

УДК 539.3

ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ ПРОДОЛЬНО ДВИЖУЩЕГОСЯ СЛОИСТОГО ПОЛОТНА НА ОСНОВЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ПОДХОДА

© 2023 г. Н. В. Баничук^a, С. Ю. Иванова^{a,*}, В. С. Афанасьев^a

^aИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail syuivanova@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.02.2023 г.

После доработки 26.02.2023 г.

Принята к публикации 27.02.2023 г.

Рассматривается продольное движение с постоянной скоростью тонкого неразрезного упругого полотна через систему роликовых опор под действием заданного постоянного натяжения. Рассматривается один пролет между соседними опорами. Полотно моделируется тонкой слоистой пластиной, шарнирно опертой на двух противоположных краях, оставшиеся две стороны пластины свободны. Предполагается, что пластина в процессе продольного движения может совершать малые поперечные колебания. Слои пластины из заданного набора материалов располагаются симметрично срединной поверхности и плотно прилегают друг к другу. Суммарная толщина всех слоев задана и мала по сравнению с длиной пролета и шириной пластины. Выводятся аналитические выражения для эффективных характеристик пластины, в результате чего исходная составная структура может рассматриваться как изотропная однородная пластина, для которой применяются известные формулы для вычисления критической скорости. В рамках многокритериальной оптимизации по Парето с помощью численного метода нелокальной оптимизации определяется порядок расположения слоев и их толщина, чтобы удовлетворить ряду выбранных критериев: максимуму критической скорости дивергенции, максимуму изгибной жесткости и минимуму погонной массы слоистого полотна. Приводится пример найденной оптимальной структуры пластины и построенный Парето-фронт для заданного набора определяющих параметров задачи.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, слоистое полотно, движущиеся материалы, Парето-фронт

DOI: 10.31857/S0572329923600093, EDN: QXKQAA

1. Введение. Движущиеся упругие струны, балки, мембраны и пластины – наиболее популярные модели в исследовании движущихся материалов. В научной литературе представлено большое число работ, где используются эти модели, приводящие к решению дифференциальных уравнений с частными производными второго и четвертого порядков. Подробные обзоры работ по движущимся материалам содержатся, например, в монографиях [1–3]. Ряд исследований был посвящен вопросам свободных колебаний, включая природу распространения волн в движущейся среде и эффекты аксиального движения спектра частот и собственных значений. Было показано, что собственная частота каждой моды уменьшается при увеличении транспортной скорости и что движущаяся струна, балка, панель и пластина будут испытывать неустойчивость дивергенции при достаточно высокой скорости (см., например, [4, 5]). Задача повышения критического значения транспортной скорости, при которой наступает

явление статической неустойчивости (дивергенция) полотна (панели, пластины) является актуальным для многих технологических процессов, связанных с продольным движением материалов (производство бумаги и пленок, вращение дисков и стержней, движение транспортерных лент, приводных ремней и т.п.). В результате проведенных теоретических исследований ранее были аналитически получены зависимости критических скоростей от ряда определяющих параметров [1, 2, 6, 7]. Одним из возможных способов увеличить критическую скорость является изменение внутренней структуры самого полотна. Важную роль здесь могут играть слоистые конструкции и их оптимизация [8].

На практике бывает необходимо удовлетворить при проектировании конструкций не одному, а нескольким критериям качества. Вопросам многокритериальной и многоцелевой оптимизации в механике, основанной на подходах Парето и Нэша, также посвящено большое количество исследований. Первые работы, посвященные применению многоцелевой оптимизации в механике, опубликованы Стадлером [10, 11], Эшенауэром [12, 13] и др. Отметим также обзор Стадлера [14] по многокритериальной оптимизации в механике, коллективную монографию под редакцией Стадлера [15] и монографию Миттенена [16], посвященную нелинейным проблемам многоцелевой оптимизации. Многокритериальные подходы к проблемам оптимального проектирования конструкций обсуждались в [17, 18]. Вопросы многоцелевой оптимизации конструкций рассматривались также применительно к задачам контактного взаимодействия и высокоскоростного проникания тел в деформируемые среды в монографии [19].

В данной работе в рамках многокритериальной оптимизации по Парето с помощью численного метода нелокальной оптимизации (генетический алгоритм [20–22]) определяется порядок расположения слоев движущегося полотна (слоистой пластины) и их толщина, чтобы удовлетворить ряду выбранных критериев: максимуму критической скорости дивергенции, максимуму изгибной жесткости и минимуму погонной массы слоистого полотна.

2. Основные соотношения механической модели. Рассматривается продольно движущееся с постоянной транспортной скоростью V_0 упругое неразрезное слоистое полотно, совершающее поперечные колебания малой амплитуды и находящееся под действием заданного продольного натяжения. Полотно движется через систему роликовых опор (валков), и в Эйлеровой системе координат рассматривается один пролет между двумя соседними опорами. Полотно моделируется упругой слоистой пластиной, движущейся с постоянной продольной скоростью в направлении оси x , шарнирно опертой на валках в начале и конце пролета. Будем считать, что пластина эффективно изотропна и однородна и занимает в прямоугольной системе координат x, y, z область $\Omega = \{(x, y, z) : 0 < x < l, -b < y < b, -H/2 < z < H/2\}$. При этом пластина шарнирно оперта при $x = 0$ и $x = l$ и имеет свободные края при $y = b$ и $y = -b$. Длина пролета l , ширина пластины $2b$, полная толщина пластины H и ее скорость V_0 являются заданными постоянными величинами.

Динамическое поведение движущегося однородного изотропного полотна (пластины) в Эйлеровой системе координат описывается следующим уравнением в частных производных и краевыми условиями (Δ^2 – бигармонический оператор) [1, 2]:

$$m \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + V_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - T_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D \Delta^2 w = 0 \quad (2.1)$$

$$(w)_{x=0,l} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=0,l} = 0, \quad -b \leq y \leq b \quad (2.2)$$

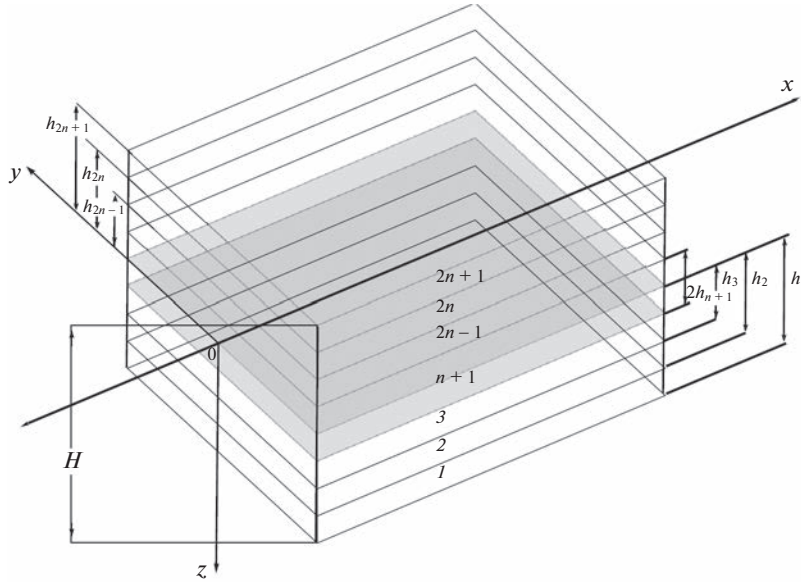


Рис. 1. Слоистая пластина.

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=\pm b} = \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)_{y=\pm b} = 0, \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.3)$$

Здесь $w = w(x, y, t)$ — поперечные перемещения полотна, m — масса на единицу площади, D — изгибная жесткость, ν — коэффициент Пуассона, а T_0 — постоянное механическое натяжение, приложенное к концам полотна при $x = 0, l$. Для рассматриваемого случая слоистого эффективно однородного и изотропного полотна можно воспользоваться соотношениями (2.1)–(2.3), если положить в них $m = m^{ef}$, $D = D^{ef}$, $\nu = \nu^{ef}$, где m^{ef} — эффективная масса пластины на единицу площади, D^{ef} — эффективная изгибная жесткость пластины, ν^{ef} — эффективный коэффициент Пуассона.

Для определения эффективных характеристик будем считать, что пластина симметрично составлена относительно срединной плоскости из нечетного числа $2n + 1$ упругих слоев, которые характеризуются массой на единицу площади m_i , модулем Юнга E_i , коэффициентом Пуассона ν_i и расстоянием h_i от срединной плоскости. При этом внешние слои имеют номера 1 и $2n + 1$ (см. рис. 1).

Учитывая симметричное расположение слоев относительно срединной плоскости ($z = 0$) и тот факт, что они плотно прилегают друг к другу, получим выражения для эффективной изгибной жесткости пластины D^{ef} , эффективного коэффициента Пуассона ν^{ef} и эффективной массы пластины m^{ef} на единицу площади. Для этого мы применим формулы для напряжений и деформаций и используем выражение для изгибающего момента

$$\int_{-H/2}^{H/2} \sigma_x z dz = \left(\int_{-H/2}^{H/2} \frac{z^2 E(z) dz}{1 - (\nu(z))^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = D^{ef} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

Принимая во внимание симметрию укладки слоев структуры полотна, т.е.

$$E(z) = E(-z), \quad v(z) = v(-z)$$

найдем выражение для эффективной изгибной жесткости в виде

$$D^{ef} = 2 \int_0^{H/2} \frac{z^2 E(z)}{1 - (v(z))^2} dz$$

Используя механические и геометрические характеристики слоев полотна E_i , v_i , h_i , получим следующее выражение:

$$D^{ef} = \frac{2}{3} \left[\frac{E_{n+1} h_{n+1}^3}{1 - v_{n+1}^2} + \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{1 - v_i^2} (h_i^3 - h_{i+1}^3) \right] \quad (2.4)$$

Аналогично выводится формула для эффективного коэффициента Пуассона неоднородного изотропного слоистого полотна. Имеем

$$v^{ef} = \frac{2}{D^{ef}} \int_0^{H/2} \frac{z^2 v(z) E(z)}{1 - (v(z))^2} dz = \frac{2}{D^{ef}} \left[\frac{v_{n+1} E_{n+1} h_{n+1}^3}{1 - v_{n+1}^2} + \sum_{i=1}^n \frac{E_i v_i}{1 - v_i^2} (h_i^3 - h_{i+1}^3) \right] \quad (2.5)$$

Формула для эффективной массы m^{ef} на единицу площади слоистого полотна получается прямым суммированием соответствующих масс $2n + 1$ слоев. Получим

$$m^{ef} = m_{n+1} + 2 \sum_{i=1}^n m_i \quad (2.6)$$

Одним из важнейших параметров, характеризующих механическое поведение рассматриваемой движущейся системы, является критическая скорость статической формы потери устойчивости пластины (критическая скорость дивергенции). В стационарном случае, когда все производные по времени обращаются в нуль, приходим к краевой задаче на собственные значения для однородной и изотропной пластины с уравнением

$$(mV_0^2 - T_0) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D \Delta^2 w = 0 \quad (2.7)$$

и граничными условиями (2.2), (2.3). В случае однородного изотропного движущегося полотна получено в явном виде выражение для критической скорости дивергенции V_0^{div} (статическая неустойчивость) [1, 2]. Данное выражение может быть также записано и для рассматриваемого случая слоистого эффективно однородного и изотропного полотна. Имеем

$$\left(V_0^{div}\right)^2 = \frac{T_0}{m^{ef}} + \frac{\gamma_*^2 \pi^2 D^{ef}}{m^{ef} l^2} \quad (2.8)$$

где γ_* является корнем следующего трансцендентного уравнения [1]:

$$\begin{aligned} \Phi(\gamma, \mu) - \Psi(\gamma, v^{ef}) &= 0 \\ \Phi &\equiv \tanh\left(\frac{\sqrt{1-\gamma}}{\mu}\right) \coth\left(\frac{\sqrt{1+\gamma}}{\mu}\right) \\ \Psi &\equiv \frac{\sqrt{1+\gamma}(\gamma + v^{ef} - 1)^2}{\sqrt{1-\gamma}(\gamma - v^{ef} + 1)^2}, \quad \mu = \frac{l}{\pi b} \end{aligned}$$

Таким образом, для любого слоистого полотна с симметричной внутренней структурой и заданными параметрами m_i , E_i , v_i ($i = 1, 2, \dots, n+1$) мы можем определить величины m^{ef} , D^{ef} , v^{ef} и, следовательно, определить значение критической скорости дивергенции V_0^{div} , используя выражение (2.8).

3. Многокритериальная задача оптимизации. Имея возможность формировать внутреннюю структуру полотна, то есть менять наполнение и расположение слоев, мы можем влиять на эффективные характеристики и основные свойства системы, удовлетворяя выбранным критериям оптимальности. Для этого удобно использовать натуральную параметризацию. Будем считать, что число r допустимых материалов для изготовления слоев полотна задано. Учитывая, что каждый из данных материалов может быть пронумерован с помощью одного параметра, применим натуральную параметризацию, используя скалярную переменную k , которая может принимать значения $k_1, k_2, \dots, k_s, \dots, k_r$, то есть $k \in \{k_1, k_2, \dots, k_s, \dots, k_r\}$. Так как слои характеризуются модулем Юнга E , коэффициентом Пуассона v , массой на единицу площади m , то $E_s = E(k_s)$, $v_s = v(k_s)$, $m_s = m(k_s)$. Таким образом, рассматриваемое слоистое полотно состоит из дискретного набора слоев (материалов), распределенных вдоль оси z и характеризуется набором параметров $\{E_s, v_s, m_s\}$, $s = 1, 2, \dots, r$. Распределения параметров $(E(z), v(z), m(z))$ по толщине полотна задаются кусочно-постоянными функциями, определенными на отрезке $0 \leq z \leq H/2$. Для каждой точки $z \in [0, H/2]$ эти функции принимают значения из заданного конечного набора, т.е. $E(z) \in \{E_s\}$, $v(z) \in \{v_s\}$, $m(z) \in \{m_s\}$, $s = 1, 2, \dots, r$.

Применим описанную выше параметризацию, используя кусочно-постоянную функцию $k = k(z)$ ($z \in [0, H/2]$), принимающую значения $k = k_s = s$ из заданного набора, т.е. $k \in \{k_s = s\}$. Справедливы следующие соотношения:

$$E_s = E(k(z))_{k=k_s=s}, \quad v_s = v(k(z))_{k=k_s=s}, \quad m_s = m(k(z))_{k=k_s=s} \quad (3.1)$$

Будем считать функцию $k = k(z)$ искомой переменной проектирования, определяющей структуру рассматриваемого слоистого полотна. В качестве критериев оптимизации (целевых функционалов) выберем критическую скорость дивергенции полотна, обратную полную эффективную массу и эффективную изгибную жесткость. Определим векторный функционал $J = J(k(z))$ в виде

$$J = J(k(z)) = \begin{Bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

$$J_1 = V_0^{div}(k(z)), \quad J_2 = \frac{1}{m^{ef}(k(z))}, \quad J_3 = D^{ef}(k(z))$$

и сформулируем следующую задачу векторной (многокритериальной) оптимизации:

$$(J)_* = \max_k J(k(z)) \quad (3.3)$$

$$k(z) \in \{k_s\} : z_{i-1} < z < z_i$$

$$i = 1, 2, \dots, n+1, \quad s = 1, 2, \dots, r, \quad z_1 = H/2, \quad z_{n+1} = 0$$

Максимум в (3.3) понимается в смысле Парето [17, 18]. Это означает, что выражение

$$k_* = \arg \max_k J(k) \quad (3.4)$$

является оптимальным решением сформулированной задачи с векторным функционалом, если не существует другой переменной проектирования k_{**} , удовлетворяющей условию $k_{**} \in \{k_s = s\}$, такой что

$$J_i(k_{**}) \geq J_i(k_*), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.5)$$

и, по крайней мере, для одной из компонент (j -й) векторного функционала выполняется строгое неравенство

$$J_j(k_{**}) > J_j(k_*) \quad (3.6)$$

Для решения многокритериальной задачи оптимизации (3.3) применим метод целевого взвешивания. Построим функционал взвешивания J_C (функционал предпочтений) в виде суммы

$$J_C = \sum_{i=1}^3 C_i \hat{J}_i \quad (3.7)$$

с весовыми коэффициентами C_i , удовлетворяющими следующим условиям:

$$C_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \sum_{i=1}^3 C_i = 1 \quad (3.8)$$

Под $\hat{J}_i$ в (3.7) понимаются безразмерные величины $\hat{J}_i = J_i/J_i^0$, $i = 1, 2, 3$, где J_i^0 — некоторые характерные величины скорости, обратной массы и изгибной жесткости (“крышка” у рассматриваемых величин в соотношении (3.7) в дальнейшем опускается).

В соответствии с применяемым методом целевого взвешивания решение многоцелевой задачи оптимизации (3.3) и отыскание множества оптимальных в смысле Парето слоистых структур полотна сводится к решению следующей задачи определения максимума скалярного функционала

$$J_C^* = J_C(k_*) = \max_{k \in \{k_s=s\}} J_C(k) \quad (3.9)$$

при ограничениях (3.8), наложенных на весовые коэффициенты. Таким образом, для любого заданного набора весовых коэффициентов, удовлетворяющих условию (3.8), будет определена оптимальная структура слоистой пластины (полотна), обладающей максимальной критической скоростью дивергенции и при этом максимальной изгибной жесткостью и минимальной погонной массой.

4. Численное решение на основе генетического алгоритма. Решение задачи максимизации функционала J_C (3.9), (3.8) для различных значений параметров задачи l , b , H , n , r , T_0 и характеристик используемых материалов выполнялось численно с помощью генетического алгоритма [20, 8, 19]. Данный метод глобальной оптимизации был выбран из-за большого числа параметров, чтобы избежать сложностей, обусловленных возможным появлением в рассматриваемой задаче локальных экстремумов.

Согласно принятой для данного метода терминологии каждое допустимое распределение материалов по слоям принимается в качестве “индивидуума”, принадлежащего некоторой популяции (поколению), и характеризуется набором значений $k(j, i)$, где j — номер “индивидуума” в поколении, а i — номер слоя. Число “индивидуумов” N в популяции задается четным и является неизменным в процессе дальнейшего обновления поколений. Инициализация алгоритма заключается в генерировании начального поколения из произвольно сформированных допустимых распределений $k(j, i)$. Каждому “индивидууму” соответствует некоторое значение максимизируемого функционала J_C . Далее следует итерационный процесс последовательного формирования

Таблица 1. Характеристики материалов

Материал, s	E , (кг/см ²)	ν	m , (г/м ²)
1	14.0×10^6	0.460	450
2	1.7×10^6	0.038	400
3	9.36×10^6	0.017	410

новых улучшенных поколений “индивидуумов”. В основе этого процесса лежит формирование для каждого поколения $N/2$ родительских пар “индивидуумов” и получения от них с помощью операции скрещивания (crossover) $N/2$ пар отпрысков, которые образуют следующее поколение. При этом задействуются как вероятностные, так и детерминированные механизмы отбора: каждый родитель выбирается из сформированной случайным образом подгруппы N^T “индивидуумов” так, чтобы соответствующее ему значение J_C было максимальным. Операция скрещивания для каждой сформированной пары выполняется с заданной вероятностью p_{co} . В результате отпрыски либо полностью копируют родителей, либо происходит частичный обмен их свойств в результате скрещивания в произвольно выбранной точке (i). Для сформированного нового поколения “индивидуумов” применяется операция мутации. С очень малым заданным значением вероятности p_m осуществляется изменение “индивидуума” в произвольно выбранной точке (i). Операция мутации важна для преодоления возможного попадания в локальный максимум. Для окончательно сформированного поколения устанавливается наилучший “индивидуум”, то есть распределение $k_*(j, i)$ материалов по слоям полотна, в смысле выполнения условий (3.9), (3.8). Это наилучшее решение запоминается, и алгоритм переходит к выполнению следующей итерации по построению нового улучшенного поколения. Построенное новое оптимальное решение сравнивается с решением, зафиксированным на предыдущей итерации, и сохраняется наилучшее из них. Выполнение алгоритма осуществляется с заданным количеством итераций или до выполнения некоторого условия сходимости. Как правило, выполняется несколько повторных инициализаций для тех же исходных данных.

Приведем пример решения задачи оптимизации структуры полотна для следующих значений параметров задачи: $l = 1.2$ м, $b = 0.47$ м, $T_0 = 16$ н/м, $H = 10^{-3}$ м, $n = 10$, $r = 3$. Характеристики материалов, рассматриваемых в качестве допустимых для оптимального проектирования неоднородного изотропного слоистого полотна, представлены в табл. 1.

Зависимость величины γ_* от эффективного коэффициента Пуассона ν^{ef} для рассматриваемых параметров задачи представлена на рис. 2.

Вычислительный процесс выполнялся для 500 поколений (формируемых последовательно популяций) при следующих параметрах алгоритма: $n = 10$, $N = 10$, $N^T = 4$, $p_{co} = 0.5$, $p_m = 0.05$ для 10 инициализаций.

Для простоты и большей наглядности приведем пример, когда векторный функционал J имеет только две компоненты J_1 и J_2 . В выражениях (3.7), (3.8) следует положить $C_3 = 0$. На рис. 3 представлен Парето-фронт в осях J_1 , J_2 . Каждая точка фронта соответствует некоторому значению весового коэффициента C_1 (из условия (3.8) следует, что $C_2 = 1 - C_1$) и соответствующему максимальному значению J_C^* .

Точки с номерами 1–8 соответствуют значениям коэффициента $C_1 = 1; 0.3, 0.2; 0.15; 0.12; 0.1; 0.008$ и $C_1 = 0$ соответственно.

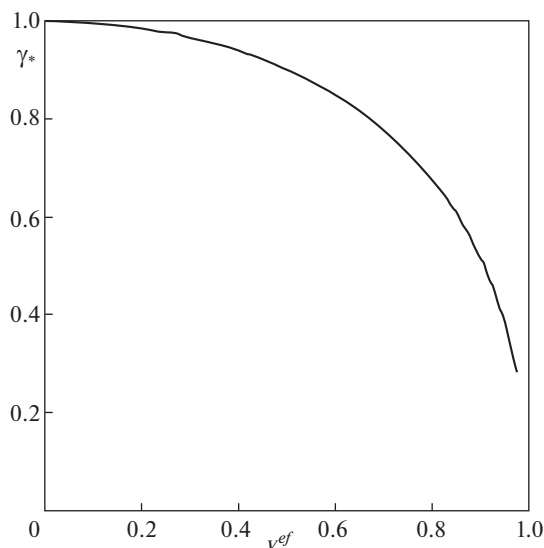


Рис. 2. Зависимость параметра γ_* от эффективного коэффициента Пуассона ν^{ef} .

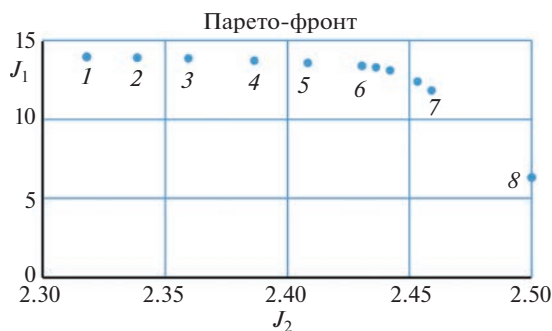


Рис. 3. Фронт Парето.

На рис. 4 представлена зависимость максимального значения J_C^* оптимизируемого функционала от коэффициента C_1 .

Для случая $C_1 = 1$ на рис. 5 показано оптимальное распределение материалов по слоям полотна: материалы $s = 1, 2, 3$ обозначены белым, розовым и голубым цветом соответственно. Видно, что для выполнения критерия (3.9) эффективно размещать более жесткий материал на верхнем и нижнем слоях полотна, а мягкие материалы – ближе к срединной поверхности.

Сходимость генетического алгоритма для данного случая представлена на рис. 6.

5. Некоторые выводы и замечания. В работе рассмотрена многокритериальная постановка задачи оптимизации слоистой структуры движущегося упругого полотна, моделируемого тонкой слоистой пластиной. С помощью подхода, основанного на построении Парето-оптимальных решений для задачи с несколькими целевыми функ-

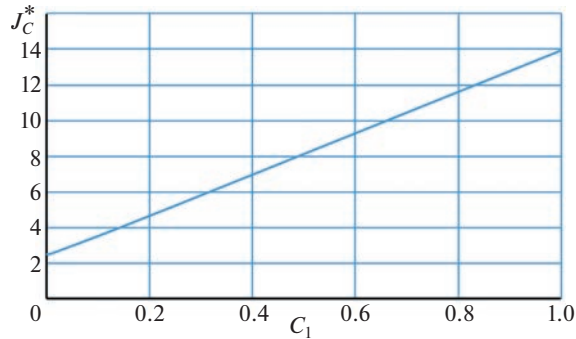


Рис. 4. Зависимость максимального значения J_C^* оптимизируемого функционала от весового коэффициента C_1 .

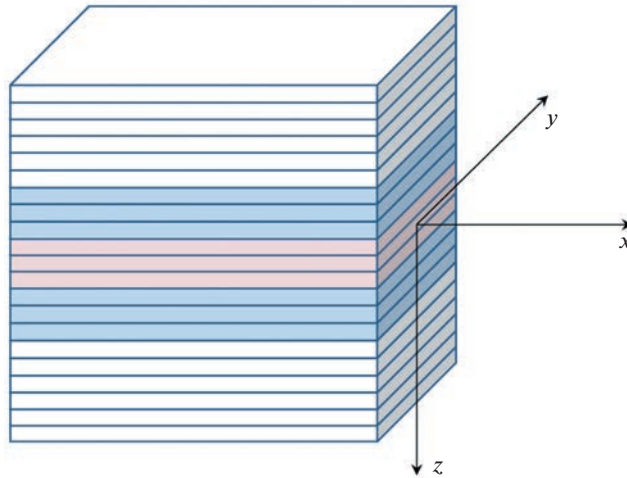


Рис. 5. Оптимальное распределение материалов по слоям полотна при $C_1 = 1$.

ционалами и применении численного метода нелокальной оптимизации (генетического алгоритма), найдены оптимальные распределения материалов из заданного набора по слоям полотна. В качестве критериев оптимизации были выбраны технологически важные параметры движущегося полотна: критическая скорость дивергенции (статической формы потери устойчивости), погонная масса (или обратная к ней величина) и изгибная жесткость. Многокритериальная оптимизация по Парето позволяет учитывать выбранные критерии с различными весовыми коэффициентами в зависимости от их значимости в тех или иных условиях производства или эксплуатации полотна. Для выполнения оптимизационного алгоритма были аналитически определены эффективные характеристики слоистого материала, которые позволили рассматривать его как эффективно изотропный и однородный и применить для него полученные ранее аналитические выражения для критической скорости дивергенции движущейся упругой пластины. Приведен пример построения оптимального реше-

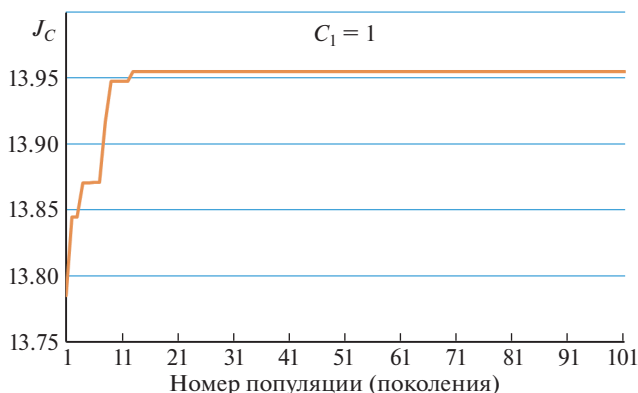


Рис. 6. Сходимость генетического алгоритма при $C_1 = 1$.

ния, на графиках представлены результаты расчетов и данные о сходимости генетического алгоритма. Отметим, что найденные оптимальные распределения материалов по слоям полотна могут служить ответом сразу на несколько вопросов конструктора: из скольких слоев надо сделать оптимальную конструкцию, какой материал взять для каждого слоя, какой толщины будет каждый слой и каков будет порядок укладки этих слоев. Отметим, что описанный многокритериальный подход к решению задачи оптимизации слоистой структуры движущегося полотна может быть применен и в случае тепловых воздействий на него. При этом в оптимизационном процессе будут также учитываться термоупругие свойства выбранных материалов.

Работа выполнена по теме госзадания (номер госрегистрации 123021700050-1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Banichuk N., Jeronen J., Neittaanmäki P., Saksa T., Tuovinen T. *Mechanics of Moving Materials*. Cham: Springer, 2014. 253 p.
2. Banichuk N., Barsuk A., Jeronen J., Tuovinen T., Neittaanmäki P. *Stability of axially moving materials*. Cham, Switzerland: Springer, 2020. 642 p.
3. Marynowski K. *Dynamics of the Axially Moving Orthotropic Web*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics V. 38. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 154 p.
4. Archibald F.R., Emslie A.G. The vibration of a string having a uniform motion along its length // *ASME J. Appl. Mech.* 1958. V. 25. № 3. P. 347–348. <https://doi.org/10.1115/1.4011824>
5. Simpson A. Transverse modes and frequencies of beams translating between fixed end supports // *J. Mech. Eng. Sci.* 1973. V. 15. № 3. P. 159–164. https://doi.org/10.1243/JMES_JOUR_1973_015_031_02
6. Banichuk N.V., Ivanova S.Y. Mathematical modelling of the axially moving panels subjected to thermomechanical actions // *Mech. Based Des. Struct. Machin.* 2018. V. 46. № 1. P. 101–109. <https://doi.org/10.1080/15397734.2017.1289472>
7. Баничук Н.В., Афанасьев В.С., Иванова С.Ю. О статической бифуркации движущейся нагретой панели, обтекаемой идеальной жидкостью // *Прикл. мат. мех.* 2020. Т. 84. № 2. С. 234–241.
8. Banichuk N., Ivanova S., Sinitsin A., Afanas'ev V. Optimization of axially moving layered web // *EngOpt 2018 Proceedings of the 6th International Conference on Engineering Optimization*. Springer, 2019. P. 657–665.

9. *Stadler W.* Preference optimality and application of Pareto-optimality // Multicriteria decision making. CISM Courses and lectures / Ed. by *Marzollo, Leitmann*. Berlin: Springer, 1975. P. 125–225.
10. *Stadler W.* Natural structural shapes (the static case) // Quarterly J. Mech. Appl. Math. 1978. V. 31. P. 169–217.
11. *Stadler W.* Stability of the natural shapes of sinusoidally loaded uniform shallow arches // Quarterly J. Mech. Appl. Math. 1983. V. 34. P. 1–22.
12. *Eschenauer H.A.* Numerical and experimental investigations on structural optimization of engineering design. Siegen, Bonn-Fries: Druckerei und Verlag, 1986. 309 p.
13. *Eschenauer H.A.* Multicriteria optimization – Fundamental and motivation // Multicriteria design optimization / Ed. by: *H. Eschenauer, J. Koski, A. Osyczka*. Berlin: Springer-Verlag, 1990. P. 1–32.
14. *Stadler W.* Multicriteria optimization in mechanics (A survey) // Appl. Mech. Rev. 1984. V. 37. № 3. P. 227–286.
15. Multicriteria Optimization in Engineering and in the Sciences / Ed. by *W. Stadler* // Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering V. 37 / Ed. by *A. Miele*. N.Y.: Plenum Press, 1988. 406 p.
16. *Miettinen K.M.* Nonlinear Multiobjective Optimization. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999. 298 p.
17. *Banichuk N.V.* Problems and Methods of Optimal Structural Design. New York: Plenum Press, 1983.
18. *Sinitsin A., Ivanova S., Makeev E., Banichuk N.* Some problems of multipurpose optimization for deformed bodies and structures // Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures. Computational methods and applied sciences. Vol. 40. Springer Netherlands, 2016. P. 313–328.
19. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю.* Оптимизация: контактные задачи и высокоскоростное проникание. М.: Физматлит, 2016. 176 с.
20. *Goldberg D.E.* Genetic Algorithm in Search, Optimization and Machine Learning. Westley Publ. Comp., 1989. 372 p.
21. *Periaux J., Gonzalez F., Lee D.S.C.* Evolutionary optimization and game strategies for advanced multi-disciplinary design. Intelligent system, Control and Automation: Science and Engineering. V. 75. Dordrecht, Heidelberg: Springer, 2015.
<https://doi.org/10.1007/978-94-017-9520-3>
22. *Periaux J., Greiner D.* Efficient parallel nash genetic algorithm for solving inverse problems in structural engineering // Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures. Computational methods and applied sciences. V. 40. Springer Netherlands, 2016. P. 205–228.