

УДК 539.3

РАСЧЕТ РЕСУРСНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КОНСТРУКЦИОННЫХ СПЛАВОВ ПРИ ВЗАИМНОМ ВЛИЯНИИ УСТАЛОСТИ И ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛА

© 2023 г. И. А. Волков^{a,*}, Л. А. Игумнов^{a,**},
А. И. Волков^{a,***}, А. И. Юдинцева^{a,****}

^aНИИ механики Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Н. Новгород, Россия

*e-mail: pmptmvgavt@yandex.ru

**e-mail: igumnov@mech.unn.ru

***e-mail: Volkovandr89@gmail.com

****e-mail: anna.iudintseva@gmail.com

Поступила в редакцию 09.11.2022 г.

После доработки 20.11.2022 г.

Принята к публикации 24.11.2022 г.

Рассматриваются процессы деградации начальных прочностных свойств поликристаллических конструкционных сплавов при механизмах, сочетающих малоцикловую усталость и длительную прочность материала. С позиций механики поврежденной среды (МПС), механики разрушения (МР) развита математическая модель, описывающая процессы циклического вязкопластического деформирования и накопления повреждений в конструкционных сплавах при многоосных непропорциональных режимах комбинированного термомеханического нагружения. Модель состоит из трех взаимосвязанных составных частей: соотношений, определяющих циклическое вязкопластическое поведение материала с учетом зависимости от процесса разрушения; эволюционных уравнений описывающих кинетику накопления повреждений; критерия прочности поврежденного материала. Модель вязкопластичности основана на представлении о существовании в пространстве напряжений поверхностей пластичности и ползучести и принципе градиентальности векторов скоростей пластических деформаций и деформаций ползучести к соответствующей поверхности в точке нагружения. Данный вариант уравнений состояния отражает основные эффекты циклического вязкопластического деформирования материала для произвольных сложных траекторий нагружения. Вариант кинетических уравнений накопления повреждений основан на введении скалярного параметра поврежденности, базируется на энергетических принципах и учитывает основные эффекты образования, роста и слияния микродефектов при произвольных сложных режимах комбинированного термомеханического нагружения. Предложена совместная форма эволюционного уравнения накопления повреждений в областях малоциклового усталости и длительной прочности материала. В качестве критерия прочности поврежденного материала используется условие достижения величиной поврежденности критического значения. Получены материальные параметры и скалярные функции, входящие в определяющие соотношения математической модели МПС. Приводятся результаты численного моделирования процессов деформирования и накопления повреждений в конструкционных сплавах при взаимном влиянии малоциклового усталости и длительной прочности материала. Результаты сопоставления расчетных и экспериментальных данных показали, что предложенная модель МПС качественно и с необходимой для практических расчетов точностью количественно

описывает долговечность материалов при взаимном влиянии малоциклового усталости и длительной прочности материала.

Ключевые слова: малоцикловая усталость, длительная прочность, моделирование, механика поврежденной среды, напряженно-деформированное состояние, поврежденность, ресурс, материальные параметры, численный и натурный эксперимент

DOI: 10.31857/S0572329922600840, **EDN:** JMPNTY

1. Введение. Одной из основных задач современного машиностроения является обоснование ресурса оборудования и систем ответственных инженерных объектов (ОИО) на стадии их проектирования, оценка выработанного и прогноз остаточного ресурса конструктивных узлов в процессе эксплуатации, продление срока службы после отработки объектами нормативного срока службы. Особенно актуальны эти задачи для объектов, срок службы которых составляет несколько десятков лет (атомные энергетические установки, нефтехимическое оборудование, резервуары для хранения газообразных и сжиженных химических продуктов, магистральные газо- и нефтепроводы и т.п.). Эксплуатационные условия их работы характеризуются многопараметрическими нестационарными термомеханическими воздействиями, воздействиями внешних полей различной физической природы, приводящими к развитию различных механизмов деградации начальных прочностных свойств конструкционных материалов и исчерпанию начального ресурса конструктивных узлов инженерного объекта [1, 2].

Процессы исчерпания ресурса являются многостадийными, нелинейными, взаимосвязанными и сильно зависящими от конкретных условий изготовления и эксплуатации индивидуального объекта.

Существует большое количество механизмов, которые могут определять процессы исчерпания ресурса конкретного объекта в зависимости от условий его эксплуатации: многоцикловая усталость (МнЦУ), малоцикловая усталость (МЦУ), длительная прочность (ДП) и др. (с учетом их взаимодействия). Для указанных механизмов образование макроскопической трещины является результатом последовательного действия определенного числа очень сложных с физической точки зрения процессов преобразования начальной структуры конструкционного материала, включающих зарождение, развитие и взаимодействие различных дефектов кристаллической решетки в металлах и взаимодействие иерархических структурных составляющих различного уровня.

Реальные условия нагружения многих конструктивных элементов характеризуются циклическим изменением температуры и напряжений. Процесс разрушения при взаимном влиянии длительной прочности и малоциклового усталости происходит в результате циклического приложения нагрузки при повышенной температуре, выдержках нагрузки и активации механизмов деформации, зависящих от времени. Повреждения от ползучести (длительная прочность) и нестационарной пластической деформации (малоцикловая усталость) материала имеют различный физический характер. С микроскопической точки зрения можно считать, что повреждение при ползучести носит межкристаллитный характер, в то время как усталостное повреждение соответствует накоплению микротрещин по телу зерна (транскристаллитный характер). Когда в соответствии с условиями нагружения (циклическая деформация с выдержками при высокой температуре) оба процесса развиваются одновременно, имеется возможность для их взаимодействия, которая проявляется в виде сильно нелинейных эффектов, неблагоприятных для общей долговечности материала [2–8]. На микроскопическом уровне это объясняется тем, что межкристаллитные микротрещины при ползучести имеют тенденцию к образованию и развитию на очень раннем этапе жизни элементарного объема конструкционного материала. Присутствие таких дефектов за счет ползучести способствует зарождению транскристаллитных трещин при усталости.

К настоящему времени сложилась система классификации критериев малоциклового разрушения при ползучести в условиях высоких температур в зависимости от принятой меры интенсивности накопления усталостного повреждения и типа уравнений, определяющих параметр повреждения [9]. Наиболее представительными являются группы критериев следующих типов: деформационные (включающие деформацию или ее составляющие, которые характеризуют цикл деформирования в целом); кинетические (определяющие скорость повреждения и его критическое значение); энергетические (связывающие накопление повреждения с диссипацией энергии неупругого деформирования); критерии, базирующиеся на характеристиках длительной прочности. Достаточно полные обзоры по этому вопросу содержатся в работах [10–13].

Отметим, что, удовлетворительно описывая закономерности малоциклового разрушения при сравнительно простых программах нагружения, названные критерии утрачивают это свойство, когда требуется отразить влияние особенностей конкретного цикла, например, характера выдержки (ползучесть, релаксация), порядка чередования этапов пластического и вязкого деформирования как в полцикле растяжения, так и в полцикле сжатия, закона изменения температуры и т.п.

До сих пор ни процесс накопления повреждений в результате ползучести, ни процесс накопления повреждений в результате МЦУ как следует не изучены, поэтому не удивительно, что процесс, при котором одновременно накапливаются и взаимодействуют оба вида поврежденности, также до конца не изучен. Тем не менее, в ряде практически важных случаев эти процессы протекают одновременно, взаимодействуя друг с другом значительно влияя на ресурс конструктивного элемента. Обстоятельства осложняются тем, что во время эксплуатации такие элементы подвергаются действию переменных напряжений при постоянных температурах, переменных температур при постоянных напряжениях, или когда напряженно-деформированное состояние и температура меняются одновременно с различными периодами. Кроме того, экспериментальные факты свидетельствуют о том, что взаимодействие процессов малоцикловой усталости и длительной прочности синергично. В настоящее время не существует общей теории, которая бы позволяла предсказывать длительную прочность при циклическом изменении температуры в условиях действия постоянного напряжения, циклического изменения напряжения с выдержками различной длительности при постоянной температуре и в условиях, когда и напряжение и температура изменяются по различным законам. В реальных условиях эксплуатации конструктивных элементов энергетического оборудования длительности циклов термосилового нагружения могут составлять от нескольких секунд до десятков и сотен часов, причем знакопеременное вязкопластическое деформирование материала в районе конструктивных или технологических концентраторов напряжений сопровождается температурно-временными эффектами и ползучестью. Деформация ползучести и инициируемый ими процесс повреждаемости могут развиваться как в процессе выдержки под нагрузкой, так и при монотонном процессе нагружения или разгрузки, происходящих с достаточно низкой скоростью. Одновременное развитие в цикле изменения нагрузки процессов повреждения в результате малоцикловой усталости и длительной прочности оказывает заметное влияние на механизм малоциклового разрушения и долговечность материала, причем важными факторами являются форма цикла нагружения, асимметрия и знак напряжений, вид напряженного состояния, на фоне которых развиваются деформации ползучести.

Поскольку в реальных условиях длительные циклы нагружения могут быть достаточно сложными, включать участки активного нагружения и разгрузки с различными скоростями, выдержки в промежуточных точках цикла, были проведены исследования по выявлению наиболее характерных режимов нагружения [6, 7, 14–16]. Эти эксперименты показывают, что наложение времен выдержки при растяжении более $t = 1\text{--}2$ мин при повышенных температурах может вызвать резкое уменьшение уста-

лостной долговечности и изменение типа разрушения с внутризеренного на межзеренное. Времена выдержки при сжатии или циклы, включающие равные времена выдержки при растяжении и сжатии (симметричная выдержка), приводят к меньшим повреждениям, чем выдержка при растяжении. Разрушение в этих случаях внутризеренное. При циклах “медленно-быстро”, когда малая скорость деформации приходится на растягивающую часть цикла, также наблюдается значительное снижение долговечности (по числу циклов) по сравнению с симметричным циклированием с переходом на межзеренное разрушение. Если за каждым циклом типа “медленно-быстро” следует цикл типа “быстро-медленно” с аналогичными скоростями деформаций, то разрушение становится внутризеренным, а долговечность (по числу циклов) возрастает по сравнению с долговечностью при циклировании типа “медленно-быстро”. Повреждение, образовавшееся в процессе циклирования с выдержками при растяжении, не уменьшается при последующем непрерывном циклировании.

Рассмотренные выше результаты приводят к выводу, что линейный закон суммирования повреждений (гипотеза Пальмгрена–Майнера) по механизму совместной деградации малоциклового усталости и длительной прочности не применим, поскольку это совершенно различные процессы, проявляющие нелинейное взаимодействие. Для суммирования этих повреждений предложено несколько способов в основном, имеющих эмпирический или полуэмпирический характер и справедливых только для частных законов нагружения [4–7, 15]. По-видимому, единственным из этих способов, позволяющих исследовать сложные процессы нагружения, является способ разделения размаха деформаций в цикле на пластическую деформацию и деформацию ползучести. Этот способ позволяет анализировать результаты совместного действия ползучести и усталости и интерпретировать влияние частоты, времени выдержки и условий окружающей среды.

В настоящей работе с современных позиций МПС, механики разрушения развита математическая модель, описывающая процессы циклического вязкопластического деформирования и накопления повреждений в конструкционных материалах (металлах и их сплавах) при деградации начальных прочностных свойств материалов по совместным механизмам малоциклового усталости и длительной прочности материала. В целях качественной и количественной оценки модели проведено исследование влияния законов изменения механической деформации и температуры (формы цикла нагружения) на долговечность конструкционных сталей при различных циклах нагружения.

2. Определяющие соотношения математической модели механики поврежденной среды. Модель поврежденной среды при механизмах деградации, сочетающих малоцикловую усталость и длительную прочность материала, состоит из трех взаимосвязанных составных частей [17–20]:

- определяющих соотношений, описывающих вязкопластическое поведение материала с учетом зависимости от процесса разрушения;
- эволюционных уравнений, описывающих кинетику накопления повреждений;
- критерия прочности поврежденного материала.

2.1. Определяющие соотношения термовязкопластичности. Определяющие соотношения термовязкопластичности базируются на следующих основных положениях:

- материал среды начально изотропен и повреждения в нем отсутствуют (учитываются только анизотропия, вызванная процессами пластичности и ползучести; анизотропия упругих свойств, вызванная процессами поврежденности материала, не учитывается);

- тензоры деформаций и скоростей деформаций e_{ij} , $\dot{e}_{ij}$ представляют сумму “мгновенной” и “временной” составляющих. “Мгновенная” составляющая тензоров деформаций и скоростей деформаций включает упругую составляющую e_{ij}^e , $\dot{e}_{ij}^e$ (не зависящие от истории нагружения и определяющиеся конечным состоянием процесса) и

пластическую — $e_{ij}^p, \dot{e}_{ij}^p$ (зависящие от истории процесса нагружения). Временная составляющая тензоров деформаций и скоростей деформаций $e_{ij}^c, \dot{e}_{ij}^c$, связана с эволюцией процесса ползучести;

— начальная поверхность текучести описывается поверхностью в форме гиперсферы Мизеса. Эволюция изменения поверхности пластического нагружения описывается изменением ее радиуса C_p и перемещением ее центра $\dot{\rho}_{ij}^p$;

— в пространстве напряжений существует семейство эквипотенциальных поверхностей ползучести радиуса C_c и имеющих общий центр ρ_{ij}^c ;

— справедлив принцип градиентальности;

— изменение объема тела упруго $e_{ii}^n = 0$, где $e_{ij}^n = e_{ij}^p + e_{ij}^c$ — неупругая деформация, включающая в себя “мгновенную” и “временную” составляющие;

— рассматриваются процессы деформирования, характеризуемые малыми деформациями;

— единственным структурным параметром, характеризующим на макроуровне степень поврежденности материала, является скалярный параметр ω — поврежденность ($\omega_0 \leq \omega \leq \omega_f$);

— влияние уровня накопленной поврежденности на процессы деформирования материала учитывается путем введения эффективных напряжений.

Принимается, что в упругой области девиаторные σ'_{ij}, e'_{ij} и шаровые σ, e составляющие тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций e_{ij} , а также их скоростей связаны обобщенным законом Гука:

$$\begin{aligned}\sigma &= 3K[e - \alpha(T - T_0)], \quad \sigma_{ij} = 2Ge_{ij}^e, \quad \dot{\sigma} = 3K(\dot{e} - \dot{\alpha}T - \alpha\dot{T}) + \frac{\dot{K}}{K}\sigma \\ \sigma'_{ij} &= 2Ge'_{ij} + \frac{\dot{G}}{G}\sigma'_{ij}\end{aligned}\quad (2.1)$$

где $\alpha(T)$ — коэффициент линейного температурного расширения материала, $K(T)$ — модуль объемной упругости, $G(T)$ — модуль сдвига, T_0 — начальная температура, T — текущая температура.

Для описания эффектов монотонного и циклического деформирования в пространстве напряжений вводится поверхность текучести, которая описывается гиперсферой Мизеса [21, 22]:

$$F_p = S_{ij}S_{ij} - C_p^2 = 0, \quad S_{ij} = \sigma'_{ij}\rho_{ij}^p \quad (2.2)$$

где C_p — радиус поверхности текучести, а ρ_{ij}^p — координаты ее центра.

Для описания сложных режимов деформирования в пространстве деформаций вводится поверхность циклической “памяти” [23]:

$$a_e = (e_{ij}^p - \xi_{ij})(e_{ij}^p - \xi_{ij}) - a_{\max}^2 = 0 \quad (2.3)$$

где $a_{\max}$ — максимальное значение интенсивности тензора пластических деформаций e_{ij}^p , а ξ_{ij} — тензор односторонне накопленных пластических деформаций.

При моделировании кинетики напряженно-деформированного состояния (НДС) при циклическом пластическом деформировании материала необходимо максимально достоверно описывать процессы упрочнения и разупрочнения конструкционных материалов, так как данные механизмы играют определяющую роль в точности оценок ресурсных характеристик материала. При усталостном нагружении реализуется конкуренция процессов упрочнения и разупрочнения, вызванных в материале меха-

низмами изменения фазового состава, микроструктурного состояния, изменением плотности дислокаций, а также влияние изменения температуры [4, 5]. Физические механизмы, протекающие в поликристаллических металлах и сплавах и влияющие на процессы упрочнения, и разупрочнения, зависят от действующей температуры, вида траектории деформирования, длины пути пластического деформирования, действующих амплитуд интенсивности пластической деформации и степени стабилизации процесса деформирования.

Постулируем, что в диапазоне температур T , при которых эффектами отжига можно пренебречь, изотропное упрочнение (разупрочнение) материала можно представить в виде:

$$\dot{C}_p(\chi, T) = q_\chi \dot{\chi}_p^{mon} + a_p(Q_p^p - C_p^{cyc(p)}) \dot{\chi}_p^{cyc} + a_c(Q_p^c - C_p^{cyc(c)}) \dot{\chi}_c^{cyc} + q_T \dot{T} \quad (2.4)$$

$$C_p = C_p^0 + \int_0^t \dot{C}_p dt \quad (2.5)$$

$$q_\chi = q_2 A + (1 - A) q_1, \quad Q_p^p = Q_2^p A + (1 - A) Q_1^p, \quad Q_p^c = Q_2^c A + (1 - A) Q_1^c \quad (2.6)$$

$$A = 1 - \cos^2 \Theta, \quad \cos \Theta = n_{ij}^e n_{ij}^s, \quad n_{ij}^e = \frac{\dot{e}_{ij}^e}{(\dot{e}_{ij}^e \dot{e}_{ij}^e)^{1/2}}, \quad n_{ij}^s = \frac{S_{ij}}{(S_{ij} S_{ij})^{1/2}}$$

$$\dot{\chi}_p = \left(\frac{2}{3} \dot{e}_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p \right)^{1/2}, \quad \chi_p = \int_0^t \dot{\chi}_p dt \quad (2.7)$$

$$\dot{\chi}_p^{mon} = \begin{cases} 0 & \text{при } a_e < 0 \vee e_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p \leq 0 \\ \dot{\chi}_p & \text{при } a_e = 0 \wedge e_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p \geq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\dot{\chi}_p^{cyc} = \begin{cases} \dot{\chi}_p & \text{при } a_e < 0 \vee e_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p \leq 0 \\ 0 & \text{при } a_e = 0 \wedge e_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p \geq 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

В формулах (2.4)–(2.9) введены следующие обозначения: C_p^0 – значение начального радиуса поверхности текучести материала; q_1, q_2, q_T – модули монотонного изотропного упрочнения (разупрочнения); $Q_1^p, Q_2^p, Q_1^c, Q_2^c$ – модули циклического изотропного упрочнения (разупрочнения); $\dot{\chi}_p^{mon}, \dot{\chi}_p^{cyc}, \dot{\chi}_c^{cyc}$ – длина траектории пластического деформирования материала на монотонных участках, на участках регулярного и нерегулярного циклического нагружений и на участках выдержки нагрузки соответственно.

Первый член уравнения (2.1) описывает изотропное упрочнение в результате монотонного пластического деформирования материала, второй – на участках циклического деформирования, третий – при действии процесса ползучести, а четвертый – при изменении температуры T . Уравнения (2.1)–(2.9) описывают изотропное упрочнение материала в зависимости от параметра непропорциональности процесса нагружения, описанного параметром A .

Постулируем, что скорость изменения тензора микронапряжений $\dot{\rho}_{ij}$ принимается в виде:

$$\dot{\rho}_{ij} = \dot{\rho}_{ij}^p + \dot{\rho}_{ij}^c, \quad \rho_{ij} = \int_0^t \dot{\rho}_{ij} dt \quad (2.10)$$

$$\dot{\rho}_{ij}^p = f(\chi)(\dot{\rho}_{ij}^m + \dot{\rho}_{ij}^r) \quad (2.11)$$

$$\dot{\rho}_{ij}^m = g_1^p \dot{e}_{ij}^p - g_2^p \rho_{ij}^p \dot{\chi} + g_T^p \rho_{ij}^p \langle \dot{T} \rangle, \quad \dot{\chi} = \dot{\chi}_p + \dot{\chi}_c \quad (2.12)$$

$$\dot{\rho}_{ij}^r = g_1^r \dot{e}_{ij}^p - g_2^r \left(\frac{\rho_{\min} - \rho_u}{\rho_u} \right) \rho_{ij}^r \dot{\chi} \cos \gamma + g_T^r \rho_{ij}^r \langle \dot{T} \rangle \quad (2.13)$$

$$\cos \gamma = \begin{cases} \left| \frac{\dot{\rho}_{ij} \rho_{ij}^r}{(\dot{\rho}_{ij} \dot{\rho}_{ij})^{1/2} (\rho_{ij}^r \rho_{ij}^r)^{1/2}} \right| & \text{при } \cos \gamma < 0, \quad \rho_u^r = (\rho_u^r \rho_u^r)^{1/2} \\ 0 & \text{при } \cos \gamma > 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

$$g_T^{p,r} = \frac{1}{g_1^{p,r}} \left[\frac{\partial g_1^{p,r}}{\partial T} \right] \quad (2.15)$$

$$f(\chi) = f(\chi_p^{mon}) + f(\chi_p^{cyc}) + f(\chi_\xi), \quad f(\chi_{c,\xi}) = 1 + k_1^{c,\xi} (1 - e^{-k_2^{c,\xi} \chi_{c,\xi}})$$

где $g_1^{p,r}, g_2^{p,r}, k_1^{c,\xi}, k_2^{c,\xi}$ — материалыные параметры, определяющиеся экспериментальным путем.

Здесь и далее для любой величины B заключенной в $\langle \rangle$, выполняется условие:

$$\langle B \rangle = \begin{cases} B, & B > 0 \\ 0, & B \leq 0 \end{cases}$$

В формуле (2.11) первый член, указанный в скобках, описывает эволюцию ρ_{ij}^p , связанную с образованием макроскопических пластических деформаций, а второй — при односторонне накапливаемых пластических деформаций ξ_{ij} .

Зависимость (2.11) позволяет описывать основные эффекты анизотропии, вызванной неупругим деформированием материала при знакопеременном нагружении, а также эффекты, возникающие при реализации “жестких” (“посадка” петли пластического гистерезиса) и “мягких” (“вышагивание” петли) режимов нагружения.

Функция $f(\chi)$ учитывает изменение ρ_{ij}^p при циклических блочных не симметричных режимах циклического пластического нагружения материала.

Компоненты тензора скоростей пластических деформаций $\dot{e}_{ij}^p$ определяются на основе ассоциированного закона течения:

$$\dot{e}_{ij}^p = \lambda_p S_{ij}, \quad S_{ij} = \sigma'_{ij} - \rho_{ij} \quad (2.16)$$

Если величина напряжений, температура и скорость нагружения таковы, что эффекты ползучести существенны, параметры процесса деформирования материала должны определяться на этапе нагружения с учетом процесса ползучести.

Для описания процессов ползучести в пространстве напряжений вводится семейство эквипотенциальных поверхностей ползучести F_c имеющих общий центр ρ_{ij}^c и различные радиусы C_c , определяемые текущим напряженным состоянием [22]:

$$F_c^{(i)} = S_{ij}^c S_{ij}^c - C_c^2 = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

Согласно ассоциированному закону

$$\dot{e}_{ij}^c = \lambda_c \frac{\partial F_c^{(i)}}{\partial S_{ij}^c} = \lambda_c S_{ij}^c \quad (2.18)$$

где λ_c — соответствует текущей поверхности $F_c^{(i)}$, определяющей текущее напряженное состояние S_{ij}^c .

Среди этих эквипотенциальных поверхностей можно выделить поверхность с радиусом $\bar{C}_c$, соответствующую нулевой скорости ползучести:

$$F_c^{(0)} = \bar{S}_{ij}^c \bar{S}_{ij}^c - \bar{C}_c^2 = 0, \quad \bar{S}_{ij}^c = \bar{\sigma}_{ij}' - \rho_{ij}$$

где $\bar{S}_{ij}^c$ и $\bar{\sigma}_{ij}'$ — совокупность напряженных состояний, отвечающих (с определенным допуском) нулевой скорости ползучести.

Постулируем что, с учетом взаимного влияния процессов пластичности и ползучести выражение для радиуса поверхности ползучести нулевого уровня имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{C}_c &= \bar{C}_c(\chi_c, T) + C_c^{\text{cyc}}(\chi_c^{\text{cyc}}, T) \\ \dot{C}_c^{\text{cyc}} &= a_c(Q_c^p - C_c^{\text{cyc}})\dot{\chi}_c^{\text{cyc}} \\ Q_c^p &= Q_2^{cr} A + (1 - A)Q_1^c \\ \chi_c &= \left(\frac{2}{3}\dot{e}_{ij}^c \dot{e}_{ij}^c\right)^{1/2}, \quad \chi_c = \int_0^t \dot{\chi}_c dt \\ \dot{\chi}_c^{\text{mon}} &= \begin{cases} 0 & \text{при } a_e < 0 \vee \dot{e}_{ij}^c \dot{e}_{ij}^c \leq 0 \\ \dot{\chi}_c & \text{при } a_e = 0 \wedge \dot{e}_{ij}^c \dot{e}_{ij}^c \geq 0 \end{cases}, \quad \dot{\chi}_c^{\text{cyc}} = \begin{cases} \dot{\chi} & \text{при } a_e < 0 \vee \dot{e}_{ij}^c \dot{e}_{ij}^c \leq 0 \\ 0 & \text{при } a_e = 0 \wedge \dot{e}_{ij}^c \dot{e}_{ij}^c \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\lambda_c = \lambda_c(\psi_c, T) = \lambda_c \psi_c,$$

$$\psi_c = \left[\frac{(S_{ij}^c S_{ij}^c)^{1/2} - \bar{C}_c}{C_c} \right], \quad \lambda_c = \begin{cases} 0, & \psi_c \leq 0 \\ \lambda_c, & \psi_c > 0 \end{cases}$$

где $\bar{C}_c$ и λ_c — экспериментально определяемые функции температуры T .

Эволюционное уравнение для изменения координат центра поверхности ползучести примем в виде [29]:

$$\dot{\rho}_{ij}^c = g_1^c \dot{e}_{ij}^c - g_2^c \rho_{ij}^c \dot{\chi} + g_T^c \rho_{ij}^c \langle \dot{T} \rangle$$

где g_1^c и $g_2^c > 0$ — экспериментально определяемые материальные параметры.

Конкретизируя соотношение (2.18) закон градиентальности можно представить в виде:

$$\dot{e}_{ij}^c = \lambda_c(\psi_c, T) S_{ij}^c = \lambda_c \psi_c S_{ij}^c = \lambda_c \left(\frac{\sqrt{S_{ij}^c S_{ij}^c} - \bar{C}_c}{C_c} \right) S_{ij}^c$$

Интенсивность тензора скорости деформации ползучести имеет вид:

$$\dot{e}_u^c = \lambda_c \left(\frac{\sqrt{S_{ij}^c S_{ij}^c} - \bar{C}_c}{C_c} \right) S_u^c \quad (2.20)$$

С учетом (2.20) выражение для длины траектории деформаций ползучести примет вид:

$$\dot{\chi}_c = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{e}_c^u = \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda_c (\sqrt{S_{ij}^c S_{ij}^c} - \bar{C}_c)$$

откуда:

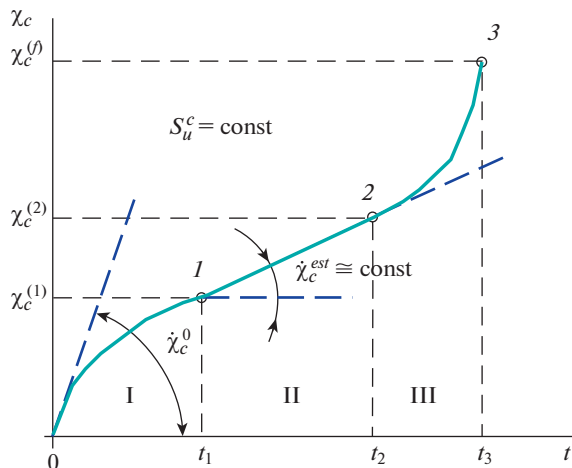


Рис. 1. Кривая ползучести при многоосном деформировании.

$$\lambda_c = \frac{\dot{\chi}_c}{\frac{2}{3}(\sqrt{S_{ij}^c S_{ij}^c} - \bar{C}_c)} \quad (2.21)$$

Зависимость χ_c от времени процесса t при $S_u^c = \text{const}$ при многоосном деформировании по лучевой траектории имеет вид, представленный на рис. 1.

На кривой $\chi_c \sim t$ (рис. 1) с определенной долей условности можно выделить три участка:

I. участок неустановившейся ползучести ($0 - \chi_c^{(1)}$) – скорость деформации ползучести $\dot{\chi}_c$ убывает;

II. участок установившейся ползучести ($\chi_c^{(1)} - \chi_c^{(2)}$) – скорость деформации ползучести $\dot{\chi}_c$ приблизительно постоянна $\dot{\chi}_c^{est} \cong \text{const}$, $\dot{\chi}_c \cong \text{const}$;

III. участок неустановившейся ползучести ($\chi_c > \chi_c^{(2)}$) – деформации ползучести быстро растут (предшествует разрушению) и $\dot{\chi}_c$ резко возрастает.

Длины участков существенным образом зависят от величины $S_u^c = \text{const}$.

Уравнения (2.19)–(2.23) описывают неустановившиеся и установившиеся участки кривой ползучести при разных уровнях напряжений и основные эффекты процесса ползучести при знакопеременном напряжении. Связь уравнений ползучести (2.19)–(2.23) с уравнениями (2.1)–(2.18), описывающими “мгновенные” пластические деформации, осуществляется на этапе нагружения через девиатор напряжений σ'_{ij} и соответствующий алгоритм определения $\dot{e}_{ij}^c$ и $\dot{e}_{ij}^p$ на этапе нагружения путем определенных соотношений между “временными” и “мгновенными” скалярными и тензорными величинами.

На стадии развития рассеянных по объему повреждений наблюдается влияние поврежденности на физико-механические характеристики материала. Это влияние может быть учтено введением эффективных напряжений [17, 18]:

$$\tilde{\sigma}'_{ij} = F_1(\omega)\sigma'_{ij} = \frac{G}{\tilde{G}}\sigma'_{ij} = \frac{\sigma'_{ij}}{(1-\omega)\left[1 - \frac{(6K+12G)\omega}{(9K+8G)}\right]} \quad (2.22)$$

$$\tilde{\sigma} = F_2(\omega)\sigma = \frac{K}{\tilde{K}}\sigma = \frac{\sigma}{4G(1-\omega)/(4G+3K\omega)} \quad (2.23)$$

где $\tilde{G}$, $\tilde{K}$ – эффективные модули упругости, определяемые по формулам Маккензи [24].

Аналогично определяется эффективная переменная $\tilde{\rho}_{ij}$:

$$\tilde{\rho}_{ij} = F_1(\omega)\rho_{ij}$$

2.2. Эволюционные уравнения накопления повреждений. Уравнения накопления повреждений базируются на связи величины поврежденности с внутренними макроскопическими параметрами, критическое значение которых определяет момент разрушения (образования макроскопической трещины). Зависимость рассеянной энергии, затраченной на образование дефектов при усталостном нагружении, определяется через работу тензора микронапряжений $\tilde{\rho}_{ij}$ на необратимых деформациях $\dot{\epsilon}_{ij}^n$:

$$W_0 = \tilde{\rho}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}^n \quad (2.24)$$

В задачах оценки ресурсных характеристик необходимо учитывать влияние многоосности нагружения, наличие которой существенным образом снижает ресурс за счет как увеличения влияния действующих компонент тензоров деформаций и напряжений при пропорциональном нагружении, так и за счет вращения главных площадок тензоров напряжений и деформаций при непропорциональном нагружении.

Многочисленные исследования влияния многоосности нагружения при различных видах напряженных состояний, таких как двухосное растяжение-сжатие, трехосное растяжение и др. позволяют сделать вывод, что на ресурс материала опасных зон конструктивных элементов оказывает существенное влияние “объемность” напряженно-го состояния, характеризуемая параметром $\beta = \sigma/\sigma_u$, где σ – гидростатическая компонента тензора напряжений, σ_u – интенсивность тензора напряжений.

Учет влияния “объемности” напряженного состояния на скорость роста поврежденности $\dot{\omega}$ производится за счет введения в уравнение скорости накопления повреждения функции $f_1(\beta)$, которая увеличивает скорость накопления повреждений $\dot{\omega}$ при нагружениях с $\beta \rightarrow +\infty$ и уменьшает скорость при $\beta \rightarrow -\infty$. При нагружениях с $\beta \rightarrow -\infty$ в некоторых поликристаллических металлах и сплавах возможно частичное уменьшение накопленной поврежденности (эффект “залечивания”).

В условиях непропорционального нагружения, при котором направляющие тензора напряжений и деформаций не соосны, реализуемая траектория деформирования существенным образом влияет на кинетику напряженно-деформированного состояния и на ресурсные характеристики конструкционного материала в целом.

Учитывая рассмотренные эффекты, влияющие на ресурсные характеристики, уравнение для скорости накопления усталостных повреждений в условиях малоциклового и многоциклового нагружения можно представить в виде:

$$\dot{\omega} = f_1(\beta)f_2(\omega)f_3(W_0)f_4(\Theta)\dot{W}_0 \quad (2.25)$$

В (2.25) введены следующие обозначения для функций, учитывающих влияние вышеописанных факторов: $f_1(\beta)$ – “объемности” напряженного состояния; $f_2(\omega)$ – накопленного уровня поврежденности; $f_3(W_0)$ – относительного уровня рассеянной энергии, идущей на образование микродефектов; $f_4(\Theta)$ – параметров траектории деформирования.

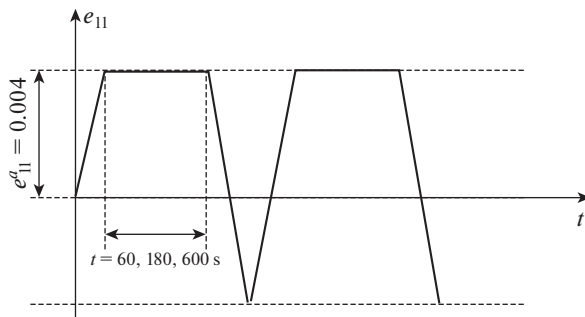


Рис. 2. Закон нагружения лабораторных образцов стали Р92.

$$f_1(\beta) = \exp(k\beta) \quad (2.26)$$

$$f_2(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{при } W_0 \leq W_a \\ \omega^{1/3} (1 - \omega)^{2/3}, & \text{при } W_0 > W_a \wedge \omega \leq 1/3 \\ \frac{\sqrt[3]{16}}{9} \omega^{-1/3} (1 - \omega)^{-2/3}, & \text{при } W_0 > W_a \wedge \omega > 1/3 \end{cases} \quad (2.27)$$

$$f_3(W_p) = \frac{W_0 - W_a}{W_f - W_a} \quad (2.28)$$

$$f_4(\Theta) = (1 - \cos^2 \Theta) \beta + \cos^2 \Theta \quad (2.29)$$

$$W_f = W_{pf}^{cyc} \frac{\dot{\chi}_p^{cyc}}{\dot{\chi}} + W_{cf}^{cyc} \frac{\dot{\chi}_c^{cyc}}{\dot{\chi}} + W_{pf}^{mon} \frac{\dot{\chi}_p^{mon}}{\dot{\chi}} + W_{cf}^{cyc} \frac{\dot{\chi}_p^{mon}}{\dot{\chi}} \quad (2.30)$$

где W_a , $W_{pf}^{cyc, mon}(T)$ и $W_{cf}^{cyc, mon}(T)$ — параметры материала.

2.3. Критерий прочности поврежденного материала. В качестве критерия разрушения принято условие достижения величины поврежденности ω критического значения:

$$\omega = \omega_f \leq 1 \quad (2.31)$$

3. Численные результаты. В качестве первого примера оценки достоверности математической модели МПС при взаимном влиянии процессов ползучести и усталости материала, а также точности определения материальных параметров и скалярных функций модели МПС была решена задача расчета кинетики НДС и накопления повреждений в лабораторных образцах из стали Р92 при “жестком” нагружении — одноосном растяжении-сжатии с временными выдержками на максимальной деформации и без них для двух амплитуд деформаций [8]. Температура в исследованиях составляла 600°C. На рис. 2 приведен закон нагружения, реализуемый в опытах.

Основные физико-механические характеристики стали Р92 [20] и материальные параметры модели МПС при температуре 650°C приведены в табл. 1–3.

На рис. 3, 4 приведены петли циклического гистерезиса для первого цикла нагружения и для цикла нагружения равного половине долговечности ($0.5N_f = 335$) соответственно (точками отмечены экспериментальные данные, сплошная линия — численные результаты).

Таблица 1. Физико-механические характеристики и материалы параметры модели МПС стали Р92

K (МПа)	141 667
G (МПа)	65 385
C_p^0 (МПа)	249
$\bar{C}_{c0}$ (МПа)	125
g_1^p (МПа)	38 900
g_2^p (МПа)	660
g_1^c (МПа)	5100
g_2^c (МПа)	260
a_p	4
a_c	0
W_{pf}^{cyc} (МДж/м ³)	4130
W_{cf}^{cyc} (МДж/м ³)	33

Таблица 2. Модуль циклического упрочнения $Q_1^p(a_{e\max})$ и $Q_1^c(a_{e\max})$ (МПа) стали Р92

$a_{e\max}$	0	0.001	0.003	0.004	0.006	0.01
$Q_1^p(a_{e\max})$	0	–92	–92	–92	–92	–92
$Q_1^c(a_{e\max})$	0	–50	–50	–50	–50	–50

На рис. 5 приведены численные результаты зависимости максимальных и минимальных напряжений в цикле от количества циклов, где точками отмечены экспериментальные данные.

На рис. 6 приведено сравнение кривых релаксации напряжений для первого цикла нагружения и для цикла нагружения равного половине долговечности ($0.5N_f = 335$) полученных численным (сплошная линия) и экспериментальным путем (точки).

В табл. 4 приведено сравнение расчетных и экспериментальных значений долговечности лабораторных образцов при циклическом нагружении с временными выдержками на максимальной деформации.

В качестве второго примера практической реализации математической модели МПС при взаимном влиянии процессов ползучести и усталости материала, а также

Таблица 3. Зависимость коэффициентов пропорциональности λ_c^0 и λ_c^{II} от интенсивности напряжения σ_u для стали Р92

σ_u , МПа	0	50	100	150	170	250
λ_c^0 , 1/МПа · час	0	0.00014	0.00014	0.00014	0.00035	0.0015
λ_c^{II} , 1/МПа · час	0	1.3×10^{-6}	1.3×10^{-6}	1.3×10^{-6}	3.2×10^{-6}	1.75×10^{-5}

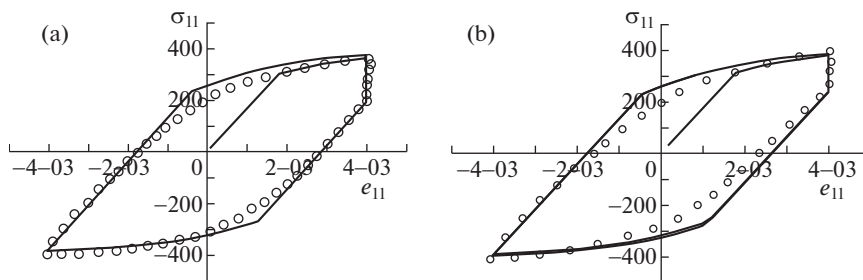


Рис. 3. Петля циклического гистерезиса для первого цикла нагружения: а – время выдержки 600 с, б – время выдержки 60 с.

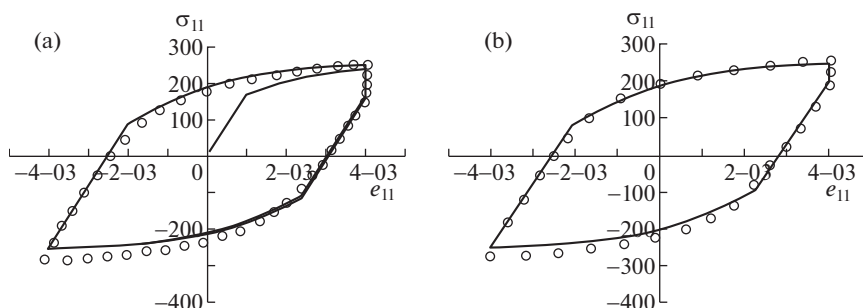


Рис. 4. Петля циклического гистерезиса для цикла равного половине долговечности материала. а – время выдержки 600 с, б – время выдержки 60 с.

точности определения материальных параметров и скалярных функций модели МПС была решена задача определения кинетики НДС и накопления повреждений в лабораторных образцах из стали 316 при жестком нагружении – растяжении-сжатии с временными выдержками на максимальной деформации и без них для двух амплитуд деформаций [7]. Температура в исследованиях составляла 650°C. На рис. 7 приведены законы нагружения, реализуемые в испытаниях [7].

Основные физико-механические характеристики стали 316 [7] и материальные параметры при температуре 650°C модели поврежденной среды [7–23] приведены в табл. 5–8.

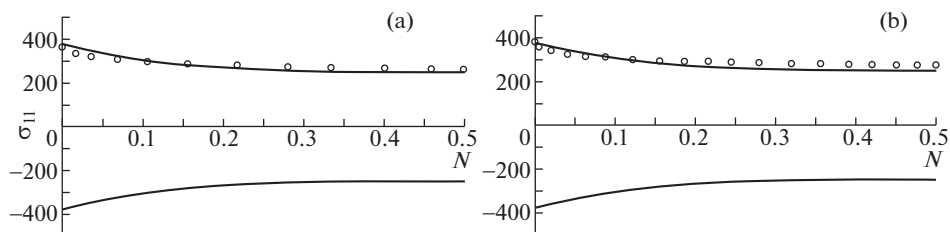


Рис. 5. Зависимость амплитудных значений величин напряжений (МПа) от числа циклов нагружения: а – время выдержки 600 с, б – время выдержки 60 с.

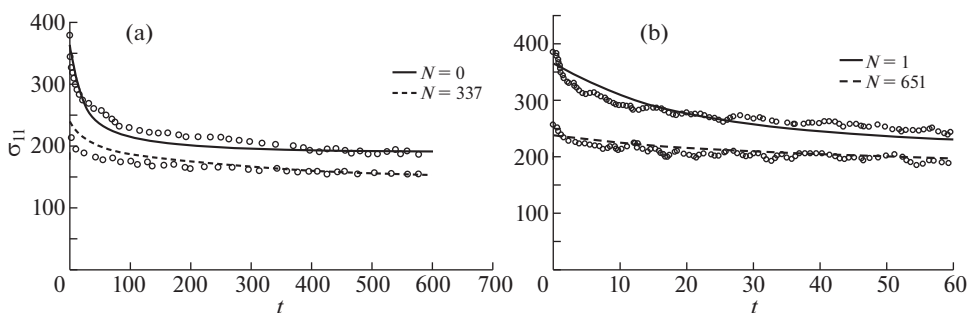


Рис. 6. Кривые релаксации напряжений (МПа) для циклического нагружения с выдержкой на максимальном значении деформации: а – 600 с, б – 60 с.

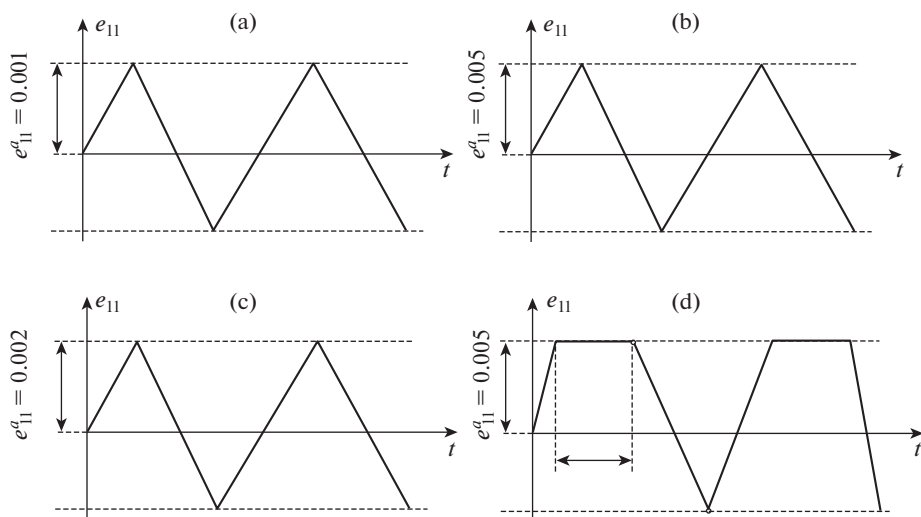


Рис. 7. Закон нагружения лабораторных образцов из стали 316 ($t = 30$ мин).

На рис. 8 приведены петли циклического гистерезиса для законов нагружения представленных на рис. 7.

На рис. 9 приведено сравнение результатов эксперимента (маркеры) и численного моделирования экспериментальных процессов (сплошная линия) по значениям размахов напряжений в циклах в зависимости от количества циклов.

Таблица 4.

Время выдержки, с	Экспериментальное число циклов до разрушения	Расчетное число циклов до разрушения
60	1303	1302
180	1190	984
600	675	801

Таблица 5. Физико-механические характеристики и материалы параметры модели МПС стали 316 при $T = 650^\circ\text{C}$

K (МПа)	153450
G (МПа)	58450
C_p^0 (МПа)	74
g_1^p (МПа)	6858
g_2^p (МПа)	290.4
g_1^c (МПа)	5100
g_2^c (МПа)	260
a_p	3.2
A_c	75
W_{pf}^{cyc} (МДж/м ³)	820
W_{cf}^{cyc} (МДж/м ³)	10

Таблица 6. Радиус поверхности нагружения, соответствующий нулевой скорости ползучести $\bar{C}_c$ (МПа) стали 316 при $T = 650^\circ\text{C}$

χ_c	0	0.01	0.05	0.08	0.1	0.12	0.14	0.16	0.17
$\bar{C}_c$	40	40	40	35	27	14	6	3	2

На рис. 10 приведено сравнение отклонений результатов численного моделирования экспериментальных процессов и опытных данных от закона линейного суммирования повреждений (светлые точки – экспериментальные данные, черные – численные результаты). Где N_h – число циклов до разрушения в испытаниях с выдержкой длительностью t_h в каждом цикле; N_f – число циклов до разрушения в аналогичных испытаниях без выдержек; t_f – время до разрушения, определяемое по кривой длительной прочности при напряжении и температуре выдержки.

В табл. 9 приведено сравнение количества циклов, полученных численным и экспериментальным путем для законов нагружения приведенных на рис. 7.

Полученные ресурсные характеристики конструкционных сталей, приведенные в настоящей работе, демонстрируют качественное и количественное совпадение численных и экспериментальных данных и, свидетельствуют о достоверности определяющих соотношений МПС и разработанной методики определения материальных параметров. Полученные отличия могут быть объяснены так же и тем, что эксперимен-

Таблица 7. Модуль циклического упрочнения $Q_1^p(a_{e\max})$ и $Q_1^c(a_{e\max})$ (МПа) стали 316 при $T = 650^\circ\text{C}$

$a_{e\max}$	0	0.001	0.003	0.004	0.006	0.01
$Q_1^p(a_{e\max})$	0	50	80	90	95	110
$Q_1^c(a_{e\max})$	0	–30	–33	–33	–33	–33

Таблица 8. Зависимость коэффициентов пропорциональности λ_c^0 и λ_c^H от интенсивности напряжения σ_u для стали 316 при $T = 650^\circ\text{C}$

σ_u , МПа	0	50	100	150	170	200
λ_c^0 , 1/МПа · час	0	9.0×10^{-6}	9.0×10^{-6}	9.0×10^{-6}	2.1×10^{-6}	7.2×10^{-5}
λ_c^H , 1/МПа · час	0	1.455×10^{-6}	1.455×10^{-6}	1.455×10^{-6}	3.6×10^{-6}	1.854×10^{-5}

Таблица 9. Сравнение расчетных и экспериментальных значений циклов до разрушения

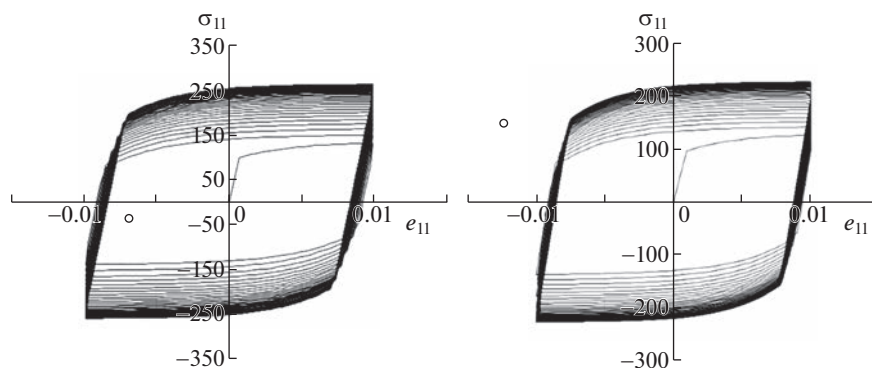
Закон нагружения	Экспериментальное число циклов до разрушения	Расчетное число циклов до разрушения
$e_{11}^a = 0.01$ без временной выдержки (рис. 7,а)	863	964
$e_{11}^a = 0.005$ без временной выдержки (рис. 7,б)	4000	3639
$e_{11}^a = 0.01$ с временной выдержкой (рис. 7,с)	338	385
$e_{11}^a = 0.005$ с временной выдержкой (рис. 7,д)	985	950

тальные данные получены на одном лабораторном образце для каждого режима нагружения.

4. Заключение. Развита математическая модель МПС, описывающая процессы деформирования и накопления повреждений, основанная на энергетическом подходе и единой форме представления процесса накопления повреждений при механизмах, сочетающих усталость и ползучесть материала.

Получены материальные параметры и скалярные функции, входящие в определяющие соотношения математической модели МПС для ряда конструкционных сталей.

Проведены численные исследования определения кинетики НДС и накопления повреждений в лабораторных образцах из сталей 316 и Р92 при “жестком” нагружении

**Рис. 8.** Петли циклического гистерезиса для законов нагружения, представленных на рис. 7, а и б.

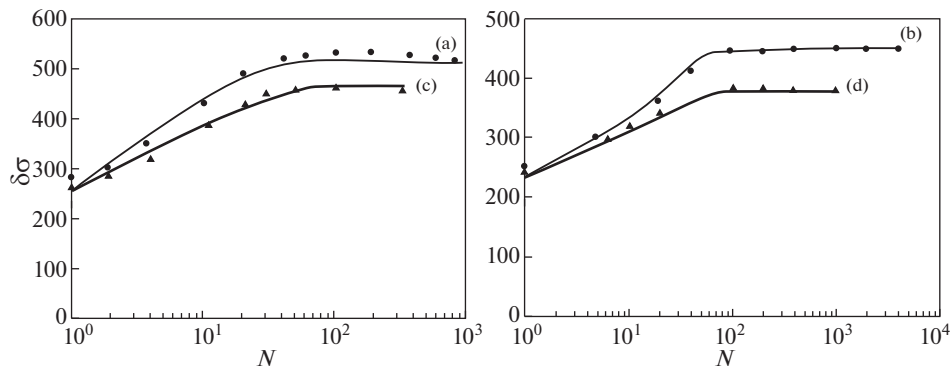


Рис. 9. Размах напряжений (МПа) в циклах нагружения в зависимости от числа циклов для режимов нагружения, представленных на рис. 7. На рис. 9 (а): ● — амплитуда $e_{11} = 0.01$, ▲ — амплитуда $e_{11} = 0.01$ с выдержкой 30 мин. На рис. 9 (b): ● — амплитуда $e_{11} = 0.005$, ▲ — амплитуда $e_{11} = 0.005$ с выдержкой 30 мин.

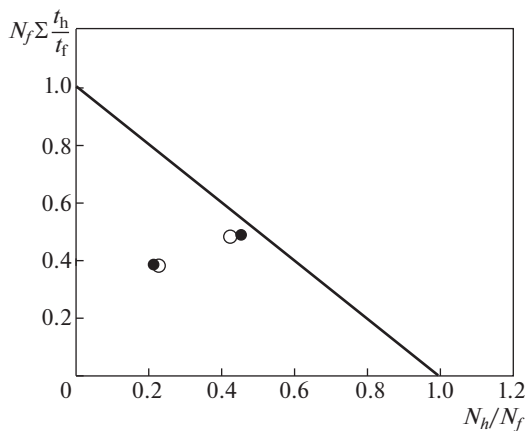


Рис. 10. Зависимость относительной наработки материала при взаимном влиянии усталости и прочности материала.

(контролируемые деформации) — одноосное растяжение-сжатие с временными выдержками на максимальной деформации и без них для двух амплитуд деформаций.

Результаты оценки достоверности показали, что развитая модель с достаточной для инженерных расчетов точностью описывает процессы нагружения при деградиационных механизмах, сочетающих усталость и длительную прочность материала.

Проведенный анализ представленных в данной работе уравнений механики поврежденной среды и результаты оценки их достоверности, позволяют, по мнению авторов, рекомендовать их на данном этапе к расчетам долговечности конструктивных узлов машиностроительных объектов, работающих в условиях нестационарного термомеханического нагружения при деградиационных механизмах, сочетающих усталость и длительную прочность материала. Вместе с тем необходима дальнейшая экспериментально-теоретическая проверка их достоверности для случаев нестационарных много-

онных напряженно-деформированных состояний и неизотермических процессов, сопровождающихся существенным вращением главных площадок тензоров напряжений и деформаций (для различных сложных траекторий нагружения) [26]. Также необходим дальнейший анализ экспериментальной информации по совместным механизмам деградации конструкционных материалов при комплексном развитии процессов деградации, вызванных усталостью, нестационарной ползучестью, коррозионными процессами, радиационными воздействиями и т.д., и формулировка на этой базе математических моделей совместных процессов деградации начальных прочностных свойств конструкционных материалов.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 22-19-00138.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В.В. Прогнозирование машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1984. 312 с.
2. Митенков А.М., Кайдалов В.Б., Коротких Ю.Г. и др. Методы обоснования ресурса ЯЭУ. М.: Машиностроение, 2007. 445 с.
3. Вудфорд Д.А. Повреждение при ползучести и концепция остаточной долговечности // Теор. основы инж. расч. 1979. Т. 101. № 4. С. 1–8.
4. Маджумар, Мейя. Механическая усталость, зависящая от времени // Теор. основы инж. расч. 1980. Т. 102. № 1. С. 111–121.
5. Гомюк, Бью Куок. Расчет долговечности коррозионностойкой стали 304 в условиях взаимодействия усталости и ползучести с использованием теории непрерывного повреждения // Теор. основы инж. расч. 1986. № 3. С. 111–136.
6. Замрик С., Дэвис Д. Применение метода исчерпания пластичности для усталости при одноосном нагружении — оценка повреждения при ползучести для нержавеющей стали 316 // Современное машиностроение. Сер. Б. 1991. № 8. С. 16–24.
7. Замрик С. Расчет повреждений, обусловленных взаимным влиянием ползучести и усталости нержавеющей стали 316 при осевом нагружении // Современное машиностроение. Сер. Е. 1990. № 7.
8. Tianyu Zhang, Xiaowei Wang, Wei Zhang, Tasnim Hassan, Jianming Gong. Fatigue–Creep Interaction of P92 Steel and Modified Constitutive Modelling for Simulation of the Responses // Metals. 2020. V. 10. № 3. P. 307–318.
<https://doi.org/10.3390/met10030307>
9. Дульнев Р.А., Котов П.И. Термическая усталость металлов. М.: Машиностроение, 1980. 200 с.
10. Гусенков А.П. Прочность при изотермическом и неизотермическом малоцикловом нагружении. М.: Машиностроение, 1983. 269 с.
11. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Демьянушко И.В. Термопрочность деталей машин. М.: Машиностроение, 1975. 455 с.
12. Lechrie F.A., Hayhurst D.R., Grant. Creep rupture of structure // J. Proc. Roy. Soc. London. 1974. V. 42. P. 323–347.
13. Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. М.: Мир, 1984. 360 с.
14. Казанцев А.Г. Исследование взаимодействия малоцикловой усталости и ползучести при неизотермическом нагружении // Проблемы прочности. 1985. № 5. С. 25–31.
15. Бернард-Конноли, Бью Куок, Бирон. Усталость коррозионностойкой стали 304 при испытаниях в условиях многоступенчатой контролируемой деформации // Теор. основы инж. расч. 1983. № 3. С. 47–53.
16. Volkov I.A., Egunov V.V., Igumnov L.A., Kazakov D.A., Korotkikh Yu.G., Mitenkov F.M. Assessment of the service life of structural steels by using degradation models with allowance for fatigue and creep of the material // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2015. V. 56. №. 6. P. 995–1006.
17. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. М.: Физматлит, 2008. 424 с.
18. Волков И.А., Игумнов Л.А. Введение в континуальную механику поврежденной среды. М.: Физматлит, 2017. 304 с.

19. *Volkov I.A., Korotkikh Y.G.* Modeling of fatigue life of materials and structures under low-cycle loading // *Mech. Solids*. 2014. V. 49. № 3. P. 290–301.
20. *Большухин М.А., Лебедев В.В., Козин А.В., Коротких Ю.Г., Панов В.А., Пахомов В.А.* Моделирование процессов накопления повреждений при термопульсациях // *Проблемы прочности и пластичности*. 2014. Т. 76. № 2. С. 134–143.
21. *Митенков Ф.М., Волков И.А., Игумнов Л.А., Коротких Ю.Г. и др.* Прикладная теория пластичности. М.: Физматлит, 2015. 284 с.
22. *Volkov I.A., Tarasov I.S., Smetanin I.V., Igumnov L.A., Kazakov D.A., Shihulin D.N.* Constitutive relations of mechanic of a damaged medium for evaluating the creep-rupture strength of structural alloys // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2019. V. 60. №. 1. P. 156–166.
<https://doi.org/10.1134/S002189441901019X>
23. *Волков И.А., Игумнов Л.А., Тарасов И.С., Шишулин Д.Н., Пичков С.Н., Маркова М.Т.* Моделирование пластического деформирования поликристаллических конструкционных сплавов при блочных несимметричных режимах мягкого малоциклового нагружения // *Проблемы прочности и пластичности*. 2019. Т. 81. № 1. С. 63–76.
24. *MacKenzie J.K.* The elastic constants of a solids containing spherical holes // *Proc. Phys. Soc.* 1950. V. B63. P. 2–11.
25. *Трощенко В.Т.* Рассеянные усталостные повреждения металлов и сплавов. Сообщение 3. Деформационные энергетические критерии // *Проблемы прочности*. 2006. № 1. С. 5–31.
26. *Le Xu, Takaki Kojima, Takamoto Itoh* Creep-fatigue life evaluation of type 304 stainless steel under non-proportional loading // *Int. J. Pressure Vessels Piping*. 2021. V. 194. Part A. 104515. URL: [doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2021.104515](https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2021.104515)