ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2023, № 5, с. 27–57

УДК 531.3

КВАТЕРНИОННЫЕ МЕТОДЫ И РЕГУЛЯРНЫЕ МОДЕЛИ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ И МЕХАНИКИ КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА: ЛОКАЛЬНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ, ПОРОЖДАЕМЫХ ГРАВИТАЦИОННЫМИ СИЛАМИ

Ю. Н. Челноков[a,*]

[a] *Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия*

**e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

Поступила в редакцию 29.07.2022 г.
После доработки 15.09.2022 г.
Принята к публикации 19.09.2022 г.

Изучается проблема локальной регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел: устранения порождаемых силами гравитации особенностей типа сингулярности (деления на ноль) дифференциальных уравнений возмущенного пространственного движения материальной точки M, имеющей пренебрежимо малую массу, в окрестностях двух гравитирующих точек M_0 и M_1 с помощью записи уравнений движения во вращающихся системах координат, использования новых регулярных переменных и регуляризующего преобразования времени. Получены различные системы регулярных кватернионных дифференциальных уравнений (РКДУ) этой задачи. В качестве переменных в этих уравнениях выступают следующие группы переменных: 1) четырехмерные переменные Кустаанхеймо–Штифеля, кеплеровские энергии и время t, 2) расстояния от точки M до точек M_0 и M_1, модули векторов моментов скоростей точки M относительно точек M_0 и M_1, кеплеровские энергии, время t и параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона), характеризующие ориентации орбитальных систем координат в инерциальной системе координат; 3) двухмерные переменные Леви-Чивита, описывающие движение точки M в идеальных системах координат, кеплеровские энергии, время t и параметры Эйлера, характеризующие ориентации идеальных систем координат в инерциальной системе координат и являющиеся оскулирующими элементами (медленно изменяющимися переменными) для движения точки M в окрестности гравитирующей точки M_0 или M_1 соответственно. Для построения РКДУ в качестве исходных использованы уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, записанные или в неголономных (азимутально свободных), или в орбитальных, или в идеальных системах координат; в качестве новых независимых переменных использованы "фиктивные" времена τ_0 и τ_1 (т.е. использованы регуляризующие дифференциальные преобразования времени Зундмана) или угловые переменные φ_0 и φ_1, традиционно используемые при изучении орбитального движения в составе полярных координат. Для согласования двух используемых в окрестностях гравитирующих точек M_0 и M_1 независимых переменных использованы дополнительные дифференциальные уравнения.

Полученные различные локально регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел позволяют разработать регулярные аналитические и численные методы изучения движения тела пренебрежимо малой массы в окрестностях двух других тел, имеющих конечные массы, а также позволяют построить регулярные алгоритмы численного интегрирования этих уравнений. Уравнения могут быть эффективно использованы для изучения орбитального движения небесных и космических тел и космических аппаратов, для прогноза их движения, а также для решения задач управления орбитальным движением космических аппаратов и решения задач инерциальной навигации в космосе.

Ключевые слова: регулярные кватернионные модели (уравнения траекторного движения) небесной механики и механики космического полета (астродинамики), возмущенная пространственная ограниченная задача трех тел, параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона), кватернион поворота Гамильтона, переменные Кустаанхеймо–Штифеля и Леви-Чивита, космический аппарат, неголономная, орбитальная и идеальная системы координат

DOI: 10.31857/S0572329922600591, **EDN:** QWJVMZ

1. Регуляризация уравнений возмущенной пространственной задачи трех тел. В работе [1] (Aarseth, Zare, 1974) отмечается, что история регуляризации задачи трех тел начинается со знаменитых работ Пуанкаре (Poincare [2], 1907) и Зундмана (Sundman [3], 1912). Фактически Зундман решил общую задачу в принципе, исключая случай тройного столкновения, с помощью двух преобразований времени. К сожалению, как отмечают авторы работы [1], решения представлены бесконечными рядами и не раскрывают истинного характера движений. По мнению авторов этой работы, также сомнительно, что регуляризация задачи трех тел, предложенная в [4] (Lemaitre, 1955) полезна с практической точки зрения в общем случае. Ими же отмечается, что в проблеме регуляризации общей задачи трех тел можно выделить два требования: 1) регуляризация всех столкновений двух тел с помощью одного “глобального” преобразования, 2) улучшенная обработка близких тройных столкновений. Примеры преобразований, удовлетворяющих первому требованию в плоской ограниченной задаче трех тел, приведены в работах [5] (Thiele, 1896), [6] (Burrau, 1906), [7] (Birkhoff, 1915) и [4] (Lemaitre, 1955). Вальдфогель ([8], 1972) получил глобальную регуляризацию плоской задачи трех тел с произвольными массами. Полученные им уравнения симметричны относительно отдельных точечных масс и удовлетворяют обоим приведенным выше требованиям.

В работе [9] дано обобщение регуляризации Леви-Чивита в невозмущенной плоской ограниченной задаче трех тел. Для регуляризации уравнений задачи использованы комплексные переменные Леви-Чивита и преобразование времени, содержащее произведение возведенных в кубические степени расстояний от тела пренебрежимо малой массы до двух тел притяжения, имеющих конечные массы.

Отметим, что в целях регуляризации в задаче трех тел чаще используется другое преобразование времени, содержащее произведение расстояний от тела пренебрежимо малой массы до двух тел конечной массы, и что, по словам авторов работы [1], уравнения, получаемые с помощью преобразования времени, содержащего кубы расстояний, не являются регулярными, т.к. новое время стремится к бесконечности при столкновении двух тел.

В работе [1] с использованием канонического формализма Гамильтона и двух *KS*-преобразований (преобразований Кустаанхеймо–Штифеля) предложена регуляризация уравнений возмущенной пространственной неограниченной задачи трех тел. Она позволяет одной из частиц совершать столкновения с другими двумя, относительное движение которых описываются сингулярными, но хорошо ведущими себя при численном решении уравнениями.

Приведенная в этой работе восьмимерная регуляризация общей задачи трех тел, основанная на двойной *KS*-регуляризации, обладает следующими свойствами: 1) уравнения движения являются регулярными при столкновении двух тел; 2) уравнения движения хорошо решаются для случаев, близких к тройным столкновениям.

По словам Арсеза и Заре, предложенный в их работе [1] новый метод регуляризации общей задачи трех тел нельзя использовать для изучения задачи трех тел, в которой одна из частиц не имеет массы, т.е. для изучения ограниченной задачи трех тел. В то же самое время, по их словам, новый метод близко связан со стандартной *KS*-регуляризацией, которая разрешает одной из двух частиц быть невесомой.

Отметим широко цитируемую книгу Арсеза [10], в которой, в частности, излагаются регуляризации Леви-Чивита и Кустаанхемо–Штифеля (*KS*-регуляризация) уравнений плоской и пространственной задачи двух тел, а также регуляризация Арсеза–Заре (Aarseth–Zare method) пространственной задачи трех тел и обсуждаются многие аспекты, связанные с их использованием (в том числе программные, алгоритмические и практические аспекты их использования).

В книге Бордовицыной [11] (с. 34–35) двойное *KS*-преобразование предлагается использовать (со ссылкой на работу [1]) для построения канонических уравнений возмущенной ограниченной задачи трех тел. Выписывается регуляризованный (преобразованный по методологии Арсеза и Заре) гамильтониан задачи и уравнения в общей стандартной гамильтоной форме, имеющие порядок, равный восемнадцати. Отмечается, что в состав этих дифференциальных уравнений входят уравнения, определяющие временное преобразование и закон изменения энергии системы. Правые части дифференциальных уравнений задачи в работе [11] в явной форме не выписаны, т.е. не выписаны в форме, получающейся после выполнения операций дифференцирования гамильтониана по переменным задачи (как, впрочем, такие уравнения не выписаны и в работе [1]). Это не позволяет оценить полностью, какими свойствами будут обладать уравнения, полученные указанным в работе [11] способом.

Вместе с тем, как отмечается в [1], устранение особенности в гамильтониане не обязательно влечет за собой исключение сингулярных слагаемых из уравнений движения. По словам авторов [1] неограниченная и ограниченная задачи трех тел имеют существенное различие. Если в невозмущенной неограниченной задаче трех тел существует интеграл энергии, то в невозмущенной ограниченной задаче трех тел такого интеграла не существует, что затрудняет построение удобных регулярных уравнений этой задачи.

В работах Челнокова [12–14] разработан кватернионный метод регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел с использованием переменных Кустаанхеймо–Штифеля, методологически тесно связанный с кватернионным методом регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, предложенным автором настоящей работы в [15, 16] (см. также [17, 18]). Получены различные локальные и глобальные регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел (как круговой, так и некруговой задачи), т.е. уравнения, регулярные в окрестности первого или второго тела конечной массы, и уравнения, регулярные одновременно как в окрестности первого, так и в окрестности второго тел, имеющих конечные массы. Уравнения представляют собой системы нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений десятого или одиннадцатого, или девятнадцатого порядков относительно переменных Кустаанхеймо–Штифеля, их первых производных, кеплеровских или полных энергий, или переменных, являющихся постоянными интегрирования Якоби в случае невозмущенной пространственной круговой ограниченной задачи трех тел, а также относительно времени и вспомогательной временной переменной. Полученные уравнения позволяют построить различые регулярные алгоритмы интегрирования дифференциальных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. Настоящая работа является развитием этих работ.

2. Регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, построенные с использованием кватернионов

ориентации двух неголономных (азимутально свободных) систем координат и переменных Кустаанхеймо–Штифеля. Эти регулярные уравнения могут быть получены из дифференциальных уравнений (5.4)–(5.9) [19] возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, записанных (с использованием параметров Родрига–Гамильтона (Эйлера)) в неголономных (азимутально свободных) сопровождающих системах координат $M_i'X_i'Y_i'Z_i'$ $(i = 0, 1)$ и имеющих вид

$$\begin{gathered}\ddot{r}_0 - r_0^{-3}(c_{02}^2 + c_{03}^2) + fm_0r_0^{-2} = -fm_1r_0r_{01}^{-3} + fm_1(r_{01}^{-3} - r_1^{-3})x_1' + p_1' \\ = -fm_1r_0r_1^{-3} + fm_1(r_1^{-3} - r_{01}^{-3})x_{01}' + p_1' \\ c_{01} = 0\end{gathered} \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered}\dot{c}_{02} = -fm_1(r_{01}^{-3} - r_1^{-3})r_0z_1' - r_0p_3' = -fm_1(r_1^{-3} - r_{01}^{-3})r_0z_{01}' - r_0p_3' \\ \dot{c}_{03} = fm_1(r_{01}^{-3} - r_1^{-3})r_0y_1' + r_0p_2' = fm_1(r_1^{-3} - r_{01}^{-3})r_0y_{01}' + r_0p_2'\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered}2d\boldsymbol{\lambda}_0/dt = r_0^{-2}\boldsymbol{\lambda}_0 \circ \mathbf{C}_0 \\ \boldsymbol{\lambda}_0 = \lambda_{00} + \lambda_{01}\mathbf{i} + \lambda_{02}\mathbf{j} + \lambda_{03}\mathbf{k}, \quad \mathbf{C}_0 = c_{02}\mathbf{j} + c_{03}\mathbf{k}\end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered}\ddot{r}_1 - r_1^{-3}(c_{12}^2 + c_{13}^2) + fm_1r_1^{-2} = -fm_0r_1r_{01}^{-3} + fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})x_0'' + p_1'' = \\ = -fm_0r_1r_0^{-3} + fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})x_{01}'' + p_1'' \\ c_{11} = 0\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered}\dot{c}_{12} = -fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})r_1z_0'' - r_1p_3'' = -fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})r_1z_{01}'' - r_1p_3'' \\ \dot{c}_{13} = -fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})r_1y_0'' + r_1p_2'' = fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})r_1y_{01}'' + r_1p_2''\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered}2d\boldsymbol{\lambda}_1/dt = r_0^{-2}\boldsymbol{\lambda}_1 \circ \mathbf{C}_1 \\ \boldsymbol{\lambda}_1 = \lambda_{10} + \lambda_{11}\mathbf{i} + \lambda_{12}\mathbf{j} + \lambda_{13}\mathbf{k}, \quad \mathbf{C}_1 = c_{12}\mathbf{j} + c_{13}\mathbf{k}\end{gathered} \tag{2.6}$$

В уравнениях возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел (2.1)–(2.3) и (2.4)–(2.6) f – гравитационная постоянная, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – векторные мнимые единицы Гамильтона; в качестве переменных выступают расстояния r_0 и r_1 от точки M, имеющей пренебрежимо малую массу, до точек M_0 и M_1, имеющих массы m_0 и m_1; производные от них $\dot{r}_0$ и $\dot{r}_1$ по времени t (проекции векторов скоростей $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}_1$ точки M в системах координат $M_0X_0Y_0Z_0$ и $M_1X_1Y_1Z_1$ соответственно на направления радиус-векторов $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_1$); проекции c_{02}, c_{03} и c_{12}, c_{13} векторов $\mathbf{c}_0$ и $\mathbf{c}_1$ моментов скоростей $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}_1$ точки M в системах координат $M_0X_0Y_0Z_0$ и $M_1X_1Y_1Z_1$ относительно точек M_0 и M_1 на оси вращающихся систем координат $M_0'X_0'Y_0'Z_0'$ и $M_1'X_1'Y_1'Z_1'$ соответственно и параметры Родрига–Гамильтона (Эйлера) λ_{0j} и λ_{1j} $(j = 0, 1, 2, 3)$ (компоненты кватернионов $\boldsymbol{\lambda}_0$ и $\boldsymbol{\lambda}_1$), характеризующие ориентации систем координат $M_0'X_0'Y_0'Z_0'$ и $M_1'X_1'Y_1'Z_1'$ в инерциальной системе координат $O\xi\eta\zeta$.

Начала систем координат $M_0X_0Y_0Z_0$ и $M_1X_1Y_1Z_1$ находятся в точках M_0 и M_1, а их координатные оси параллельны одноименным осям инерциальной системы координат $O\xi\eta\zeta$. Радиус-векторы $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_1$ точки M проводятся из точек M_0 и M_1 соответственно. Система координат $M_i'X_i'Y_i'Z_i'$ $(i = 0, 1)$ вводится следующим образом: ее ось $M_i'X_i'$ направляется вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}_i$, произвольно задаваемая проекцию ω_{i1} вектора ее абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_i$ на направление радиус-вектора $\mathbf{r}_i$ (ось $M_i'X_i'$) полагается равной нулю. Система координат $M_i'X_i'Y_i'Z_i'$ вращается с абсолютной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_i$, коллинеарной вектору момента скорости $\mathbf{c}_i$: $\boldsymbol{\omega}_i = r_i^{-2}\mathbf{c}_i$, $i = 0, 1$.

Величины x_1', y_1', z_1', x_{01}', y_{01}', z_{01}' и p_1', p_2', p_3' в уравнениях (2.1)–(2.3) являются проекциями радиус-векторов $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_{01} = \overrightarrow{M_0M_1}$ и вектора $\mathbf{p}$ возмущающего ускорения точки M на оси вращающейся системы координат $M_0'X_0'Y_0'Z_0'$, а величины x_0'', y_0'', z_0''; x_{01}'', y_{01}'', z_{01}'' и p_1'', p_2'', p_3'' – проекциями радиус-векторов $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_{01}$ и вектора ускорения $\mathbf{p}$ на оси вращающейся системы координат $M_1'X_1'Y_1'Z_1'$.

В дальнейшем будут также использованы следующие обозначения: x_i, y_i, z_i ($i = 0, 1$) – декартовые координаты точки M в системе координат $M_iX_iY_iZ_i$; x_{01}, y_{01}, z_{01} – проекции вектора $\mathbf{r}_{01} = \overrightarrow{M_0M_1}$ на оси системы координат $M_0X_0Y_0Z_0$ (координаты точки M_1 в системе координат $M_0X_0Y_0Z_0$); $x_{10} = -x_{01}$, $y_{10} = -y_{01}$, $z_{10} = -z_{01}$ – проекции вектора $\mathbf{r}_{10} = -\mathbf{r}_{01}$ на оси системы координат $M_1X_1Y_1Z_1$ (координаты точки M_0 в системе координат $M_1X_1Y_1Z_1$); $v_{i1} = \dot{x}_i$, $v_{i2} = \dot{y}_i$, $v_{i3} = \dot{z}_i$ ($i = 0, 1$) – проекции вектора скорости $\mathbf{v}_i$ точки M в системе координат $M_iX_iY_iZ_i$ на ее же координатные оси, совпадающие с их проекциями на оси инерциальной системы координат $O\xi\eta\zeta$ (верхняя точка – символ дифференцирования по времени t); $v_0 = |\mathbf{v}_0|$, $\mathbf{v}_0 = d\mathbf{r}_0/dt$; $v_1 = |\mathbf{v}_1|$, $\mathbf{v}_1 = d\mathbf{r}_1/dt$; $p_1 = p_x$, $p_2 = p_y$, $p_3 = p_z$ – проекции вектора $\mathbf{p}$ возмущающего ускорения точки M на оси системы координат $M_0X_0Y_0Z_0$, совпадающие с его проекциями на оси системы координат $M_1X_1Y_1Z_1$ и равные его проекциям на оси инерциальной системы координат; центральная точка – символ скалярного произведения векторов; центральный кружок "$\circ$" – символ кватернионного произведения.

Перейдем в кватернионных уравнениях (2.3) и (2.6) от параметров Родрига–Гамильтона λ_{ij} ($i = 0, 1$; $j = 0, 1, 2, 3$) к переменным Кустаанхеймо–Штифеля u_{ij} [20] по формулам [15, 16, 18]

$$\lambda_{i0} = r_i^{-1/2}u_{i0}, \quad \lambda_{ik} = -r_i^{-1/2}u_{ik}, \quad i = 0,1; \quad j = 0,1,2,3 \tag{2.7}$$

В кватернионной записи формулы (2.7) имеют вид:

$$\begin{gathered}\bar{\boldsymbol{\lambda}}_i = r_i^{-1/2}\mathbf{u}_i, \quad i = 0,1\\ \bar{\boldsymbol{\lambda}}_i = \lambda_{i0} - \lambda_{i1}\mathbf{i} - \lambda_{i2}\mathbf{j} - \lambda_{i3}\mathbf{k}, \quad \mathbf{u}_i = u_{i0} + u_{i1}\mathbf{i} + u_{i2}\mathbf{j} + u_{i3}\mathbf{k}\end{gathered} \tag{2.8}$$

Подставляя соотношения (2.8) в уравнения (2.3) и (2.6), получим:

$$2\dot{\mathbf{u}}_i = r_i^{-1}(\dot{r}_i - r_i^{-1}\mathbf{C}_i) \circ \mathbf{u}_i, \quad i = 0,1 \tag{2.9}$$

Дифференцируя левые и правые части уравнений (2.9) по времени t, после преобразований, использующих исходные уравнения (2.9), получим

$$2\ddot{\mathbf{u}}_i + 2r_i^{-1}\dot{r}_i\dot{\mathbf{u}}_i - r_i^{-1}\left(\ddot{r}_i + \frac{1}{2}r_i^{-1}\dot{r}_i^2 - \frac{1}{2}r_i^{-3}c_i^2\right)\mathbf{u}_i = -r_i^{-2}\dot{\mathbf{C}}_i \circ \mathbf{u}_i, \quad i = 0,1 \tag{2.10}$$

где $c_i^2 = c_{i2}^2 + c_{i3}^2$.

Перейдем в первых двух слагаемых левых частей уравнений (2.10) от независимой переменной t к новой независимой переменной τ_i по формулам

$$dt = r_i d\tau_i, \quad \frac{d^2}{dt^2} = r_i^{-2}\frac{d^2}{d\tau_i^2} - r_i^{-3}\frac{dr_i}{d\tau_i}\frac{d}{d\tau_i} \tag{2.11}$$

Получим

$$2\frac{d^2\mathbf{u}_i}{d\tau_i^2} - r_i\left(\ddot{r}_i + \frac{1}{2}r_i^{-1}\dot{r}_i^2 - \frac{1}{2}r_i^{-3}c_i^2\right)\mathbf{u}_i = -\dot{\mathbf{C}}_i \circ \mathbf{u}_i, \quad i = 0,1 \tag{2.12}$$

Видно, что при таком переходе исчезают слагаемые уравнений (2.10), содержащие первые производные $\dot{\mathbf{u}}_i$ от кватернионной переменной $\mathbf{u}_i$; множитель r_i^{-1}, стоящий перед круглой скобкой в левых частях уравнений (2.10), переходит в множитель r_i, а множитель r_i^{-2}, стоящий в правых частях этих уравнений, переходит в 1.

Подставим в уравнения (2.12) выражения для производных $\ddot{r}_i$, вытекающие из уравнений (2.1), (2.4), и для производных $\dot{\mathbf{C}}_i$, вытекающие из уравнений (5.12), (5.13) [19]:

$$\dot{\mathbf{C}}_0 = fm_1(r_1^{-3} - r_{01}^{-3})r_0(-z'_{01}\mathbf{j} + y'_{01}\mathbf{k}) + r_0(-p'_3\mathbf{j} + p'_2\mathbf{k})$$

$$\dot{\mathbf{C}}_1 = fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})r_1(-z''_{01}\mathbf{j} + y''_{01}\mathbf{k}) + r_1(-p''_3\mathbf{j} + p''_2\mathbf{k})$$

Получим уравнения

$$2\frac{d^2\mathbf{u}_0}{d\tau_0^2} - \left(\frac{1}{2}\dot{r}_0^2 + \frac{1}{2}r_0^{-2}c_0^2 - fm_0r_0^{-1}\right)\mathbf{u}_0 =$$
$$= r_0[-fm_1r_0r_1^{-3} + fm_1(r_1^{-3} - r_{01}^{-3})(x'_{01} + z'_{01}\mathbf{j} - y'_{01}\mathbf{k}) + (p'_1 + p'_3\mathbf{j} - p'_2\mathbf{k})] \circ \mathbf{u}_0 \tag{2.13}$$

$$2\frac{d^2\mathbf{u}_1}{d\tau_1^2} - \left(\frac{1}{2}\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}r_1^{-2}c_1^2 - fm_1r_1^{-1}\right)\mathbf{u}_1 =$$
$$= r_1[-fm_0r_1r_0^{-3} + fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})(x''_{01} + z''_{01}\mathbf{j} - y''_{01}\mathbf{k}) + (p''_1 + p''_3\mathbf{j} - p''_2\mathbf{k})] \circ \mathbf{u}_1 \tag{2.14}$$

Введем обозначения (кеплеровские энергии)

$$h_i^* = \frac{1}{2}\dot{r}_i^2 + \frac{1}{2}r_i^{-2}c_i^2 - fm_ir_i^{-1} = \frac{1}{2}v_i^2 - fm_ir_i^{-1}, \quad i = 0,1 \tag{2.15}$$

Кроме того, учтем, что

$$x'_{01} + z'_{01}\mathbf{j} - y'_{01}\mathbf{k} = -\mathbf{i} \circ (x'_{01}\mathbf{i} + y'_{01}\mathbf{j} + z'_{01}\mathbf{k}) = -\mathbf{i} \circ \mathbf{R}'_{01}, \quad \mathbf{R}'_{01} \circ \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0 \circ \mathbf{R}_{01}$$

$$x''_{01} + z''_{01}\mathbf{j} - y''_{01}\mathbf{k} = -\mathbf{i} \circ (x''_{01}\mathbf{i} + y''_{01}\mathbf{j} + z''_{01}\mathbf{k}) = -\mathbf{i} \circ \mathbf{R}''_{01}, \quad \mathbf{R}''_{01} \circ \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1 \circ \mathbf{R}_{01}$$

$$p'_1 + p'_3\mathbf{j} - p'_2\mathbf{k} = -\mathbf{i} \circ (p'_1\mathbf{i} + p'_2\mathbf{j} + p'_3\mathbf{k}) = -\mathbf{i} \circ \mathbf{P}', \quad \mathbf{P}' \circ \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1 \circ \mathbf{P}$$

$$p''_1 + p''_3\mathbf{j} - p''_2\mathbf{k} = -\mathbf{i} \circ (p''_1\mathbf{i} + p''_2\mathbf{j} + p''_3\mathbf{k}) = -\mathbf{i} \circ \mathbf{P}'', \quad \mathbf{P}'' \circ \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0 \circ \mathbf{P}$$

$$\mathbf{R}'_{01} = x'_{01}\mathbf{i} + y'_{01}\mathbf{j} + z'_{01}\mathbf{k}, \quad \mathbf{R}''_{01} = x''_{01}\mathbf{i} + y''_{01}\mathbf{j} + z''_{01}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{P}' = p'_1\mathbf{i} + p'_2\mathbf{j} + p'_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{P}'' = p''_1\mathbf{i} + p''_2\mathbf{j} + p''_3\mathbf{k}$$

Тогда уравнения (2.13) и (2.14) примут вид

$$\frac{d^2\mathbf{u}_0}{d\tau_0^2} - \frac{1}{2}h_0^*\mathbf{u}_0 = -\frac{1}{2}r_0\{fm_1r_0r_1^{-3}\mathbf{u}_0 + \mathbf{i} \circ \mathbf{u}_0 \circ [fm_1(r_1^{-3} - r_{01}^{-3})\mathbf{R}_{01} + \mathbf{P}]\} \tag{2.16}$$

$$\frac{d^2\mathbf{u}_1}{d\tau_1^2} - \frac{1}{2}h_1^*\mathbf{u}_1 = -\frac{1}{2}r_1\{fm_0r_1r_0^{-3}\mathbf{u}_1 + \mathbf{i} \circ \mathbf{u}_1 \circ [fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})\mathbf{R}_{01} + \mathbf{P}]\} \tag{2.17}$$

где кватернионы $\mathbf{R}_{01}$ и $\mathbf{P}$ определены соотношениями

$$\mathbf{R}_{01} = x_{01}\mathbf{i} + y_{01}\mathbf{j} + z_{01}\mathbf{k}, \quad \mathbf{P} = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k} \tag{2.18}$$

Фигурирующие в уравнениях (2.16) и (2.17) кеплеровские энергии h_0^* и h_1^*, определенные соотношениями (2.15), связаны с полными энергиями h_0 и h_1 движения точки M в системах координат $M_0X_0Y_0Z_0$ и $M_1X_1Y_1Z_1$ соотношениями

$$h_0^* = h_0 + (fm_1)/r_1 = (1/2)v_0^2 - (fm_0)/r_0, \quad h_1^* = h_1 + (fm_0)/r_0 = (1/2)v_1^2 - (fm_1)/r_1 \qquad (2.19)$$

Отметим, что для движений точки M, для которых расстояния r_0 и r_1 равны, уравнения (2.16) и (2.17) упрощаются и принимают вид

$$\frac{d^2\mathbf{u}_0}{d\tau_0^2} - \frac{1}{2}h_0\mathbf{u}_0 = -\frac{1}{2}r_0\mathbf{i} \circ \mathbf{u}_0 \circ [fm_1(r_1^{-3} - r_{01}^{-3})\mathbf{R}_{01} + \mathbf{P}]$$

$$\frac{d^2\mathbf{u}_1}{d\tau_1^2} - \frac{1}{2}h_1\mathbf{u}_1 = -\frac{1}{2}r_1\mathbf{i} \circ \mathbf{u}_1 \circ [fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})\mathbf{R}_{01} + \mathbf{P}]$$

В этих уравнениях содержатся полные энергии h_0 и h_1. Они выделяются в качестве скалярных множителей перед кватернионными регулярными переменными $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{u}_1$. Различные формы дифференциальных уравнений для энергий h_0 и h_1 получены нами в статье [13].

Будем рассматривать величины h_0^* и h_1^* в качестве дополнительных переменных. Используя соотношения (2.19) и дифференциальные уравнения (3.2) и (3.3) [19], можно показать, что эти переменные удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dh_0^*/dt = -fm_1r_1^{-3}(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r}_0) + fm_1(r_1^{-3} - r_{01}^{-3})(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r}_{01}) + \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{p} \qquad (2.20)$$

$$dh_1^*/dt = -fm_0r_0^{-3}(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r}_1) + fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r}_{01}) + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{p} \qquad (2.21)$$

где $\mathbf{v}_0 = d\mathbf{r}_0/dt$ и $\mathbf{v}_1 = d\mathbf{r}_1/dt$ – векторы скоростей движения точки M в системах координат $M_0X_0Y_0Z_0$ и $M_1X_1Y_1Z_1$ соответственно.

Отметим, что присутствующие в уравнениях (2.20) и (2.21) скалярные произведения $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{r}_i = r_i\dot{r}_i$.

Переходя в уравнениях (2.20) и (2.21) к новым независимым переменным τ_0 и τ_1 в соответствии с (2.11), получим уравнения

$$\frac{dh_0^*}{d\tau_0} = -fm_1r_1^{-3}r_0\frac{dr_0}{d\tau_0} + fm_1(r_1^{-3} - r_{01}^{-3})\left(\frac{d\mathbf{r}_0}{d\tau_0} \cdot \mathbf{r}_{01}\right) + \frac{d\mathbf{r}_0}{d\tau_0} \cdot \mathbf{p} \qquad (2.22)$$

$$\frac{dh_1^*}{d\tau_1} = -fm_0r_0^{-3}r_1\frac{dr_1}{d\tau_1} + fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})\left(\frac{d\mathbf{r}_1}{d\tau_1} \cdot \mathbf{r}_{01}\right) + \frac{d\mathbf{r}_1}{d\tau_1} \cdot \mathbf{p} \qquad (2.23)$$

В уравнениях (2.16), (2.17) и (2.22), (2.23)

$$r_i = u_{i0}^2 + u_{i1}^2 + u_{i2}^2 + u_{i3}^2, \quad r_{01}^2 = x_{01}^2 + y_{01}^2 + z_{01}^2$$

$$dr_i/d\tau_i = 2[u_{i0}(du_{i0}/d\tau_i) + u_{i1}(du_{i1}/d\tau_i) + u_{i2}(du_{i2}/d\tau_i) + u_{i3}(du_{i3}/d\tau_i)]$$

$$(d\mathbf{r}_i/d\tau_i) \cdot \mathbf{r}_{01} = \qquad (2.24)$$

$$= 2x_{01}[u_{i0}(du_{i0}/d\tau_i) + u_{i1}(du_{i1}/d\tau_i) - u_{i2}(du_{i2}/d\tau_i) - u_{i3}(du_{i3}/d\tau_i)] +$$

$$+2y_{01}[u_{i2}(du_{i1}/d\tau_i) + u_{i1}(du_{i2}/d\tau_i) - u_{i3}(du_{i0}/d\tau_i) - u_{i0}(du_{i3}/d\tau_i)] +$$

$$+2z_{01}[u_{i3}(du_{i1}/d\tau_i) + u_{i1}(du_{i3}/d\tau_i) + u_{i2}(du_{i0}/d\tau_i) + u_{i0}(du_{i2}/d\tau_i)], \quad i = 0,1$$

Скалярное произведение $(d\mathbf{r}_i/d\tau_i)\cdot\mathbf{p}$ имеет вид третьего из соотношений (2.24), в котором вместо x_{01}, y_{01}, z_{01} нужно взять p_1, p_2, p_3 соответственно.

Дифференциальные уравнения (2.16), (2.22), дополненные дифференциальными уравнениями

$$dt/d\tau_0 = r_0, \quad d\tau_1/d\tau_0 = r_0 r_1^{-1} \tag{2.25}$$

и соотношениями

$$r_0 = u_{00}^2 + u_{01}^2 + u_{02}^2 + u_{03}^2, \quad r_1^2 = (x_{01}-x_0)^2 + (y_{01}-y_0)^2 + (z_{01}-z_0)^2 \tag{2.26}$$

где

$$x_0 = u_{00}^2 + u_{01}^2 - u_{02}^2 - u_{03}^2, \quad y_0 = 2(u_{01}u_{02} - u_{00}u_{03}), \quad z_0 = 2(u_{01}u_{03} + u_{00}u_{02}) \tag{2.27}$$

образуют в совокупности дифференциальные уравнения движения точки M, регулярные в окрестности точки M_0. Они представляют собой систему нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений одиннадцатого порядка относительно переменных Кустаанхеймо–Штифеля u_{0j} ($j = 0, 1, 2, 3$), их первых производных $du_{0j}/d\tau_0$, энергетической переменной h_0^*, времени t и переменной τ_1.

Дифференциальные уравнения (2.17), (2.23), дополненные дифференциальными уравнениями

$$dt/d\tau_1 = r_1, \quad d\tau_0/d\tau_1 = r_1 r_0^{-1} \tag{2.28}$$

и соотношениями

$$r_1 = u_{10}^2 + u_{11}^2 + u_{12}^2 + u_{13}^2, \quad r_0^2 = (x_{01}-x_1)^2 + (y_{01}-y_1)^2 + (z_{01}-z_1)^2 \tag{2.29}$$

где

$$x_1 = u_{10}^2 + u_{11}^2 - u_{12}^2 - u_{13}^2, \quad y_1 = 2(u_{11}u_{12} - u_{10}u_{13}), \quad z_1 = 2(u_{11}u_{13} + u_{10}u_{12}) \tag{2.30}$$

образуют в совокупности дифференциальные уравнения движения точки M, регулярные в окрестности точки M_1. Они представляют собой систему нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений одиннадцатого порядка относительно переменных Кустаанхеймо–Штифеля u_{1j} ($j = 0, 1, 2, 3$), их первых производных $du_{1j}/d\tau_1$, энергетической переменной h_1^*, времени t и переменной τ_0.

Указанные регулярные дифференциальные уравнения возмущенного движения точки M (регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел) впервые были получены автором статьи в работе [13]. Другой их вывод приводится в его работе [14].

Полученные совокупности дифференциальных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел позволяют разработать регулярные аналитические и численные методы изучения движения тела пренебрежимо малой массы в окрестностях двух других тел, имеющих конечные массы, а также позволяют построить регулярный алгоритм интегрирования этих уравнений, в котором уравнения (2.16), (2.22), (2.25)–(2.27) этой задачи, дополненные соотношениями (2.24) (при $i = 0$), используются при изучении движения точки M в окрестности точки M_0 (когда расстояния r_0 и r_1 удовлетворяют неравенству $m_1 r_0^2 \le m_0 r_1^2$), а уравнения (2.17), (2.23), (2.28)–(2.30) этой задачи, дополненные соотношениями (2.24) (при $i = 1$), используются при изучении движения точки M в окрестности точки M_1 (когда расстояния r_1 и r_0 удовлетворяют неравенству $m_0 r_1^2 < m_1 r_0^2$).

Описанный алгоритм интегрирования построенных регулярных уравнений ограниченной задачи трех тел предполагает, что проекции x_{01}, y_{01}, z_{01} вектора $\mathbf{r}_{01}$ на оси инерциальной системы координат (координаты точки M_1 в системе координат $M_0X_0Y_0Z_0$), входящие в этот алгоритм, являются известными функциями времени t. Это имеет место, в частности, для ограниченной круговой задачи трех тел. В общем случае для нахождения проекций x_{01}, y_{01}, z_{01} в состав систем дифференциальных уравнений (2.16), (2.22) и (2.17), (2.23) необходимо дополнительно включить векторное дифференциальное уравнение (2.5) [19]:

$$d^2\mathbf{r}_{01}/dt^2 = -(f(m_0 + m_1)/r_{01}^3)\mathbf{r}_{01}$$

предварительно осуществив в нем переход к новой независимой переменной τ_0 или τ_1 по формулам (2.11).

Радиус-вектор $\mathbf{r}_i$, характеризующий положение точки M в системе координат $M_iX_iY_iZ_i$, его модуль и вектор скорости $\mathbf{v}_i$ движения точки M в этой системе координат находятся через переменные $\mathbf{u}_i$ и $d\mathbf{u}_i/d\tau_i$ в соответствии с кватернионными формулами [16] (см. также [18]):

$$\mathbf{R}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}}_i \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}_i, \quad r_i = \mathbf{u}_i \circ \bar{\mathbf{u}}_i = u_{i0}^2 + u_{i1}^2 + u_{i2}^2 + u_{i3}^2, \quad i = 0,1$$

$$\mathbf{V}_i = v_{i1}\mathbf{i} + v_{i2}\mathbf{j} + v_{i3}\mathbf{k} = \dot{\mathbf{R}}_i = \dot{x}_i\mathbf{i} + \dot{y}_i\mathbf{j} + \dot{z}_i\mathbf{k} = 2\bar{\mathbf{u}}_i \circ \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = 2r_i^{-1}\bar{\mathbf{u}}_i \circ \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{u}_i}{d\tau_i} \quad (i = 0,1)$$

При $m_1 = 0$ из уравнений (2.16), (2.20) и первого из уравнений (2.25) получаются регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел M и M_0, одно из которых M имеет пренебрежимо малую массу. Соответственно, при $m_0 = 0$ из уравнений (2.17), (2.23) и первого из уравнений (2.28) получаются регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел M и M_1, одно из которых M имеет пренебрежимо малую массу. Эти уравнения совпадают с известными регулярными кватернионными уравнениями возмущенной пространственной задачи двух тел, предложенными ранее автором статьи [16], если под величиной "m_0" или "m_1", фигурирующей в этих уравнениях, понимать сумму "m" масс тел M и M_0 или M и M_1. Эти уравнения имеют вид

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h^*\mathbf{u} = -\frac{1}{2}r\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{P}$$

$$\frac{dh^*}{d\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \cdot \mathbf{p} = -2\operatorname{scal}\left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{P}\right) =$$

$$= 2p_1\left[u_0\left(du_0/d\tau\right) + u_1\left(du_1/d\tau\right) - u_2\left(du_2/d\tau\right) - u_3\left(du_3/d\tau\right)\right] +$$

$$+ 2p_2\left[u_2\left(du_1/d\tau\right) + u_1\left(du_2/d\tau\right) - u_3\left(du_0/d\tau\right) - u_0\left(du_3/d\tau\right)\right] +$$

$$+ 2p_3\left[u_3\left(du_1/d\tau\right) + u_1\left(du_3/d\tau\right) + u_2\left(du_0/d\tau\right) + u_0\left(du_2/d\tau\right)\right]$$

$$\frac{dt}{d\tau} = t = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

где $h^* = (1/2)v^2 - (fm)/r$ – кеплеровская энергия движения тела M, $\mathbf{P} = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}$.

Радиус-вектор $\mathbf{r}$ (характеризующий положение тела M в системе координат $MXYZ$, начало которой находится в точке M_0 или M_1, а координатные оси параллельны одноименным осям инерциальной системы координат $O\xi\eta\zeta$), его модуль и вектор скорости $\mathbf{v}$ движения тела M в этой системе координат находятся через регулярные кватернионные переменные $\mathbf{u}$ и $d\mathbf{u}/d\tau$ в соответствии с кватернионными формулами:

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}, \quad t = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

$$\mathbf{V} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} = \dot{\mathbf{R}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} = 2\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{2}{r}\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{u}}{d\tau}$$

Логиновым и автором статьи [21] проведено сравнительное исследование точности численного интегрирования классических ньютоновских дифференциальных уравнений пространственной ограниченной задачи трех тел (Земля, Луна и космический аппарат (КА)) в декартовых координатах и построенных нами регулярных кватернионных дифференциальных уравнений этой задачи в четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля, имеющих вид регулярных кватернионных уравнений (2.16), (2.22), (2.25)–(2.27), дополненных соотношениями (2.24) (при $i = 0$).

Регулярные кватернионные уравнения в переменных Кустаанхеймо–Штифеля показали значительно более высокую точность в сравнении с уравнениями в декартовых координатах: для круговой орбиты точность оказалась выше на 2 порядка, для возмущенных эллиптических орбит со средним эксцентриситетом – на 4 порядка, для возмущенной эллиптической орбиты с высоким эксцентриситетом – на 7 порядков. Отметим, что в книге Бордовицыной [11] приведены результаты численных исследований решений уравнений невозмущенной и возмущенной пространственной задачи двух тел (решений уравнений невозмущенного и возмущенного движения ИСЗ) ряда авторов с использованием известных канонических уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля и уравнений в декартовых координатах, демонстрирующие преимущество уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля перед уравненими в декартовых координатах (в смысле точности их численного интегрирования). Сравнение этих результатов с нашими показало, что они в целом согласуются между собой (параметры возмущенных эллиптических орбит КА были взяты нами из книги [11]).

Полученные нами результаты подтверждают значительные преимущества регулярных кватернионных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля в задачах прогноза движения небесных и космических тел, а также в задачах коррекции параметров орбитального движения КА и инерциальной навигации в космосе в сравнении с классическими уравнениями движения в декартовых координатах.

3. Регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, построенные с использованием кватернионов ориентации двух орбитальных систем координат. Эти регулярные уравнения могут быть получены из дифференциальных уравнений (6.5)–(6.10), (6.13) [19] возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, записанных (с использованием параметров Родрига–Гамильтона (Эйлера)) в орбитальных системах координат $M_i'X_i'Y_i'Z_i'$ ($i = 0, 1$) и имеющих вид

$$\ddot{r}_0 - c_0^2 r_0^{-3} + fm_0 r_0^{-2} = -fm_1 r_0 r_1^{-3} + fm_1(r_1^{-3} - r_{01}^{-3})x_{01}' + p_1' \tag{3.1}$$

$$\dot{c}_0 = fm_1 r_0(r_1^{-3} - r_{01}^{-3})y_{01}' + r_0 p_2' \tag{3.2}$$

$$\ddot{r}_1 - c_1^2 r_1^{-3} + fm_1 r_1^{-2} = -fm_0 r_1 r_0^{-3} + fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})x_{01}'' + p_1'' \tag{3.3}$$

$$\dot{c}_1 = fm_0 r_1(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})y_{01}'' + r_1 p_2'' \tag{3.4}$$

$$2d\boldsymbol{\lambda}_i/dt = \boldsymbol{\lambda}_i \circ \boldsymbol{\Omega}_i, \quad i = 0,1 \tag{3.5}$$

где

$$\boldsymbol{\lambda}_i = \lambda_{i0} + \lambda_{i1}\mathbf{i} + \lambda_{i2}\mathbf{j} + \lambda_{i3}\mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\Omega}_i = \omega_{i1}\mathbf{i} + \omega_{i3}\mathbf{k} = \omega_{i1}\mathbf{i} + (c_i/r_i^2)\mathbf{k} \tag{3.6}$$

$$\omega_{01} = r_0 c_0^{-1}[fm_1(r_1^{-3} - r_{01}^{-3})z_{01}' + p_3'] \tag{3.7}$$

$$\omega_{11} = r_1 c_1^{-1}[fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})z''_{01} + p''_3] \tag{3.8}$$

$$\omega_{i2} = 0, \quad \omega_{i3} = c_i/r_i^2, \quad i = 0,1 \tag{3.9}$$

(3.5) – кватернионное кинематическое уравнение, описывающее вращательное движение орбитальной системы координат $M'_i X'_i Y'_i Z'_i$ в инерциальной системе координат $O\xi\eta\zeta$ в параметрах Эйлера, проекции ω_{i1} вектора угловой скорости которой для $i = 0$ описываются соотношениями (3.7), (3.9), а для $i = 1$ – соотношениями (3.8), (3.9).

В уравнениях возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел (3.1), (3.2), (3.5)–(3.7), (3.9) (при $i = 0$) и (3.3)–(3.6), (3.8), (3.9) (при $i = 1$), записанных в орбитальных системах координат $M'_0 X'_0 Y'_0 Z'_0$ и $M'_1 X'_1 Y'_1 Z'_1$ соответственно, в качестве переменных выступают расстояния r_0 и r_1 от точки M до точек M_0 и M_1, модули c_0 и c_1 векторов $\mathbf{c}_0$ и $\mathbf{c}_1$ моментов скоростей $\mathbf{v}_0 = d\mathbf{r}_0/dt$ и $\mathbf{v}_1 = d\mathbf{r}_1/dt$ точки M в системах координат $M_0 X_0 Y_0 Z_0$ и $M_1 X_1 Y_1 Z_1$ относительно точек M_0 и M_1 и параметры Родрига–Гамильтона (Эйлера) λ_{0j} и λ_{1j} ($j = 0, 1, 2, 3$) (компоненты кватернионов $\boldsymbol{\lambda}_0$ и $\boldsymbol{\lambda}_1$), характеризующие ориентации орбитальных систем координат в инерциальной системе координат $O\xi\eta\zeta$.

Декартовые координаты x_0, y_0, z_0 и x_1, y_1, z_1 точки M в системах координат $M_0 X_0 Y_0 Z_0$ и $M_1 X_1 Y_1 Z_1$ находятся через указанные переменные по формулам (4.7) или (4.8) [19]:

$$x_i = r_i(\lambda_{i0}^2 + \lambda_{i1}^2 - \lambda_{i2}^2 - \lambda_{i3}^2), \quad y_i = 2r_i(\lambda_{i1}\lambda_{i2} + \lambda_{i0}\lambda_{i3}), \quad z_i = 2r_i(\lambda_{i1}\lambda_{i3} - \lambda_{i0}\lambda_{i2}), \quad i = 0,1$$

$$\mathbf{R}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k} = r_i\boldsymbol{\lambda}_i \circ \mathbf{i} \circ \overline{\boldsymbol{\lambda}}_i, \quad i = 0,1$$

а проекции v'_{0k} и v'_{1k} векторов скоростей $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}_1$ точки M в системах координат $M_0 X_0 Y_0 Z_0$ и $M_1 X_1 Y_1 Z_1$ на оси систем координат $M'_0 X'_0 Y'_0 Z'_0$ и $M'_1 X'_1 Y'_1 Z'_1$ соответственно находятся по формулам (6.3) [19]:

$$v'_{i1} = \dot{r}_i, \quad v'_{i2} = c_i/r_i, \quad v'_{i3} = 0, \quad i = 0,1$$

Проекции v_{0k} и v_{1k} векторов скоростей $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}_1$ точки M на оси систем координат $M_0 X_0 Y_0 Z_0$ и $M_1 X_1 Y_1 Z_1$ соответственно, совпадающие с их проекциями на оси инерциальной системы координат, находятся по кватернионным формулам (6.14) [19].

$$\mathbf{V}_i = v_{i1}\mathbf{i} + v_{i2}\mathbf{j} + v_{i3}\mathbf{k} = \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{V}'_i \circ \overline{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \mathbf{V}'_i = v'_{i1}\mathbf{i} + v'_{i2}\mathbf{j} = \dot{r}_i\mathbf{i} + (c_i/r_i)\mathbf{j}, \quad i = 0,1$$

Перейдем в уравнениях (3.1), (3.2), (3.5) (при $i = 0$) и (3.3)–(3.5) (при $i = 1$) от независимой переменной t к новой независимой переменной τ_0 и τ_1 соответственно по формулам $dt/d\tau_0 = r_0$ и $dt/d\tau_1 = r_1$. Кроме того, учтем при этом выражения для кеплеровских энергий h_0^* и h_1^*

$$h_i^* = \frac{1}{2}\dot{r}_i^2 + \frac{1}{2}\frac{c_i^2}{r_i^2} - \frac{fm_i}{r_i}, \quad i = 0,1$$

которые будем рассматривать в качестве дополнительных переменных, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям

$$\frac{dh_0^*}{dt} = fm_1\left[-\frac{r_0}{r_1^3}\frac{dr_0}{dt} + \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3}\right)\left(\frac{dr_0}{dt}x'_{01} + \frac{c_0}{r_0}y'_{01}\right)\right] + \frac{dr_0}{dt}p'_1 + \frac{c_0}{r_0}p'_2$$

$$\frac{dh_1^*}{dt} = fm_0\left[-\frac{r_1}{r_0^3}\frac{dr_1}{dt} + \left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)\left(\frac{dr_1}{dt}x''_{01} + \frac{c_1}{r_1}y''_{01}\right)\right] + \frac{dr_1}{dt}p''_1 + \frac{c_1}{r_1}p''_2$$

В итоге получим следующие уравнения:

$$\frac{d^2 r_0}{d\tau_0^2} - 2h_0^* r_0 - fm_0 = -fm_1 \frac{r_0^3}{r_1^3} + fm_1 r_0^2 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) x'_{01} + r_0^2 p'_1 \tag{3.10}$$

$$\frac{dc_0}{d\tau_0} = fm_1 r_0^2 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) y'_{01} + r_0^2 p'_2 \tag{3.11}$$

$$\frac{dh_0^*}{d\tau_0} = fm_1 \left[-\frac{r_0}{r_1^3} \frac{dr_0}{d\tau_0} + \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) \left(\frac{dr_0}{d\tau_0} x'_{01} + c_0 y'_{01} \right) \right] + \frac{dr_0}{d\tau_0} p'_1 + c_0 p'_2 \tag{3.12}$$

$$\frac{d^2 r_1}{d\tau_1^2} - 2h_1^* r_1 - fm_1 = -fm_0 \frac{r_1^3}{r_0^3} + fm_0 r_1^2 \left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) x''_{01} + r_1^2 p''_1 \tag{3.13}$$

$$\frac{dc_1}{d\tau_1} = fm_0 r_1^2 \left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) y''_{01} + r_1^2 p''_2 \tag{3.14}$$

$$\frac{dh_1^*}{d\tau_1} = fm_0 \left[-\frac{r_1}{r_0^3} \frac{dr_1}{d\tau_1} + \left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) \left(\frac{dr_1}{d\tau_1} x''_{01} + c_1 y''_{01} \right) \right] + \frac{dr_1}{d\tau_1} p''_1 + c_1 p''_2 \tag{3.15}$$

$$2\frac{d\boldsymbol{\lambda}_i}{d\tau_i} = r_i \boldsymbol{\lambda}_i \circ \boldsymbol{\Omega}_i, \quad \boldsymbol{\Omega}_i = \omega_{i1}\mathbf{i} + \omega_{i3}\mathbf{k} = \omega_{i1}\mathbf{i} + \frac{c_i}{r_i^2}\mathbf{k}, \quad i = 0,1 \tag{3.16}$$

$$\frac{dt}{d\tau_i} = r_i, \quad i = 0, 1 \tag{3.17}$$

где проекция ω_{i1} абсолютной угловой скорости орбитальной системы координат $M'_i X'_i Y'_i Z'_i$ для $i = 0$ описывается соотношением (3.7), а для $i = 1$ – соотношением (3.8).

В полученных регулярных уравнениях возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел (3.10)–(3.12), (3.16), (3.17), (3.7) (при $i = 0$) и (3.13)–(3.17), (3.8) (при $i = 1$), записанных в орбитальных системах координат $M'_0 X'_0 Y'_0 Z'_0$ и $M'_1 X'_1 Y'_1 Z'_1$, в качестве переменных выступают расстояния r_0 и r_1 от точки M до точек M_0 и M_1, модули c_0 и c_1 векторов $\mathbf{c}_0$ и $\mathbf{c}_1$ моментов скоростей $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}_1$ точки M в системах координат $M_0 X_0 Y_0 Z_0$ и $M_1 X_1 Y_1 Z_1$ относительно точек M_0 и M_1, кеплеровские энергии h_0^* и h_1^*, время t и параметры Родрига–Гамильтона (Эйлера) λ_{0j} и λ_{1j} ($j = 0, 1, 2, 3$) (компоненты кватернионов $\boldsymbol{\lambda}_0$ и $\boldsymbol{\lambda}_1$), характеризующие ориентации орбитальных систем координат в инерциальной системе координат $O\xi\eta\zeta$.

Дифференциальные уравнения (3.10)–(3.12), (3.16), (3.17), (3.7) при $i = 0$, дополненные дифференциальным уравнением

$$d\tau_1/d\tau_0 = r_0 r_1^{-1}$$

и соотношениями

$$r_1^2 = (x_{01} - x_0)^2 + (y_{01} - y_0)^2 + (z_{01} - z_0)^2$$

$$x_0 = r_0(\lambda_{00}^2 + \lambda_{01}^2 - \lambda_{02}^2 - \lambda_{03}^2), \quad y_0 = 2r_0(\lambda_{01}\lambda_{02} + \lambda_{00}\lambda_{03}), \quad z_0 = 2r_0(\lambda_{01}\lambda_{03} - \lambda_{00}\lambda_{02})$$

для нахождения расстояния r_1, образуют в совокупности дифференциальные уравнения движения точки M, регулярные в окрестности точки M_0.

Дифференциальные уравнения (3.13)–(3.17), (3.8) (при $i = 1$), дополненные дифференциальным уравнением

$$d\tau_0/d\tau_1 = r_1 r_0^{-1}$$

и соотношениями

$$r_0^2 = (x_{01} - x_1)^2 + (y_{01} - y_1)^2 + (z_{01} - z_1)^2$$

$$x_1 = r_1(\lambda_{10}^2 + \lambda_{11}^2 - \lambda_{12}^2 - \lambda_{13}^2), \quad y_1 = 2r_1(\lambda_{11}\lambda_{12} + \lambda_{10}\lambda_{13}), \quad z_1 = 2r_1(\lambda_{11}\lambda_{13} - \lambda_{10}\lambda_{12})$$

для нахождения расстояния r_0, образуют в совокупности дифференциальные уравнения движения точки M, регулярные в окрестности точки M_1.

Отметим, что в кватернионных кинематических уравнениях (3.16) присутствует величина $r_i\omega_{i3} = c_i/r_i$, содержащая деление на расстояние r_i. Однако числитель этой величины $c_i = |\mathbf{c}_i| = |\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i| = r_i v_i \sin(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i)$, поэтому величина $r_i\omega_{i3} = c_i/r_i = v_i \sin(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i)$ не содержит особенности (деления на ноль) при $r_i = 0$.

При $m_1 = 0$ из уравнений (3.10)–(3.12), (3.16), (3.17), (3.7) при $i = 0$ получаются регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел M и M_0, одно из которых M (например, космический аппарат или астероид) имеет пренебрежимо малую массу, записанные в орбитальной системе координат $M_0'X_0'Y_0'Z_0'$:

$$\frac{d^2 r_0}{d\tau_0^2} - 2h_0^* r_0 - f m_0 = r_0^2 p_1', \quad \frac{dc_0}{d\tau_0} = r_0^2 p_2', \quad \frac{dh_0^*}{d\tau_0} = \frac{dr_0}{d\tau_0} p_1' + c_0 p_2'$$

$$2\frac{d\boldsymbol{\lambda}_0}{d\tau_0} = \boldsymbol{\lambda}_0 \circ \left(\frac{r_0^2}{c_0} p_3' \mathbf{i} + \frac{c_0}{r_0}\mathbf{k}\right), \quad \frac{dt}{d\tau_0} = r_0$$

Для невозмущенной пространственной задачи двух тел последние уравнения принимают вид уравнений

$$\frac{d^2 r_0}{d\tau_0^2} - 2h_0^* r_0 - f m_0 = 0, \quad 2\frac{d\boldsymbol{\lambda}_0}{d\tau_0} = \frac{c_0}{r_0}\boldsymbol{\lambda}_0 \circ \mathbf{k}, \quad \frac{dt}{d\tau_0} = r_0, \quad c_0 = \mathrm{const}, \quad h_0^* = \mathrm{const}$$

Первое из них является линейным дифференциальным уравнением второго порядка относительно расстояния r_0.

Соответственно, при $m_0 = 0$ из уравнений (3.13)–(3.17), (3.8) (при $i = 1$) получаются регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел M и M_1, одно из которых M имеет пренебрежимо малую массу, записанные в орбитальной системе координат $M_1'X_1'Y_1'Z_1'$.

Отметим, что выше приведенные уравнения являются регулярными уравнениями классической возмущенной пространственной задачи двух тел M и M_0, если под величиной “m_0”, фигурирующей в этих уравнениях, понимать сумму масс тел M и M_0.

При использовании в качестве независимой переменной часто используемой в задачах механики угловой переменной φ_i, связанной со временем t дифференциальным соотношением $d\varphi_i = (c_i/r_i^2)dt$, регулярные уравнения (3.10)–(3.17) принимают следующую форму:

$$\frac{d^2 r_0}{d\varphi_0^2} + \left(1 - 4h_0^* \frac{r_0^2}{c_0^2}\right) r_0 - 3 f m_0 \frac{r_0^2}{c_0^2} = \frac{r_0^2}{c_0^2}\left(r_0^2 P_1' - r_0 \frac{dr_0}{d\varphi_0} P_2'\right) \tag{3.18}$$

$$\frac{dc_0}{d\varphi_0} = \frac{r_0^3}{c_0} P_2' \quad \text{или} \quad \frac{dc_0^2}{d\varphi_0} = 2r_0^3 P_2', \quad \frac{dh_0^*}{d\varphi_0} = \frac{dr_0}{d\varphi_0} P_1' + r_0 P_2' \tag{3.19}$$

$$2\frac{d\boldsymbol{\lambda}_0}{d\varphi_0} = \boldsymbol{\lambda}_0 \circ \left(\frac{r_0^3}{c_0^2} P_3' \mathbf{i} + \mathbf{k}\right), \quad \frac{dt}{d\varphi_0} = \frac{r_0^2}{c_0} \tag{3.20}$$

$$P_1' = -fm_1\frac{r_0}{r_1^3} + fm_1\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3}\right)x_{01}' + p_1', \quad P_2' = fm_1\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3}\right)y_{01}' + p_2'$$
$$P_3' = fm_1\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3}\right)z_{01}' + p_3' \tag{3.21}$$

$$\frac{d^2r_1}{d\varphi_1^2} + \left(1 - 4h_1^*\frac{r_1^2}{c_1^2}\right)r_1 - 3fm_1\frac{r_1^2}{c_1^2} = \frac{r_1^2}{c_1^2}\left(r_1^2P_1'' - r_1\frac{dr_1}{d\varphi_1}P_2''\right) \tag{3.22}$$

$$\frac{dc_1}{d\varphi_1} = \frac{r_1^3}{c_1}P_2'' \quad \text{или} \quad \frac{dc_1^2}{d\varphi_1} = 2r_1^3P_2'', \quad \frac{dh_1^*}{d\varphi_1} = \frac{dr_1}{d\varphi_1}P_1'' + r_1P_2'' \tag{3.23}$$

$$2\frac{d\boldsymbol{\lambda}_1}{d\varphi_1} = \boldsymbol{\lambda}_1 \circ \left(\frac{r_1^3}{c_1^2}P_3''\,\mathbf{i} + \mathbf{k}\right), \quad \frac{dt}{d\varphi_1} = \frac{r_1^2}{c_1} \tag{3.24}$$

$$P_1'' = -fm_0\frac{r_1}{r_0^3} + fm_0\left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)x_{01}'' + p_1'', \quad P_2'' = fm_0\left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)y_{01}'' + p_2''$$
$$P_3'' = fm_0\left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)z_{01}'' + p_3'' \tag{3.25}$$

Для согласования двух используемых в окрестностях гравитирующих точек M_0 и M_1 независимых переменных φ_0 и φ_1 необходимо использовать дифференциальные уравнения $d\varphi_1/d\varphi_0 = c_1r_0^2/(c_0r_1^2)$ и $d\varphi_0/d\varphi_1 = c_0r_1^2/(c_1r_0^2)$.

Регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел M и M_1 (или M и M_2), записанные в орбитальной системе координат $M_0'X_0'Y_0'Z_0'$ или $M_1'X_1'Y_1'Z_1'$, при использовании в качестве независимой переменной φ_0 или φ_1 получаются из уравнений (3.18)–(3.25) при $P_i' = p_i'$ (когда $m_1 = 0$) или $P_i'' = p_i''$ (когда $m_0 = 0$).

При использовании в качестве независимой переменной угловой переменной φ_i, связанной с временем t дифференциальным соотношением $d\varphi_i = (c_i/r_i^2)dt$, и переменной $\rho_i = 1/r_i$, обратной расстоянию до точки M_i, получаем следующие уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех:

$$\frac{d^2\rho_i}{d\varphi_i^2} + \rho_i - \frac{fm_i}{c_i^2} = -\frac{1}{c_i^2\rho_i^2}\left(P_{i1} + \frac{1}{\rho_i}\frac{d\rho_i}{d\varphi_i}P_{i2}\right), \quad \frac{dc_i}{d\varphi_i} = \frac{1}{c_i\rho_i^3}P_{i2}$$
$$\text{или} \quad \frac{dc_i^2}{d\varphi_i} = \frac{2}{\rho_i^3}P_{i2} \tag{3.26}$$

$$2\frac{d\boldsymbol{\lambda}_i}{d\varphi_i} = \boldsymbol{\lambda}_i \circ \left(\frac{1}{c_i^2\rho_i^3}P_{i3}\,\mathbf{i} + \mathbf{k}\right), \quad \frac{dt}{d\varphi_i} = \frac{1}{c_i\rho_i^2} \quad (i = 0,1) \tag{3.27}$$

где $P_{01} = P_1'$, $P_{02} = P_2'$, $P_{03} = P_3'$; $P_{11} = P_1''$, $P_{12} = P_2''$, $P_{13} = P_3''$; величины P_k' и P_k'' определены следующими соотношениями, вытекающими из соотношений (3.21) и (3.25) с учетом обозначения $\rho_{01}^3 = 1/r_{01}^3$:

$$P_1' = -fm_1\frac{\rho_1^3}{\rho_0} + fm_1(\rho_1^3 - \rho_{01}^3)x_{01}' + p_1', \quad P_2' = fm_1(\rho_1^3 - \rho_{01}^3)y_{01}' + p_2',$$
$$P_3' = fm_1(\rho_1^3 - \rho_{01}^3)z_{01}' + p_3'$$

$$P_1'' = -fm_0\frac{\rho_0^3}{\rho_1} + fm_0(\rho_{01}^3 - \rho_0^3)x_{01}'' + p_1'', \quad P_2'' = fm_0(\rho_{01}^3 - \rho_0^3)y_{01}'' + p_2'',$$

$$P_3'' = fm_0(\rho_{01}^3 - \rho_0^3)z_{01}'' + p_3''$$

Переменными в уравнениях (3.26) и (3.27) являются величина $\rho_i = 1/r_i$, обратная расстоянию r_i от точки M до точки M_i, модуль c_i вектора $\mathbf{c}_i$ момента вектора скорости $\mathbf{v}_i$ точки M в системе координат $M_0X_iY_iZ_i$ относительно точки M_i, время t и параметры Родрига–Гамильтона λ_{ij} ($j = 0, 1, 2, 3$) (компоненты кватерниона $\boldsymbol{\lambda}_i$), характеризующие ориентацию орбитальной системы координат $M_i'X_i'Y_i'Z_i'$ в инерциальной системе координат $O\xi\eta\zeta$. Независимой переменной является угловая переменная φ_i, связанная с временем t дифференциальным соотношением $d\varphi_i = (c_i/r_i^2)dt$.

Отметим, что первое из уравнений (3.26) является обобщенным уравнением Бинэ и что дифференциальное уравнение для кеплеровской энергии h_i^* в состав этой системы не входит.

Отметим также, что уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел M и M_1 (или M и M_2), записанные в орбитальной системе координат $M_0'X_0'Y_0'Z_0'$ или $M_1'X_1'Y_1'Z_1'$, при использовании в качестве независимой переменной φ_0 или φ_1 получаются из уравнений (3.26)–(3.27) при $i = 0$ и $P_{01} = p_1'$, $P_{02} = p_2'$, $P_{03} = p_3'$ (когда $m_1 = 0$) или при $i = 1$ и $P_{11} = p_1''$, $P_{12} = p_2''$, $P_{13} = p_3''$ (когда $m_0 = 0$).

Уравнения невозмущенной пространственной задачи двух тел M и M_1 (или M и M_2), записанные в орбитальной системе координат $M_0'X_0'Y_0'Z_0'$ или $M_1'X_1'Y_1'Z_1'$, при использовании в качестве независимой переменной φ_0 или φ_1 имеют вид линейной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2\rho_i}{d\varphi_i^2} + \rho_i - \frac{fm_i}{c_i^2} = 0, \quad c_i = \text{const}; \quad 2\frac{d\boldsymbol{\lambda}_i}{d\varphi_i} = \boldsymbol{\lambda}_i \circ \mathbf{k}, \quad \frac{dt}{d\varphi_i} = \frac{1}{c_i\rho_i^2} \quad (i = 0,1)$$

Представляет интерес другая форма уравнений (3.26) и (3.27), в которой одновременно используются две переменные ρ_i и r_i и дополнительное дифференциальное уравнение, связывающее эти переменные:

$$\frac{d^2\rho_i}{d\varphi_i^2} + \rho_i - \frac{fm_i}{c_i^2} = -\frac{r_i^2}{c_i^2}\left(P_{i1} + r_i\frac{d\rho_i}{d\varphi_i}P_{i2}\right), \quad \frac{dc_i}{d\varphi_i} = \frac{r_i^3}{c_i}P_{i2} \quad \text{или} \quad \frac{dc_i^2}{d\varphi_i} = 2r_i^3P_{i2}$$

$$2\frac{d\boldsymbol{\lambda}_i}{d\varphi_i} = \boldsymbol{\lambda}_i \circ \left(\frac{r_i^3}{c_i^2}P_{i3}\,\mathbf{i} + \mathbf{k}\right), \quad \frac{dr_i}{d\varphi_i} = -r_i^2\frac{d\rho_i}{d\varphi_i}, \quad \frac{dt}{d\varphi_i} = \frac{r_i^2}{c_i} \quad (i = 0,1)$$

4. Регулярные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, построенные с использованием кватернионов ориентации двух идеальных систем координат и переменных Леви-Чивита. Для получения этих уравнений используем дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, записанные в идеальных системах координат $M_0X_0^{id}Y_0^{id}Z_0^{id}$ и $M_1X_1^{id}Y_1^{id}Z_1^{id}$ и имеющие вид уравнений (8.2), (8.4)–(8.6), (8.8) (при $i = 0$) и уравнений (8.3)–(8.5), (8.7), (8.8) (при $i = 1$) соответственно нашей работы [19]:

$$\begin{gathered}\ddot{X}_0 + \frac{fm_0}{r_0^3}X_0 = -\frac{fm_1}{r_1^3}X_0 + fm_1\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3}\right)X'_{01} + P'_x \\ \ddot{Y}_0 + \frac{fm_0}{r_0^3}Y_0 = -\frac{fm_1}{r_1^3}Y_0 + fm_1\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3}\right)Y'_{01} + P'_y \\ Z_0 = 0\end{gathered} \tag{4.1}$$

$$\begin{gathered}\ddot{X}_1 + \frac{fm_1}{r_1^3}X_1 = -\frac{fm_0}{r_0^3}X_1 + fm_0\left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)X''_{01} + P''_x \\ \ddot{Y}_1 + \frac{fm_1}{r_1^3}Y_1 = -\frac{fm_0}{r_0^3}Y_1 + fm_0\left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)Y''_{01} + P''_y \\ Z_1 = 0\end{gathered} \tag{4.2}$$

$$2d\mathbf{\Lambda}_i/dt = \mathbf{\Lambda}_i \circ \mathbf{\Omega}_i^{\mathrm{id}}, \quad \mathbf{\Lambda}_i = \Lambda_{i0} + \Lambda_{i1}\mathbf{i} + \Lambda_{i2}\mathbf{j} + \Lambda_{i3}\mathbf{k}, \quad i = 0,1 \tag{4.3}$$

$$\mathbf{\Omega}_i^{\mathrm{id}} = \Omega_{i1}\mathbf{i} + \Omega_{i2}\mathbf{j} = (\omega_{i1}/r_i)(X_i\mathbf{i} + Y_i\mathbf{j}) \tag{4.4}$$

$$\omega_{01}/r_0 = c_0^{-1}[fm_1(r_1^{-3} - r_{01}^{-3})z'_{01} + p'_3] \tag{4.5}$$

$$\omega_{11}/r_1 = c_1^{-1}[fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})z''_{01} + p''_3] \tag{4.6}$$

$$r_i^2 = X_i^2 + Y_i^2, \quad c_i = |\mathbf{c}_i| = X_i\dot{Y}_i - Y_i\dot{X}_i, \quad i = 0,1 \tag{4.7}$$

Величины X'_{01}, Y'_{01} и P'_x, P'_y в этих уравнениях являются проекциями радиус-вектора $\mathbf{r}_{01} = \overrightarrow{M_0M_1}$ и вектора возмущающего ускорения $\mathbf{p}$ на оси $M_0X_0^{id}$ и $M_0Y_0^{id}$ идеальной системы координат $M_0X_0^{id}Y_0^{id}Z_0^{id}$, а величины X''_{01}, Y''_{01} и P''_x, P''_y – проекциями радиус-вектора $\mathbf{r}_{01}$ и вектора ускорения $\mathbf{p}$ на оси $M_1X_1^{id}$ и $M_1Y_1^{id}$ идеальной системы координат $M_1X_1^{id}Y_1^{id}Z_1^{id}$. Отметим, что $Z'_{01} = z'_{01}$ и $Z''_{01} = z''_{01}$, а также, что $P'_z = p'_3$ и $P''_z = p''_3$, т.е. проекции радиус-вектора $\mathbf{r}_{01}$ и вектора ускорения $\mathbf{p}$ на оси $M_0Z_0^{id}$ и $M_1Z_1^{id}$ идеальных систем координат $M_0X_0^{id}Y_0^{id}Z_0^{id}$ и $M_1X_1^{id}Y_1^{id}Z_1^{id}$ совпадают с их проекцими на оси $M_0Z'_0$ и $M_1Z'_1$ орбитальных систем координат $M'_0X'_0Y'_0Z'_0$ и $M'_1X'_1Y'_1Z'_1$.

В уравнениях (4.3) и (4.4) ω_{i1} ($i = 0, 1$) – проекция вектора абсолютной угловой скорости орбитальной системы координат $M'_iX'_iY'_iZ'_i$ на ось $M'_iX'_i$, определяемая соотношениями (4.5) и (4.6).

Уравнения (4.1), (4.3)–(4.5), (4.7) (при $i = 0$) описывают движение точки M в системе координат $M_0X_0Y_0Z_0$, а уравнения (4.2)–(4.4), (4.6), (4.7) (при $i = 1$) – в системе координат $M_1X_1Y_1Z_1$. Начала этих систем координат находятся в точках M_0 и M_1, а их координатные оси параллельны одноименным осям инерциальной системы координат $O\xi\eta\zeta$. В этих уравнениях переменными являются идеальные прямоугольные координаты Ганзена X_i, Y_i, $Z_i = 0$ ($i = 0, 1$), их первые производные по времени и параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона) Λ_{0j} и Λ_{1j} ($j = 0, 1, 2, 3$) (компоненты кватернионов $\mathbf{\Lambda}_0$ и $\mathbf{\Lambda}_1$), характеризующие ориентации идеальных систем координат $M_0X_0^{id}Y_0^{id}Z_0^{id}$ и $M_1X_1^{id}Y_1^{id}Z_1^{id}$ в инерциальной системе координат $O\xi\eta\zeta$ соответственно.

Уравнения (4.1) и (4.2) можно также записать в другом виде:

$$\begin{aligned}
\ddot{X}_0 + \frac{fm_0}{r_0^3}X_0 &= -\frac{fm_1}{r_1^3}X_1' - \frac{fm_1}{r_{01}^3}X_{01}' + P_x' \\
\ddot{Y}_0 + \frac{fm_0}{r_0^3}Y_0 &= -\frac{fm_1}{r_1^3}Y_1' - \frac{fm_1}{r_{01}^3}Y_{01}' + P_y' \\
Z_0 &= 0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{X}_1 + \frac{fm_1}{r_1^3}X_1 &= -\frac{fm_0}{r_0^3}X_0'' + \frac{fm_0}{r_{01}^3}X_{01}'' + P_x'' \\
\ddot{Y}_1 + \frac{fm_1}{r_1^3}Y_1 &= -\frac{fm_0}{r_0^3}Y_0'' + \frac{fm_0}{r_{01}^3}Y_{01}'' + P_y'' \\
Z_1 &= 0
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Величины X_1' и Y_1' в уравнениях (4.8) и (4.9) являются проекциями радиус-вектора $\mathbf{r}_1$ на оси $M_0X_0^{id}$ и $M_0Y_0^{id}$ идеальной системы координат $M_0X_0^{id}Y_0^{id}Z_0^{id}$, а величины X_0'' и Y_0'' – проекциями радиус-вектора $\mathbf{r}_0$ на оси $M_1X_1^{id}$ и $M_1Y_1^{id}$ идеальной системы координат $M_1X_1^{id}Y_1^{id}Z_1^{id}$.

Отметим, что уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел (4.1), (4.3)–(4.5), (4.7) (при $i = 0$) могут рассматриваться независимо от уравнений (4.2)–(4.4), (4.6), (4.7) (при $i = 1$), если модуль r_1 радиус-вектора $\mathbf{r}_1$, фигурирующий в этих уравнениях, представить, используя соотношение $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{01}$, в следующем виде:

$$r_1^2 = r_0^2 + r_{01}^2 - 2(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_{01}) = X_0^2 + Y_0^2 + X_{01}'^2 + Y_{01}'^2 + Z_{01}'^2 - 2(X_0X_{01}' + Y_0Y_{01}') \tag{4.10}$$

Аналогично, уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел (4.2)–(4.4), (4.6), (4.7) (при $i = 1$) могут рассматриваться независимо от уравнений (4.1), (4.3)–(4.5), (4.7) (при $i = 0$), если модуль r_0 радиус-вектора $\mathbf{r}_0$, фигурирующий в этих уравнениях, представить, используя соотношение $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_{01}$, в следующем виде:

$$r_0^2 = r_1^2 + r_{01}^2 + 2(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{01}) = X_1^2 + Y_1^2 + X_{01}'^2 + Y_{01}'^2 + Z_{01}'^2 + 2(X_1X_{01}' + Y_1Y_{01}') \tag{4.11}$$

Декартовые координаты x_i, y_i, z_i ($i = 0, 1$) точки M в системе координат $M_iX_iY_iZ_i$, оси которой параллельны одноименным осям инерциальной системы координат $O\xi\eta\zeta$, и проекции v_{ik} ($k = 1, 2, 3$) вектора скорости $\mathbf{v}_i$ точки M в системе координат $M_iX_iY_iZ_i$ на ее же координатные оси находятся через идеальные координаты и их первые производные по времени по формулам

$$\mathbf{R}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k} = \mathbf{\Lambda}_i \circ (X_i\mathbf{i} + Y_i\mathbf{j}) \circ \overline{\mathbf{\Lambda}}_i, \quad i = 0,1 \tag{4.12}$$

$$\mathbf{V}_i = v_{i1}\mathbf{i} + v_{j1}\mathbf{j} + v_{i3}k = \dot{\mathbf{R}}_i = \dot{x}_i\mathbf{i} + \dot{y}_i\mathbf{j} + \dot{z}_i\mathbf{k} = \mathbf{\Lambda}_i \circ (\dot{X}_i\mathbf{i} + \dot{Y}_i\mathbf{j}) \circ \overline{\mathbf{\Lambda}}_i \quad (i = 0,1) \tag{4.13}$$

Проекции P_x', P_y', $P_z' = p_3'$ вектора возмущающего ускорения $\mathbf{p}$ на оси идеальной системы координат $M_0X_0^{id}Y_0^{id}Z_0^{id}$ и проекции P_x'', P_y'', $P_z'' = p_3''$ вектора $\mathbf{p}$ на оси идеальной системы координат $M_1X_1^{id}Y_1^{id}Z_1^{id}$ связаны с его проекциями $p_1 = p_x$, $p_2 = p_y$, $p_3 = p_z$ на оси системы координат $M_0X_0Y_0Z_0$, а также системы координат $M_1X_1Y_1Z_1$ кватернионными соотношениями

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}' &= P_x'\,\mathbf{i} + P_y'\,\mathbf{j} + P_z'\,\mathbf{k} = \overline{\mathbf{\Lambda}}_0 \circ \left(p_x\,\mathbf{i} + p_y\,\mathbf{j} + p_z\,\mathbf{k}\right) \circ \mathbf{\Lambda}_0 \\
\mathbf{P}'' &= P_x''\,\mathbf{i} + P_y''\,\mathbf{j} + P_z''\,\mathbf{k} = \overline{\mathbf{\Lambda}}_1 \circ \left(p_x\,\mathbf{i} + p_y\,\mathbf{j} + p_z\,\mathbf{k}\right) \circ \mathbf{\Lambda}_1
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Идеальные прямоугольные координаты Ганзена X_i, Y_i и $Z_i = 0$ ($i = 0, 1$), являющиеся проекциями радиус-вектора $\mathbf{r}_i$ точки M в системе координат $M_iX_iY_iZ_i$ на оси идеальной системы координат $M_iX_i^{id}Y_i^{id}Z_i^{id}$, связаны с полярными координатами r_i и φ_i точки M в идеальной системе координат (с расстоянием $r_i = |\mathbf{r}_i|$ точки M до точки M_i и углом φ_i поворота идеальной системы координат вокруг оси $Z_i' = Z_i^{id}$ орбитальной системы координат $M_i'X_i'Y_i'Z_i'$ по ходу часовой стрелки) соотношениями

$$X_i = r_i \cos\varphi_i, \quad Y_i = r_i \sin\varphi_i, \quad Z_i = 0 \quad (i = 0,1) \tag{4.15}$$

Ориентация орбитальной системы координат $M_i'X_i'Y_i'Z_i'$ в идеальной системе координат $M_iX_i^{id}Y_i^{id}Z_i^{id}$ характеризуется кватернионом поворота $\mathbf{\Phi}_i$, имеющим вид

$$\mathbf{\Phi}_i = \cos(\varphi_i/2) + \sin(\varphi_i/2)\,\mathbf{i}_3, \quad i = 0,1 \tag{4.16}$$

Компоненты Φ_{ij} ($j = 0,1,2,3$) этого кватерниона определяются соотношениями

$$\Phi_{i0} = \cos(\varphi_i/2), \quad \Phi_{i1} = \Phi_{i2} = 0, \quad \Phi_{i3} = \sin(\varphi_i/2), \quad i = 0,1 \tag{4.17}$$

Идеальные прямоугольные координаты Ганзена X_i, Y_i, $Z_i = 0$ являются декартовыми координатами точки M в идеальной системе координат $M_iX_i^{id}Y_i^{id}Z_i^{id}$ и связаны с переменными r_i и Φ_{ij} соотношениями

$$X_i = r_i\cos\varphi_i = r_i(\Phi_{i0}^2 - \Phi_{i3}^2), \quad Y_i = r_i\sin\varphi_i = 2r_i\Phi_0\Phi_3, \quad Z_i = 0, \quad i = 0,1 \tag{4.18}$$

Введем переменные Леви-Чивита

$$U_{i0} = r_i^{1/2}\Phi_{i0}, \quad U_{i3} = -r_i^{1/2}\Phi_{i3}, \quad i = 0,1 \tag{4.19}$$

связанные с ганзеновскими координатами соотношениями

$$X_i = U_{i0}^2 - U_{i3}^2, \quad Y_i = -2U_{i0}U_{i3}, \quad i = 0, 1 \tag{4.20}$$

и двухмерный кватернион $\mathbf{U}_i$, составленный из переменных Леви-Чивита:

$$\mathbf{U}_i = U_{i0} + U_{i3}\,\mathbf{k}, \quad i = 0, 1 \tag{4.21}$$

Введем также кватернионы $\mathbf{R}_i^{id}$ и $\mathbf{V}_i^{id}$, характеризующие положение и скорость точки M в идеальной системе координат $M_iX_i^{id}Y_i^{id}Z_i^{id}$:

$$\mathbf{R}_i^{id} = X_i\,\mathbf{i} + Y_i\,\mathbf{j} = (U_{i0}^2 - U_{i3}^2)\,\mathbf{i} + (-2U_{i0}U_{i3})\,\mathbf{j} = \bar{\mathbf{U}}_i \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{U}_i, \quad i = 0, 1 \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i^{id} &= \dot{X}_i\,\mathbf{i} + \dot{Y}_i\,\mathbf{j} = 2\left(U_{i0}\dot{U}_{i0} - U_{i3}\dot{U}_{i3}\right)\mathbf{i} - 2\left(U_{i0}\dot{U}_{i3} + U_{i3}\dot{U}_{i0}\right)\mathbf{j} = \\ &= \bar{\mathbf{U}}_i \circ \mathbf{i} \circ \dot{\mathbf{U}}_i + \dot{\bar{\mathbf{U}}}_i \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{U}_i = 2\bar{\mathbf{U}}_i \circ \mathbf{i} \circ \dot{\mathbf{U}}_i, \quad i = 0,1 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Справедливость последнего равенства в соотношениях (4.23) подтверждается непосредственной проверкой.

Запишем уравнения (4.1) и (4.2) с учетом обозначения $\mathbf{R}_i^{id} = X_i\,\mathbf{i} + Y_i\,\mathbf{j}$ в кватернионной форме

$$\ddot{\mathbf{R}}_0^{id} + \frac{fm_0}{r_0^3}\mathbf{R}_0^{id} = -\frac{fm_1}{r_1^3}\mathbf{R}_0^{id} + fm_1\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3}\right)\mathbf{R}_{01}'^{id} + \mathbf{P}'^{id} \tag{4.24}$$

$$\ddot{\mathbf{R}}_1^{id} + \frac{fm_1}{r_1^3}\mathbf{R}_1^{id} = -\frac{fm_0}{r_0^3}\mathbf{R}_1^{id} + fm_0\left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)\mathbf{R}_{01}''^{id} + \mathbf{P}''^{id} \tag{4.25}$$

где

$$\mathbf{R}'^{id}_{01} = X'_{01}\mathbf{i} + Y'_{01}\mathbf{j}, \quad \mathbf{P}'^{id} = P'_x\,\mathbf{i} + P'_y\mathbf{j}; \quad \mathbf{R}''^{id}_{01} = X''_{01}\mathbf{i} + Y''_{01}\mathbf{j}, \quad \mathbf{P}''^{id} = P''_x\,\mathbf{i} + P''_y\,\mathbf{j}$$

Подставляя соотношение (4.22) в уравнения (4.24) и (4.25), находим, учитывая соотношение (4.23)

$$2\overline{\mathbf{U}}_0 \circ \mathbf{i} \circ \ddot{\mathbf{U}}_0 + 2\dot{\overline{\mathbf{U}}}_0 \circ \mathbf{i} \circ \dot{\mathbf{U}}_0 + \left(\frac{fm_0}{r_0^3} + \frac{fm_1}{r_1^3}\right)\overline{\mathbf{U}}_0 \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{U}_0 = fm_1\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3}\right)\mathbf{R}'^{id}_{01} + \mathbf{P}'^{id}$$

$$2\overline{\mathbf{U}}_1 \circ \mathbf{i} \circ \ddot{\mathbf{U}}_1 + 2\dot{\overline{\mathbf{U}}}_1 \circ \mathbf{i} \circ \dot{\mathbf{U}}_1 + \left(\frac{fm_1}{r_1^3} + \frac{fm_0}{r_0^3}\right)\overline{\mathbf{U}}_1 \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{U}_1 = fm_0\left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)\mathbf{R}''^{id}_{01} + \mathbf{P}''^{id}$$

Из этих уравнений получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} &\ddot{\mathbf{U}}_0 - \frac{1}{r_0}\mathbf{i} \circ \mathbf{U}_0 \circ \dot{\overline{\mathbf{U}}}_0 \circ \mathbf{i} \circ \dot{\mathbf{U}}_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{fm_0}{r_0^3} + \frac{fm_1}{r_1^3}\right)\mathbf{U}_0 = \\ &= -\frac{fm_1}{2r_0}\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3}\right)\mathbf{i} \circ \mathbf{U}_0 \circ \mathbf{R}'^{id}_{01} - \frac{1}{2r_0}\mathbf{i} \circ \mathbf{U}_0 \circ \mathbf{P}'^{id} \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned} &\ddot{\mathbf{U}}_1 - \frac{1}{r_1}\mathbf{i} \circ \mathbf{U}_1 \circ \dot{\overline{\mathbf{U}}}_1 \circ \mathbf{i} \circ \dot{\mathbf{U}}_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{fm_1}{r_1^3} + \frac{fm_0}{r_0^3}\right)\mathbf{U}_1 = \\ &= -\frac{fm_0}{2r_1}\left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)\mathbf{i} \circ \mathbf{U}_1 \circ \mathbf{R}''^{id}_{01} - \frac{1}{2r_1}\mathbf{i} \circ \mathbf{U}_1 \circ \mathbf{P}''^{id} \end{aligned} \tag{4.27}$$

Учитывая равенство $\dot{r}_i = \mathbf{U}_i \circ \dot{\overline{\mathbf{U}}}_i + \dot{\mathbf{U}}_i \circ \overline{\mathbf{U}}_i$ $(i = 0,1)$ и соотношения (4.23), получим

$$\begin{aligned} &\mathbf{i} \circ \mathbf{U}_i \circ \dot{\overline{\mathbf{U}}}_i \circ \mathbf{i} \circ \dot{\mathbf{U}}_i = -\dot{r}_i\dot{\mathbf{U}}_i - \mathbf{i} \circ \dot{\mathbf{U}}_i \circ \overline{\mathbf{U}}_i \circ \mathbf{i} \circ \dot{\mathbf{U}}_i = \\ &= -\dot{r}_i\dot{\mathbf{U}}_i + \frac{1}{4r_i}\mathbf{U}_i \circ \mathbf{V}_i^{id} \circ \overline{\mathbf{V}}_i^{id} = -\dot{r}_i\dot{\mathbf{U}}_i + \frac{1}{4r_i}v_i^2\mathbf{U}_i \end{aligned}$$

где $\mathbf{V}_i^{id} \circ \overline{\mathbf{V}}_i^{id} = \mathbf{V}_i \circ \overline{\mathbf{V}}_i = |\mathbf{v}_i|^2 = v_i^2$, $\mathbf{v}_i$ – вектор скорости движения точки M в системе координат $M_iX_iY_iZ_i$, оси которой параллельны соответствующим осям инерциальной системы координат.

Уравнения (4.26) и (4.27) с учетом последних равенств принимают вид:

$$\begin{aligned} &\ddot{\mathbf{U}}_0 + \frac{1}{r_0}\dot{r}_0\dot{\mathbf{U}}_0 - \frac{1}{4r_0^2}v_0^2\mathbf{U}_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{fm_0}{r_0^3} + \frac{fm_1}{r_1^3}\right)\mathbf{U}_0 = \\ &= -\frac{fm_1}{2r_0}\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3}\right)\mathbf{i} \circ \mathbf{U}_0 \circ \mathbf{R}'^{id}_{01} - \frac{1}{2r_0}\mathbf{i} \circ \mathbf{U}_0 \circ \mathbf{P}'^{id} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\ddot{\mathbf{U}}_1 + \frac{1}{r_1}\dot{r}_1\dot{\mathbf{U}}_1 - \frac{1}{4r_1^2}v_1^2\mathbf{U}_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{fm_1}{r_1^3} + \frac{fm_0}{r_0^3}\right)\mathbf{U}_1 = \\ &= -\frac{fm_0}{2r_1}\left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)\mathbf{i} \circ \mathbf{U}_1 \circ \mathbf{R}''^{id}_{01} - \frac{1}{2r_1}\mathbf{i} \circ \mathbf{U}_1 \circ \mathbf{P}''^{id} \end{aligned}$$

Перейдем в первых двух слагаемых левых частей полученных уравнений от независимой переменной t к новой независимой переменной τ_0 и τ_1 соответственно по формулам $dt/d\tau_0 = r_0$ и $dt/d\tau_1 = r_1$. Кроме того, учтем при этом выражения (2.15) для кеплеровских энергий h_0^* и h_1^*. В итоге получим следующие уравнения:

$$\frac{d^2\mathbf{U}_0}{d\tau_0^2} - \frac{1}{2}h_0^*\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2}fm_1\frac{r_0^2}{r_1^3}\mathbf{U}_0 - \frac{1}{2}fm_1r_0\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3}\right)\mathbf{i}\circ\mathbf{U}_0\circ\mathbf{R}_{01}^{'id} - \frac{1}{2}r_0\mathbf{i}\circ\mathbf{U}_0\circ\mathbf{P}^{'id}$$

$$\frac{d^2\mathbf{U}_1}{d\tau_1^2} - \frac{1}{2}h_1^*\mathbf{U}_1 = -\frac{1}{2}fm_0\frac{r_1^2}{r_0^3}\mathbf{U}_1 - \frac{1}{2}fm_0r_1\left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)\mathbf{i}\circ\mathbf{U}_1\circ\mathbf{R}_{01}^{''id} - \frac{1}{2}r_1\mathbf{i}\circ\mathbf{U}_1\circ\mathbf{P}^{''id}$$

Отметим, что слагаемые $\frac{1}{r_0}\dot{r}_0\dot{\mathbf{U}}_0$ и $\frac{1}{r_1}\dot{r}_1\dot{\mathbf{U}}_1$ левых частей предыдущих уравнений и слагаемые $-r_0^{-3}\frac{dr_0}{d\tau_0}\frac{d\mathbf{U}_0}{d\tau_0}$ и $-r_1^{-3}\frac{dr_1}{d\tau_1}\frac{d\mathbf{U}_1}{d\tau_1}$, появляющиеся в этих частях уравнений при переходе к новым независимым переменным τ_0 и τ_1, сокращаются.

Дополним полученные уравнения кватернионным дифференциальным уравнением (4.3) ориентации идеальной системы координат $M_iX_i^{id}Y_i^{id}Z_i^{id}$, осуществив в нем предварительно переход от времени t к новой независимой переменной τ_i по формуле $dt/d\tau_i = r_i$, а также дифференциальными уравнениями (2.22) и (2.23) для кеплеровских энергий h_0^* и h_1^*. В итоге получим следующие локально регулярные (регулярные в окрестности точки M_0 или M_1) кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, записанные в идеальных системах координат $M_0X_0^{id}Y_0^{id}Z_0^{id}$ и $M_1X_1^{id}Y_1^{id}Z_1^{id}$ соответственно:

$$\frac{d^2\mathbf{U}_0}{d\tau_0^2} - \frac{1}{2}h_0^*\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2}fm_1\frac{r_0^2}{r_1^3}\mathbf{U}_0 - \frac{1}{2}r_0\mathbf{i}\circ\mathbf{U}_0\circ\left[fm_1\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3}\right)\mathbf{R}_{01}^{'id} + \mathbf{P}^{'id}\right] \tag{4.28}$$

$$\frac{d^2\mathbf{U}_1}{d\tau_1^2} - \frac{1}{2}h_1^*\mathbf{U}_1 = -\frac{1}{2}fm_0\frac{r_1^2}{r_0^3}\mathbf{U}_1 - \frac{1}{2}r_1\,\mathbf{i}\circ\mathbf{U}_1\circ\left[fm_0\left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)\mathbf{R}_{01}^{''id} + \mathbf{P}^{''id}\right] \tag{4.29}$$

$$\frac{dh_0^*}{d\tau_0} = -fm_1\frac{r_0}{r_1^3}\frac{dr_0}{d\tau_0} + fm_1\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3}\right)\left(\frac{d\mathbf{r}_0}{d\tau_0}\cdot\mathbf{r}_{01}\right) + \frac{d\mathbf{r}_0}{d\tau_0}\cdot\mathbf{p} \tag{4.30}$$

$$\frac{dh_1^*}{d\tau_1} = -fm_0\frac{r_1}{r_0^3}\frac{dr_1}{d\tau_1} + fm_0\left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)\left(\frac{d\mathbf{r}_1}{d\tau_1}\cdot\mathbf{r}_{01}\right) + \frac{d\mathbf{r}_1}{d\tau_1}\cdot\mathbf{p} \tag{4.31}$$

$$2\frac{d\mathbf{\Lambda}_i}{d\tau_i} = \mathbf{\Lambda}_i\circ\mathbf{\Omega}_i^{*id}, \quad \mathbf{\Lambda}_i = \Lambda_{i0} + \Lambda_{i1}\mathbf{i} + \Lambda_{i2}\mathbf{j} + \Lambda_{i3}\mathbf{k}, \quad i = 0,1 \tag{4.32}$$

$$\frac{dt}{d\tau_i} = r_i, \quad i = 0, 1 \tag{4.33}$$

Здесь

$$\begin{gathered}\mathbf{U}_i = U_{i0} + U_{i3}\,\mathbf{k},\\ \mathbf{\Omega}_i^{*id} = r_i\mathbf{\Omega}_i^{id} = \omega_{i1}\mathbf{R}_i^{id} = \omega_{i1}[(U_{i0}^2 - U_{i3}^2)\mathbf{i} + (-2U_{i0}U_{i3})\,\mathbf{j}] = \omega_{i1}\bar{\mathbf{U}}_i\circ\mathbf{i}\circ\mathbf{U}_i\end{gathered} \tag{4.34}$$

$$\omega_{01} = \frac{r_0}{c_0}\left[fm_1\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3}\right)z_{01}' + p_3'\right], \quad z_{01}' = Z_{01}', \quad p_3' = P_z' \tag{4.35}$$

$$\omega_{11} = \frac{r_1}{c_1}\left[fm_0\left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)z_{01}'' + p_3''\right], \quad z_{01}'' = Z_{01}'', \quad p_3'' = P_z'' \tag{4.36}$$

$$r_i = \mathbf{U}_i \circ \bar{\mathbf{U}}_i = \bar{\mathbf{U}}_i \circ \mathbf{U}_i = U_{i0}^2 + U_{i3}^2, \quad c_i = |\mathbf{c}_i| = 2\left(U_{i3}\frac{dU_{i0}}{d\tau_i} - U_{i0}\frac{dU_{i3}}{d\tau_i}\right) \tag{4.37}$$

$$\mathbf{R}_{01}'^{id} = X_{01}'\mathbf{i} + Y_{01}'\mathbf{j}, \quad \mathbf{P}'^{id} = P_x'\mathbf{i} + P_y'\mathbf{j} \tag{4.38}$$

$$\mathbf{R}_{01}''^{id} = X_{01}''\mathbf{i} + Y_{01}''\mathbf{j}, \quad \mathbf{P}''^{id} = P_x''\mathbf{i} + P_y''\mathbf{j} \tag{4.39}$$

$$\frac{dr_i}{d\tau_i} = 2\left(U_{i0}\frac{dU_{i0}}{d\tau_i} + U_{i3}\frac{dU_{i3}}{d\tau_i}\right) \tag{4.40}$$

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{d\tau_0}\cdot\mathbf{r}_{01} = 2\left(U_{00}\frac{dU_{00}}{d\tau_0} - U_{03}\frac{dU_{03}}{d\tau_0}\right)X_{01}' - 2\left(U_{00}\frac{dU_{03}}{d\tau_0} + U_{03}\frac{dU_{00}}{d\tau_0}\right)Y_{01}' \tag{4.41}$$

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{d\tau_0}\cdot\mathbf{p} = 2\left(U_{00}\frac{dU_{00}}{d\tau_0} - U_{03}\frac{dU_{03}}{d\tau_0}\right)P_x' - 2\left(U_{00}\frac{dU_{03}}{d\tau_0} + U_{03}\frac{dU_{00}}{d\tau_0}\right)P_y' \tag{4.42}$$

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{d\tau_1}\cdot\mathbf{r}_{01} = 2\left(U_{10}\frac{dU_{10}}{d\tau_1} - U_{13}\frac{dU_{13}}{d\tau_1}\right)X_{01}'' - 2\left(U_{10}\frac{dU_{13}}{d\tau_1} + U_{13}\frac{dU_{10}}{d\tau_1}\right)Y_{01}'' \tag{4.43}$$

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{d\tau_1}\cdot\mathbf{p} = 2\left(U_{10}\frac{dU_{10}}{d\tau_1} - U_{13}\frac{dU_{13}}{d\tau_1}\right)P_x'' - 2\left(U_{10}\frac{dU_{13}}{d\tau_1} + U_{13}\frac{dU_{10}}{d\tau_1}\right)P_y'' \tag{4.44}$$

Для согласования двух используемых в окрестностях гравитирующих точек M_0 и M_1 независимых переменных τ_0 и τ_1 необходимо использовать дифференциальные уравнения $d\tau_1/d\tau_0 = r_0/r_1$ и $d\tau_0/d\tau_1 = r_1/r_0$.

Декартовые координаты x_i, y_i, z_i ($i = 0, 1$) точки M в системе координат $M_iX_iY_iZ_i$, оси которой параллельны одноименным осям инерциальной системы координат $O\xi\eta\zeta$, и проекции v_{ik} ($k = 1, 2, 3$) вектора скорости $\mathbf{v}_i$ точки M в системе координат $M_iX_iY_iZ_i$ на ее же координатные оси находятся через переменные Леви-Чивита U_{i0}, U_{i3} и их первые производные $dU_{i0}/d\tau_i$, $dU_{i3}/d\tau_i$ по кватернионным формулам (4.45), (4.46) и (4.47), (4.48), содержащим кватернион $\mathbf{\Lambda}_i$ ориентации идеальной системы координат:

$$\mathbf{R}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k} = \mathbf{\Lambda}_i \circ \mathbf{R}_i^{id} \circ \bar{\mathbf{\Lambda}}_i, \quad i = 0,1 \tag{4.45}$$

$$\mathbf{R}_i^{id} = X_i\,\mathbf{i} + Y_i\,\mathbf{j} = (U_{i0}^2 - U_{i3}^2)\mathbf{i} + (-2U_{i0}U_{i3})\,\mathbf{j} = \bar{\mathbf{U}}_i \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{U}_i \tag{4.46}$$

$$\mathbf{V}_1 = v_{i1}\mathbf{i} + v_{i2}\mathbf{j} + v_{i3}\mathbf{k} = \dot{\mathbf{R}}_i = \dot{x}_i\mathbf{i} + \dot{y}_i\mathbf{j} + \dot{z}_i\mathbf{k} = \mathbf{\Lambda}_i \circ \mathbf{V}_i^{id} \circ \bar{\mathbf{\Lambda}}_i \ (i = 0,1) \tag{4.47}$$

$$\mathbf{V}_i^{id} = \frac{2}{r_i}\left[\left(U_{i0}\frac{dU_{i0}}{d\tau_i} - U_{i3}\frac{dU_{i3}}{d\tau_i}\right)\mathbf{i} - \left(U_{i0}\frac{dU_{i3}}{d\tau_i} + U_{i3}\frac{dU_{i0}}{d\tau_i}\right)\mathbf{j}\right] = \frac{2}{r_i}\bar{\mathbf{U}}_i \circ \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{U}_i}{d\tau_i} \tag{4.48}$$

Проекции P_x', P_y', $P_z' = p_3'$ вектора возмущающего ускорения $\mathbf{p}$ на оси идеальной системы координат $M_0X_0^{id}Y_0^{id}Z_0^{id}$ и его проекции P_x'', P_y'', $P_z'' = p_3''$ на оси идеальной системы координат $M_1X_1^{id}Y_1^{id}Z_1^{id}$ связаны с его проекциями $p_1 = p_x$, $p_2 = p_y$, $p_3 = p_z$ на оси системы координат $M_0X_0Y_0Z_0$, а также системы координат $M_1X_1Y_1Z_1$ кватернионными соотношениями (4.14).

Запишем полученные регулярные уравнения (4.28)–(4.33) в скалярном виде

$$\frac{d^2U_{00}}{d\tau_0^2} - \frac{1}{2}h_0^*U_{00} =$$

$$= -\frac{1}{2} fm_1 \frac{r_0^2}{r_1^3} U_{00} - \frac{1}{2} r_0 \left[fm_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) (-U_{00} X'_{01} + U_{03} Y'_{01}) + (-U_{00} P'_x + U_{03} P'_y) \right]$$

$$\frac{d^2 U_{03}}{d\tau_0^2} - \frac{1}{2} h_0^* U_{03} = \tag{4.49}$$

$$= -\frac{1}{2} fm_1 \frac{r_0^2}{r_1^3} U_{03} - \frac{1}{2} r_0 \left[fm_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) (U_{00} Y'_{01} + U_{03} X'_{01}) + (U_{00} P'_y + U_{03} P'_x) \right]$$

$$\frac{d^2 \mathrm{U}_{10}}{d\tau_1^2} - \frac{1}{2} h_1^* \mathrm{U}_{10} = -\frac{1}{2} fm_0 \frac{r_1^2}{r_0^3} \mathrm{U}_{10} -$$

$$-\frac{1}{2} r_1 \left[fm_0 \left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) (-U_{10} X''_{01} + U_{13} Y''_{01}) + (-U_{10} P''_x + U_{13} P''_y) \right]$$

$$\frac{d^2 U_{13}}{d\tau_1^2} - \frac{1}{2} h_1^* U_{13} = -\frac{1}{2} fm_0 \frac{r_1^2}{r_0^3} U_{13} - \tag{4.50}$$

$$-\frac{1}{2} r_1 \left[fm_0 \left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) (U_{10} Y''_{01} + U_{13} X''_{01}) + (U_{10} P''_y + U_{13} P''_x) \right]$$

$$\frac{dh_0^*}{d\tau_0} = -fm_1 \frac{r_0}{r_1^3} \frac{dr_0}{d\tau_0} + fm_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) \left[2 \left(U_{00} \frac{dU_{00}}{d\tau_0} - U_{03} \frac{dU_{03}}{d\tau_0} \right) X'_{01} - \right.$$

$$\left. - 2 \left(U_{00} \frac{dU_{03}}{d\tau_0} + U_{03} \frac{dU_{00}}{d\tau_0} \right) Y' \right] + 2 \left(U_{00} \frac{dU_{00}}{d\tau_0} - U_{03} \frac{dU_{03}}{d\tau_0} \right) P'_x - \tag{4.51}$$

$$- 2 \left(U_{00} \frac{dU_{03}}{d\tau_0} + U_{03} \frac{dU_{00}}{d\tau_0} \right) P'_y$$

$$\frac{dh_1^*}{d\tau_1} = -fm_0 \frac{r_1}{r_0^3} \frac{dr_1}{d\tau_1} + fm_0 \left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) \left[2 \left(U_{10} \frac{dU_{10}}{d\tau_1} - U_{13} \frac{dU_{13}}{d\tau_1} \right) X''_{01} - \right.$$

$$\left. - 2 \left(U_{10} \frac{dU_{13}}{d\tau_1} + U_{13} \frac{dU_{10}}{d\tau_1} \right) Y'' \right] + 2 \left(U_{10} \frac{dU_{10}}{d\tau_1} - U_{13} \frac{dU_{13}}{d\tau_1} \right) P''_x - \tag{4.52}$$

$$- 2 \left(U_{10} \frac{dU_{13}}{d\tau_1} + U_{13} \frac{dU_{10}}{d\tau_1} \right) P''_y$$

$$2 \frac{d\Lambda_{i0}}{d\tau_i} = -\Omega_{i1}^* \Lambda_{i1} - \Omega_{i2}^* \Lambda_{i2}, \quad 2 \frac{d\Lambda_{i1}}{d\tau_i} = \Omega_{i1}^* \Lambda_{i0} - \Omega_{i2}^* \Lambda_{i3}$$

$$2 \frac{d\Lambda_{i2}}{d\tau_i} = \Omega_{i2}^* \Lambda_{i0} + \Omega_{i1}^* \Lambda_{i3}, \quad 2 \frac{d\Lambda_{i3}}{d\tau_i} = \Omega_{i2}^* \Lambda_{i1} - \Omega_{i1}^* \Lambda_{i2} \tag{4.53}$$

$$\frac{dt}{d\tau_i} = r_i, \quad i = 0, 1 \tag{4.54}$$

Здесь

$$\Omega_{i1}^* = \omega_{i1} (U_{i0}^2 - U_{i3}^2), \quad \Omega_{i2}^* = -2\omega_{i1} U_{i0} U_{i3} \tag{4.55}$$

$$\omega_{01} = \frac{r_0}{c_0} \left[fm_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) Z'_{01} + P'_z \right] \tag{4.56}$$

$$\omega_{11} = \frac{r_1}{c_1}\left[fm_0 \left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) Z''_{01} + P''_z \right] \tag{4.57}$$

Кватернионные соотношения (4.45)–(4.48) для нахождения декартовых координат x_i, y_i, z_i ($i = 0, 1$) точки M и проекций скорости v_{ik} ($k = 1, 2, 3$) этой точки в системе координат $M_iX_iY_iZ_i$ в скалярной записи принимают вид

$$\begin{aligned} x_i &= (\Lambda_{i0}^2 + \Lambda_{i1}^2 - \Lambda_{i2}^2 - \Lambda_{i3}^2)X_i + 2(\Lambda_{i1}\Lambda_{i2} - \Lambda_{i0}\Lambda_{i3})Y_i \\ y_i &= 2(\Lambda_{i1}\Lambda_{i2} + \Lambda_{i0}\Lambda_{i3})X_i + (\Lambda_{i0}^2 - \Lambda_{i1}^2 + \Lambda_{i2}^2 - \Lambda_{i3}^2)Y_i \\ z_i &= 2(\Lambda_{i1}\Lambda_{i3} - \Lambda_{i0}\Lambda_{i2})X_i + 2(\Lambda_{i2}\Lambda_{i3} + \Lambda_{i0}\Lambda_{i1})Y_i \end{aligned} \tag{4.58}$$

$$X_i = U_{i0}^2 - U_{i3}^2, \quad Y_i = -2U_{i0}U_{i3}, \quad i = 0,1 \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned} v_{i1} &= \dot{x}_i = (\Lambda_{i0}^2 + \Lambda_{i1}^2 - \Lambda_{i2}^2 - \Lambda_{i3}^2)\dot{X}_i + 2(\Lambda_{i1}\Lambda_{i2} - \Lambda_{i0}\Lambda_{i3})\dot{Y}_i \\ v_{i2} &= \dot{y}_i = 2(\Lambda_{i1}\Lambda_{i2} + \Lambda_{i0}\Lambda_{i3})\dot{X}_i + (\Lambda_{i0}^2 - \Lambda_{i1}^2 + \Lambda_{i2}^2 - \Lambda_{i3}^2)\dot{Y}_i \\ v_{i3} &= \dot{z}_i = 2(\Lambda_{i1}\Lambda_{i3} - \Lambda_{i0}\Lambda_{i2})\dot{X}_i + 2(\Lambda_{i2}\Lambda_{i3} + \Lambda_{i0}\Lambda_{i1})\dot{Y}_i \end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_i &= 2(U_{i0}\dot{U}_{i0} - U_{i3}\dot{U}_{i3}) = \frac{2}{r_i}\left(U_{i0}\frac{dU_{i0}}{d\tau_i} - U_{i3}\frac{dU_{i3}}{d\tau_i} \right) \\ \dot{Y}_i &= -2(U_{i0}\dot{U}_{i3} + U_{i3}\dot{U}_{i0}) = -\frac{2}{r_i}\left(U_{i0}\frac{dU_{i3}}{d\tau_i} + U_{i3}\frac{dU_{i0}}{d\tau_i} \right) \end{aligned} \tag{4.61}$$

Отметим, что дифференциальные уравнения (4.30) и (4.31), а также (4.51) и (4.52) для кеплеровских энергий можно исключить из состава кватернионных регулярных дифференциальных уравнений (4.28)–(4.33) и соответствующих им скалярных регулярных дифференциальных уравнений (4.49)–(4.54), заменив их алгебраическими соотношениями

$$h_i^* = \frac{1}{r_i}\left[2\left(\left(\frac{dU_{i0}}{d\tau_i} \right)^2 + \left(\frac{dU_{i3}}{d\tau_i} \right)^2 \right) - fm_i \right], \quad i = 0,1$$

Соотношения (4.41)–(4.44) при этом также выпадают из рассмотрения, однако регулярность уравнений нарушается из-за появления множителя r_i^{-1} в левых частях кватернионных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\mathbf{U}_0}{d\tau_0^2} - \frac{1}{r_0}\left[\left(\left(\frac{dU_{00}}{d\tau_0} \right)^2 + \left(\frac{dU_{03}}{d\tau_0} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} fm_0 \right] \mathbf{U}_0 = \\ &-\frac{1}{2} fm_1 \frac{r_0^2}{r_1^3}\mathbf{U}_0 - \frac{1}{2} r_0 \mathbf{i} \circ \mathbf{U}_0 \circ \left[fm_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) \mathbf{R}'^{id}_{01} + \mathbf{P}'^{id} \right] \end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\mathbf{U}_1}{d\tau_1^2} - \frac{1}{r_1}\left[\left(\left(\frac{dU_{10}}{d\tau_1} \right)^2 + \left(\frac{dU_{13}}{d\tau_1} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} fm_1 \right] \mathbf{U}_1 = \\ &= -\frac{1}{2} fm_0 \frac{r_1^2}{r_0^3}\mathbf{U}_1 - \frac{1}{2} r_1 \mathbf{i} \circ \mathbf{U}_1 \circ \left[fm_0 \left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) \mathbf{R}''^{id}_{01} + \mathbf{P}''^{id} \right] \end{aligned} \tag{4.63}$$

и соответствующих им скалярных уравнений

$$\frac{d^2U_{00}}{d\tau_0^2}-\frac{1}{r_0}\left[\left(\left(\frac{dU_{00}}{d\tau_0}\right)^2+\left(\frac{dU_{03}}{d\tau_0}\right)^2\right)-\frac{1}{2}fm_0\right]U_{00}=-\frac{1}{2}fm_1\frac{r_0^2}{r_1^3}U_{00}-$$
$$-\frac{1}{2}r_0\left[fm_1\left(\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_{01}^3}\right)(-U_{00}X'_{01}+U_{03}Y'_{01})+(-U_{00}P'_x+U_{03}P'_y)\right]$$
$$\frac{d^2U_{03}}{d\tau_0^2}-\frac{1}{r_0}\left[\left(\left(\frac{dU_{00}}{d\tau_0}\right)^2+\left(\frac{dU_{03}}{d\tau_0}\right)^2\right)-\frac{1}{2}fm_0\right]U_{03}=-\frac{1}{2}fm_1\frac{r_0^2}{r_1^3}U_{03}-\tag{4.64}$$
$$-\frac{1}{2}r_0\left[fm_1\left(\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_{01}^3}\right)(U_{00}Y'_{01}+U_{03}X'_{01})+(U_{00}P'_y+U_{03}P'_x)\right]$$

$$\frac{d^2U_{10}}{d\tau_1^2}-\frac{1}{r_1}\left[\left(\left(\frac{dU_{10}}{d\tau_1}\right)^2+\left(\frac{dU_{13}}{d\tau_1}\right)^2\right)-\frac{1}{2}fm_1\right]U_{10}=-\frac{1}{2}fm_0\frac{r_1^2}{r_0^3}U_{10}-$$
$$-\frac{1}{2}r_1\left[fm_0\left(\frac{1}{r_{01}^3}-\frac{1}{r_0^3}\right)(-U_{10}X''_{01}+U_{13}Y''_{01})+(-U_{10}P''_x+U_{13}P''_y)\right]$$
$$\frac{d^2U_{13}}{d\tau_1^2}-\frac{1}{r_1}\left[\left(\left(\frac{dU_{10}}{d\tau_1}\right)^2+\left(\frac{dU_{13}}{d\tau_1}\right)^2\right)-\frac{1}{2}fm_1\right]U_{13}=-\frac{1}{2}fm_0\frac{r_1^2}{r_0^3}U_{13}-\tag{4.65}$$
$$-\frac{1}{2}r_1\left[fm_0\left(\frac{1}{r_{01}^3}-\frac{1}{r_0^3}\right)(U_{10}Y''_{01}+U_{13}X''_{01})+(U_{10}P''_y+U_{13}P''_x)\right]$$

Эти кватернионные уравнения (4.62) и (4.63), дополненные уравнениями (4.32) и (4.33), а также соответствующие им скалярные уравнения (4.64) и (4.65), дополненные уравнениями (4.53) и (4.54), являются локально квазирегулярными кватернионными дифференциальными уравнениями возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел.

Кватернионные дифференциальные уравнения (4.28), (4.30), (4.32), (4.33) и соотношения (4.34), (4.35), (4.37), (4.38), (4.40)–(4.42) при $i = 0$, а также эквивалентные им скалярные дифференциальные уравнения (4.47), (4.49), (4.51), (4.52) и соотношения (4.53), (4.54) при $i = 0$, дополненные дифференциальным уравнением

$$d\tau_1/d\tau_0 = r_0r_1^{-1}\tag{4.66}$$

и соотношением (4.10) для нахождения r_1, образуют в совокупности дифференциальные уравнения движения точки M, регулярные в окрестности точки M_0.

Кватернионные дифференциальные уравнения (4.29), (4.31), (4.32), (4.33) и соотношения (4.34), (4.36), (4.37), (4.39), (4.40), (4.43), (4.44) при $i = 1$, а также эквивалентные им скалярные дифференциальные уравнения (4.50), (4.52), (4.53), (4.54) и соотношения (4.55), (4.57) при $i = 1$, дополненные дифференциальным уравнением

$$d\tau_0/d\tau_1 = r_1r_0^{-1}\tag{4.67}$$

и соотношением (4.11) для нахождения r_0, образуют в совокупности дифференциальные уравнения движения точки M, регулярные в окрестности точки M_1.

В кватернионных уравнениях (4.28), (4.30), (4.32), (4.33) при $i = 0$ и (4.29), (4.31), (4.32), (4.33) при $i = 1$ регулярными переменными являются двухкомпонентный кватернион $\mathbf{U}_i = U_{i0} + U_{i3}\mathbf{k}$, описывающий движение точки M в идеальной системе координат $M_iX_i^{id}Y_i^{id}Z_i^{id}$, кеплеровская энергия h_i^*, время t и кватернион $\boldsymbol{\Lambda}_i$, характеризующий ориентацию идеальной системы координат в инерциальной системе координат

$O\xi\eta\zeta$ и являющийся кватернионным оскулирующим элементом (кватернионной медленно изменяющейся переменной) для движения точки M в окрестности гравитирующей точки M_i.

В скалярных уравнениях (4.47), (4.49), (4.51), (4.52) при $i = 0$ и (4.50), (4.52), (4.53), (4.54) при $i = 1$ регулярными переменными являются переменные Леви-Чивита U_{i0} и U_{i3}, описывающие движение точки M в идеальной системе координат $M_i X_i^{id} Y_i^{id} Z_i^{id}$, кеплеровская энергия h_i^*, время t и параметры Родрига–Гамильтона (Эйлера) Λ_{ij}, характеризующие ориентацию идеальной системы координат в инерциальной системе координат $O\xi\eta\zeta$ и являющиеся скалярными оскулирующими элементами (медленно изменяющимися переменными) для движения точки M в окрестности гравитирующей точки M_i.

Эти уравнения представляют собой системы нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений одиннадцатого порядка относительно двух переменных Леви-Чивита U_{i0} и U_{i3}, их первых производных $dU_{i0}/d\tau_i$ и $dU_{i3}/d\tau_i$, четырех параметров Родрига–Гамильтона (Эйлера) Λ_{ij} ($j = 0, 1, 2, 3$), энергетической переменной h_i^*, времени t и переменной τ_1 или τ_0.

Отметим, что полученные уравнения не пригодны для исследования прямолинейных движений точки M, для которых модуль c_i вектора $\mathbf{c}_i$ момента вектора скорости $\mathbf{v}_i$ точки M в системе координат $M_0 X_i Y_i Z_i$ относительно гравитирующей точки M_i равен нулю, т.к. он присутствует в знаменателях компонент кватерниона $\mathbf{\Omega}_i^{*id}$ угловой скорости вращения идеальной системы координат (во времени τ_i).

Полученные совокупности дифференциальных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел позволяют разработать регулярные аналитические и численные методы изучения движения тела пренебрежимо малой массы в окрестностях двух других тел, имеющих конечные массы, а также позволяют построить регулярные алгоритмы интегрирования этих уравнений, в которых кватернионные дифференциальные уравнения (4.28), (4.30), (4.32), (4.33) или эквивалентные им скалярные дифференциальные уравнения (4.47), (4.49), (4.51), (4.52) (при $i = 0$) этой задачи используются при изучении движения точки M в окрестности точки M_0 (когда расстояния r_0 и r_1 удовлетворяют неравенству $m_1 r_0^2 \le m_0 r_1^2$), а кватернионные дифференциальные уравнения (4.29), (4.31), (4.32), (4.33) или эквивалентные им скалярные дифференциальные уравнения (4.50), (4.52), (4.53), (4.54) (при $i = 1$) этой задачи используются при изучении движения точки M в окрестности точки M_1 (когда расстояния r_1 и r_0 удовлетворяют неравенству $m_0 r_1^2 < m_1 r_0^2$).

Полученные в этом разделе другие совокупности дифференциальных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел позволяют разработать квазирегулярные, но более простые, аналитические и численные методы изучения движения тела пренебрежимо малой массы в окрестностях двух других тел, имеющих конечные массы, а также позволяют построить более простые квазирегулярные алгоритмы интегрирования этих уравнений, в которых кватернионные дифференциальные уравнения (4.62), (4.32), (4.33) или эквивалентные им скалярные дифференциальные уравнения (4.64), (4.53), (4.54) (при $i = 0$) этой задачи используются при изучении движения точки M в окрестности точки M_0 (когда расстояния r_0 и r_1 удовлетворяют неравенству $m_1 \le m_0 r_1^2$), а кватернионные дифференциальные уравнения (4.63), (4.32), (4.33) или эквивалентные им скалярные дифференциальные уравнения (4.65), (4.53), (4.54) (при $i = 1$) этой задачи используются при изучении движения точки M в окрестности точки M_1 (когда расстояния r_1 и r_0 удовлетворяют неравенству $m_0 r_1^2 < m_1 r_0^2$).

При $m_1 = 0$ (или $m_0 = 0$) из полученных уравнений следуют регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел M и M_0 (или M и M_1), одно из которых M (например, космический аппарат или астероид) имеет пренебрежимо малую массу (в сравнении с массой тел M_0 и M_1):

$$\frac{d^2\mathbf{U}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h^*\mathbf{U} = -\frac{1}{2}r\mathbf{i} \circ \mathbf{U} \circ (P'_x\,\mathbf{i} + P'_y\,\mathbf{j}) \tag{4.68}$$

$$\frac{dh^*}{d\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \cdot \mathbf{p} = 2\left(U_0\frac{dU_0}{d\tau} - U_3\frac{dU_3}{d\tau}\right)P'_x - 2\left(U_0\frac{dU_3}{d\tau} + U_3\frac{dU_0}{d\tau}\right)P'_y \tag{4.69}$$

$$2\frac{d\mathbf{\Lambda}}{d\tau} = r\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Omega}^{id} = \frac{r}{c}P'_z\mathbf{\Lambda} \circ [(U_0^2 - U_3^2)\mathbf{i} + (-2U_0U_3)\,\mathbf{j}] = \frac{r}{c}P'_z\mathbf{\Lambda} \circ \bar{\mathbf{U}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{U} \tag{4.70}$$

$$\frac{dt}{d\tau} = r \tag{4.71}$$

Здесь

$$\mathbf{U} = U_0 + U_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{\Lambda} = \Lambda_0 + \Lambda_1\mathbf{i} + \Lambda_2\mathbf{j} + \Lambda_3\mathbf{k}$$

$$r = \mathbf{U} \circ \bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{U}} \circ \mathbf{U} = U_0^2 + U_3^2, \quad c = |\mathbf{c}| = 2\left(U_3\frac{dU_0}{d\tau} - U_0\frac{dU_3}{d\tau}\right)$$

$\mathbf{U}$ — двухкомпонентный кватернион, описывающий движение точки M в идеальной системе координат $M_0X^{id}Y^{id}Z^{id}$, U_0 и U_3 — переменные Леви-Чивиты, h^* — кеплеровская энергия точки M (скалярный оскулирующий элемент орбиты точки M), $\mathbf{\Lambda}$ — кватернион, характеризующий ориентацию идеальной системы координат в инерциальной системе координат $O\xi\eta\zeta$ (является кватернионным оскулирующим элементом (кватернионной медленно изменяющейся переменной)), Λ_{ij} ($j = 0, 1, 2, 3$) — параметры Родрига—Гамильтона (Эйлера) (скалярные оскулирующие элементы (скалярные медленно изменяющиеся переменные)), r — расстояние от точки M до гравитирующей точки M_0, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки M в системе координат $M_0X_0Y_0Z_0$, оси которой параллельны осям инерциальной системы координат, c — модуль вектора $\mathbf{c}$ момента скорости $\mathbf{v}$ точки M в системе координат $M_0X_0Y_0Z_0$ относительно точки M_0, t — время (зависимая переменная), τ — новая независимая переменная, P'_x, P'_y, P'_z — проекции вектора $\mathbf{p}$ возмущающего ускорения точки M на оси идеальной системы координат.

Эти уравнения совпадают с регулярными кватернионными уравнениями возмущенной пространственной задачи двух тел, предложенными ранее автором статьи в работе [22].

Регулярные кватернионные уравнения (4.68)—(4.71) возмущенной пространственной задачи двух тел, в которых используются переменные Леви-Чивита и кватернион ориентации идеальной системы координат, образуют систему нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений десятого порядка (такую же размерность имеют кватернионные регулярные уравнения в переменных Кустаанхеймо—Штифеля) и имеют все достоинства уравнений в переменных Кустаанхеймо—Штифеля:

— они регулярны в центре притяжения,

— линейны для невозмущенных кеплеровских движений,

— позволяют выработать единый подход к изучению всех трех типов кеплеровского движения с использованием функций Штумпфа,

— близки к линейным уравнениям для возмущенных кеплеровских движений,

— позволяют представить правые части дифференциальных уравнений движения небесных и космических тел в полиномиальной форме, удобной для их решения с помощью ЭВМ.

Вместе с тем уравнения (4.68)–(4.71) имеют существенные отличия:

– для невозмущенного эллиптического кеплеровского движения изучаемого тела эти регулярные уравнения движения эквивалентны уравнениям движения не четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора, как в случае использования переменных Кустаанхеймо–Штифеля, а уравнениям движения двухмерного одночастотного гармонического осциллятора, квадрат частоты которого равен половине кеплеровской энергии тела, взятой с обратным знаком, поскольку кватернион ориентации идеальной системы координат, в которой записаны эти уравнения движения, в этом случае остается постоянным;

– для возмущенного (управляемого) движения изучаемого тела кватернион ориентации идеальной системы координат является кватернионным оскулирующим элементом (медленно изменяющейся кватернионной переменной), что также является полезным свойством этих уравнений.

Заключение. Классические модели небесной механики и механики космического полета (астродинамики) имеют особенности типа сингулярности (деления на ноль), порождаемые действующими гравитационными силами. Эти особенности осложняют аналитическое и численное исследование задач орбитального (траекторного) движения небесных и космических тел.

В статье решена проблема локальной регуляризации этих особенностей дифференциальных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, часто используемых в задачах небесной механики и механики космического полета: проблема регуляризации особенностей уравнений этой задачи, описывающих движение изучаемой материальной точки M, имеющей пренебрежимо малую массу, в поле тяготения двух гравитирующих точек M_0 и M_1 при движении точки M в окрестности точки M_0 или при ее движении в окрестности точки M_1.

В разделе 2 рассмотрены локально регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, построенные с использованием кватернионов ориентации двух введенных неголономных (азимутально свободных) систем координат, компонентами которых являются параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона), и с использованием двух групп четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля. Они представляют собой две системы нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений 11-го порядка относительно переменных Кустаанхеймо–Штифеля u_{ij} ($i = 0, 1; j = 0, 1, 2, 3$), их первых производных $du_{ij}/d\tau_i$ по новой независимой переменной τ_i, кеплеровской энергии h_i^* и времени t. В состав этих систем уравнений входят дополнительные дифференциальные уравнения $d\tau_1/d\tau_0 = r_0/r_1$ и $d\tau_0/d\tau_1 = r_1/r_0$, введенные для согласования двух используемых в окрестностях гравитирующих точек M_0 и M_1 независимых переменных τ_0 и τ_1 (r_0 и r_1 – расстояния от точки M до точек M_0 и M_1). Эти системы уравнений описывают движение материальной точки M, имеющей пренебрежимо малую массу, в поле тяготения двух гравитирующих точек M_0 и M_1. Одна система уравнений (при $i = 0$) регулярна в окрестности гравитирующей точки M_0 и используется для изучения движения точки M в этой окрестности, другая система уравнений (при $i = 1$) регулярна в окрестности гравитирующей точки M_1 и используется для изучения движения точки M в этой окрестности. Для построения регулярных кватернионных дифференциальных уравнений использовано регуляризующее дифференциальное преобразование времени Зундмана $dt/d\tau_i = r_i$ (в качестве новых независимых переменных использованы "фиктивные" времена τ_0 и τ_1). В этом разделе статьи развиты результаты, полученные нами ранее в работах [13, 14].

В разделе 3 получены локально регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, построенные с использованием кватернионов ориентации $\boldsymbol{\lambda}_0$ и $\boldsymbol{\lambda}_1$ двух орбитальных систем координат и образующие системы дифференциальных уравнений 10-го порядка. В этих системах регулярных уравнений, записанных в двух орбитальных системах координат $M_0'X_0'Y_0'Z_0'$ и $M_1'X_1'Y_1'Z_1'$, в качестве переменных выступают расстояния r_0 и r_1 от точки M до гравитирующих точек M_0 и M_1, модули c_0 и c_1 векторов $\mathbf{c}_0$ и $\mathbf{c}_1$ моментов скоростей $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}_1$ точки M в системах координат $M_0X_0Y_0Z_0$ и $M_1X_1Y_1Z_1$ относительно точек M_0 и M_1, кеплеровские энергии h_0^* и h_1^*, время t и параметры Эйлера λ_{0j} и λ_{1j} ($j = 0, 1, 2, 3$) (компоненты кватернионов $\boldsymbol{\lambda}_0$ и $\boldsymbol{\lambda}_1$), характеризующие ориентации орбитальных систем координат в инерциальной системе координат $O\xi\eta\zeta$. (Системы координат $M_0X_0Y_0Z_0$ и $M_1X_1Y_1Z_1$ имеют начала в гравитирующих точках M_0 и M_1 и движутся относительно инерциальной системы координат поступательно.) Для построения этих регулярных кватернионных дифференциальных уравнений использовано, как и в разделе 2, регуляризующее дифференциальное преобразование времени Зундмана $dt/d\tau_i = r_i$. Для согласования двух используемых в окрестностях гравитирующих точек M_0 и M_1 независимых переменных τ_0 и τ_1 использованы, как и в случае использования переменных Кустаанхеймо–Штифеля, дифференциальные уравнения $d\tau_1/d\tau_0 = r_0/r_1$ и $d\tau_0/d\tau_1 = r_1/r_0$.

Из этих систем уравнений в третьем разделе получены две другие системы локально регулярных кватернионных дифференциальных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел 10-го порядка, в которых в качестве двух независимых переменных используются угловые переменные φ_i ($i = 0, 1$), связанные со временем t дифференциальными соотношениями $d\varphi_i = (c_i/r_i^2)dt$. Для согласования двух используемых в окрестностях гравитирующих точек M_0 и M_1 независимых переменных φ_0 и φ_1 используются дифференциальные уравнения $d\varphi_1/d\varphi_0 = c_1r_0^2/(c_0r_1^2)$ и $d\varphi_0/d\varphi_1 = c_0r_1^2/(c_1r_0^2)$.

Из этих систем уравнений, в свою очередь, получены две системы кватернионных дифференциальных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел 9-го порядка, в которых в качестве двух независимых переменных используются угловые переменные φ_i, а вместо расстояний используются переменные $\rho_i = 1/r_i$ ($i = 0, 1$), обратные расстояниям r_0 и r_1 до гравитирующих точек M_0 и M_1. Отметим, что дифференциальные уравнения для кеплеровских энергий h_i^* ($i = 0, 1$) в состав этих систем уравнений не входят. Полученные уравнения, содержащие уравнения для переменных ρ_i, не являются регулярными, однако в их состав входят обобщенные уравнения Бинэ. Для задачи двух тел дифференциальное уравнение Бинэ для переменной ρ является линейным.

В разделе 3 также приведены кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, в которых одновременно используются две переменные ρ_i и r_i.

В разделе 4 получены кватернионные и скалярные системы локально регулярных дифференциальных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел 11-го порядка, в которых регулярными переменными являются двухкомпонентные кватернионы $\mathbf{U}_i = U_{i0} + U_{i3}\mathbf{k}$ и переменные Леви-Чивита U_{i0} и U_{i3} ($i = 0, 1$) соответственно, описывающие движение точки M в идеальных системах координат $M_iX_i^{id}Y_i^{id}Z_i^{id}$ ($i = 0, 1$), их первые производные $d\mathbf{U}_i/d\tau_i = dU_{i0}/d\tau_i + (dU_{i3}/d\tau_i)\mathbf{k}$ и $dU_{i0}/d\tau_i$ и $dU_{i3}/d\tau_i$, кеплеровские энергии h_i^*, время t, а также кватернионы $\boldsymbol{\Lambda}_i$ и параметры Эйлера Λ_{ij} ($i = 0, 1$) соответственно, характеризующие ориентацию идеальных систем координат $M_i X_i^{id} Y_i^{id} Z_i^{id}$ $(i = 0, 1)$ в инерциальной системе координат $O\xi\eta\zeta$ и являющиеся кватернионными и скалярными оскулирующими элементами (медленно изменяющимися переменными) для движения точки M в окрестности гравитирующей точки M_0 или M_1 соответственно. Эти уравнения дополняются дифференциальными уравнениями $dt/d\tau_0 = r_0$ и $dt/d\tau_1 = r_1$ для времени t (регуляризующими дифференциальными преобразованиями времени Зундмана).

В разделе 4 также получены локально квазирегулярные, но более простые кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел 10-го порядка, из состава которых исключены дифференциальные уравнения для кеплеровских энергий h_i^*.

В статье показано, что из полученных локально регулярных кватернионных дифференциальных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел вытекают регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, полученные автором статьи ранее.

Полученные в статье различные локально регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел позволяют разработать регулярные аналитические и численные методы изучения движения тела пренебрежимо малой массы в окрестностях двух других тел, имеющих конечные массы, а также позволяют построить регулярные алгоритмы численного интегрирования этих уравнений, в которых одни группы регулярных кватернионных дифференциальных уравнений (при $i = 0$) используются при изучении движения точки M в окрестности гравитирующей точки M_0 (когда расстояния r_0 и r_1 удовлетворяют неравенству $m_1 r_0^2 \leq m_0 r_1^2$), а другие группы регулярных кватернионных дифференциальных уравнений (при $i = 1$) используются при изучении движения точки M в окрестности гравитирующей точки M_1 (когда расстояния r_1 и r_0 удовлетворяют неравенству $m_0 r_1^2 < m_1 r_0^2$).

Эти уравнения могут быть эффективно использованы для изучения орбитального движения небесных и космических тел и космических аппаратов, для прогноза их движения, а также для решения задач управления орбитальным движением космических аппаратов и решения задач инерциальной навигации в космосе.

Отметим, что Леви-Чивита (1920) в отношении своих попыток обобщить предложенную им знаменитую регуляризацию уравнений плоской задачи двух тел на пространственную задачу позже признал [23]: “The problem in space has long resisted my efforts, as I tried to approach it by similar coordinate changes [. . .]” (“Проблема в пространстве долго сопротивлялась моим усилиям, так как я пытался подойти к ней с помощью аналогичных изменений координат [...]”. Штифель и Шейфеле (1971) в своей книге [20] отмечали, что Леви-Чивита приложил много усилий, чтобы найти обобщение своего метода регуляризации дифференциальных уравнений плоского движения в задаче двух тел на общую пространственную задачу двух тел, но безуспешно. В работе Арсеза и Заре [1] (1974) говорится, что из-за фундаментальных трудностей, первоначально разъясненных Хопфом (1931) и Гурвицем (1933), невозможно обобщить преобразование Леви-Чивита к эквивалентному набору трехмерных переменных (на случай трехмерного пространства): “Because of fundamental difficulties originally clarified by Hopf (1931) and Hurwitz (1933) it is impossible to generalize the Levi-Civita transformation to an eguivalent set of three-dimensional variables”.

Тем не менее, как было отмечено выше, нами было показано [22], что регуляризация Леви-Чивита может быть с успехом использована для построения регулярных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел. Это было сделано нами с помощью использования двухмерных идеальных прямоугольных координат Ганзена, регулярных двухмерных переменных Леви-Чивита и кватерниона ориентации идеальной системы координат, в которой были записаны дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, а также с помощью использования в качестве дополнительной переменной кеплеровской энергии и использования новой независимой переменной. Компонентами кватерниона ориентации идеальной системы координат являются параметры Эйлера. Полученные уравнения имеют не только хорошо известные достоинства уравнений Кустаанхеймо–Штифеля (регулярность, линейность для кеплеровских движений), но и обладают своими дополнительными достоинствами, описанными выше.

В настоящей статье показано (раздел 4), что переменные Леви-Чивита могут быть с успехом использованы для получения локально регулярных кватернионных дифференциальных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел.

Отметим также, что обзор работ по кватернионной регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел и возмущенного центрального движения материальной точки был дан автором статьи в его недавней работе [24].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aarseth S.J. and Zare K.A.* Regularization of the Three-Body Problem // Celest. Mech. 1974. V. 10. P. 185–205.
https://doi.org/10.1007/BF01227619
2. *Poincare H.* Sur l'uniformisation des fonctions analytiques // Acta Math. 1908. V. 31. P. 1–64.
https://doi.org/10.1007/BF02415442
3. *Sundman K.F.* Memoire sur le probleme des trois crops // Acta Math. 1913. V. 36. P. 105–179.
https://doi.org/10.1007/BF02422379
4. *Lemaitire G.* Regularization of the three-body problem // Vistas Astron. 1955. № 1. P. 207–215.
https://doi.org/10.1016/0083-6656(55)90028-3
5. *Thiele T.N.* Recherches numeriques concernant des solutions periodiques d'un cas special du probleme des trois corps // Astron. Nachr. 1895. V. 138. № 1. P. 17.
https://doi.org/10.1002/asna.18951380102
6. *Burrau C.* Uber Einige in Aussicht Genommene Berechnung, Betreffend einen Spezialfall des Dreikorperproblems // Vierteljahrschrift Astron. Ges. 1906. V. 41. P. 261.
7. *Birkhoff G.D.* The restricted problem of three bodies // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1915. V. 39. № 1. P. 265–334.
https://doi.org/10.1007/BF03015982
8. *Waldvogel J.*A new regularization of the planar problem of three bodies // Celes. Mech. 1972. № 6. P. 221–231.
https://doi.org/10.1007/BF01227784
9. *Roman R., Szucs-Csillik I.* Generalization of Levi-Civita regularization in the restricted three-body problem // Astrophys. Space Sci. 2014. V. 349. P. 117–123.
https://doi.org/10.1007/s10509-013-1628-6
10. *Aarseth S.J.* Gravitational N-Body Simulations. N.Y.: Cambridge Univ. Press, 2003. 408 p.
11. *Бордовицына Т.В.* Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984. 136 с.
12. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений задачи двух тел и ограниченной задачи трех тел // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов (Казань, 20–24 августа 2015 г.) / Сост. *Д.Ю. Ахметов, А.Н. Герасимов, Ш.М. Хайдаров*, под ред. *Д.А. Губайдуллина, А.М. Елизарова, Е.К. Липачёва*. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. С. 4051–4053.
13. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. I // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 6. С. 24–54.
14. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. II // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 6. С. 41–63.
15. *Челноков Ю.Н.* К регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1981. № 6. С. 12–21.
16. *Челноков Ю.Н.* О регулярных уравнениях пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 151–158.

17. *Челноков Ю.Н.* Анализ оптимального управления движением точки в гравитационном поле с использованием кватернионов // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 5. С. 18–44.
18. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: Физматлит, 2011. 560 с.
19. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные методы и регулярные модели небесной механики и механики космического полета: использование параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) для описания орбитального (траекторного) движения. II: Возмущенная пространственная ограниченная задача трех тел // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 1. С. 142–171. https://doi.org/10.31857/S0572329922600293
20. *Stiefel E.L., Scheifele G.* Linear and Regular Celestial Mechanics. Berlin: Springer, 1971. 350 p. (*Штифель Е., Шейфеле Г.* Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 304 с.)
21. *Челноков Ю.Н., Логинов М.Ю.* Новые кватернионные модели регулярной механики космического полета и их приложения в задачах прогноза движения космических тел и инерциальной навигации в космосе // Сборник материалов: XXVIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. Санкт-Петербург, 2021. С. 292–295.
22. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. II // Космические исследования. 2014. Т. 52. № 4. С. 322–336.
23. *Levi-Civita T.*: Sur la regularization du probleme des trios corps // Acta Math. 1920. V. 42. P. 99–144. https://doi.org/10.1007/BF02404404
24. *Chelnokov Y.N.* Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics // Appl. Math. Mech. (Engl. Ed). 2022. V. 43. № 1. P. 21–80. https://doi.org/10.1007/s10483-021-2797-9