

УДК 62-50, 521

О ЗАДАЧЕ ПОДДЕРЖАНИЯ КОНТАКТА ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЗОНДА МАЛОЙ МАССЫ С АСТЕРОИДОМ

© 2023 г. Э. К. Лавровский^{a,*}

^aНИИ механики МГУ, Москва, Россия

*e-mail: lavrov.EK@yandex.ru

Поступила в редакцию 26.07.2022 г.

После доработки 23.09.2022 г.

Принята к публикации 29.09.2022 г.

Исследуется задача поддержания контакта тела малой массы с поверхностью однородного, симметричного вращающегося по инерции астероида. На тело воздействуют две противоположные силы: удерживающая гравитационная сила астероида и отталкивающая центробежная. Задача рассматривается в ограниченной постановке. Ищутся критические точки контакта на ряде поверхностей, обладающих осью симметрии. Показано также, что перемещение тела по поверхности астероида может способствовать более надежному его контакту с астероидом.

Ключевые слова: тело малой массы, симметричный астероид, сила инерции переносного движения, гравитационная сила, критические точки контакта поверхности астероида

DOI: 10.31857/S0572329923700046, EDN: QXYDGT

1. Введение. В последнее время в процессе изучения дальнего космоса человечество все чаще обращает внимание на такие небесные объекты как кометы и астероиды, пролетающие вблизи Земли, образование которых и физические процессы, на них протекающие, ему пока не во всем понятны. Было сделано несколько попыток исследовать близкие окрестности этих тел (миссии Хаябуса на астероид Ryugu, Osiris-Rex на Бенну, миссия к кометам Розетта и Чурюмова–Герасименко) и даже произвести посадку на данные объекты с целью изучения вещества, из которых они сложены.

Настоящее исследование с позиций механики рассматривает процесс контакта автоматической станции малой массы с подобным вращающимся небесным телом и перспективы его сохранения. Задача рассматривается в модельной ограниченной постановке, считается, что астероид является однородным телом вращения, причем зонд имеет столь малую массу, что она не оказывает существенного влияния ни на поступательное движение астероида, ни на его вращение.

2. Отталкивающие силы инерции. На внешней поверхности астероида борются две силы – отталкивающая сила инерции за счет его вращения и сила притяжения за счет массы астероида. Поскольку воздействием точки малой массы (ТММ) мы пренебрегаем, то астероид, будучи телом динамически симметричным, вращается с некоторой угловой скоростью ω в режиме регулярной прецессии [1]. Для ее описания введем в рассмотрение в центре масс астероида абсолютную систему осей $OL_1L_2L_3$ (рис. 1), связанную с вектором кинетического момента L , и подвижную систему $Ox_1x_2x_3$ главных осей, причем z – ось симметрии тела. Выразим угловую скорость астероида через производные углов Эйлера, как $\omega = \dot{\varphi}z^0 + \psi l$, где z^0, l – единичные векторы, направленные

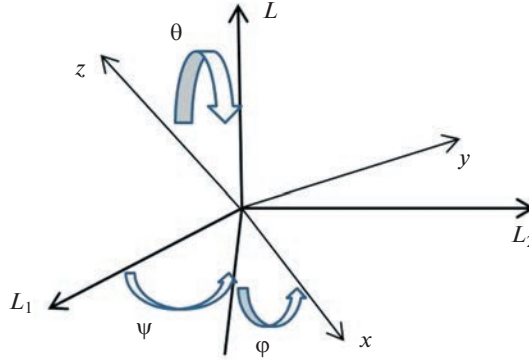


Рис. 1. Регулярная прецессия астероида.

ные соответственно по оси симметрии астероида и оси неизменного в абсолютных осях кинетического момента $\mathbf{L}$.

Пусть ТММ неподвижна относительно тела и находится в точке поверхности астероида с радиус-вектором $\mathbf{r}(x, y, z)$. Переносное ускорение точки $\mathbf{j} = [d\boldsymbol{\omega}/dt \times \mathbf{r}] + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$ является суммой осецистремительного и вращательного ускорений; $\mathbf{j}_* = -\mathbf{j}$ ускорение силы инерции, действующее на ТММ. Пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности тела в данной точке. Тогда ускорение отталкивающей силы инерции переносного движения может быть записано с помощью использования процедур преобразования скалярных и векторных произведений как

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}, \mathbf{j}_*) &= (\mathbf{n}, \{-[d\boldsymbol{\omega}/dt \times \mathbf{r}] - \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]\}) = -(\mathbf{r}, [\mathbf{n} \times d\boldsymbol{\omega}/dt]) - (\mathbf{n}, \boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) + \\ &+ (\mathbf{n}, \mathbf{r})\omega^2 = -\dot{\phi}\dot{\psi}(\mathbf{r}, [\mathbf{n} \times \mathbf{l} \times \mathbf{z}^0]) - (\mathbf{n}, \dot{\phi}\mathbf{z}^0 + \dot{\psi}\mathbf{l})(\dot{\phi}\mathbf{z}^0 + \dot{\psi}\mathbf{l}, \mathbf{r}) + (\mathbf{n}, \mathbf{r})\omega^2 = \\ &= -2\dot{\phi}\dot{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{l})(\mathbf{n}, \mathbf{z}^0) - \dot{\phi}^2(\mathbf{n}, \mathbf{z}^0)(\mathbf{z}^0, \mathbf{r}) - \dot{\psi}^2(\mathbf{n}, \mathbf{l})(\mathbf{l}, \mathbf{r}) + (\mathbf{n}, \mathbf{r})\{\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta\} \end{aligned}$$

Здесь $(\mathbf{z}^0, \mathbf{l}) = \cos \theta$ — косинус угла нутации θ , причем и угол нутации, и угловые скорости $\dot{\phi}, \dot{\psi}$ есть постоянные величины; известно, что они связаны соотношением

$$\dot{\phi} = \dot{\psi} \cos \theta \frac{A - C}{C}, \quad (\theta \in (0, \pi))$$

где A, C — соответственно экваториальный и осевой момент инерции тела. Постоянен и модуль угловой скорости $\omega^2 = \dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta$. Другие компоненты переносной силы инерции гасятся за счет предполагаемой абсолютной шероховатости поверхности астероида.

Сформулируем первую из задач, связанную с контактом тела и ТММ — в текущий момент времени требуется найти на поверхности астероида критические точки, где ускорение отталкивания максимально, а также саму величину ускорения отталкивания в этих точках. Дальнейшее, разумеется, в значительной степени зависит от формы тела. Рассмотрим некоторые варианты сфероидов — регулярных тел вращения.

Астероид — эллипсоид вращения. Форма его поверхности удовлетворяет условию

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

где c , a — соответственно осевой и экваториальный полу диаметры эллипсоида. Обозначая $k = c/a$, имеем $k^2(x^2 + y^2) + z^2 = c^2$, причем, если $k > 1$, эллипсоид вытянутый, а при $k < 1$ сплюснутый; сферический случай $k = 1$ не рассматривается в рамках общего подхода ввиду вырождения углов Эйлера. Моменты инерции симметричного, однородного эллипсоида зависят от его массы

$$A = 0.2 \cdot m(a^2 + c^2), \quad C = 0.2 \cdot m \cdot 2a^2, \quad (A - C)/C = 0.5 \cdot (k^2 - 1)$$

Отсюда

$$\phi = \psi \cos \theta \cdot \frac{1}{2}(k^2 - 1), \quad \frac{\dot{\phi}^2}{\omega^2} = \frac{\frac{1}{4} \cos^2 \theta (k^2 - 1)^2}{1 + \cos^2 \theta \left\{ \frac{1}{4} k^4 + \frac{1}{2} k^2 - \frac{3}{4} \right\}} = \frac{\dot{\psi}^2}{4\omega^2} \cos^2 \theta (k^2 - 1)^2$$

Поскольку главные оси в экваториальной плоскости x , y можно выбирать произвольным образом, будем считать, что ось x в данный момент времени лежит на пересечении экваториальной плоскости и плоскости, проведенной через оси $\mathbf{z}^0, \mathbf{l}$. А точнее из двух таких возможных положений для определенности возьмем ту, где неотрицательна проекция $\mathbf{l}$ на x . При таком выборе осей $\mathbf{l}(\sin \theta, 0, \cos \theta)$, $\mathbf{z}^0(0, 0, 1)$. Задаваясь величиной $-c \leq z \leq c$ и произвольным углом $\gamma \in [0, 2\pi]$, множество всех точек поверхности эллипсоида можно описать параметрически как

$$x = \frac{\sqrt{c^2 - z^2}}{k} \cdot \cos \gamma, \quad y = \frac{\sqrt{c^2 - z^2}}{k} \cdot \sin \gamma, \quad z = z$$

Для эллипсоида вращения единичный вектор внешней нормали $\mathbf{n}$ в точке $\mathbf{r}(x, y, z)$ есть

$$\mathbf{n} = \frac{\left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{a^2}, \frac{z}{c^2} \right)}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2} \right)^2 + \left(\frac{y}{a^2} \right)^2 + \left(\frac{z}{c^2} \right)^2}} = \frac{(k^2 x, k^2 y, z)}{\sqrt{k^4(x^2 + y^2) + z^2}} = \frac{(k^2 x, k^2 y, z)}{\sqrt{k^2 c^2 + z^2(1 - k^2)}}$$

или

$$\mathbf{n} \left(\frac{k\sqrt{c^2 - z^2}}{\sqrt{k^2 c^2 + z^2(1 - k^2)}} \cdot \cos \gamma, \frac{k\sqrt{c^2 - z^2}}{\sqrt{k^2 c^2 + z^2(1 - k^2)}} \cdot \sin \gamma, \frac{z}{\sqrt{k^2 c^2 + z^2(1 - k^2)}} \right)$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} N \equiv (\mathbf{n}, \mathbf{j}_*) &= \frac{c^2 \omega^2}{\sqrt{k^2 c^2 + z^2(1 - k^2)}} - 2\phi \dot{\psi} \frac{z \sin \theta \cos \gamma \sqrt{c^2 - z^2} + k z^2 \cos \theta}{k \sqrt{k^2 c^2 + z^2(1 - k^2)}} - \\ &- \frac{\dot{\phi}^2 z^2}{\sqrt{k^2 c^2 + z^2(1 - k^2)}} - \dot{\psi}^2 \frac{\sin \theta \cos \gamma \sqrt{c^2 - z^2} + z k \cos \theta}{k} \times \\ &\times \frac{k \sin \theta \cos \gamma \sqrt{c^2 - z^2} + z \cos \theta}{\sqrt{k^2 c^2 + z^2(1 - k^2)}} = \frac{1}{\sqrt{k^2 c^2 + z^2(1 - k^2)}} \times \\ &\times \left\{ c^2 \omega^2 - \dot{\psi}^2 \left[z^2 \frac{1}{4} (k^2 + 1)^2 \cos^2 \theta + \cos \gamma \cdot 2 z k \sin \theta \cos \theta \sqrt{c^2 - z^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos^2 \gamma \cdot \sin^2 \theta (c^2 - z^2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

То есть N квадратично зависит от $\cos \gamma$. Обозначим

$$\Phi(\cos \gamma) = -\psi^2 \sin \theta \sqrt{c^2 - z^2} \cdot \{2kz \cos \theta \cos \gamma + \cos^2 \gamma \sin \theta \sqrt{c^2 - z^2}\}$$

тогда

$$N = \frac{c^2 \omega^2 + \Phi(\cos \gamma) - \psi^2 z^2 \frac{1}{4} (k^2 + 1)^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{k^2 c^2 + z^2 (1 - k^2)}}$$

Будем считать, $\cos \theta \geq 0$: выбор знака $\cos \theta$ влияет только на направление отсчета положительных и отрицательных значений по координате z и никак не сказывается на фактической величине N . “Рога” квадратичной по $\cos \gamma$ функции Φ направлены вниз. Поэтому, приравнявая производную Φ по $\cos \gamma$ к нулю, находим локальный максимум этой функции (что отвечает критическим положениям при заданных z, θ), если, конечно, экстремальная величина модуля $\cos \gamma$ не превышает единицы. Эти локально оптимальные значения по $\cos \gamma$ равны $-(z \cos \theta)k/(\sin \theta \sqrt{c^2 - z^2})$. Таким образом, если $|z|k \cos \theta \leq \sin \theta \sqrt{c^2 - z^2}$, то $(\cos \gamma)_{extr} = -\frac{kz \cos \theta}{\sin \theta \sqrt{c^2 - z^2}}$; если же это неравенство нарушено, то $(\cos \gamma)_{extr} = -\operatorname{sgn} z$, $\gamma_{extr} = 0, \pi$. При $z = 0$ имеем $(\cos \gamma)_{extr} = 0$. При $|z| \rightarrow c$, наоборот, $(\sin \gamma)_{extr} \rightarrow 0$. Аналогичным образом строятся и наименее критичные точки поверхности эллипсоида (в смысле учета только переносной силы инерции).

Выражение для Φ при z вблизи нуля равно

$$\begin{aligned} \Phi(\cos \gamma_{extr}) = & (-\psi^2 \sin \theta \sqrt{c^2 - z^2}) \left\{ -\frac{2k^2 z^2 \cos^2 \theta}{\sin \theta \sqrt{c^2 - z^2}} + \right. \\ & \left. + \sin \theta \sqrt{c^2 - z^2} \cdot \frac{k^2 z^2 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta (c^2 - z^2)} \right\} = \psi^2 k^2 z^2 \cos^2 \theta \end{aligned}$$

То есть величина Φ растет с ростом модуля z и достигает максимума при “пограничном” значении $|z| = \sin \theta \frac{\sqrt{c^2 - z^2}}{k \cos \theta}$. По другую сторону от “границы”, где $|\cos \gamma_{extr}| = 1$,

$$\Phi = (-\psi^2 \sin \theta \sqrt{c^2 - z^2}) \cdot [-2k|z| \cos \theta + \sqrt{c^2 - z^2} \sin \theta]$$

Иными словами, при положительных и отрицательных значениях z (с одним и тем же $|z|$) мы имеем сходную картину критических точек на поверхности эллипсоида – они отличаются только знаком по $\cos \gamma_{extr}$. При этом каждому значению z (если $|z| < c$) отвечают ровно две точки на поверхности эллипсоида с одним и тем же значением $\cos \gamma$. При $z = 0$ это точки “протыкания” поверхности осью y . По мере роста $|z|$ точки начинают сходиться, превращаясь в “вершины” эллипсоида при $|z| = c$.

На рис. 2 жирной кривой показан след критических точек на поверхности эллипсоида, отвечающий различным отрицательным значениям z . Пунктиром показан след аналогичных точек при $z > 0$, они затенены изображением самого эллипсоида.

Нахождение абсолютной критической точки поверхности связано с перебором значений z и анализом ситуации. Возникают сложные алгебраические соотношения, затрудняющие аналитический путь исследования. Зато задачу далее не сложно исследовать численно. Общий вывод, вытекающий из численного метода исследования вкратце таков: в основном абсолютными критическими точками поверхности являются, по-видимому, в зависимости от величин угла θ и коэффициента k либо окрест-

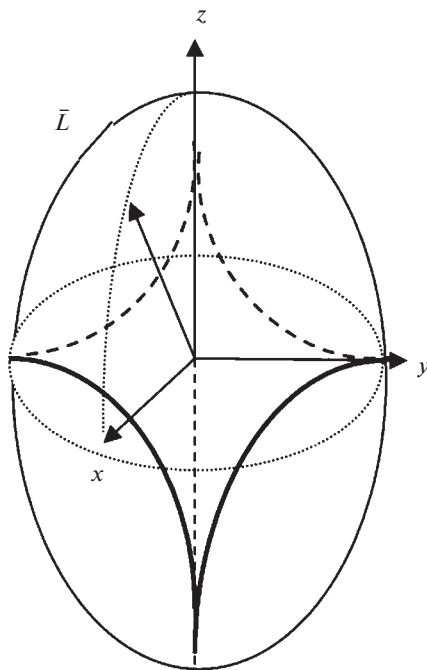


Рис. 2. Картина точек на поверхности эллипсоида с максимальной силой отталкивания.

ность вершины эллипсоида при относительно больших значениях $|\sin \theta|$, либо точки экваториальной зоны — в противном случае.

Сказанное нетрудно понять из чисто физических соображений. Если $\theta \approx 0$, то угловые скорости $\dot{\phi}$, $\dot{\psi}$, складываясь, образуют некую угловую скорость ω , направленную почти по оси симметрии. При этом экваториальные точки движутся с наибольшей линейной скоростью, а точки вершины имеют почти нулевую скорость. Ввиду этого максимальная центробежная сила возникает на экваторе и она лежит в плоскости экватора, где, кстати, лежит и вектор нормали к поверхности в этих точках. На вершине эллипсоида и центробежная сила почти равна нулю, и нормаль направлена почти по оси симметрии, т.е. перпендикулярно действующей центробежной силе. Значит, в этом случае критическая точка поверхности должна быть на экваторе.

Если угол θ велик и приближается, скажем, к $\theta \approx \pi/2$, то проекция центробежной силы в экваториальных точках за счет $\dot{\phi}$, конечно, не равна нулю и она создает центробежную силу, причем нормаль и эта центробежная сила одинаково направлены. Но в этом случае $\dot{\phi} \approx 0$ и сила отталкивания мала. Угловая скорость $\dot{\psi}$ тоже создает центробежную силу почти по оси симметрии, в то время как нормаль в экваториальных точках перпендикулярна оси симметрии, т.е. и эта ее проекция равна нулю. Что касается точки вершины, то ее линейная скорость равна $c\dot{\psi}$. Причем нормаль в вершине направлена туда же, куда и центробежная сила. Значит, ее проекция отнюдь не равна нулю. И эта проекция отталкивающей силы вполне может оказаться самой большой.

При промежуточных значениях θ можно ожидать, что “проявят” себя либо окрестности экватора, либо вершины.

Случай прямого кругового цилиндра. Рассмотрим сначала его боковую поверхность: $z \in [-h/2, h/2]$, цилиндр имеет радиус R и высоту h . Радиус-вектор и внешняя нормаль в подвижных осях, выбираемых также как и ранее, есть $\mathbf{r} = (R \cos \gamma, R \sin \gamma, z)$, $\mathbf{n} = (\cos \gamma, \sin \gamma, 0)$, кроме того, $\mathbf{l}(\sin \theta, 0, \cos \theta)$, $\mathbf{z}^0(0, 0, 1)$. Отсюда находим

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}, \mathbf{l}) &= R \sin \theta \cos \gamma + z \cos \theta, & (\mathbf{n}, \mathbf{z}^0) &= 0, \\ (\mathbf{n}, \mathbf{l}) &= \sin \theta \cos \gamma, & (\mathbf{r}, \mathbf{z}^0) &= z, & (\mathbf{n}, \mathbf{r}) &= R\end{aligned}$$

В выражении $(\mathbf{n}, \mathbf{j}_*)$ пропадают все члены, связанные с ϕ . Поэтому

$$\begin{aligned}(\mathbf{n}, \mathbf{j}_*) &= \omega^2 R - \psi^2 [R \sin \theta \cos \gamma + z \cos \theta] \sin \theta \cos \gamma = \\ &= \omega^2 R - \psi^2 \sin \theta (z \cos \gamma \cos \theta + R \cos^2 \gamma \sin \theta)\end{aligned}$$

Максимум этого выражения достигается при $\cos \gamma = -0.5 \cdot (z/R) \operatorname{ctg} \theta$, если $|0.5 \times (z/R) \cdot \operatorname{ctg} \theta| \leq 1$, и $\cos \gamma = -\operatorname{sign}(z)$ в противной ситуации. В первом случае максимум $(\mathbf{n}, \mathbf{j}_*)$ при текущем z равен $(\mathbf{n}, \mathbf{j}_*) = \omega^2 R + \psi^2 \frac{1}{4R} z^2 \cos^2 \theta$, а во втором $(\mathbf{n}, \mathbf{j}_*) = \omega^2 R + \psi^2 \sin \theta (|z| \cos \theta - R \sin \theta)$. Пусть $\cos \theta > 0$. Если рассматриваются положительные z и при $z = h/2$ выполняется неравенство $z \cos \theta < 2R \sin \theta$, то на допустимом интервале $z \in [0, h/2]$ реализуется только первый случай. Максимум $(\mathbf{n}, \mathbf{j}_*)$ достигается тогда при $z = h/2$, он равен $(\mathbf{n}, \mathbf{j}_*)_{\max} = \omega^2 R + \psi^2 \frac{1}{4R} \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cos^2 \theta$. Если же при $z = h/2$ выполняется обратное и $h \cos \theta > 4R \sin \theta$, то приходится, начиная с некоторого значения $z_* = 2R \operatorname{tg} \theta$, переходить на другой случай. Но тогда скобка $(z \cos \theta - R \sin \theta)$ и подавно будет больше нуля для всех $z > z_*$, а $(\mathbf{n}, \mathbf{j}_*)$ будет продолжать расти с ростом z . Т.е. максимальное $(\mathbf{n}, \mathbf{j}_*)$, так или иначе, реализуется при $z = h/2$, но здесь $(\mathbf{n}, \mathbf{j}_*)_{\max} = \omega^2 R + \psi^2 \sin \theta (0.5h \cos \theta - R \sin \theta)$. Иными словами, верхний край есть абсолютная критическая точка боковой поверхности цилиндра. Есть также и другое, аналогичное найденному симметричное решение при отрицательных z , которое тяготеет соответственно к $\cos \gamma = 1$.

В случае рассмотрения верхнего основания $\mathbf{r} = (\rho \cos \gamma, \rho \sin \gamma, 0.5h)$, $\rho \leq R$, $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Тогда

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}, \mathbf{l}) &= \rho \sin \theta \cos \gamma + 0.5h \cos \theta, \\ (\mathbf{n}, \mathbf{z}^0) &= 1, & (\mathbf{n}, \mathbf{l}) &= \cos \theta, & (\mathbf{r}, \mathbf{z}^0) &= 0.5h, & (\mathbf{n}, \mathbf{r}) &= 0.5h\end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned}(\mathbf{n}, \mathbf{j}_*) &= \frac{h}{2} \omega^2 - 2\phi\psi \left(\rho \sin \theta \cos \gamma + \frac{h}{2} \cos \theta \right) - \phi^2 \frac{h}{2} - \\ &\quad - \psi^2 \left(\rho \sin \theta \cos \gamma + \frac{h}{2} \cos \theta \right) \cos \theta = \omega^2 \frac{h}{2} - \\ &\quad - \psi^2 \left\{ 2 \cos \theta \frac{A-C}{C} \left(\rho \sin \theta \cos \gamma + \frac{h}{2} \cos \theta \right) + \frac{h}{2} \cos^2 \theta \left(\frac{A-C}{C} \right)^2 + \right.\end{aligned}$$

$$+ \left(\rho \sin \theta \cos \gamma + \frac{h}{2} \cos \theta \right) \cos \theta \Big\} = \\ = \frac{h}{2} \omega^2 - \dot{\psi}^2 \cos \theta \left\{ \frac{2A - C}{C} \left(\rho \sin \theta \cos \gamma + \frac{h}{2} \cos \theta \right) + \frac{h}{2} \cos \theta \left(\frac{A - C}{C} \right)^2 \right\}$$

Если $\cos \theta \frac{2A - C}{C} > 0$, то максимум этого выражения реализуется при $\cos \gamma = -1$, $\rho = R$. Если же данное неравенство нарушается, то $\cos \gamma = 1$, $\rho = R$. Моменты инерции цилиндра

$$A = \frac{1}{12} m(3R^2 + h^2), \quad C = \frac{1}{2} mR^2, \quad \frac{2A - C}{C} > 0$$

Иными словами, анализ ситуации на боковой поверхности и на верхнем основании указывает при $z > 0$ на точки, принадлежащие краю цилиндра, иногда геометрически на одни и те же. Только отталкивающие ускорения в них различны; ответить на вопрос, кто из них больше, т.е. которая из них есть абсолютная критическая точка можно лишь после учета конкретных кинематических параметров и величин R, h .

Симметричное решение возникает в случае рассмотрения нижнего основания при $z < 0$.

Случай усеченного кругового конуса. Рассмотренный выше цилиндр — частный случай такого конуса. Уравнение конуса в абсолютных координатах $x^2 + y^2 - (R - kz)^2 = 0$. Пусть высота полного (т.е. не усеченного) конуса $H = R/k$, $z \in [0, H]$, ось z идет вверх от основания конуса к его вершине. На высоте h от нижнего основания у него срезается верхушка и образуется усеченный конус, верхнее его основание есть окружность радиуса $r = R - kh = k(H - h) = (H - h)R/H$.

Найдем вертикальную координату центра масс η усеченного конуса, используя формулу объема конуса $V = \pi r^2 H/3$. Приравняем объёмы получившихся верхней и нижней частей усеченного конуса за счет его сечения на уровне η . Объем каждой из частей можно выразить через разность объемов некоторых полных конусов. Поскольку и радиусы оснований выражаются через высоты, объёмы полных конусов пропорциональны кубу высот. В результате получаем

$$\frac{(H - \eta)^2}{H^2} \cdot R^2(H - \eta) - \frac{(H - h)^2}{H^2} \cdot R^2(H - h) = R^2 H - \frac{(H - \eta)^2}{H^2} \cdot R^2(H - \eta)$$

Отсюда

$$2(H - \eta)^3 = H^3 + (H - h)^3 \Rightarrow \eta = H - \sqrt[3]{\frac{H^3 + (H - h)^3}{2}}$$

Построим уравнение усеченного конуса относительно системы подвижных осей в его центре масс, координату z переопределяем

$$x^2 + y^2 - [R - k(z + \eta)]^2 = 0, \quad z \in [-\eta, h - \eta]$$

Точки боковой поверхности конуса можно задать параметрически как

$$x = [R - k(z + \eta)] \cos \gamma, \quad y = [R - k(z + \eta)] \sin \gamma, \quad z = z, \quad z \in [-\eta, h - \eta]$$

а точки оснований как

$$z = -\eta, \quad x^2 + y^2 \leq R^2; \quad z = h - \eta, \quad x^2 + y^2 \leq r^2$$

Рассмотрим боковую поверхность, плоские основания усеченного конуса исследуются так же, как и в случае цилиндра. На боковой поверхности

$$\mathbf{r} = ([R - k(z + \eta)] \cdot \cos \gamma, [R - k(z + \eta)] \cdot \sin \gamma, z)$$

Вектор внешней нормали

$$\mathbf{n} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + k^2[R - k(z + \eta)]^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + k^2[R - k(z + \eta)]^2}}, \frac{k[R - k(z + \eta)]}{\sqrt{x^2 + y^2 + k^2[R - k(z + \eta)]^2}} \right)$$

или

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}} (\cos \gamma, \sin \gamma, k), \quad \mathbf{l}(\sin \theta, 0, \cos \theta), \quad \mathbf{z}^0(0, 0, 1)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}, \mathbf{l}) &= [R - k(z + \eta)] \sin \theta \cos \gamma + z \cos \theta \\ (\mathbf{n}, \mathbf{z}^0) &= \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{l}) = \frac{\sin \theta \cos \gamma + k \cos \theta}{\sqrt{1 + k^2}}, \quad (\mathbf{r}, \mathbf{z}^0) = z \\ (\mathbf{n}, \mathbf{r}) &= \frac{x \cos \gamma + y \sin \gamma + kz}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{[R - k(z + \eta)] + kz}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{R - k\eta}{\sqrt{1 + k^2}} = \text{const} \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}, \mathbf{j}_*) &= \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}} \{ \omega^2(R - k\eta) - \dot{\phi}^2 kz - 2\dot{\phi}\dot{\psi}k[(R - k(z + \eta)) \sin \theta \cos \gamma + z \cos \theta] - \\ &\quad - \dot{\psi}^2[(R - k(z + \eta)) \sin \theta \cos \gamma + z \cos \theta][\sin \theta \cos \gamma + k \cos \theta] \} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}} \left\{ -\dot{\psi}^2 kz \left(\frac{A - C}{C} \right)^2 \cos^2 \theta - \right. \\ &\quad - \dot{\psi}^2 \left[2k \frac{A - C}{C} \cos \theta + k \cos \theta + \sin \theta \cos \gamma \right] [(R - k(z + \eta)) \sin \theta \cos \gamma + z \cos \theta] + \\ &\quad \left. + \omega^2(R - k\eta) \right\} = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}} \left\{ \omega^2(R - k\eta) - \dot{\psi}^2 kz \left(\frac{A - C}{C} \right)^2 \cos^2 \theta - \right. \\ &\quad - \dot{\psi}^2 \left[k \cos \theta \frac{2A - C}{C} + \sin \theta \cos \gamma \right] [(R - k(z + \eta)) \cdot \sin \theta \cos \gamma + z \cos \theta] \} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}} \left\{ \omega^2(R - k\eta) - k\dot{\psi}^2 \left[z \cos^2 \theta \frac{A^2}{C^2} + \cos \gamma \cos \theta \sin \theta \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(\frac{2A - C}{C} (R - k(z + \eta)) + \frac{z}{k} \right) + \cos^2 \gamma \sin^2 \theta (R - k(z + \eta))/k \right] \right\} \end{aligned}$$

Экстремальное значение $\cos \gamma$ вычисляется по формуле

$$(\cos \gamma)_{\text{extr}} = -0.5 \operatorname{ctg} \theta \left[k \frac{2A - C}{C} + \frac{z}{R - k(z + \eta)} \right]$$

Если модуль этой величины превышает единицу, то в качестве экстремального $\cos \gamma$ принимается ± 1 .

Приведенные выше формулы содержат величины моментов инерции A, C усеченного конуса. Определим их, предварительно обозначив через σ плотность вещества тела и вычислив

$$M = \pi\sigma R^2 H/3, \quad m = \pi\sigma r^2 (H - h)/3, \quad m' = M - m$$

Тогда

$$C = \frac{3}{10}(MR^2 - mr^2), \quad A = \frac{3}{20}[M(R^2 + 4H^2) - m(r^2 + 4(H - h)^2)] - m' \cdot (H - \eta)^2$$

3. Гравитационная сила притяжения. В небесной механике, к сожалению, известно всего лишь два-три результата, описывающих в конечном аналитическом виде гравитационное поле различных космических тел. Одним из них является решение Дирихле, которое описывает поле эллипсоидов [2]. Рассмотрим наиболее простой случай, когда эллипсоид к тому же является телом вращения. Если эллипсоид сплюснутый $c < a$ и точка находится на его поверхности, то используемая ниже величина χ равна

$$\chi^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2} = \frac{1 - k^2}{k^2}$$

Тогда гравитационные ускорения (X, Y, Z) по осям тела (x, y, z) , причем x, y — экваториальные оси, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{X}{x} = \frac{Y}{y} &= \frac{3fM}{2c^3\chi^3} \left[\frac{\chi}{1 + \chi^2} - \operatorname{arctg}(\chi) \right] \equiv vP \\ \frac{Z}{z} &= \frac{3fM}{c^3\chi^3} [\operatorname{arctg}(\chi) - \chi] \equiv vQ, \quad v = \frac{3fM}{c^3\chi^3} \end{aligned}$$

где $M = \frac{4}{3}\pi\sigma a^2 c$ — масса эллипсоида, f — гравитационная постоянная. Если эллипсоид вытянутый $c > a$ и точка находится на его поверхности, то

$$\chi^2 = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = k^2 - 1$$

и

$$\begin{aligned} \frac{X}{x} = \frac{Y}{y} &= \frac{3fM}{2a^3\chi^3} [\ln(\sqrt{1 + \chi^2} + \chi) - \chi\sqrt{1 + \chi^2}] \equiv vP \\ \frac{Z}{z} &= \frac{3fM}{a^3\chi^3} \left[\frac{\chi}{\sqrt{1 + \chi^2}} - \ln(\sqrt{1 + \chi^2} + \chi) \right] \equiv vQ, \quad v = \frac{3fM}{a^3\chi^3} \end{aligned}$$

Случай сферы $c = a$ не рассматривается ввиду вырождения самого закона регулярной прецессии и формул ускорений.

Рассмотрим вначале случай вытянутого эллипсоида $k = c/a > 1$. Спроецируем гравитационное ускорение на нормаль к телу

$$\begin{aligned} F &= \frac{4\pi f k \sigma}{(k^2 - 1)^{3/2}} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{c^2 - z^2}}{k} \cos \gamma \cdot P \cdot \frac{k\sqrt{c^2 - z^2}}{\sqrt{k^2 c^2 + z^2(1 - k^2)}} \cos \gamma + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{c^2 - z^2}}{k} \sin \gamma \cdot P \cdot \frac{k\sqrt{c^2 - z^2}}{\sqrt{k^2 c^2 + z^2(1 - k^2)}} \sin \gamma + \right. \\ &\quad \left. + \frac{z^2}{\sqrt{k^2 c^2 + z^2(1 - k^2)}} \cdot Q \right\} = \frac{4\pi f k \sigma}{(k^2 - 1)^{3/2} \cdot \sqrt{k^2 c^2 + z^2(1 - k^2)}} \cdot \{c^2 P + z^2(Q - P)\} \end{aligned}$$

Величина F — проекции ускорения за счет притяжения одинакова для всех точек с вертикальной координатой z . Поэтому истинными критическими точками поверхности при заданном z остаются ранее найденные — критические с точки зрения сил

Таблица 1. Распределение отталкивающих и притягивающих ускорений, критические точки поверхности (частный случай вытянутого эллипсоида)

z [м]	0	7.5	15	22.5	30	37.5	45	52.5	60	67.5	75	82.5	90	97.5
$N/\dot{\psi}^2$ [м]	182.4	182.1	182.3	182.7	183.3	184.1	185	186.1	187.4	189	190.9	193.1	195.1	196
$10^3 * \omega_{\max}$ [1/с]	0.907	0.906	0.904	0.901	0.896	0.89	0.882	0.873	0.862	0.85	0.836	0.82	0.802	0.785
γ [град]	90	94.3	98.7	103.2	107.8	112.8	118.2	124.1	130.9	139.1	150	171	180	180
z [м]	105	112.5	120	127.5	135	142.5	150							
$N/\dot{\psi}^2$ [м]	195.6	193.3	188.8	180.8	167.8	145.2	75.0							
$10^3 * \omega_{\max}$ [1/с]	0.769	0.754	0.74	0.729	0.724	0.737	0.954							
γ [град]	180	180	180	180	180	180	180							

инерции переносного движения. Если F больше модуля отталкивающего ускорения N из (2.1), то гравитация способна удержать малое тело на поверхности астероида — боковые реакции не в счет в силу предполагаемой абсолютной шероховатости поверхности астероида.

Значения F зависят от двух параметров: k и “доли” z по сравнению с длиной тела c . Скалярное произведение N зависит от тех же двух параметров, а также от ω (или $\dot{\psi}$) и угла θ . Если же условия задачи требуют подсчета проекций конфликтующих сил в конкретной точке поверхности, то появляется еще один параметр γ .

Поскольку чисто теоретическое исследование не позволило решить задачу до конца, были проведены в ряде случаев численные расчеты с одновременным учетом и гравитации, и переносной силы инерции. Предполагалось, что астероид сложен из кремния $\sigma = 2.328$ г/см³. Результаты этих расчетов, например, в случае вытянутого эллипсоидального тела при $\theta^\circ = 45$ и $c = 150$ м, $a = 100$ м, $k = c/a = 1.5$ представлены в табл. 1

Расположение критических точек (в текущий момент времени и в смысле сил инерции) на поверхности эллипсоида характеризуется данными в первой и четвертой строках таблицы. Качественно они изображены на рис. 2 пунктиром, ибо в таблице учтены “разрезы” эллипсоида только при $z > 0$. Разрезы при $z < 0$ дают симметричную картину. Во второй строке представлена картина отталкивающих ускорений в этих точках. Из нее видно, что абсолютная критическая точка лежит здесь посередине между экваториальной зоной и вершиной. Она отвечает $z = 97.5$ м. Гравитационное поле симметрично относительно оси z , в отличие от поля сил инерции. Но теперь в любой критической точке удерживающая сила может как уступать, так и превалировать над отталкивающей. В третьей строке представлены предельные величины угловой скорости вращения тела, при которой удержание на поверхности за счет гравитации в данных критических точках с координатами (z, γ) еще возможно. Видно, что наибольшие значения $\omega_{\max}$ сосредоточены в окрестности экватора и вершины эллипсоида, а минимальные — посередине, но ближе к вершине. Именно последние являются абсолютными критическими точками, если учитывается и гравитация, и сила инерции.

В табл. 2 приведены данные расчетов в аналогичном случае сплюснутого эллипсоида с малой полуосью $c = 100$ м при $\theta^\circ = 45$. Соотношение длин большой и малой полуоси эллипсоида здесь такое же, как и ранее $k = a/c = 1.5$.

Расположение критических точек (поведение угла γ) здесь примерно такое же, как и в случае вытянутого тела. Величины $\omega_{\max}$ в основном заметно меньше, чем ранее, но эта характеристика меняется тут гораздо резче при приближении к вершине эллипсо-

Таблица 2. Распределение отталкивающих и притягивающих ускорений, критические точки поверхности (частный случай сплюснутого эллипсоида)

z [м]	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$N/\dot{\psi}^2$ [м]	114.1	113.4	111.1	107.7	103.3	98.4	93	87.6	82.3	75.7	50
$10^3 * \omega_{\max}$ [1/с]	0.419	0.425	0.443	0.473	0.515	0.569	0.637	0.719	0.819	0.951	1.32
γ [град]	90	93.8	97.8	102.1	106.9	112.6	120	130.8	152.7	180	180

ида, где наблюдается и наибольшая допустимая скорость. Абсолютная критическая точка расположена в окрестности экватора.

4. Влияние перемещения ТММ по поверхности астероида на отталкивающие силы. Возможности эффекта движения легко понять на простейшем примере кругового цилиндра, закрученного при $\theta = 0$ по оси постоянной угловой скоростью ω . Неподвижную материальную точку отбрасывает с поверхности центробежная сила. Однако, представим себе, что одновременно точка движется по боковой поверхности цилиндра с той же линейной скоростью, которую создает вращение для точек цилиндра, но направленную в противоположную сторону, а гравитационная сила, скажем, пренебрежимо мала. Тогда в абсолютном пространстве ТММ покоится и, следовательно, никакая сила не отбрасывает ее с поверхности — цилиндр как бы “проскальзывает” под материальной точкой. Заметим, что подобными свойствами при осевом вращении астероида обладают и все точки на, так сказать, “параллелях” любых осесимметричных тел, представляющих собой окружности различных радиусов. Более того, режим обратной относительной скорости

$$\mathbf{V} = V\mathbf{i} = -[\omega \times \mathbf{r}] \quad (4.1)$$

где V — модуль скорости, а $\mathbf{i}$ — единичный вектор этой скорости гарантирует материальной точке, по крайней мере, локально неподвижность, что помогает ей оставаться в контакте с поверхностью как при $\theta = 0$, так и в самом общем случае $\theta \neq 0$, когда

$$\omega = \phi z^0 + \psi \mathbf{l}.$$

Взглянем теперь на ситуацию с позиции механики. Абсолютное ускорение есть сумма переносного, относительного и кориолисова ускорений. Соответственно, в подвижной системе осей возникают и отвечающие им силы инерции. Таким образом, идея перемещения ТММ состоит в использовании сил инерции — кориолисова движения и за счет проекции относительного ускорения — для полной или хотя бы частичной компенсации отталкивающего действия силы инерции переносного движения: ведь на поверхности астероида есть и гравитация, быть может, недостаточная. Если две указанные силы инерции скомпенсируют хотя бы часть силы инерции переносного движения, то остаточная гравитационная сила обеспечит более комфортное пребывание материальной точке на поверхности астероида (будем считать, что миссия зонда исключает постоянное использование механизмов закрепления типа якоря). Выражаясь более точно, требуется хотя бы частично скомпенсировать проекции всех сил инерции на нормаль к поверхности, т.е. должно выполняться условие

$$((-j_{\text{rel}} - j_{\text{cor}}), \mathbf{n}) + \lambda N = 0, \quad 0 < \lambda \leq 1 \quad \text{“rel” — относительное,} \\ \text{“cor” — кориолисово (ускорения)}$$

Имеем $-\left(\left(\frac{dV}{dt}\mathbf{i} + V\frac{d\mathbf{i}}{dt}\right), \mathbf{n}\right)$ — проекция силы инерции за счет ускорения в относительном движении. В результате получаем в силу правила перестановочности векторов в смешанном произведении

$$-2\{([\mathbf{n} \times \dot{\phi} \mathbf{z}^0], V\mathbf{i}) + ([\mathbf{n} \times \psi \mathbf{l}], V\mathbf{i})\} - \left(\left(\frac{dV}{dt} \mathbf{i} + V \frac{d\mathbf{i}}{dt} \right), \mathbf{n} \right) + \lambda N = 0$$

Ввиду $(\mathbf{i}, \mathbf{n}) \equiv 0$ преобразуем левую часть равенства

$$2(-V)\{\dot{\phi}([\mathbf{n} \times \mathbf{z}^0], \mathbf{i}) + \psi([\mathbf{n} \times \mathbf{l}], \mathbf{i})\} + V \left(\frac{d\mathbf{n}}{dt}, \mathbf{i} \right) + \lambda N = 0 \quad (4.2)$$

где $d\mathbf{n}/dt$ есть некоторая функция, зависящая, в частности, от геометрических свойств поверхности астероида.

Согласно (4.2), например, процесс полной компенсации определяется выбором 4-х параметров движения по поверхности $V, \mathbf{i}(i_x, i_y, i_z)$ (в подвижных осях), удовлетворяющих следующей системе 3-х условий

$$2(-V)\{\dot{\phi}([\mathbf{n} \times \mathbf{z}^0], \mathbf{i}) + \psi([\mathbf{n} \times \mathbf{l}], \mathbf{i})\} + V \left(\frac{d\mathbf{n}}{dt}, \mathbf{i} \right) + N = 0, \quad (\mathbf{i}, \mathbf{i}) = 1, \quad (\mathbf{i}, \mathbf{n}) = 0$$

Значит, имеется одна степень свободы при выборе, например, одной из компонент направления вектора скорости. Дальнейшее определяется видом зависимости $d\mathbf{n}/dt = f(V, \mathbf{i})$, которая различна на разных поверхностях.

Рассмотрим далее случай осесимметричного эллипсоида, хотя то же самое может быть проделано для любой поверхности вращения, задаваемой аналитически. Здесь

$$k^2(x^2 + y^2) + z^2 = c^2, \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\mu}(k^2x, k^2y, z), \quad \mu(z) \equiv \sqrt{k^2c^2 + z^2(1 - k^2)}$$

Тогда ввиду

$$\dot{x} = Vi_x, \quad \dot{y} = Vi_y, \quad \dot{z} = Vi_z$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{n}}{dt} &= \left\{ \frac{k^2Vi_x}{\mu} - \frac{k^2xV(1 - k^2)zi_z}{\mu^3}, \frac{k^2Vi_y}{\mu} - \frac{k^2yV(1 - k^2)zi_z}{\mu^3}, \frac{Vi_z}{\mu} - \frac{zV(1 - k^2)zi_z}{\mu^3} \right\}, \\ \left(\mathbf{i}, \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right) &= \frac{V[k^2 + (1 - k^2)i_z^2]}{\mu} - \frac{V(1 - k^2)zi_z}{\mu^3} \cdot (k^2xi_x + k^2yi_y + zi_z) = \\ &= \frac{V[k^2 + (1 - k^2)i_z^2]}{\mu} - \frac{V(1 - k^2)zi_z}{\mu^2} (\mathbf{n}, \mathbf{i}) = \frac{V[k^2 + (1 - k^2)i_z^2]}{\mu} \end{aligned}$$

В результате возникает следующая система условий

$$\frac{V^2[k^2 + (1 - k^2)i_z^2]}{\mu} - 2V([\mathbf{i} \times \mathbf{n}], \{\dot{\phi} \mathbf{z}^0 + \psi \mathbf{l}\}) + N = 0, \quad (\mathbf{i}, \mathbf{n}) = 0, \quad (\mathbf{i}, \mathbf{i}) = 1 \quad (4.3)$$

Первое из них квадратично с положительным коэффициентом при V^2 . Любое вещественное решение системы (4.3) отвечает в данный момент времени комфортному удержанию материальной точки на поверхности астероида. При этом далее материальная точка перейдет в новое положение на поверхности, где для ее надежного удержания снова придется удовлетворять условиям (4.3) и т.д.

Возникает задача численного анализа квадратичного по V условия в (4.3) с целью отыскания ситуаций, когда квадратичное уравнение имеет вещественные решения. Рассмотрим дискриминант. Исследование можно строить на основе перебора в пространстве 6-ти параметров: глобальных k, θ, ψ , параметров положения точки на эллипсоиде z, γ и параметра вектора $\mathbf{i}$ направления скорости – угла $\alpha \in [0, 2\pi]$. При этом $\mathbf{i}$ задается как

$$\mathbf{i} = \frac{1}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} [-(n_y \cos \alpha + n_x n_z \sin \alpha), \\ n_x \cos \alpha - n_y n_z \sin \alpha, (n_x^2 + n_y^2) \sin \alpha], \quad \mathbf{n}(n_x, n_y, n_z)$$

Легко видеть, что такой вектор $\mathbf{i}$ единичный и он перпендикулярен единичному вектору $\mathbf{n}$. Если в каких-то выбранных точках эллипсоида путем перебора по свободному параметру α удалось отыскать хотя бы одно его значение такое, что дискриминант квадратного уравнения (4.3) положителен, то в этих точках поверхности можно добиться наиболее комфортного контакта ТММ за счет управляемого изменения его скорости.

Как показывает численное исследование, режимы “обратной скорости” (4.1) отвечают случаю нулевого дискриминанта и кратных корней квадратичного уравнения. Этот режим немного плох только в одном смысле: материальная точка при этом движется по одним и тем же почти периодическим траекториям некоторого периода по поверхности эллипсоида, поскольку угловые скорости прецессии ϕ, ψ , вообще говоря, несоизмеримы. Если перед зондом стоит задача более полного исследования поверхности, надо пытаться более свободно управлять вектором $\mathbf{i}$, а, значит, требуется искать области, где дискриминант заметно больше нуля.

Некоторые численные расчеты ($k = 1.5$, $\theta = \pi/4$), осуществленные с этой целью по данной методе, говорят о наличии требуемых значений угла α в больших зонах на поверхности эллипсоида вращения, за исключением окрестности вершин. Впрочем, есть и “провальные” зоны, в которых нельзя полностью нейтрализовать отталкивающую силу инерции переносного движения, но подбором параметров (V, α) ее можно уменьшить. На нахождение изучаемой точки в той или иной зоне влияет величина угла нутации и то, насколько близко она находится от экватора тела. На самом экваторе “провальных” зон не обнаружено.

При частичной компенсации выбору подлежит и параметр λ . Легко видеть, что при сколь угодно малой его величине упомянутый выше дискриминант не отрицателен и система условий типа (4.3) имеет решение. Все это открывает путь построения различных траекторий перемещения ТММ по поверхности астероида в, так сказать, облегченной ситуации.

Заключение. 1. Исследованы случаи контакта зонда малой массы с симметричными вращающимися телами, имеющими формы эллипсоида, цилиндра и усеченного конуса. Построены формулы, описывающие отталкивающие силы инерции, которые позволяют судить о критических в этом смысле точках на поверхностях данных тел.

2. Для случая эллипсоидальной формы астероида результаты этого исследования дополнены также с учетом силы гравитационного притяжения. Дальнейшее исследование требует использования численных методов.

3. Рассмотрен вопрос влияния перемещения зонда по поверхности на возникающие силы отталкивания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Том 2. Динамика системы аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1960. 487 с. = *Appell P.* Traité de mécanique rationnelle. Tome 2. Dynamique des systèmes. Mécanique analytique. Paris: Gauthier-Villars, 1953.
2. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968. 800 с.