ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2023, № 5, с. 131–137

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ЛАМЕ

Н. Б. Расулова[a],*, Т. М. Махмудзаде[b],**

[a] *Институт математики и механики НАН, Баку, Азербайджан*

[b] *Бакинский государственной университет, Баку, Азербайджан*

** e-mail: rasulova@gmail.com*

*** e-mail: tehminemahmudzade1996@gmail.com*

Поступила в редакцию 10.07.2022 г.
После доработки 15.12.2022 г.
Принята к публикации 06.01.2023 г.

Хорошо известная задача Ламе, поставленная в 1852 году, предусматривает решение статического равновесия параллелепипеда, со свободными боковыми поверхностями, подверженными действию противоположных торцевых усилий. В данной работе эта же задача рассматривается для более усложнённого варианта, т.е. для случая ударных воздействий торцевых сил.

Найдено точное аналитическое решение этой задачи.

Подчеркивая особую трудность решения этой задачи, Ламе, в своей книге "Leçons sur la thorie mathematique de Ielasticite des corps solides" (Paris, 1852) писал: "C'est une sorte d'engine aussi digne d'exercer la sagasite des analystes que le fameux problem des trios corps de la Mécanique celeste", – "Это, своего рода двигатель, столь же достойный тренировать прозорливость аналитиков, как и знаменитая проблема трех тел небесной механики". В то время эта задача была предметом премии Парижской академии наук, предназначавшимся для того, кто решит задачу Ламе. Несмотря на это, до сегодняшнего дня не найдено никакого решения даже статического варианта этой задачи, а в усложненном варианте задача даже не была в повестке.

Ключевые слова: параллелепипед, уравнение Ламе, нестационарные волны, преобразование Лапласа

DOI: 10.31857/S0572329922600542, **EDN:** GABLBR

1. Введение. Особенности распространения волн в прямоугольном волноводе, несмотря на большое число публикаций, исследованы недостаточно. Это связано со значительным (по сравнению со слоем) усложнением картины явления – наличие дополнительной пары граничных плоскостей приводит к дополнительным отражениям продольных и сдвиговых волн, набором которых всегда определяется поле в волноводе. Такое осложнение физики процесса формирования нормальной волны приводит к тому, что строгое решение соответствующей граничной задачи является далеко непростым вопросом.

Существующие публикации в этой области механики, до недавнего времени, в основном были посвящены стационарной динамике прямоугольных брусов [1–6], но существует и асимптотическое решение о нестационарном движении [7], где на основе уравнений упругости анализированы продольные волны нестационарной деформации в полубесконечном прямоугольном стержне. Получены асимптотические решения, справедливые на большом расстоянии от ударяемого конца.

Подход к решению задач динамики прямоугольных брус, в решениях [8–10], в которых найдены точные решения нестационарно – динамических задач о нормальном ударе по торцевой площадке полубесконечных, прямоугольных призм, для разного вида боковых условий, резко изменен; в отличие от всех предыдущих работ, здесь не было использовано Гельмгольцевое разложение трехмерной системы уравнений Ламе, а вместо этого, были введены три новые функции, взамен трех компонентов перемещения. Эти новые функции, впоследствии, окажутся решением неоднородных уравнений Гельмгольца, правая часть которых выражается через функции, составляющие начально-краевые условия задачи. Это, конечно, сильно упрощает процесс интегрирования, и тем самым позволяет построить решение почти для любого распределения внешних ударных сил по торцевой области, и одновременно, для произвольного по времени ударного импульса.

В работе [10], построено аналитическое решение о распространении волн в полубесконечной прямоугольной призме со свободными боковыми поверхностями. Настоящая работа аналогична этой, за исключением того, что длина призмы конечная. Возникновение двух дополнительных преград на пути распространения волн, (в виде торцевых площадок), несомненно ещё больше усугубляет, и без того сложную волновую картину движения.

В рассматриваемом случае ввиду того, что тело имеет конечные размеры, для существования единственного решения, противоположные торцы подвергаются и одинаковым, и противоположным ударным нагрузкам, дабы результирующая внешняя сила была нулевая.

Найдено точное аналитическое решение представленной задачи для случая равномерного распределения ударных нагрузок на области торцевых площадок.

2. Постановка и решение задачи. Прямоугольный упругий брус конечной длины, параллелепипед подвергается действию противоположенных ударных осевых сил, приложенных к торцевым площадкам. Боковые стороны свободны от усилий, что гораздо усложняет процесс построения решений.

Очевидно, рассматриваемая задача требует решения следующей начально-краевой задачи математической физики; – движение описывается системой трехмерных уравнений Ламе, которая в векторной форме имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\,\mathrm{graddiv}\mathbf{U} + \mu\Delta\mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}(u, v, w) \tag{2.1}$$

и оно происходит в области пространства, занятой параллелепипедом:

$-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$, $-l \le z \le l$ при $t > 0$. К этой системе присоединяются следующие начально-краевые условия.

$$\vec{U} = 0; \quad \dot{\mathbf{U}} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{2.2}$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_0 f(t), \quad u = 0, \quad v = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm l \tag{2.3}$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm a, \quad -l \le z \le l$$

$$\sigma_{yx} = \sigma_{yy} = \sigma_{yz} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm b, \quad -l \le z \le l \tag{2.4}$$

где $\mathbf{U}$ – вектор перемещения, $\{\sigma\}$ – тензор напряжения, λ, μ – коэффициенты Ламе, t – время, ρ – плотность материала.

Следуя [8, 9], задача (2.1)–(2.4) сводится к интегрированию более простой, но на этот раз однородной системы:

$$\mu \frac{\partial}{\partial z} H_2^* \psi_2 - (\lambda + 2\mu) H_1^* \phi = 0$$
$$H_2^* \psi_1 = 0$$
$$\Delta H_2^* \psi_2 = 0$$

где H_i^* и Δ трехмерные операторы Гельмгольца и Лапласа, соответственно:

$$H_i^* = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{p^2}{c_i^2}$$
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

а три новые функции φ, ψ_1, ψ_2 определяются преобразованиями Лапласа трех компонентов перемещения по формулам:

$$\overline{u} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z \partial x}$$
$$\overline{v} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z \partial y}$$
$$\overline{w} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2}$$

В дальнейшем для простоты черточки над величинами $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ будут опущены.

Эта система эквивалентна следующей системе:

$$\begin{gathered} \Delta H_1^* \phi = 0 \\ H_2^* \psi_1 = 0 \\ \Delta H_2^* \psi_2 = 0 \end{gathered} \tag{2.5}$$

Вид решений определяется на основе решений аналогичной задачи полубесконечной призмы [10].

Решение можно искать в виде:

$$\varphi = \varphi(z) \tag{2.6}$$

Подставив в первое уравнение (2.5), с учетом соображений о симметрии получим:

$$\varphi = \mathrm{A}\,\mathrm{ch}\frac{p}{c_1} z \tag{2.7}$$

Постоянная A определяется из условий (2.3), после их преобразования по оператору Лапласа:

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \sigma_0 \overline{f(p)}, \quad z = \pm l$$

Отсюда

$$A = \frac{c_1^2 \sigma_0 \overline{f(p)}}{p^2 (\lambda + 2\mu)\,\mathrm{ch}\frac{p}{c_1} l} \tag{2.8}$$

Отметим, что решение (2.7), с учетом (2.8), удовлетворяет всем торцевым условиям (2.3).

Это решение соответствует плоским продольным волнам, одновременно стартующих с торцов, и распространяющихся вдоль оси призмы, в противоположных направлениях.

Несомненно, взаимодействия этих волн со свободными боковыми поверхностями вызывают, в первую очередь, поперечные волновые движения.

Сначала отметим, что все решения, соответствующие этим дифракционным волнам, должны удовлетворять нулевые торцевые условия; следовательно,

$$\begin{gathered} u = 0 \\ v = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm l \\ \sigma_{zz} = 0 \end{gathered} \tag{2.9}$$

Благодаря работе [10], эти волны, отраженные от боковых поверхностей, могут быть найдены как решение третьего уравнения системы (2.5), с учетом условий (2.9). Уместно отметить, что условия (2.9) могут быть автоматически удовлетворены выбором решения в следующем виде:

$$\psi_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{\psi}_{2m}(x, y) \sin\left(\frac{1}{2} + m\right) \cdot \pi z \tag{2.10}$$

Подставив эту функцию в вышеупомянутые уравнения, получим:

$$H_{0m}^* H_{2m}^* \bar{\psi}_{2m} = 0 \tag{2.11}$$

где

$$H_0^* = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\pi^2 \left(\frac{1}{2} + m\right)^2}{l^2}$$

Обозначим $\pi^2 \left(\frac{1}{2} + m\right)^2 = \beta_m^2$

$$H_{im}^* = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left(\frac{\beta_m^2}{l^2} + \frac{p^2}{c_i^2}\right)$$

для определения каждого $\bar{\psi}_{2m}(x, y)$ в отдельности.

Следуя [10], функции $\bar{\psi}_{2m}(x, y)$ будем искать в классе решений $f_1(x) + f_2(y)$. Простейшим решением этого вида будет:

$$\bar{\psi}(x, y) = B_{1m} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p^2}{c_2^2} + \frac{\beta_m^2}{l^2}} x + B_{2m} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p^2}{c_2^2} + \frac{\beta_m^2}{l^2}} y$$

Постоянные B_{1m} и B_{2m} могут быть определены из условия равенства нулю растягивающих напряжений на поверхностях $x = \pm a$ и $y = \pm b$, а именно:

$$\begin{gathered} \sigma_{xx}\big|_{x=\pm a} = \sigma_{xx}(\varphi) + \sigma_{xx}(\psi_2) = 0 \\ \sigma_{yy}\big|_{y=\pm b} = \sigma_{yy}(\varphi) + \sigma_{yy}(\psi_2) = 0 \end{gathered}$$

$$\lambda \frac{\sigma_0 f(p)}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{p}{c_1} z}{\operatorname{ch} \frac{p}{c_1} l} = -2\mu \sum_{m=0}^{\infty} B_{im} \frac{\pi m}{l} \left[\frac{p^2}{c_2^2} + \left(\frac{\beta_m^2}{l^2}\right)\right] \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p^2}{c_2^2} + \frac{\beta_m^2}{l^2}} \cdot a \cdot \cos \frac{\beta_m z}{l} \tag{2.12}$$

$$\lambda\frac{\sigma_0 f(p)}{\lambda+2\mu}\cdot\frac{\operatorname{ch}\frac{p}{c_1}z}{\operatorname{ch}\frac{p}{c_1}l}=-2\mu\sum_{m=0}^{\infty}B_{im}\frac{\pi m}{l}\left[\frac{p^2}{c_2^2}+\left(\frac{\beta_m^2}{l^2}\right)\right]\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p^2}{c_2^2}+\frac{\beta_m^2}{l^2}}\cdot b\cdot\cos\frac{\beta_m z}{l}$$

Разделим левую часть уравнения (2.12) по функциям $\cos\frac{\beta_m z}{l}$, а затем сравнением коэффициентов при одинаковых функциях $\cos\frac{\beta_m z}{l}$ получим:

$$B_{1m}=\frac{2\lambda\cdot\sigma_0 f(p)}{\pi\mu(\lambda+2\mu)m}\cdot\frac{(-1)^m\alpha_1\operatorname{th}\alpha_1 l}{\nu_{1m}^2(p)\cdot\nu_{2m}^2(p)\cdot\operatorname{ch}\nu_{2m}\frac{pa}{c_2}}$$

$$B_{2m}=\frac{2\lambda\cdot\sigma_0 f(p)}{\pi\mu(\lambda+2\mu)m}\cdot\frac{c_1^2c_2^2(-1)^m\alpha_1\operatorname{th}\alpha_1 l}{\nu_{1m}^2(p)\cdot\nu_{2m}^2(p)\cdot\operatorname{ch}\nu_{2m}\frac{pb}{c_2}} \tag{2.13}$$

здесь:

$$\alpha_1=\frac{p}{c_1}\quad \nu_{im}(p)=\sqrt{p^2+\frac{\beta_m^2c_2^2}{l^2}}$$

Итак, решение (2.10), соответствующее первой группе отраженных поперечных волн, полностью определено. Это решение на боковых поверхностях вызывает касательные напряжения σ_{xz} и σ_{yz}, которые должны быть аннулированы дополнительными решениями. Оказывается, как и было отмечено в [10], из всех возможных решений систем уравнения (2.5), только решение вида

$$\bar{\psi}_{2m}^*=\sum_k C_{1mk}\cos\left(\frac{1}{2}+k\right)\frac{\pi x}{a}+C_{2mk}\cos\left(\frac{1}{2}+k\right)\frac{\pi y}{b} \tag{2.14}$$

способно нейтрализовать вышеупомянутые напряжения.

Рассмотрим уравнения $H_{0m}^*H_{2m}^*\bar{\psi}^*=D_m$ или

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\beta_m^2}{l^2}-\frac{p^2}{c_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\beta_m^2}{l^2}\right)\bar{\psi}^{\bullet}_{2m}=D_{1m}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\beta_m^2}{l^2}-\frac{p^2}{c_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\beta_m^2}{l^2}\right)\bar{\psi}^{\bullet}_{2m}=D_{2m} \tag{2.15}$$

где неизвестные постоянные $D_m=D_{1m}+D_{2m}$ подлежат определению. Не вдаваясь в подробности, приведем готовые формулы для этих постоянных, которые определены из условия равенства нулю касательных напряжений σ_{xz} и σ_{yz} на поверхностях $x=\pm a$ и $y=\pm b$:

$$C_{1km}=2D_{1m}\frac{(-1)^k}{\pi\left[\eta_{1k}^2+\frac{\nu_{2m}^2(p)}{c_2^2}\right]\left[\eta_{1k}^2+\frac{\beta_m^2}{l^2}\right]\eta_{1k}}$$

$$C_{2km} = 2D_{2m}\frac{(-1)^k}{\pi\left[\eta_{2k}^2 + \frac{\nu_{2m}^2(p)}{c_2^2}\right]\left[\eta_{2k}^2 + \frac{\beta_m^2}{l^2}\right]\eta_{2k}} \tag{2.16}$$

$$D_{1m} = \frac{2}{\pi}\frac{2\lambda\sigma_0 c_1^2}{(\lambda+2\mu)\mu}\frac{f(p)}{\nu_{1m}^2(p)}\frac{(-1)^m\left(\frac{p^2}{c_2^2} + 2\frac{\beta_m^2}{l^2}\right)\cdot\left(\operatorname{th}\nu_{2m}(p)\frac{a}{c_1}\right)\cdot\operatorname{th}\frac{p}{c_1}l}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left[\left(\eta_{2k}^2 + \frac{\nu_{2m}^2}{c_2^2}\right)\frac{\frac{\beta_m^2}{l^2} - \eta_{2k}^2}{\frac{\beta_m^2}{l_2} + \eta_{2k}^2}\right]^{-1}} \tag{2.17}$$

$$D_{2m} = \frac{2}{\pi}\frac{2\lambda\sigma_0 c_1^2}{\mu(\lambda+2\mu)}\frac{f(p)}{\nu_{1m}^2(p)}\frac{(-1)^m\left(\frac{p^2}{c_2^2} + 2\frac{\beta_m^2}{l^2}\right)\cdot\left(\operatorname{th}\nu_{2m}\frac{b}{c_1}\right)\cdot\operatorname{th}\frac{p}{c_1}l}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left[\left(\eta_{2k}^2 + \frac{\nu_{2m}^2}{c_2^2}\right)\frac{\frac{\beta_m^2}{l^2} - \eta_{2k}^2}{\frac{\beta_m^2}{l_2} + \eta_{2k}^2}\right]^{-1}}$$

$$\eta_{1k} = \frac{\pi}{a}\left(\frac{1}{2} + k\right), \quad \eta_{2k} = \frac{\pi}{b}\left(\frac{1}{2} + k\right), \quad \nu_{im} = \sqrt{p^2 + \frac{\beta_m^2 c_i^2}{l^2}}$$

Заметим, что уравнение $H_{0m}^* H_{1m}^* \psi_{2m} = -D_m$ имеет еще и очевидное решение $\psi_{2m} = -\frac{D_m}{\left(\frac{\beta_m^2}{l^2} + \frac{p^2}{c_2^2}\right)\frac{\beta_m^2}{l^2}}$, которое компенсирует решение (2.14) неоднородного уравнения (2.15), и, одновременно, не вызывает в теле никакого перемещения.

Полученные решения по виду почти идентичны с решениями, приведенными в [10], только с одной разницей, что интегралы по непрерывному параметру $q \in (0, \infty)$, в решениях [10], (представляющих оригиналы преобразований Фурье) заменяются с бесконечной суммой для дискретных значений $q = \frac{\beta_m}{l}$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$) аналогичного параметра. Поэтому методы обращения полученных решений (преобразований Лапласа), изложенных в [10], также идентичны и легко могут быть применены и здесь. Не останавливаясь в подробностях, мы только приведем решение для осевых скоростей ($\dot{W}$) рассматриваемого параллелепипеда:

$$f(p) = H(t)$$

$$\dot{W} = \frac{\lambda\cdot\sigma_0\cdot c_1}{\mu(\lambda+2\mu)}\left\{\left[\int_0^t\sum_m\frac{(-1)^m}{m}F_m(t-\tau)\cdot M\left(\tau, \frac{2nl}{c_1}\right)d\tau\right]\frac{\cos\beta_m z}{l}\right\}$$

где:

$$F_m(\tau) = F_{am}(\tau) + F_{bm}(\tau)$$

$$F_{am}(\tau) = \frac{\alpha_{1m}\left(\cos\dfrac{\gamma_m x}{c_2}\right)\sin\alpha_{1m}t}{\cos\dfrac{\gamma_m a}{c_2}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\sqrt{(\alpha_{1m}^2+\eta_{1k}^2c_2^2)}\eta_{1k}\cdot c_2^2\cdot(\cos\eta_{1k}c_2t)\cos\eta_{1k}x}{a(\gamma_m^2-\eta_{1k}^2\cdot c_2^2)}$$

$$F_{bm}(\tau) = \frac{\alpha_{1m}\left(\cos\dfrac{\gamma_m y}{c_2}\right)\sin\alpha_{1m}t}{\cos\dfrac{\gamma_m b}{c_2}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\sqrt{(\alpha_{1m}^2+\eta_{2k}^2c_2^2)}\eta_{2k}\cdot c_2^2\cdot(\cos\eta_{2k}c_2t)\cos\eta_{2k}x}{b(\gamma_m^2-\eta_{2k}^2\cdot c_2^2)}$$

$$M\left(\tau,\frac{2nl}{c_1}\right) = H(\tau) + 2\sum_{1}^{\infty}(-1)^n H\left(\tau-\frac{2nl}{c_1}\right)$$

$$\alpha_{im} \doteq \frac{c_i\beta_m}{l} \qquad \gamma_m = \sqrt{\alpha_{1m}^2-\alpha_{2m}^2}$$

3. Заключение. Найдено точное аналитическое решение нестационарной задачи о распространении волн в прямоугольной призме короткой длины, подверженной действиям ударных, противоположно-осевых сил, равномерно распределенных на торцевых площадках. Эта задача является динамическим аналогом известной задачи Ламе, которая предусматривает определение решения статического равновесия этого же параллелепипеда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Medick M.A.* Extensional waves in elastic bars of rectangular cross sections // J. Acoust. Soc. Am. 1968. V. 43. № 1. P. 152–161.
https://doi.org/10.1121/1.1910744
2. *Вовк А.Е., Гудков В.В., Левченкова Т.В., Тютекин В.В.* Нормальные волны твердого прямоугольного волновода // Акустический журнал. 1980. Т. 26. В. 3. С. 365–363.
3. *Fraser W.B.* Stress wave propagation in rectangular bars // Int. J. Solids Struct. 1969. V. 5. № 4. P. 379–397.
https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90020-1
4. *Volterra E., Asce M.* Dispersion of longitudinal waves // J. Eng. Mech. 1957. V. 83. № 3. P. 13–22.
https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0000032
5. *Hertelendy P.* An approximate theory governing simmetric motions of elastic rods of rectangular or square cross section // J. Appl. Mech. 1968. V. 35. № 2. P. 333–341.
https://doi.org/10.1115/1.3601200
6. *Tanaka K., Iwahashi Y.* Dispersion relations of elastic wave in bars of rectangular cross sections // Bull. JSME. 1977. V. 20. № 146. P. 922–929.
https://doi.org/10.1299/jsme1958.20.922
7. *Tanaka K., Iwahashi Y.* Longitudinal impact of a semi-infinite rectangular bar // Bull. JSME. 1978. V. 21. № 156. P. 980–985.
https://doi.org/10.1299/jsme1958.21.980
8. *Расулова Н.Б.* Распространение волн в призматическом брусе, подверженном действию осевых сил // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 176–179.
9. *Rassoulova N.B.* On dynamic of bar of rectangular cross section // J. Appl. Mech. 2001. V. 68. № 4. P. 662–666.
https://doi.org/10.1115/1.1352063
10. *Расулова Н.Б., Шамилова Г.Р.* Распространение волн напряжений в прямоугольном брусе // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 4. С. 144–152.