведено сравнение результатов расчетов модальных логарифмических декрементов балки № 1 (без осцилляторов) с использованием различных методов. Граничные условия соответствовали консольной заделке левого конца балки (с меньшей диссипацией).

В табл. 3 приведено сравнение результатов расчетов модальных логарифмических декрементов балки № 2 (с одностепенными осцилляторами) с использованием различных методов. Граничные условия были аналогичными.

Проведенная серия расчетов для конструкций с различными диссипативными характеристиками показала хорошее совпадение интегральных логарифмических декрементов, полученных из соотношений (2.8), (2.10) и (3.9), соответствующих различным методическим концепциям.

Массово-энергетическое осреднение различных диссипативных свойств конструкций при колебаниях на резонансных частотах иллюстрируется на рис. 2.

На этом рисунке нанесены модальные логарифмические декременты консольной балки с осцилляторами и без них, определенные по методу (3.9). Вертикальными линиями (“столбиками”) показаны логарифмические декременты колебаний отдельных осцилляторов. Видно, что внесение в конструкцию осцилляторов с пониженным/повышенным демпфированием ведет к соответствующим изменениям в интегральных диссипативных свойствах конструкции в целом.

Стоит отметить, что балка № 2 (с осцилляторами) является в некотором смысле “предельным” случаем для динамических систем по степени разнородности диссипативных характеристик ее составных частей. Интересно показать, что даже для такой системы использование осредненных интегральных модальных добротностей позволяет добиться практически полного совпадения по откликам на резонансных частотах.

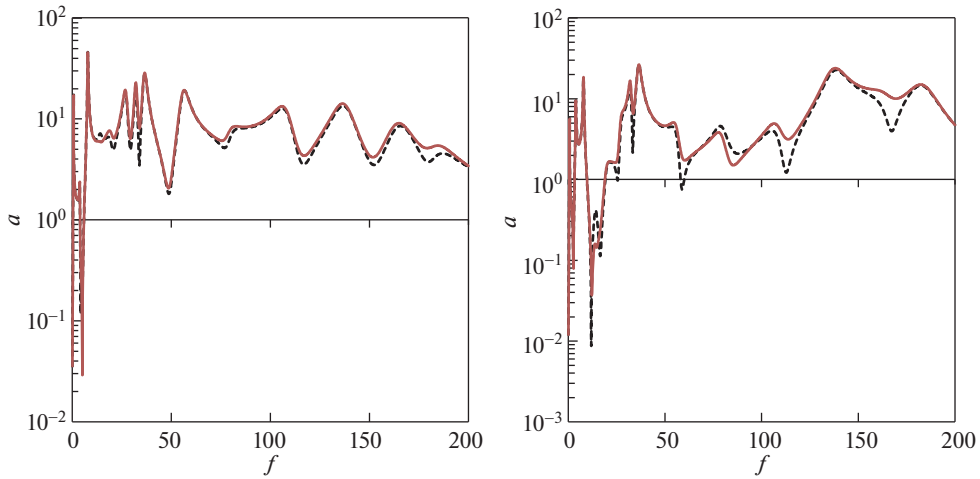


Рис. 3. Сравнение зависимостей амплитуды ускорений a (м/с^2) от частоты f (Гц), определенных двумя методами (сплошная линия — при использовании эквивалентного модального демпфирования, пунктирная линия — при решении стационарной задачи с комплексными жесткостями), на свободном краю (слева) и посередине (справа) балки № 2.

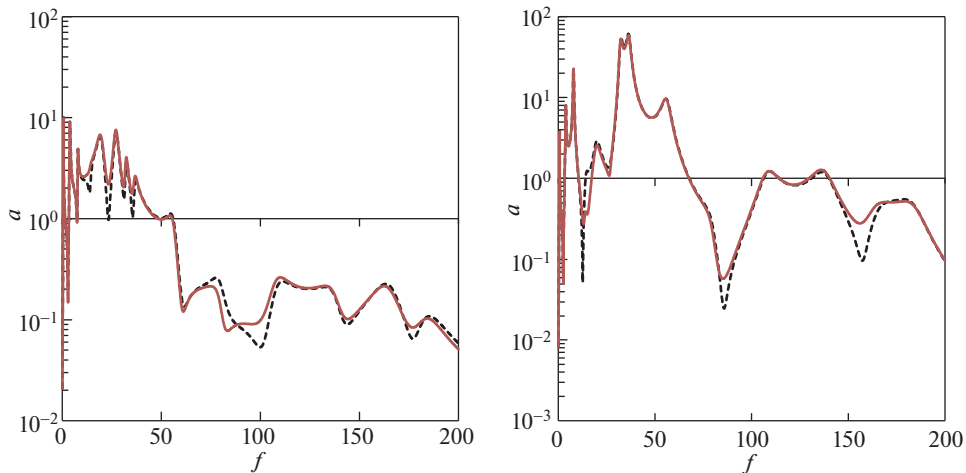


Рис. 4. Сравнение зависимостей амплитуды ускорений a (м/с^2) от частоты f (Гц), определенных двумя методами (сплошная линия — при использовании эквивалентного модального демпфирования, пунктирная линия — при решении стационарной задачи с комплексными жесткостями), на осцилляторе № 2 (слева) и осцилляторе № 4 (справа) балки № 2.

На рис. 3, 4 приведено сравнение АЧХ ускорений, полученных по решению стационарной задачи с комплексными жесткостями (1.1) и при использовании эквивалентного модального демпфирования (2.3), (2.4). В качестве внешнего воздействия задава-

лась поперечная сила с постоянной амплитудой, приложенная недалеко от свободно-го края балки.

5. Заключение. Совпадение интегральных добротностей и логарифмических декрементов, полученных с использованием различных концепций (моделирующих методы получения диссипативных характеристик в инженерной практике), одна из которых базируется на физических особенностях резонансных явлений (определение АЧХ), а вторая — на особенностях дифференциальных уравнений движения и их фундаментальных решений (при сбросе статических сил), подтверждает правомерность использования интегральных диссипативных свойств конструкций для решения стационарных и нестационарных задач путем разложения решения по тонам колебаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. Изд. 11, испр. М.: URSS, 2016. 512 с.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
3. Сорокин Е.С. К вопросу неупругого сопротивления строительных материалов при колебаниях. Научное сообщение ЦНИИПС № 15. М.: Гос. изд-во лит. по стр-ву и архитектуре, 1954. 73 с.
4. Лиходед А.И. Динамика конструкций и определение нагрузок. Учебное пособие. Королев: Изд. АО ЦНИИмаш, 2020. 239 с.
5. Лиходед А.И., Малинин А.А. Колебания подкрепленных оболочек вращения с сосредоточенными массами и осцилляторами // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 1. С. 42–47.
6. Бондаренко А.Ю., Лиходед А.И., Сидоров В.В. Построение механических аналогов подконструкций с учетом действующих на них активных сил // Мат. модел. 2020. Т. 32. № 8. С. 106–118.
<https://doi.org/10.20948/mm-2020-08-07>
7. Craig Jr. R.R., Bampton M.C.C. Coupling of substructures for dynamic analysis // AIAA J. 1968. V. 6. № 7. P. 1313–1319.
8. Nastran MD Dynamic Analysis User's Guide. Version 2010 (Revision 0, June 25, 2010) / Ed. by D. M. McLean. (Santa Ana, CA: MSC Software Corp., 2010. 556 p.
9. Lanczos C. An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators // J. Res. Nat. Bureau Stand. V. 45. 1950. C. 255–282.