ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2023, № 5, с. 3–14

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТРЕЩИНЫ ГРИФФИТСА НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ

© 2023 г. А. Н. Булыгин[a], Ю. В. Павлов[a,*]

[a] *Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия*

**e-mail: yuri.pavlov@mail.ru*

Поступила в редакцию 06.09.2022 г.
После доработки 18.10.2022 г.
Принята к публикации 19.10.2022 г.

На основе нелинейной модели деформирования кристаллической среды со сложной решеткой поставлена и решена задача о стационарном распространении трещины Гриффитса под действием однородных расширяющих напряжений. Показано, что напряженное и деформированное состояния среды определяют как внешние воздействия на среду, так и градиенты оптической моды (взаимное смещение атомов). Вклады от данных факторов разделены. Нахождение компонент тензора напряжений и вектора макросмещений сведено к решению краевых задач Римана—Гильберта. Получены их точные аналитические решения.

Ключевые слова: нелинейная модель, кристаллическая решетка, трещина Гриффитса

DOI: 10.31857/S0572329922600724, **EDN:** QXDTJS

1. Введение. В работах [1, 2] предложена нелинейная модель деформирования кристаллических сред со сложной решеткой. Она описывает многие физико-механические процессы, которые реализуются в экспериментах (образование суперрешетки, возникновение дефектов, фазовые переходы типа мартенситных и др.), но которые не описывает классическая линейная модель. На основе общих решений динамических уравнений плоской деформации нелинейной модели [3] можно решать многие динамические задачи (распространение сосредоточенных сил, штампов разного профиля и др.). В классической постановке эти задачи решены и исследованы многими авторами [4–6]. Тем не менее их решение на основе нелинейной модели представляет определенный интерес. Он обусловлен тем, что результаты исследования плоских динамических задач находят применение при решении многих фундаментальных проблем, например, построении теории разрушения и долговременной прочности твердых тел. Локальные критерии разрушения твердых тел определяют локальные поля напряжений и деформаций, а нелинейная модель их описывает более адекватно. Ниже на основе нелинейной модели решается задача о распространении трещины Гриффитса в поле однородных растягивающих напряжений.

2. Общее решение динамических уравнений плоской деформации нелинейной модели. В нелинейной модели деформацию среды описывают вектор макросмещений $\mathbf{U}(t,x,y,z)$ (акустическая мода) и вектор микросмещений $\mathbf{u}(t,x,y,z)$ (оптическая мода). Деформацию будем считать плоской, параллельной оси OZ, если

$$U_x = U_x(t,x,y), \quad U_y = U_y(t,x,y), \quad U_z = 0 \tag{2.1}$$

$$u_x = u_x(t,x,y), \quad u_y = u_y(t,x,y), \quad u_z = 0 \tag{2.2}$$

Для плоской деформации уравнения движения нелинейной модели принимают вид [7, 8]

$$\rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \sigma_{ij,j} \tag{2.3}$$

$$\mu_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \chi_{ij,j} - R\frac{\partial \Phi(u_s)}{\partial u_i} \tag{2.4}$$

Здесь σ_{ik}, χ_{ik} — тензоры макро- и микронапряжений, ρ, μ_0 — средняя и приведенная плотности масс атомов соответственно, $i, j = 1, 2$ и по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Функция $\Phi(u_s)$ описывает энергию взаимодействия подрешеток. В основополагающей работе [9] и большинстве последующих [10] принимают

$$\Phi(u_s) = 1 - \cos u_s, \quad u_s = \mathbf{Bu} \tag{2.5}$$

где $\mathbf{B}$ — вектор обратной решетки. Множитель

$$R = p - s_{ij}e_{ij}, \quad e_{ij} = \frac{U_{i,j} + U_{j,i}}{2} \tag{2.6}$$

представляет собой энергию активации связей. Слагаемое p — половина энергии активации жесткого сдвига подрешеток, а s_{ij} — тензор нелинейной стрикции.

Ограничимся рассмотрением кристаллических сред кубической симметрии, состоящих из двух подрешеток. Для них материальные соотношения нелинейной модели записываются следующим образом [7, 8]

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijmn}e_{mn} - s_{ij}\Phi(u_s) \tag{2.7}$$

$$\chi_{ij} = k_{ijmn}\varepsilon_{mn}, \quad \varepsilon_{mn} = \frac{u_{m,n} + u_{n,m}}{2} \tag{2.8}$$

Тензоры λ_{ijmn}, k_{ijmn} — коэффициенты упругости и микроупругости соответственно. Эти тензоры симметричны к перестановке пар индексов и индексов пары между собой. В случае кристаллических сред кубической симметрии отличными от нуля компонентами будут только

$$\lambda_{1111} = \lambda_{2222} = \lambda_{3333}, \quad \lambda_{1122} = \lambda_{1133}, \quad \lambda_{1212} = \lambda_{1313} \tag{2.9}$$

$$k_{1111} = k_{2222} = k_{3333}, \quad k_{1122} = k_{1133}, \quad k_{1212} = k_{1313} \tag{2.10}$$

Для независимых компонент используем введенные Фойгтом (Voigt) [11] матричные обозначения

$$\lambda_{1111} = \lambda_{11}, \quad \lambda_{1122} = \lambda_{12} = \lambda, \quad \lambda_{1212} = \lambda_{44} = \mu \tag{2.11}$$

$$k_{1111} = k_{11}, \quad k_{1122} = k_{12}, \quad k_{1212} = k_{44} \tag{2.12}$$

В общем случае λ_{ijmn} и k_{ijmn} имеют вид тензора Хуанга (Huang) [12]

$$\begin{pmatrix} \lambda_{ijmn} \\ k_{ijmn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ k_{12} \end{pmatrix}\delta_{ij}\delta_{mn} + \begin{pmatrix} \mu \\ k_{44} \end{pmatrix}(\delta_{jn}\delta_{im} + \delta_{in}\delta_{jm}) + \begin{pmatrix} \lambda_{11} - \lambda_{12} - 2\lambda_{44} \\ k_{11} - k_{12} - 2k_{44} \end{pmatrix}\delta_{ijmn} \tag{2.13}$$

Здесь δ_{ij} — единичный тензор, а $\delta_{ijmn} = 1$, если все индексы одинаковы, и равен нулю в остальных случаях. Последнее слагаемое в (2.13) описывает анизотропию среды. В физике твердого тела [13] вводят фактор анизотропии среды (a_1, a_2)

$$\lambda_{11} - \lambda_{12} - 2\lambda_{44} = (\lambda_{11} - \lambda_{12})(1 - a_1), \quad k_{11} - k_{12} - 2k_{44} = (k_{11} - k_{12})(1 - a_2) \tag{2.14}$$

Для сред со слабой анизотропией $a_1 \approx 1$, $a_2 \approx 1$ и кубической симметрией $s_{ij} = s\delta_{ij}$ материальные соотношения (2.7), (2.8) принимают вид

$$\begin{gathered}\sigma_{xx} = 2\mu U_{x,x} + \lambda(U_{x,x} + U_{y,y}) - s\Phi(u_s)\\ \sigma_{yy} = 2\mu U_{y,y} + \lambda(U_{x,x} + U_{y,y}) - s\Phi(u_s)\\ \sigma_{xy} = \mu(U_{x,y} + U_{y,x})\end{gathered} \tag{2.15}$$

$$\begin{gathered}\chi_{xx} = 2k_{44}u_{x,x} + k_{12}(u_{x,x} + u_{y,y})\\ \chi_{yy} = 2k_{44}u_{y,y} + k_{12}(u_{x,x} + u_{y,y})\\ \chi_{xy} = k_{44}(u_{x,y} + u_{y,x})\end{gathered} \tag{2.16}$$

Компоненты тензора напряжений $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ должны удовлетворять условиям Бельтрами—Мичелла (Beltrami—Michell) [14]. Для плоской деформации нелинейной модели — это одно уравнение

$$\left(\Delta - \frac{1}{V_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{2s\mu}{\lambda + 2\mu}\left(\Delta - \frac{1}{V_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi(u_s) = 0 \tag{2.17}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad V_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{2.18}$$

Здесь V_1 — скорость продольной волны, а V_2 — скорость сдвига. Тензор σ_{ij} и вектор U_i выражаются через произвольную функцию $Q(t, x, y)$ [3]:

$$\begin{gathered}\sigma_{xx} = L_{11}(Q) = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{2V_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)Q, \quad \sigma_{yy} = L_{22}(Q) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2V_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)Q\\ \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \theta = \left(\Delta - \frac{1}{V_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)Q, \quad \left(\Delta - \frac{1}{2V_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\sigma_{xy} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}\right) = 0\end{gathered} \tag{2.19}$$

$$\begin{gathered}2\mu U_{x,x} = \sigma_{xx} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\theta + \frac{\mu}{\lambda + \mu}s\Phi(u_s),\\ 2\mu U_{y,y} = \sigma_{yy} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\theta + \frac{\mu}{\lambda + \mu}s\Phi(u_s)\end{gathered} \tag{2.20}$$

Если (2.19) подставить в (2.17), то получим уравнение для нахождения функции $Q(t, x, y)$

$$\left(\Delta - \frac{1}{V_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left[\left(\Delta - \frac{1}{V_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)Q + 2s\frac{V_2^2}{V_1^2}\Phi(u_s)\right] = 0 \tag{2.21}$$

Из (2.21) видно, что $Q(t, x, y)$ является динамическим аналогом функции Эри (G.B. Airy), которая вводится для решения статических задач классической плоской деформации. Функция $Q(t, x, y)$, в отличие от функции Эри, удовлетворяет неоднородному динамическому бигармоническому уравнению. Функция $\Phi(u_s)$ играет роль объемных источников макронапряжений и макродеформаций. Общее решение уравнения (2.21) можно записать в виде суммы двух слагаемых

$$Q(t, x, y) = F(t, x, y) + Q_0(t, x, y) \tag{2.22}$$

Функция $F(t, x, y)$ удовлетворяет однородному бигармоническому уравнению

$$\left(\Delta - \frac{1}{V_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\Delta - \frac{1}{V_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)F(t,x,y) = 0 \tag{2.23}$$

а $Q_0(t,x,y)$ есть решение неоднородного уравнения

$$\left(\Delta - \frac{1}{V_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)Q_0(t,x,y) + 2s\frac{V_2^2}{V_1^2}\Phi(u_s) = 0 \tag{2.24}$$

Полученное общее решение уравнений макрополя (2.3), (2.4) позволяет ставить и находить точные аналитические решения разнообразных динамических задач на основе нелинейной модели. Среди них наиболее простыми, но имеющими большой интерес, являются стационарные задачи (движение сосредоточенных сил, штампов и трещин разного профиля и др.). В качестве примера рассмотрим решение задачи о распространении конечного разреза ($y = 0$, $|x| \le a$) в плоскости под действием постоянных растягивающих напряжений.

3. Решение задачи о распространении трещины Гриффитса. Пусть конечный разрез расположен на оси OX ($y = 0$, $|x| \le a$), а плоскость (X, Y) находится в поле однородных растягивающих напряжений. Тогда тензор σ_{ij} должен удовлетворять граничным условиям

$$\sigma_{yy}\big|_{y=0,|x|\le a} = 0, \quad \sigma_{xy}\big|_{y=0,|x|\le a} = 0 \tag{3.1}$$

$$\sigma_{yy}\big|_{r\to\infty} = \sigma_{yy}^{\infty}, \quad \sigma_{xx}\big|_{r\to\infty} \to 0, \quad \sigma_{xy}\big|_{r\to\infty} \to 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.2}$$

Примем, что трещина со скоростью C распространяется вдоль оси OX. Тогда целесообразно перейти в подвижную систему координат ($\xi = x + Ct$, $y = \eta$). В координатах (ξ,η) уравнения (2.23), (2.24) примут вид

$$\left[(1 - M_1^2)\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right]\left[(1 - M_2^2)\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right]F(\xi,\eta) = 0 \tag{3.3}$$

$$(1 - M_1^2)\frac{\partial^2 Q_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 Q_0}{\partial \eta^2} + 2s\frac{V_2^2}{V_1^2}\Phi(u_s) = 0 \tag{3.4}$$

$$M_1 = \frac{C}{V_1}, \quad M_2 = \frac{C}{V_2} \tag{3.5}$$

Примем, что

$$M_1 < 1, \quad M_2 < 1 \tag{3.6}$$

Тогда решением (3.3) будет

$$\begin{gathered} F(\xi,\eta) = F_1(z_1) + \overline{F}_1(\overline{z}_1) + F_2(z_2) + \overline{F}_2(\overline{z}_2) = 2[\mathrm{Re}F_1(z_1) + \mathrm{Re}F_2(z_2)] \\ z_1 = \xi + \mu_1\eta, \quad \mu_1 = i\sqrt{1 - M_1^2}, \quad z_2 = \xi + \mu_2\eta, \quad \mu_2 = i\sqrt{1 - M_2^2} \end{gathered} \tag{3.7}$$

Здесь $F_1(z_1)$ и $F_2(z_2)$ – произвольные аналитические функции соответствующих комплексных переменных (z_1, z_2). Черта сверху обозначает комплексное сопряжение. Тензор σ_{ij} и вектор U_i можно выразить через функции $Q_0(\xi,\eta)$, $F_1(z_1)$ и $F_2(z_2)$, если в (2.19), (2.20) учесть (2.22) и (3.7). Окончательно получим

$$\sigma_{xx} = -(M_2^2 - 2M_1^2 + 2)\mathrm{Re}F_1'' + (M_2^2 - 2)\mathrm{Re}F_2'' + L_{11}(Q_0)$$

$$\sigma_{yy} = -(M_2^2 - 2)(\mathrm{Re}F_1'' + \mathrm{Re}F_2'') + L_{22}(Q_0) \tag{3.8}$$

$$\sigma_{xy} = 2\sqrt{1-M_1^2}\,\mathrm{Im}F_1'' + \frac{(M_2^2-2)^2}{2\sqrt{1-M_2^2}}\mathrm{Im}F_2'' - \frac{\partial^2 Q_0}{\partial\xi\partial\eta}$$

$$\mu U_x = -\mathrm{Re}F_1' + \frac{1}{2}(M_2^2-2)\mathrm{Re}F_2' - \frac{1}{2}\frac{\partial Q_0}{\partial\xi}$$

$$\mu U_y = \sqrt{1-M_1^2}\,\mathrm{Im}F_1' - \frac{M_2^2-2}{2\sqrt{1-M_2^2}}\mathrm{Im}F_2' - \frac{1}{2}\frac{\partial Q_0}{\partial\eta} \tag{3.9}$$

Здесь и далее штрих обозначает производную по аргументу. При выводе формул (3.8) и (3.9) использовались частные производные

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Re}F_1 = \mathrm{Re}F_1', \quad \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{Re}F_1 = -\sqrt{1-M_1^2}\,\mathrm{Im}F_1'$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Re}F_2 = \mathrm{Re}F_2', \quad \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{Re}F_2 = -\sqrt{1-M_2^2}\,\mathrm{Im}F_2'$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Im}F_1 = \mathrm{Im}F_1', \quad \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{Im}F_1 = \sqrt{1-M_1^2}\,\mathrm{Re}F_1'$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Im}F_2 = \mathrm{Im}F_2', \quad \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{Im}F_2 = \sqrt{1-M_2^2}\,\mathrm{Re}F_2' \tag{3.10}$$

Согласно (3.1) функции $F_1(z_1)$ и $F_2(z_2)$ должны удовлетворять граничным условиям

$$(M_2^2-2)[\mathrm{Re}F_1' + \mathrm{Re}F_2'']_{\eta=0,|\xi|\le a} = \left[L_{22}(Q_0) - \sigma_{yy}\right]_{\eta=0,|\xi|\le a} \tag{3.11}$$

$$\left.\left(2\sqrt{1-M_1^2}\,\mathrm{Im}F_1'' + \frac{(M_2^2-2)^2}{2\sqrt{1-M_2^2}}\mathrm{Im}F_2''\right)\right|_{\eta=0,|\xi|\le a} = \left[\frac{\partial^2 Q_0}{\partial\xi\partial\eta} + \sigma_{xy}\right]_{\eta=0,|\xi|\le a} \tag{3.12}$$

С учетом

$$\mathrm{Im}F_1''(z_1) = -\mathrm{Re}(iF_1''), \quad \mathrm{Im}F_2''(z_2) = -\mathrm{Re}(iF_2'') \tag{3.13}$$

граничное условие (3.12) может быть записано в виде

$$\left[2\sqrt{1-M_1^2}\,\mathrm{Re}F_1'' + \frac{(M_2^2-2)^2}{2\sqrt{1-M_2^2}}\mathrm{Re}F_2''\right]_{\eta=0,|\xi|\le a} = i\left[\frac{\partial^2 Q_0}{\partial\xi\partial\eta} + \sigma_{xy}\right]_{\eta=0,|\xi|\le a} \tag{3.14}$$

Из граничных условий (3.12) и (3.14) видно, что в нелинейной модели напряженное и деформированное состояния среды определяют как внешние воздействия $(\sigma_{xy}, \sigma_{yy})$, так и градиенты оптической моды $\left(L_{22}(Q_0), \dfrac{\partial^2 Q_0}{\partial\xi\partial\eta}\right)$. Представляется целесообразным эти вклады учитывать порознь. С этой целью функции $F_1(z_1)$ и $F_2(z_2)$ представим в виде суммы двух слагаемых

$$F_1''(z_1) = F_{11}'(z_1) + F_{12}'(z_1), \quad F_2''(z_2) = F_{21}'(z_2) + F_{22}'(z_2) \tag{3.15}$$

и потребуем, чтобы функции $(F_{11}', F_{12}', F_{21}', F_{22}')$ удовлетворяли граничным условиям

$$
\begin{gathered}
[\operatorname{Re}F'_{11} + \operatorname{Re}F'_{21}]_{\eta=0,|\xi|\le a} = -\frac{\sigma_{yy}}{M_2^2 - 2}\bigg|_{\eta=0,|\xi|\le a} \\
\left[\operatorname{Re}F'_{11} + \frac{(M_2^2-2)^2}{2\sqrt{1-M_2^2}}\operatorname{Re}F'_{21}\right]_{\eta=0,|\xi|\le a} = i\frac{\sigma_{xy}}{2\sqrt{1-M_2^2}}\bigg|_{\eta=0,|\xi|\le a}
\end{gathered}
\tag{3.16}
$$

$$
\begin{gathered}
[\operatorname{Re}F'_{12} + \operatorname{Re}F'_{22}]_{\eta=0,|\xi|\le a} = \frac{1}{M_2^2 - 2}L_{22}(Q_0)\bigg|_{\eta=0,|\xi|\le a} \\
\left[\operatorname{Re}F'_{12} + \frac{(M_2^2-2)^2}{4\sqrt{(1-M_2^2)(1-M_2^2)}}\operatorname{Re}F'_{22}\right]_{\eta=0,|\xi|\le a} = \frac{i}{2\sqrt{1-M_2^2}}\frac{\partial^2 Q_0}{\partial\xi\partial\eta}\bigg|_{\eta=0,|\xi|\le a}
\end{gathered}
\tag{3.17}
$$

С учетом (3.15) компоненты тензора напряжений (3.8) и вектора макросмещений (3.9) записываются в виде суммы двух слагаемых

$$
\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^{+} + \sigma_{ik}^{-}, \quad U_i = U_i^{+} + U_i^{-}, \quad (i,k) = (1,2) \tag{3.18}
$$

$$
\begin{gathered}
\begin{pmatrix}\sigma_{xx}^{-}\\ \sigma_{xx}^{+}\end{pmatrix} = -(M_2^2 - 2M_1^2 + 2)\begin{pmatrix}\operatorname{Re}F'_{11}\\ \operatorname{Re}F'_{12}\end{pmatrix} + (M_2^2-2)\begin{pmatrix}\operatorname{Re}F'_{21}\\ \operatorname{Re}F'_{22}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ L_{11}(Q_0)\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}\sigma_{yy}^{-}\\ \sigma_{yy}^{+}\end{pmatrix} = -(M_2^2-2)\begin{pmatrix}\operatorname{Re}F'_{11} + \operatorname{Re}F'_{21}\\ \operatorname{Re}F'_{12} + \operatorname{Re}F'_{22}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ L_{22}(Q_0)\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}\sigma_{xy}^{-}\\ \sigma_{xy}^{+}\end{pmatrix} = 2\sqrt{1-M_1^2}\begin{pmatrix}\operatorname{Im}F'_{11}\\ \operatorname{Im}F'_{12}\end{pmatrix} + \frac{(M_2^2-2)^2}{2\sqrt{1-M_2^2}}\begin{pmatrix}\operatorname{Im}F'_{21}\\ \operatorname{Im}F'_{22}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\ \dfrac{\partial^2 Q_0}{\partial\xi\partial\eta}\end{pmatrix}
\end{gathered}
\tag{3.19}
$$

$$
\begin{gathered}
\mu\begin{pmatrix}U_x^{-}\\ U_x^{+}\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\operatorname{Re}F'_{11}\\ \operatorname{Re}F'_{12}\end{pmatrix} + \frac{1}{2}(M_2^2-2)\begin{pmatrix}\operatorname{Re}F'_{21}\\ \operatorname{Re}F'_{22}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q_0}{\partial\xi}\end{pmatrix} \\
\mu\begin{pmatrix}U_y^{-}\\ U_y^{+}\end{pmatrix} = \sqrt{1-M_1^2}\begin{pmatrix}\operatorname{Im}F'_{11}\\ \operatorname{Im}F'_{12}\end{pmatrix} - \frac{M_2^2-2}{2\sqrt{1-M_2^2}}\begin{pmatrix}\operatorname{Im}F'_{21}\\ \operatorname{Im}F'_{22}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q_0}{\partial\eta}\end{pmatrix}
\end{gathered}
\tag{3.20}
$$

Чтобы удовлетворить условиям на бесконечности (3.2), из функций $F'_{11}(z_1)$ и $F'_{21}(z_2)$ выделим линейные слагаемые

$$
\begin{gathered}
F_{11}(z_1) = Az_1 + F_{10}(z_1), \quad F_{21}(z_2) = Bz_2 + F_{20}(z_2) \\
A = -\frac{1}{2(M_2^2 - M_1^2)}\sigma_{yy}^{\infty}, \quad B = \frac{M_2^2 - 2M_1^2 + 2}{2(2-M_2^2)(M_2^2-M_1^2)}\sigma_{yy}^{\infty} \\
A + B = \frac{1}{2 - M_2^2}\sigma_{yy}^{\infty}
\end{gathered}
\tag{3.21}
$$

Тогда граничные условия (3.16) примут вид

$$
\begin{gathered}
[\operatorname{Re}F'_{10} + \operatorname{Re}F'_{20}]_{\eta=0,|\xi|\le a} = \frac{1}{M_2^2 - 2}\sigma_{yy}^{\infty} \\
\left[\operatorname{Re}F'_{10} + \frac{(M_2^2-2)^2}{4\sqrt{(1-M_1^2)(1-M_2^2)}}\operatorname{Re}F'_{20}\right]_{\eta=0,|\xi|\le a} = 0
\end{gathered}
\tag{3.22}
$$

Из (3.22) находим граничные условия для F'_{10} и F'_{20}:

$$
\begin{gathered}
\operatorname{Re}F'_{10}|_{\eta=0,|\xi|\le a} = (1-G_1)\frac{\sigma_{yy}^{\infty}}{M_2^2-2} \\
\operatorname{Re}F'_{20}|_{\eta=0,|\xi|\le a} = \frac{G_1}{M_2^2-2}\sigma_{yy}^{\infty} \\
G_1 = \frac{4\sqrt{(1-M_1^2)(1-M_2^2)}}{4\sqrt{(1-M_1^2)(1-M_2^2)}-(2-M_2^2)^2}
\end{gathered}
\tag{3.23}
$$

а из (3.12) получаем граничные условия для F'_{12}, F'_{22}:

$$
\begin{gathered}
\operatorname{Re}F'_{12}|_{\eta=0,|\xi|\le a} = T_{12}(\xi), \quad T_{12}(\xi) = \frac{1}{M_2^2-2}L_{22}(Q_0)\Big|_{\eta=0,|\xi|\le a} - T_{22}(\xi) \\
\operatorname{Re}F'_{22}|_{\eta=0,|\xi|\le a} = T_{22}(\xi), \quad T_{22}(\xi) = G_1\left[\frac{L_{22}(Q_0)}{M_2^2-2} - \frac{i}{2\sqrt{1-M_1^2}}\frac{\partial^2 Q_0}{\partial\xi\partial\eta}\right]_{\eta=0,|\xi|\le a}
\end{gathered}
\tag{3.24}
$$

Из (3.23) и (3.24) видно, что нахождение F'_{10}, F'_{20}, F'_{12}, F'_{22} сведено к построению функции $Z(z)$, которая является регулярной вне отрезка $\eta = 0$, $|\xi| \le a$, на бесконечности ($r \to \infty$) $Z \to 0$, а на самом отрезке она удовлетворяет краевому условию вида

$$
\operatorname{Re}Z\Big|_{\eta=0,|\xi|\le a} = -g(\xi) \tag{3.25}
$$

Поставленная задача является частным случаем проблемы Римана–Гильберта (Riemann–Hilbert) [14]. Ее решение имеет вид

$$
Z(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{z^2-a^2}}\int_{-a}^{a}\frac{g(\xi)\sqrt{a^2-\xi^2}}{z-\xi}d\xi \tag{3.26}
$$

На основании (3.23) и (3.26) находим

$$
\begin{gathered}
F_{10}(z_1) = (1-G_1)\frac{\sigma_{yy}^{\infty}}{M_2^2-2}[z_1 - \sqrt{z_1^2-a^2}] \\
F_{20}(z_2) = G_1\frac{\sigma_{yy}^{\infty}}{M_2^2-2}[z_2 - \sqrt{z_2^2-a^2}]
\end{gathered}
\tag{3.27}
$$

Поставленную задачу можно также решить с помощью формулы Келдыша–Седова [15].

Функции F_{10} и F_{20} позволяют найти компоненты тензора σ_{ik}^{-} и вектора макросмещений U_i^{-}. Для этого нужно (3.21) и (3.27) подставлять в (3.19) и (3.20). Так для компонент тензора напряжений получим

$$\sigma_{xx}^{-} = \sigma_{yy}^{\infty}\operatorname{Re}\left[(1-G_1)\frac{M_2^2-2M_1^2+2}{2-M_2^2}\left(1-\frac{z_1}{\sqrt{z_1^2-a^2}}\right)+G_1\left(1-\frac{z_2}{\sqrt{z_2^2-a^2}}\right)\right]$$

$$\sigma_{yy}^{-} = \sigma_{yy}^{\infty}\operatorname{Re}\left[(1-G_1)\frac{z_1}{\sqrt{z_1^2-a^2}}+G_1\frac{z_2}{\sqrt{z_2^2-a^2}}\right] \tag{3.28}$$

$$\sigma_{xy}^{-} = \sigma_{yy}^{\infty}\frac{2-M_2^2}{2\sqrt{1-M_2^2}}\operatorname{Re}\left[G_1 i\left(\frac{z_1}{\sqrt{z_1^2-a^2}}-\frac{z_2}{\sqrt{z_2^2-a^2}}\right)\right]$$

Соотношения (3.28) соответствуют решению задачи о распространении трещины Гриффитса на основе классической линейной модели. Эта задача была решена Е. Иоффе [16]. Если принять, что скорость распространения трещины $C = 0$, то, полагая в (3.28) $z_1 = z_2$ и переходя к пределу $M_1, M_2 \to 0$, получим поле напряжений в плоскости с разрезом $y = 0$, $|x| \le a$ в статическом случае

$$\sigma_{xx}^{-} = \begin{cases} -\sigma_{yy}^{\infty}, & |x| < a \\ -\sigma_{yy}^{\infty}\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right), & |x| > a \end{cases}$$

$$\sigma_{yy}^{-} = \begin{cases} 0, & |x| < a \\ \sigma_{yy}^{\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}, & |x| > a \end{cases} \tag{3.29}$$

$$\sigma_{xy}^{-} = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

Выражения (3.29) совпадают с результатами, которые получил С.Е. Инглис [17].

Компоненты тензора σ_{ik}^{+} и вектора макросмещений U_i^{+} можно найти, если известна оптическая мода u_s. Она находится из уравнений микрополя (2.4).

3.1. Решение уравнений микрополя. Уравнения микрополя (2.4) можно записать в компонентной форме, если тензор микронапряжений χ_{ij} (2.8) подставить в уравнение (2.4) и учесть вид тензора k_{ijmn}:

$$\mu_0\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = k_{44}\Delta u_x + (k_{12}+k_{44})(u_{x,xx}+u_{y,xy}) + (k_{11}-k_{12}-2k_{44})u_{x,xx} - \frac{R}{b}\sin u_s$$

$$\mu_0\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = k_{44}\Delta u_y + (k_{12}+k_{44})(u_{x,xy}+u_{y,yy}) + (k_{11}-k_{12}-2k_{44})u_{y,yy} - \frac{R}{b}\sin u_s \tag{3.30}$$

Вместо компонент (u_x, u_y) введем u_s и $u_m = (u_x - u_y)/b$. Тогда сумма и разность уравнений (3.30) запишутся следующим образом

$$2\mu_0\frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} = (k_{11}+k_{44})\Delta u_s + 2(k_{12}+k_{44})u_{s,xy} + (k_{11}-k_{44})(u_{m,xx}-u_{m,yy}) - \frac{4R}{b^2}\sin u_s$$
$$2\mu_0\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} = (k_{11}+k_{44})\Delta u_m - 2(k_{12}+k_{44})u_{m,xy} + (k_{11}-k_{44})(u_{s,xx}-u_{s,yy}) \tag{3.31}$$

В подвижной системе координат (ξ, η) уравнения (3.31) принимают вид

$$
\begin{gathered}
(k_{11}+k_{44})\left[(1-m_1^2)\frac{\partial^2 u_s}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u_s}{\partial \eta^2}+2k_0\frac{\partial^2 u_s}{\partial \xi \partial \eta}\right]+ \\
+(k_{11}-k_{44})(u_{m,\xi\xi}-u_{m,\eta\eta})-\frac{4R}{b^2}\sin u_s=0 \\
(k_{11}+k_{44})\left[(1-m_1^2)\frac{\partial^2 u_m}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u_m}{\partial \eta^2}-2k_0\frac{\partial^2 u_m}{\partial \xi \partial \eta}\right]+(k_{11}-k_{44})(u_{s,\xi\xi}-u_{s,\eta\eta})=0 \\
m_1=\frac{C}{v_1},\quad v_1^2=\frac{k_{12}+k_{44}}{2\mu_0},\quad k_0=\frac{k_{12}+k_{44}}{k_{11}+k_{44}}
\end{gathered} \tag{3.32}
$$

Видно, что уравнения (3.32) связаны. Они разделяются, если $k_{11}=k_{44}$. Примем это условие и вместо переменных (ξ,η) введем

$$
\begin{gathered}
q_1=L_1(\xi+\alpha\eta),\quad q_2=L_2(\xi-\alpha\eta),\quad \alpha=\sqrt{1-m_1^2} \\
L_1=\frac{1}{b}\sqrt{\frac{2p}{(k_{11}+k_{44})\alpha(\alpha+k_0)}},\quad L_2=\frac{1}{b}\sqrt{\frac{2p}{(k_{11}+k_{44})\alpha(\alpha-k_0)}}
\end{gathered} \tag{3.33}
$$

В переменных (q_1,q_2) уравнения (3.32) примут вид

$$
\frac{\partial^2 u_s}{\partial q_1^2}+\frac{\partial^2 u_s}{\partial q_2^2}=\frac{R}{p}\sin u_s \tag{3.34}
$$

$$
\omega^2\frac{\partial^2 u_m}{\partial q_1^2}+\frac{\partial^2 u_m}{\partial q_2^2}=0,\quad \omega=\sqrt{\frac{\alpha-k_0}{\alpha+k_0}} \tag{3.35}
$$

Из соотношений (2.6), (2.15) находим

$$
\begin{gathered}
\frac{R}{p}=p_1+2p_2\cos u_s \\
p_1=1-2p_2-\frac{p_2}{s}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) \\
p_2=\frac{s^2}{2p(\lambda+\mu)}
\end{gathered} \tag{3.36}
$$

С учетом (3.36) уравнение (3.34) принимает вид

$$
\frac{\partial^2 u_s}{\partial q_1^2}+\frac{\partial^2 u_s}{\partial q_2^2}=p_1\sin u_s+p_2\sin 2u_s \tag{3.37}
$$

Уравнение (3.37) отличается от классического уравнения двойного синус-Гордона тем, что амплитуда p_1 не постоянная величина, а функция (t,x,y,u_s). В литературе отсутствуют аналитические методы решения такого уравнения. По этой причине оправданы допущения, которые преобразуют (3.37) к уравнениям, имеющим точные аналитические решения. Для сред, у которых $s^2\ll 2p(\lambda+\mu)$ можно принять $p_2=0$, а $p_1=1$. Тогда уравнение (3.37) станет классическим уравнением синус-Гордона

$$
\frac{\partial^2 u_s}{\partial q_1^2}+\frac{\partial^2 u_s}{\partial q_2^2}=\sin u_s \tag{3.38}
$$

Если $s^2 \ll 2p(\lambda+\mu)$, но $s(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})/2p(\lambda+\mu)$ не является пренебрежимо малой величиной, то (3.37) принимает вид уравнения синус-Гордона с переменной амплитудой

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial q_1^2}+\frac{\partial^2 u_s}{\partial q_2^2} = p(q_1,q_2)\sin u_s$$
$$p(q_1,q_2) = 1 - s(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})/2p(\lambda+\mu) \tag{3.39}$$

Уравнение синус-Гордона (3.38) подробно изучено в литературе. Для уравнения синус-Гордона с переменной амплитудой аналитические решения построены только для частного вида функций $p(q_1,q_2)$ [18]– [20]. Поскольку нахождение оптической моды сопряжено с преодолением значительных трудностей, то для иллюстрации метода нахождения (σ_{ik}^+, U_i^+) возьмем самое простое решение u_s. Если принять, что справедливо уравнение (3.38), а $u_s = u_s(q_1)$, то решением уравнения (3.38) будет

$$u_s = 4\operatorname{arctg} e^{q_1} \tag{3.40}$$

Найдем (σ_{ik}^+, U_i^+) оптической моды (3.40).

3.2. Нахождение напряжений и смещений, обусловленных оптической модой. Для оптической моды (3.40)

$$\Phi(u_s) = 1-\cos u_s = 8g(q_1),\quad g(q_1) = \frac{e^{2q_1}}{(1+e^{2q_1})^2} \tag{3.41}$$

а функция Q_0 находится из уравнений (2.24), (3.4)

$$Q_0 = -\frac{D}{2L_1^2}\ln(1+e^{2q_1}),\quad D = \frac{8sV_2^2}{V_1^2(2-m_1^2-M_1^2)} \tag{3.42}$$

С учетом (2.19), (3.24), (3.42), находим

$$L_{11}(Q_0) = -D(2-2m_1^2-M_2^2)g(q_1),\quad L_{22}(Q_0) = -D(2-M_2^2)g(q_1) \tag{3.43}$$

$$\frac{\partial^2 Q_0}{\partial\xi\partial\eta} = -2D\sqrt{1-m_1^2}\,g(q_1)$$

$$T_{12}(\xi) = (D-G_2)g(q_1),\quad G_2 = G_1D\left(1+i\sqrt{\frac{1-m_1^2}{1-M_1^2}}\right)\quad T_{22}(\xi) = G_2g(q_1) \tag{3.44}$$

Функции $F_{12}(z_1)$ и $F_{22}(z_2)$ являются решениями соответствующих задач Римана–Гильберта с граничными условиями (3.44) и находятся по формуле (3.26)

$$F_{12}(z_1) = (G_2-D)\Psi(z_1) \tag{3.45}$$

$$F_{22}(z_2) = -G_2\Psi(z_2) \tag{3.46}$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{z^2-a^2}}\int_{-a}^{a}\frac{e^{2L_1\xi}}{(1+e^{2L_1\xi})^2}\frac{\sqrt{a^2-\xi^2}}{z-\xi}d\xi \tag{3.47}$$

После подстановки функций $F_{12}(z_1)$ и $F_{22}(z_2)$ в соответствующие выражения формул (3.19) и (3.20), могут быть найдены компоненты тензора σ_{ij}^+ и вектора макросмещения U_i^+.

4. Заключение. Изложенный общий способ решения нелинейных уравнений плоской деформации является эффективным методом решения динамических задач. Нахождение точных аналитических решений динамических задач он сводит к проблемам теории краевых задач аналитических функций (Римана, Римана–Гильберта, Келдыша-Седова). Напряженное и деформированное состояния среды получаются в виде суммы двух слагаемых. Первое описывает действие внешних сил, а второе – оптической моды. Эти факторы учитываются порознь; что позволяет исследовать влияние оптической моды на деформирование кристаллической среды и уточнить такие важные величины, как интенсивность напряжений, локальные критерии напряжения и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аэро Э.Л.* Микромасштабные деформации в двумерной решетке – структурные переходы и бифуркации при критическом сдвиге // ФТТ. 2000. Т. 42. Вып. 6. С. 1113–1119.
2. *Aero E.L.* Micromechanics of a double continuum in a model of a medium with variable periodic structure // J. Eng. Math. 2006. V. 55. P. 81–95. https://doi.org/10.1007/s10665-005-9012-3
3. *Bulygin A.N., Pavlov Y.V.* Solution of dynamic equations of plane deformation for nonlinear model of complex crystal lattice / Advanced Structured Materials. V. 164. Mechanics and Control of Solids and Structures. Cham, Switzerland: Springer, 2022. P. 115–136. https://doi.org/10.1007/978-3-030-93076-9_6
4. Разрушение / Ред. *Либовиц Г.* Т. 2. Математические основы теории разрушения. М.: Мир, 1975. = Fracture an Advanced Treatise / Ed. by *H. Liebowitz*. Vol. II. Mathematical Fundamentals. New York, London: Academic Press, 1968.
5. *Нотт Дж.Ф.* Основы механики разрушения. М.: “Металлургия”, 1978. = *Knott J.F.* Fundamentals of Fracture Mechanics. London: Butterworths, 1973.
6. *Броек Д.* Основы механики разрушения. М.: Высшая школа, 1980. = *Broek D.* Elementary Engineering Fracture Mechanics. Dordrecht, The Netherlands: Martinus Nijhoff Publishers, 1984.
7. *Аэро Э.Л., Булыгин А.Н., Павлов Ю.В.* Нелинейная модель деформирования кристаллических сред, допускающих мартенситные превращения: решение уравнений статики // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 6. С. 30–40. https://doi.org/10.31857/S057232990002538-1
8. *Аэро Э.Л., Булыгин А.Н., Павлов Ю.В.* Нелинейная модель деформирования кристаллических сред, допускающих мартенситные превращения: плоская деформация // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 2. С. 303–313. https://doi.org/10.1134/S0032823519020024
9. *Frenkel J., Kontorova T.* On the theory of plastic deformation and twinning // Acad. Sci. USSR J. Phys. 1939. V. 1. P. 137–149.
10. *Braun O.M., Kivshar Y.S.* The Frenkel–Kontorova Model. Concepts, Methods, and Applications. Berlin: Springer. 2004.
11. *Voigt W.* Lehrbuch der Kristallphysik. Leipzig: Teubner, 1910.
12. *Лейбфрид Г.* Микроскопическая теория механических и тепловых свойств кристаллов. М.–Л.: ГИФМЛ, 1963. = *Leibfried G.* Gittertheorie der Mechanischen und Thermissechen Eigenschaften der Kristalle. Handbuch Der Physik. Band 7. Teil 2. Berlin: Springer-Verlag, 1955.
13. *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела. М.: ГИФМЛ, 1963. = *Kittel C.* Introduction to Solid State Physics. New York: Wiley, 1956.
14. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Основные уравнения. Плоская теория упругости. Кручение и изгиб. 5-е изд., испр. и доп. М.: Наука, 1966. 708 с.
15. *Келдыш М.В., Седов Л.И.* Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций // Докл. АН СССР. 1937. Т. 16. № 1. С. 7–10.
16. *Yoffe E.H.* The moving Griffith crack // Phil. Mag. Ser. 7. 1951. V. 42. No. 330. P. 739–750. https://doi.org/10.1080/14786445108561302
17. *Inglis C.E.* Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners // Trans. Instn. Nav. Archit., Lond. 1913. V. 55. P. 219–230.

18. *Аэро Э.Л., Булыгин А.Н., Павлов Ю.В.* Решения уравнения синус-Гордон с переменной амплитудой // ТМФ. 2015. Т. 184. № 1. С. 79–91.
https://doi.org/10.4213/tmf8821
19. *Aero E.L., Bulygin A.N., Pavlov Yu.V.* Exact analytical solutions for nonautonomic nonlinear Klein-Fock–Gordon equation / Advances in Mechanics of Microstructured Media and Structures. Advanced Structured Materials. V. 87. Cham, Switzerland: Springer, 2018. P. 21–33.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-73694-5_2
20. *Aero E.L., Bulygin A.N., Pavlov Yu.V.* Some solutions of dynamic and static nonlinear nonautonomous Klein–Fock–Gordon equation / Advanced Structured Materials. V. 122. Nonlinear Wave Dynamics of Materials and Structures. Cham, Switzerland: Springer, 2020. P. 107–120.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-38708-2_7